

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

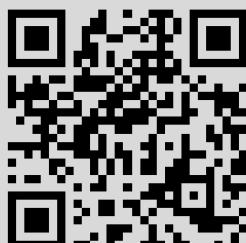
L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, Spectrum and scattering of excitations in the one-dimensional isotropic Heisenberg model, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 109, 134–178

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 195.250.85.92

May 2, 2020, 04:27:36



СПЕКТР И РАССЕЯНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ОДНОМЕРНОМ
ИЗОТРОПНОМ МАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Введение

Одномерный изотропный магнетик Гейзенберга описывает систему N взаимодействующих спинов $\frac{1}{2}$ на одномерной решетке. Пространство состояний \mathcal{H}_N и оператор энергии H_N выглядят следующим образом:

$$\mathcal{H}_N = \prod_{n=1}^{\infty} \otimes \mathcal{V}_n, \quad \mathcal{V}_n \approx \mathbb{C}^2, \quad (1)$$

$$H_N = \frac{\gamma}{4} \sum_{n=1}^N (\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^2 + \sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3 - I_N). \quad (2)$$

Здесь I_N – единичный оператор в пространстве \mathcal{H}_N , а операторы σ_n^a имеют вид

$$\sigma_n^a = I \otimes \dots I \otimes \underbrace{\sigma_n^a}_{n} \otimes I \dots \otimes I, \quad a=1,2,3 \quad (3)$$

и нетривиально действуют только в сомножителе \mathcal{V}_n из произведения (1); σ^a – матрицы Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

а I – единичная матрица в \mathbb{C}^2 . В сумме (2) предполагаются периодические граничные условия

$$\sigma_{N+1}^a = \sigma_1^a, \quad a=1,2,3. \quad (5)$$

В зависимости от знака γ различают ферромагнитный случай $\gamma < 0$ и антиферромагнитный случай $\gamma > 0$. Основной интерес представляет задача о нахождении собственных векторов и собственных значений оператора H_N и исследовании их асимптотического поведения при $N \rightarrow \infty$.

Рассматриваемая модель была введена Гейзенбергом [1] в 1928 году и имеет большую историю. Сначала Бете [2] предложил процедуру

для нахождения собственных векторов и собственных значений, которая теперь называется методом подстановки Бете - Bethe Ansatz. Затем с помощью метода Бете важные результаты получили Хюльтэн [3], где Клуазо и Пирсон [4], Орбах [5], Янг и Янг [6-7], Бакстер [8], Годен [9], Такахashi [10], Овчинников [11], Кулиш и Решетихин [12] и другие.

Однако несмотря на большую историю и обширную литературу, посвященную модели Гейзенберга, ряд общепринятых по ее поводу результатов является неверным. Это в особенности относится к классификации возбуждений в антиферромагнитном случае. Начиная с работы [4] принято считать, что простейшее из таких возбуждений - спиновая волна имеет спин I. Кроме того, в [11] утверждается, что имеется еще целая серия одиноческих возбуждений - связанные состояния спиновых волн, которые являются синглетами - возбуждениями со спином 0. Мы покажем здесь, что в антиферромагнитном случае существует лишь одно возбуждение со спином $\frac{1}{2}$, которое является кинком в следующем смысле: в физических состояниях существует всегда четное число кинков - спиновых волн, так что они всегда имеют целый спин. Однако состояние кинка локализуемо и поэтому можно говорить об их рассеянии.

В связи с этим мы решили заново рассмотреть модель Гейзенберга. Настоящая статья содержит последовательное изложение всех известных результатов с единой точки зрения. Важную методическую роль при этом играет недавно созданный квантовый метод обратной задачи [13-14].

Мы уже рассматривали самый общий анизотропный магнетик Гейзенберга ($X Y Z$ -модель) с помощью квантового метода обратной задачи в [15]. Настоящая статья отличается от этой работы тем, что в более простой ситуации мы получаем более детальные результаты. Наш повышенный интерес к изотропной модели связан также с тем, что она входит как составная часть в иерархию подстановок Бете, применяемых для решения моделей квантовой теории поля с цветовыми степенями свободы (см. [16-18] и [12]). Впервые такая ее роль отчетливо проявилась в работах Годена [19] и Янга [20], посвященных проблеме двухкомпонентного ферми и бозе-газа соответственно и в работе Либа и Ву [21], посвященной модели Хаббарда [22]. В настоящее время становится ясным, что модель Хаббарда, а также ее естественное обобщение на случаи многих цветов и бозе-статистики, является интересной моделью квантовой теории поля. Она вполне интегрируема в пределе $\Delta \rightarrow 0$, где Δ - шаг решетки, и имеет как нерелятивистский, так и релятивистский непре-

рывные пределы. В последнем случае получается модель квантовой теории поля с условием асимптотической свободы. Подробному исследованию релятивистского предела в модели Хаббарда будет посвящена последующая работа.

Скажем теперь несколько слов о содержании настоящей работы. В § I мы напомним основные элементы квантового метода обратной задачи для рассматриваемой модели и приведем алгебраическую форму подстановки Бете. Во втором параграфе мы исследуем спин собственных векторов, получаемых этой подстановкой. В § 3 мы рассмотрим ферромагнитный случай, дадим классификацию возбуждений над основным состоянием и опишем их рассеяние. В четвертом параграфе мы дадим более полную классификацию всех собственных векторов оператора H_N при конечном N и применим ее для построения основного состояния и возбуждений в антиферромагнитном случае. Там мы также обсудим спин спиновой волны. Наконец, в § 5 мы рассмотрим рассеяние спиновых волн.

В процессе работы мы неоднократно консультировались с нашими коллегами А.Г.Изergиным, В.Е.Корепиным, П.П.Кулишом, Н.Ю.Решетихиным и Е.К.Скляниным. Мы хотели бы выразить им свою глубокую благодарность.

§ I. Алгебраическая форма подстановки Бете

Основные составные части квантового метода обратной задачи для рассматриваемой модели были явно введены в работах [23] и [15]. Большую роль в их формулировке, как и в общей формулировке квантового метода обратной задачи, сыграла глубокая работа Бакстера [8]. Так как этот метод в настоящее время описан достаточно подробно (см.[13 – 14]), то мы не будем излагать здесь его еще раз, а сразу приведем нужные нам формулы. Их вывод в более общей ситуации XYZ модели можно найти в работе [15].

Рассмотрим локальную матрицу перехода – операторно-значную матрицу порядка 2×2

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I + \frac{i}{2} \sigma_n^3 & \frac{i}{2} \sigma_n^- \\ \frac{i}{2} \sigma_n^+ & \lambda I - \frac{i}{2} \sigma_n^3 \end{pmatrix}, \quad (I.I)$$

где

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^1 + i\sigma_n^2, \quad \sigma_n^- = \sigma_n^1 - i\sigma_n^2. \quad (I.2)$$

Пространство \mathbb{C}^2 , в котором действует матрица $L_n(\lambda)$, назовем вспомогательным для отличия от квантового пространства \mathcal{H}_N , в котором действуют ее элементы. Матрицу $L_n(\lambda)$ можно также представить в виде

$$L_n(\lambda) = \lambda I \otimes I + \frac{i}{2} \sum_{a=1}^3 \sigma^a \otimes \sigma_n^a, \quad (I.3)$$

где стоящие слева единичная матрица I и матрицы Паули σ^a действуют во вспомогательном пространстве.

Имеет место основное соотношение

$$R(\lambda-\mu)(L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda)) R(\lambda-\mu), \quad (I.4)$$

в котором тензорное произведение берется во вспомогательном пространстве. Соответствующая матрица 4×4 $R(\lambda)$ имеет вид

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda+i} \left(\left(\frac{\lambda}{2} + i \right) I \otimes I + \frac{\lambda}{2} \sum_{a=1}^3 \sigma^a \otimes \sigma^a \right). \quad (I.5)$$

В естественном базисе пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ она выглядит следующим образом

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (I.6)$$

где

$$b(\lambda) = \frac{i}{\lambda+i}, \quad c(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+i}. \quad (I.7)$$

Матрица монодромии $\mathcal{T}_N(\lambda)$ определяется следующим образом

$$\mathcal{T}_N(\lambda) = L_N(\lambda) \dots L_1(\lambda) = \overbrace{\prod_{n=1}^N L_n(\lambda)}. \quad (I.8)$$

Подобно локальной матрице перехода $L_n(\lambda)$ она удовлетворяет соотношению

$$R(\lambda-\mu)(T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)) = (T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda)) R(\lambda-\mu). \quad (I.9)$$

Введем матричные элементы матрицы монодромии как матрицы во вспомогательном пространстве

$$T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (I.10)$$

Операторы $A_N(\lambda)$, $B_N(\lambda)$, $C_N(\lambda)$ и $D_N(\lambda)$ действуют в пространстве \mathcal{H}_N . Положим

$$T_N(\lambda) = A_N(\lambda) + D_N(\lambda). \quad (I.11)$$

Из (I.9), в частности, получаем коммутационные соотношения

$$[T_N(\lambda), T_N(\mu)] = 0, \quad (I.12)$$

$$[B_N(\lambda), B_N(\mu)] = 0, \quad (I.13)$$

$$A_N(\lambda) B_N(\mu) = \frac{1}{c(\mu-\lambda)} B_N(\mu) A_N(\lambda) - \frac{b(\mu-\lambda)}{c(\mu-\lambda)} B_N(\lambda) A_N(\mu), \quad (I.14)$$

$$D_N(\lambda) B_N(\mu) = \frac{1}{c(\lambda-\mu)} B_N(\mu) D_N(\lambda) - \frac{b(\lambda-\mu)}{c(\lambda-\mu)} B_N(\lambda) D_N(\mu). \quad (I.15)$$

Среди коммутирующего семейства операторов $T_N(\lambda)$ содержатся оператор импульса P_N и оператор энергии H_N

$$P_N = \frac{1}{i} \log i^{-N} T_N\left(\frac{i}{2}\right), \quad (I.16)$$

$$H_N = \frac{i\Im}{2} \frac{d}{d\lambda} \log T_N(\lambda) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}} - \frac{N\Im}{2} I_N. \quad (I.17)$$

Поясним сначала формулу (I.16). Положив в (I.3) $\lambda = \frac{i}{2}$ и используя формулу (I.8), получаем, что оператор $i^{-N} T_N\left(\frac{i}{2}\right)$ унитарен и совпадает с оператором циклического сдвига в пространстве

$$e^{-iP_N} \sigma_n^a e^{iP_N} = \sigma_{n+1}^a, \quad a=1,2,3; \quad n=1, \dots, N. \quad (I.18)$$

Его собственные значения имеют вид e^{ip_j} , $0 \leq p_j < 2\pi$, $j=1, \dots, N$, где p_j естественно называть импульсом соответствующего состояния. Формула (I.17) получается при разложении произведения (I.8) в окрестности точки $\lambda = \frac{i}{2}$ с учетом (I.18).

Рассмотрим векторы

$$\omega_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_n \in \mathcal{V}_n, \quad n=1, \dots, N;$$

$$\Omega_N = \prod_{n=1}^N \otimes \omega_n, \quad \Omega_N \in \mathcal{H}_N.$$

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} A_N(\lambda) \Omega_N &= (\lambda + \frac{i}{2})^N \Omega_N, \\ C_N(\lambda) \Omega_N &= 0. \\ D_N(\lambda) \Omega_N &= (\lambda - \frac{i}{2})^N \Omega_N, \end{aligned} \quad (I.19)$$

Из формул (I.13)–(I.15) и (I.19) следует, что вектор

$$\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = B_N(\lambda_1) \dots B_N(\lambda_\ell) \Omega_N \quad (I.20)$$

является собственным вектором семейства операторов $T_N(\lambda)$, если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}} \right) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\ell} \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}, \quad j=1, \dots, \ell. \quad (I.21)$$

Соответствующее собственное значение $\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ имеет вид

$$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_\ell) =$$

$$= (\lambda + \frac{i}{2})^N \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda - \lambda_j - i}{\lambda - \lambda_j} + (\lambda - \frac{i}{2})^N \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda - \lambda_j + i}{\lambda - \lambda_j}. \quad (I.22)$$

Отметим, что вследствие коммутативности операторов $B_N(\lambda)$ как вектор $\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, так и собственное значение $\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ являются симметрическими функциями $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$.

Из сравнения формул (I.16), (I.17) с (I.22) видим, что собственные значения операторов P_N и H_N имеют вид

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{\ell} \log \frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \pmod{2\pi} \quad (I.23)$$

$$h(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = -\frac{\Im}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}}. \quad (I.24)$$

Удобно наряду с λ также ввести и переменную $p(\lambda)$

$$e^{ip} = \frac{\lambda + \frac{i}{2}}{\lambda - \frac{i}{2}}, \quad p(\lambda) = -2 \operatorname{arctg} 2\lambda + \pi \pmod{2\pi}. \quad (I.25)$$

В переменных p_j импульс p и энергия h приобретают вид

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \pmod{2\pi}, \quad (I.26)$$

$$h(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = -\Im \sum_{j=1}^{\ell} (1 - \cos p_j). \quad (I.27)$$

Приведенные формулы показывают, что вектор Ω_N играет роль вакуума, а оператор $B_N(\lambda)$ имеет смысл оператора рождения частиц с импульсом $p(\lambda)$ и энергией

$$h(\lambda) = \frac{\Im}{2} \frac{dp(\lambda)}{d\lambda} = -\Im(1 - \cos p(\lambda)). \quad (I.28)$$

Собственные векторы вида (I.20) в дальнейшем будем называть бетеевскими векторами.

Мы еще не обсудили вопрос об условиях, гарантирующих, что векторы такого вида не исчезают. Ниже будут приведены соображения по этому поводу. Мы покажем, что необходимым условием для неисчезнования бетеевского вектора является неравенство $\ell \leq \frac{N}{2}$.

Нормировку вектора (I.20) можно сосчитать на основании коммутационного соотношения

$$[C_N(\lambda), B_N(\mu)] = \frac{b(\lambda-\mu)}{c(\lambda-\mu)} (A_N(\mu)D_N(\lambda) - A_N(\lambda)D_N(\mu)), \quad (I.29)$$

которое следует из (I.9) и соотношений (I.19). Однако соответствующая комбинаторная задача еще не сделана.

При помощи (I.29) можно доказать и более простое утверждение о том, что бетевские векторы с различными наборами $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$) ортогональны. Было бы также хорошо показать, что бетевский вектор исчезает, если среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ есть совпадающие. В координатной форме подстановки Бете этот факт хорошо известен и ниже мы им воспользуемся. Вопрос о нормировке бетевских векторов также обсуждается в работе Годена [9] и в недавней работе By, Годена и Маккоя [24].

§ 2. Спин бетевских векторов

В число наблюдаемых величин нашей системы, помимо P и H входит и вектор спина

$$S_a = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Здесь и далее мы опускаем индекс N у введенных объектов в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению. Видно, что операторы P и H коммутируют с S_a . Другими словами, в пространстве \mathcal{H}_N действует представление группы $SU(2)$ и соответствующие собственные векторы классифицируются по неприводимым представлениям этой группы. Мы покажем здесь, что бетевские векторы являются старшими векторами по отношению к этому действию, то есть выполняется соотношение

$$S_+ \Psi = 0, \quad (2.2)$$

где мы используем обычные обозначения

$$S_+ = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^+, \quad S_- = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^-. \quad (2.3)$$

Из (2.2) следует, что в изотропном случае подстановка Бете оп-

ределяет не все собственные векторы оператора энергии. Наряду с бетевским вектором Ψ собственными являются векторы вида $S_-^m \Psi$, где $1 \leq m \leq 2L$ и L - спин представления, которому принадлежит Ψ .

Кроме того, имеет место равенство

$$S_3 \Psi = \left(\frac{N}{2} - \ell \right) \Psi, \quad (2.4)$$

которое мы выведем ниже вместе с (2.2). Из формулы для оператора квадрата спина S^2 с собственными значениями $L(L+1)$, $L \geq 0$

$$S^2 = \sum_{a=1}^3 S_a^2 = S_- S_+ + S_3 (S_3 + 1) \quad (2.5)$$

следует, что для бетевских векторов

$$L = \frac{N}{2} - \ell. \quad (2.6)$$

Из (2.6) вытекает важное неравенство

$$\ell \leq \frac{N}{2}. \quad (2.7)$$

которое уже упоминалось в § I. Было бы интересно показать, что если $\ell > \frac{N}{2}$, то система уравнений (I.21) не имеет решений в конечных $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$.

Перейдем теперь к доказательству формул (2.2) и (2.4). Для этого получим перестановочные соотношения между операторами S_a и $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda), D(\lambda)$. Следуя идеологии квантового метода обратной задачи, начнем с локальных соотношений и вычислим коммутатор S_a с матричными элементами матрицы $L_n(\lambda)$. Имеем

$$[L_n(\lambda), S_a] = \frac{1}{2} [L_n(\lambda), \sigma_n^a]. \quad (2.8)$$

Здесь $[,]$ означает коммутатор в пространстве \mathcal{H}_N и мы использовали тот факт, что в матрицу $L_n(\lambda)$ из всех спиновых опе-

раторов входят только σ_n^a . Далее, из представления (I.3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [L_n(\lambda), \sigma_n^a] &= \frac{i}{4} \sum_{b=1}^3 [\sigma^b \otimes \sigma_n^b, \sigma_n^a] = \\ &= -\frac{i}{4} \sum_{b,c=1}^3 \epsilon^{bac} \sigma^b \otimes \sigma_n^c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Возникший множитель $\epsilon^{bac} \sigma^b$ перепишем в виде

$$\epsilon^{bac} \sigma^b = i [\sigma^c, \sigma^a]. \quad (2.10)$$

В результате мы получаем формулу

$$[L_n(\lambda), S_a]_{kb} = -\frac{i}{2} [L_n(\lambda), \sigma^a]_{bcn}, \quad (2.11)$$

где подчеркнуто, что коммутатор в левой части берется в квантовом пространстве, а справа – во вспомогательном пространстве. Отметим, что мы смогли перевести квантовый коммутатор (2.8) в числовой, существенно используя изотропность рассматриваемой модели. Обратимся теперь к матрице монодромии. Используя свойство коммутатора как дифференцирования, получаем

$$\begin{aligned} [T(\lambda), S_a]_{kb} &= \sum_{n=1}^N L_n(\lambda) \dots [L_n(\lambda), S_a]_{kb} \dots L_1(\lambda) = \\ &= -\frac{i}{2} \sum L_N(\lambda) \dots [L_n(\lambda), \sigma^a]_{bcn} \dots L_1(\lambda) = \\ &= -\frac{i}{2} [T(\lambda), \sigma^a], \end{aligned} \quad (2.12)$$

то есть формулу, совершенно аналогичную (2.11). Более наглядно формулу (2.12) можно переписать в виде

$$[T_{\alpha\beta}(\lambda), S_a] = \frac{i}{2} (\sigma_{\alpha\gamma}^a T_{\gamma\beta}(\lambda) - T_{\alpha\gamma}(\lambda) \sigma_{\gamma\beta}^a), \quad (2.13)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$ и $\sigma_{\alpha\beta}^{\alpha}$ - матричные элементы матриц Паули. В частности формулы (2.13) содержат соотношения

$$[S_a, T(\lambda)] = 0, \quad a = 1, 2, 3; \quad (2.14)$$

$$[S_3, B(\lambda)] = -B(\lambda), \quad (2.15)$$

$$[S_+, B(\lambda)] = A(\lambda) - D(\lambda). \quad (2.16)$$

Теперь мы в состоянии доказать формулы (2.2) и (2.4). Заметим сначала, что по построению вектор Ω является собственным и для операторов S_+ , S_3 , причем

$$S_+ \Omega = 0, \quad S_3 \Omega = \frac{N}{2} \Omega. \quad (2.17)$$

Соотношение (2.4) является немедленным следствием (2.15) и второго равенства в (2.17). Переходим теперь к (2.2). Имеем, пронося

S_+ через все операторы $B(\lambda_j)$ к вектору Ω

$$S_+ \Psi = \sum_{j=1}^l B(\lambda_1) \dots B(\lambda_{j-1}) (A(\lambda_j) - D(\lambda_j)) B(\lambda_{j+1}) \dots B(\lambda_l) \Omega. \quad (2.18)$$

Используя перестановочные соотношения (I.14) и (I.15), пронесем операторы $A(\lambda_j)$ и $D(\lambda_j)$ через $B(\lambda_k)$ к вектору Ω . Мы получим следующую сумму

$$S_+ \Psi = \sum_{j=1}^l M_j(\lambda_1, \dots, \lambda_l) B(\lambda_1) \dots B(\lambda_{j-1}) B(\lambda_{j+1}) \dots B(\lambda_l) \Omega. \quad (2.19)$$

Для нахождения коэффициентов $M_j(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ воспользуемся приемом, применяемым при алгебраическом выводе уравнений типа (I.21) (см. [I3-15]). Заметим, что для получения $M_1(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ нужно пронести $A(\lambda_1) - D(\lambda_1)$ через цепочку $B(\lambda_2) \dots B(\lambda_l)$ к вектору Ω , используя только первые слагаемые в правых частях соотношений (I.14) и (I.15). Поэтому

$$M_1(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = (\lambda_1 + \frac{i}{2})^N \prod_{j=2}^l \frac{\lambda_1 - \lambda_j - i}{\lambda_1 - \lambda_j} - \quad (2.20)$$

$$-(\lambda_1 - \frac{i}{2})^N \prod_{j=2}^l \frac{\lambda_1 - \lambda_j + i}{\lambda_1 - \lambda_j}.$$

Остальные коэффициенты $M_j(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ получаются из $M_i(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, соответствующей перестановкой чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ и имеют вид

$$M_j(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = (\lambda_j + \frac{i}{2})^N \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad (2.21)$$

$$-(\lambda_j - \frac{i}{2})^N \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Заметим теперь, что система уравнений (I.21) в точности означает, что $M_j(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = 0$; $j = 1, \dots, l$. Таким образом мы доказали формулу (2.2).

В заключении этого параграфа заметим, что понижающий оператор S_- участвует в асимптотике оператора $B(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Действительно, при $\lambda \rightarrow \infty$

$$T(\lambda) = \lambda^N \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} + \lambda^{N-1} \sum_{n=1}^N \left(L_n(\lambda) - \lambda \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \end{pmatrix} \right), \quad (2.22)$$

откуда получаем

$$B(\lambda) \sim \frac{i\lambda^{N-1}}{2} \sum_{n=1}^N S_n^- = i\lambda^{N-1} S_-, \quad (2.23)$$

Таким образом вектор вида

$$S_-^m \Psi = S_-^m B(\lambda_1) \dots B(\lambda_l) \Omega, \quad (2.24)$$

удовлетворяющий условиям

$$S_3 S_-^m \Psi = \left(\frac{N}{2} - l - m \right) S_-^m \Psi \quad (2.25)$$

$$S^2 S_-^m \Psi = \left(\frac{N}{2} - l\right) \left(\frac{N}{2} - l + 1\right) S_-^m \Psi \quad (2.26)$$

можно интерпретировать как бетеевский вектор, для которого \$m\$ значений \$\lambda\$ в цепочке \$\lambda_1, \dots, \lambda_{l+m}\$ равны бесконечности. Заметим, что система уравнений (1.21) на формальном уровне позволяет к любому решению с конечными \$\lambda\$ добавлять и значения \$\lambda = \infty\$. Отметим, что в переменной \$r\$ им отвечают значения \$r \equiv 0 \pmod{2\pi}\$.

Формулы (2.2) и (2.4), по существу, содержатся в работе Овчинникова [II]. Их вывод, использующий явный координатный вид подстановки Бете, приведен Годеном в [9].

§ 3. Основное состояние и возбуждения. Случай \$J < 0\$

При \$J < 0\$ оператор энергии \$H\$ положительно определен. Действительно, из легко проверяемого соотношения

$$\left(I \otimes I - \sum_{a=1}^3 \sigma^a \otimes \sigma^a\right)^2 = 4 \left(I \otimes I - \sum_{a=1}^3 \sigma^a \otimes \sigma^a\right) \quad (3.1)$$

следует, что \$H\$ можно представить в виде

$$H = -J \sum_{n=1}^N \left(\sigma_n^1 \otimes \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2 \otimes \sigma_{n+1}^2 + \sigma_n^3 \otimes \sigma_{n+1}^3 - I_N \right)^2. \quad (3.2)$$

Вектор \$\Omega\$ аннулируется оператором \$H\$

$$H\Omega = 0 \quad (3.3)$$

и может поэтому считаться основным состоянием – ферромагнитным вакуумом. Спин этого состояния максимальен

$$L_\Omega = \frac{N}{2}. \quad (3.4)$$

Наряду с ним мы имеем еще \$N\$ собственных векторов

$$\Omega_\ell = S_-^\ell \Omega, \quad \ell = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

аннулирующих \$H\$. Мы убедимся, что остальные собственные векторы оператора \$H\$ имеют положительные собственные значения.

Для "одночастичного" бетеевского вектора

$$\Psi(\lambda) = B(\lambda) \Omega \quad (3.6)$$

уравнение (I.2I) дает следующее соотношение на допустимые значения λ

$$\left(\frac{\lambda - \frac{i}{2}}{\lambda + \frac{i}{2}} \right)^N = 1, \quad e^{ipN} = 1. \quad (3.7)$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ допустимые p заполняют весь интервал $[0, 2\pi]$; соответствующие λ пробегают всю вещественную ось. Возбуждения этого типа принято называть магнами.

Для "двухчастичного" бетевского вектора

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2) = B(\lambda_1) B(\lambda_2) \Omega \quad (3.8)$$

система уравнений (I.2I) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} \right)^N &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i}, \\ \left(\frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} \right)^N &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - i}{\lambda_2 - \lambda_1 + i}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ его вещественные решения независимо пробегают всю вещественную ось. Действительно, извлекая из уравнений (3.9) корень N -ой степени получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} &= \zeta_1 e^{\frac{i}{N} \varphi(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ \frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} &= \zeta_2 e^{-\frac{i}{N} \varphi(\lambda_1 - \lambda_2)}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где ζ_1 и ζ_2 – два произвольных корня N -ой степени из I, а $\varphi(\lambda)$ – главное значение аргумента функции $\frac{\lambda-i}{\lambda+i}$, $0 < \varphi(\lambda) < 2\pi$. В пределе при $N \rightarrow \infty$ аргументы ζ_1 и ζ_2 независимо пробегают весь интервал $[0, 2\pi)$, а $\exp\left\{\frac{i}{N}\varphi\right\}$ стремится к I, так что уравнения (3.10) расцепляются и решаются три-виально. Соответствующий бетевский вектор описывает состояние рассеяния двух магнонов.

Однако уравнения (3.9) имеют также и комплексные решения. Положим

$$\lambda_1 = x_1 + iy_1, \quad \lambda_2 = x_2 + iy_2. \quad (3.11)$$

Модуль первого уравнения (3.9) дает соотношение

$$\left(\frac{x_1^2 + (y_1 - \frac{1}{2})^2}{x_1^2 + (y_1 + \frac{1}{2})^2} \right)^N = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2 - 1)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2 + 1)^2}. \quad (3.12)$$

Считая $y_1 > 0$ получаем, что левая часть (3.12) экспоненциально убывает при $N \rightarrow \infty$. Таким образом с экспоненциальной точностью выполняются соотношения

$$x_1 = x_2, \quad y_1 - y_2 = 1. \quad (3.13)$$

Рассматривая модуль второго уравнения (3.9), видим, что $y_2 < 0$, так что наше предположение о положительности y_1 не умаляет общности. Далее, перемножая уравнения (3.9), получаем

$$\left(\frac{x_1 + i(y_1 - \frac{1}{2})}{x_1 + i(y_1 + \frac{1}{2})} \cdot \frac{x_2 + i(y_2 - \frac{1}{2})}{x_2 + i(y_2 + \frac{1}{2})} \right)^N = 1. \quad (3.14)$$

Подставляя сюда (3.13), приходим к соотношению

$$\left(\frac{x_1 + i(y_1 - \frac{3}{2})}{x_1 + i(y_1 + \frac{1}{2})} \right)^N = 1, \quad (3.15)$$

откуда заключаем, что $y_1 = \frac{1}{2}$.

Таким образом асимптотически при $N \rightarrow \infty$ решение (3.11) характеризуется одним вещественным числом x и имеет вид

$$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}, \quad \lambda_2 = x - \frac{i}{2}, \quad (3.16)$$

где x параметризует полный импульс состояния

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = p(\lambda_1) + p(\lambda_2) = \frac{1}{i} \log \frac{x+i}{x-i} = \\ = p\left(\frac{x}{2}\right) = p\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{4}\right). \quad (3.17)$$

Для соответствующей энергии получаем

$$h(\lambda_1, \lambda_2) = h(\lambda_1) + h(\lambda_2) = \\ = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{dp(\lambda_1)}{d\lambda_1} + \frac{dp(\lambda_2)}{d\lambda_2} \right) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \right) (p(\lambda_1) + p(\lambda_2)) = \\ = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \right) p\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{4}\right) = \frac{\gamma}{4} \left. \frac{dp}{d\lambda} \right|_{\lambda=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{4}}, \quad (3.18)$$

или

$$h(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{\gamma}{2} (1 - \cos p(\lambda_1, \lambda_2)). \quad (3.19)$$

В приведенном выводе для сокращения выкладок мы допустим известную вольность и обращались с λ_1 и λ_2 как с независимыми переменными. Энергия $h(\lambda_1, \lambda_2)$ построенного состояния положительна и меньше, чем энергия двух магнонов с импульсами p_1 и p_2 , связанными соотношением $p_1 + p_2 \equiv p(\lambda_1, \lambda_2) \pmod{2\pi}$. Поэтому это состояние естественно называть связанным состоянием двух магнонов.

Бетеевский вектор

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_\ell) \Omega \quad (3.20)$$

при произвольном ℓ исследуется аналогично. Вещественным λ соответствует состояние ℓ независимых магнонов. Комплексные λ собираются в "струны" длины $2M+1$ — наборы $2M+1$ чисел вида

$$\lambda_m = x + im, \quad m = -M, -M+1, \dots, M-1, M; \quad (3.21)$$

где M — целое или полуцелое положительное число. Сами магноны можно рассматривать как струны длины l .

Доказательство того, что при $N \rightarrow \infty$ комплексные λ имеют вид (3.21), вполне аналогично рассмотренному выше случаю струны длины 2. Именно, наряду с числом $\lambda = x + iy$ с $y > 0$ в реше-

ние $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ системы (I.21) входит и $\lambda = x + i(y-1)$ (ср. с формулой (3.13)). Далее, вещественность полного импульса (ср. с (3.15)) показывает, что такие λ группируются в цепочки, симметричные относительно вещественной оси — струны вида (3.21).

Итак, в общего вида бетевском векторе (3.20) ℓ чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ объединяются в струны различной длины. Обозначим через v_M число струн длины $2M+1$, $M=0, \frac{1}{2}, \dots$ и через $\lambda_{j,M}$, $j=1, \dots, v_M$ — вещественные части параметров λ , входящих в струну с номером j . Полное число струн обозначим через q . Имеем

$$q = \sum_M v_M, \quad \ell = \sum (2M+1)v_M. \quad (3.22)$$

Набор целых чисел $(\ell, q, \{v_M\})$, связанных соотношениями (3.22), характеризует бетевский вектор (3.20) с точностью до задания q чисел $\lambda_{j,M}$. Будем называть такой набор конфигурацией. Энергия и импульс бетевского вектора, соответствующего данной конфигурации, с экспоненциальной точностью при $N \rightarrow \infty$ складывается из q слагаемых, представляющих собой энергию и импульс отдельных струн. Энергию и импульс струны длины $2M+1$ мы вычислим немного позднее.

Для параметров $\lambda_{j,M}$ заданной конфигурации имеет место система уравнений, которая получается из (I.21) следующим образом. Для выделенной струны длины $2M+1$ перемножим уравнения (I.21) для входящих в нее параметров λ_j . В правой части перемножим сомножители $\frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}$ по k в соответствии с разбиением в данной конфигурации переменных λ на струны. Для записи возникающих уравнений удобно ввести обозначение

$$V_o(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}. \quad (3.23)$$

Имеем равенства

$$\prod_{m=-M}^M V_o(2(\lambda + im)) = V_o\left(\frac{\lambda}{M+\frac{1}{2}}\right), \quad (3.24)$$

$$\prod_{m=-M}^M V_o(\lambda + im) = V_o\left(\frac{\lambda}{M}\right) V_o\left(\frac{\lambda}{M+1}\right) = V_M(\lambda), \quad (3.25)$$

$$\prod_{m_1=-M_1}^{M_1} \prod_{m_2=-M_2}^{M_2} V_o(\lambda + i(m_1+m_2)) = \prod_{L=|M_1-M_2|}^{M_1+M_2} V_L(\lambda) = V_{M_1, M_2}(\lambda). \quad (3.26)$$

Искомая система уравнений имеет вид

$$\prod_{j=1}^N \left(\frac{\lambda_j, M_j}{M+1/2} \right) = \prod_{M_2} \prod_{k=1}^{M_2} V_{M_1, M_2}(\lambda_{j, M_j} - \lambda_{k, M_2}). \quad (3.27)$$

Эти уравнения ввели и использовали Такахаши [10] и Годен [9]. Их отличительной особенностью является то, что в них участвуют только вещественные параметры $\lambda_{j, M}$. Неиспользованные уравнения из системы (I.21) для комплексных λ_j выполняются с экспоненциальной точностью при $N \rightarrow \infty$. Здесь мы лишь наметили доказательство этого утверждения. Подробное доказательство можно найти в работе [9].

Подсчитаем импульс и энергию отдельной струны длины $2M+1$. Для этого воспользуемся формулой (3.24), из которой следует, что

$$\begin{aligned} P(\lambda_{-M}, \dots, \lambda_M) &= \frac{1}{i} \log \frac{x + i(M + \frac{1}{2})}{x - i(M + \frac{1}{2})} = \\ &= P\left(\frac{x}{2M+1}\right) = -2 \operatorname{arctg} \frac{x}{M+\frac{1}{2}} + \pi \pmod{2\pi} \end{aligned} \quad (3.28)$$

и

$$h(\lambda_{-M}, \dots, \lambda_M) = -J \frac{M + \frac{1}{2}}{x^2 + (M + \frac{1}{2})^2} = -\frac{J}{2M+1}(1 - \cos P(\lambda_{-M}, \dots, \lambda_M)). \quad (3.29)$$

Таким образом при $N \rightarrow \infty$ бетеевские векторы приобретают интерпретацию в терминах многочастичных состояний рассеяния магнитонов и их связанных состояний – струн длины больше 1. Одночастичное состояние Ψ_M характеризуется импульсом P и энергией

$$h_M(P) = -\frac{J}{2M+1}(1 - \cos P), \quad M = 0, \frac{1}{2}, \dots. \quad (3.30)$$

С ростом N эти состояния становятся все более вырожденными;

степень их вырождения равна $N - 4M - 1$. Это вырождение можно снять, если в пределе при $N \rightarrow \infty$ рассматривать состояния, принадлежащие неполному тензорному произведению в смысле фон Неймана [25] пространств \mathcal{H}_n , примыкающему к состоянию Ω . Это предельное пространство \mathcal{H}_F , в свою очередь, изоморфно неполному тензорному произведению пространств Фока для бесконечно-го числа возбуждений Ψ_M . Из всего действия группы $SU(2)$ в пространстве \mathcal{H}_N в пространстве \mathcal{H}_F выживает только действие оператора $S_3 - \frac{N}{2} I_N$.

Эта предельная картина естественно описывается в формализме квантового метода обратной задачи, если мы будем рассматривать предел матрицы монодромии $\mathcal{T}_N(\lambda)$ при $N \rightarrow \infty$ регуляризованный по отношению к состоянию Ω . Соответствующая процедура, аналогичная приведенной в [13], [26] для случая бозонов с δ -образным взаимодействием (квантовое нелинейное уравнение Шредингера), была явно проведена Кулишом и Скляниным в [23]. Для этого естественно перенумеровать узлы решетки, считая, что n меняется симметрично относительно 0; например, при нечетном N , $-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$. В пространстве \mathcal{H}_F существует предел

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} & \left(\begin{array}{cc} \lambda + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{array} \right)^{-\frac{N-1}{2}} \mathcal{T}_N(\lambda) \left(\begin{array}{cc} \lambda + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{array} \right)^{-\frac{N-1}{2}} = \\ & = \left(\begin{array}{cc} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{array} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Для предельных операторов имеют место соотношения

$$[B(\lambda), B(\mu)] = 0, \quad A(\lambda)\Omega = \Omega, \quad (3.32)$$

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{C(\mu-\lambda)} B(\mu)A(\lambda).$$

Соотношения (3.32) можно положить в основу определения описанного выше спектра возбуждений подобно тому, как это было сделано в работе [27].

В формуле (3.31) существует диагональная матрица, которая

получается из оператора $L_n(\lambda)$ при формальной замене

$$\sigma_n^1 = 0, \quad \sigma_n^2 = 0, \quad \sigma_n^3 = I. \quad (3.33)$$

Эта замена символизирует граничные условия, накладываемые на спиновые операторы в пространстве состояний \mathcal{H}_F

$$\sigma_n^1 \rightarrow 0, \quad \sigma_n^2 \rightarrow 0, \quad \sigma_n^3 \rightarrow I \text{ при } |n| \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Пространство состояний \mathcal{H}_F в координатной реализации представляет собой замыкание линейной оболочки векторов вида

$$\sum_{m_1 \leq m} \dots \sum_{m_k \leq m} f_{n_1, \dots, n_k} \sigma_{n_1}^- \dots \sigma_{n_k}^- \Omega, \quad (3.35)$$

где $k, m_1, \dots, m_k < \infty$. Оператор σ_n^+ действует в этом пространстве и аннулируется на векторе вида (3.35) при $|n| \rightarrow \infty$. На этих же векторах оператор σ_n^3 обращается в единичный в пределе больших $|n|$. Что же касается оператора σ_n^- , то при $|n| \rightarrow \infty$ он выводит из пространства \mathcal{H}_F и исчезает в слабом смысле. Строгое исследование оператора H в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_F дано в серии работ Томаса и Баббита [28–30]. В работах [28–29] дано доказательство теоремы разложения по собственным векторам оператора H в пространстве \mathcal{H}_F , причем показано, что пределы бетевских векторов при $N \rightarrow \infty$ образуют полную систему. В работе [30] для этих состояний построена теория рассеяния и вычислены собственные значения S -матрицы. В частности, в [30] показано, что при рассеянии сохраняются конфигурации и весь эффект рассеяния сводится к умножению на фазовый множитель.

В рамках квантового метода обратной задачи вычисление S -матрицы выглядит особенно просто. По аналогии с рассмотренным в [13] случаем квантового нелинейного уравнения Шредингера, введем операторы Замолодчикова

$$Z_M(\lambda) = \prod_{m=-M}^M B(\lambda + im) A^{-1}(\lambda). \quad (3.36)$$

Как следует из (3.32), эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$Z_M(\lambda) Z_M(\mu) = Z_M(\mu) Z_M(\lambda) S_{MM'}(\mu - \lambda), \quad (3.37)$$

где

$$S_{M,M'}(\lambda) = V_{M,M'}(\lambda) \quad (3.38)$$

(см.(3.26)).

Для данной конфигурации in и out - состояния даются общей формулой (см.[31])

$$\prod_M \prod_{j=1}^{v_M} \sum_M (\lambda_{j,M}) \Omega , \quad (3.39)$$

где для in - состояния все параметры $\lambda_{j,M}$ упорядочены справа налево в порядке возрастания, а для out - состояния - в порядке убывания. Процесс многочастичного рассеяния сводится к последовательности двухчастичных и полный фазовый множитель является произведением $\frac{q(q-1)}{2}$ двухчастичных множителей

$S_{M,M'}(i\lambda_{j,M} - \lambda'_{j',M'})$ Структура полюсов собственных значений S -матрицы согласована с интерпретацией струн длины $2M+1$, $M > 0$, как связанных состояний $2M+1$ элементарных магнитов.

§ 4. Основное состояние и возбуждения. Случай $J>0$.

При $J>0$ оператор энергии отрицателен и основным состоянием магнитным вакуумом является собственный вектор с максимальным по модулю собственным значением. Из картины возбуждений, описанной в § 3, ясно, что при данном N такой вектор соответствует максимально возможному числу струн длины I $\ell = [\frac{N}{2}]$. В этом параграфе мы будем считать N четным; в этом случае основное состояние невырожденно, его спин равен нулю и спин всех состояний целый. Для характеристики возбуждений над этим основным состоянием нам следует более подробно исследовать систему уравнений (3.27). Поэтому в начале этого параграфа мы рассмотрим вопрос о параметризации всех ее решений при большом, но конечном N . Для этого, следя Бете и всем последующим авторам, мы перейдем в ней к логарифмам. Отметим, что в (3.27) входят только множители вида

$$V_o(\lambda) = \frac{\lambda - ia}{\lambda + ia}, \quad (4.1)$$

где λ и a вещественны. Определим ветвь $\log V_o(\lambda)$, проведя разрезы на комплексной плоскости λ вдоль мнимой оси от i до

$i\infty$ и от $-i\infty$ до $-i$. В этом случае

$$\frac{1}{i} \log V_o(\lambda) = 2 \operatorname{arctg} \lambda + \pi, \quad (4.2)$$

где $\operatorname{arctg} \lambda$ - главная ветвь арктангенса, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \lambda < \frac{\pi}{2}$ при вещественных λ .

Логарифмируя уравнения (3.27), приходим к системе уравнений

$$2N \operatorname{arctg} \frac{\lambda_{j,M_1}}{M_1 + \frac{1}{2}} = 2\pi Q_{j,M_1} - \sum_{M_2} \sum_{k=1}^{v_{M_2}} \Phi_{M_1, M_2} (\lambda_{j,M_1} - \lambda_{k,M_2}), \quad (4.3)$$

где

$$\Phi_{M_1, M_2} (\lambda) = 2 \sum_{L=|M_1-M_2|}^{M_1+M_2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\lambda}{L} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{L+1} \right) \quad (4.4)$$

и штрих над знаком суммы означает, что в случае $M_1 = M_2$ пропущено слагаемое $\operatorname{arctg} \frac{\lambda}{L}$ с $L = 0$. Числа $Q_{j,M}$ складываются из некоторого целого числа, характеризующего полное приращение аргумента правой части (3.27), из числа $-\frac{N}{2}$, возникшего из замены $\frac{1}{i} \log V_o(\lambda)$ на $2 \operatorname{arctg} \lambda$, и из аналогичного слагаемого в правой части (4.3).

Целые или полуцелые числа $Q_{j,M}$ параметризуют возможные решения системы уравнений (4.3). При исследовании этой системы мы будем предполагать, что среди чисел $Q_{j,M}$ при заданном M нет совпадающих. По-видимому, можно доказать, что совпадающим $Q_{j,M}$ отвечают совпадающие вещественные решения $\lambda_{j,M}$. Согласно замечанию в конце § I, это приводит к исчезновению соответствующего бетевского вектора. Заметим также, что из системы (4.3) очевидным образом следует, что если для заданного набора различных при каждом M чисел $Q_{j,M}$ существует решение $\{\lambda_{j,M}\}$, то при каждом M среди чисел $\lambda_{j,M}$ нет совпадающих. При этом соответствующий бетевский вектор не исчезает.

Определим возможные значения чисел $Q_{j,M}$ для заданной конфигурации $(l, q, \{v_M\})$. В силу нечетности $\operatorname{arctg} \lambda$ допустимые значения $Q_{j,M}$ расположены симметрично относительно 0

$$-Q_{M}^{\max} \leq Q_{1,M} < Q_{2,M} < \dots < Q_{v_M,M} \leq Q_{M}^{\max} \quad (4.5)$$

и являются целыми или полуцелыми в зависимости от Q_M^{\max} . Будем считать, что при каждом M числа $\lambda_{j,M}$ упорядочены в порядке возрастания с ростом j от 1 до V_M . Наибольшее допустимое значение Q_M^{\max} определяется из следующего принципа: при

$Q_{j,M} = Q_M^{\max} + 2M + 1$ соответствующее решение $\lambda_{j,M}$ обращается в ∞ . Напомним, что $\lambda_{j,M}$ параметризует струну длины $2M+1$, так что для "выталкивания" этой струны на ∞ естественно считать, что максимальное допустимое значение Q_M^{\max} должно быть превышено на $2M+1$. Заметим теперь, что

$$\Phi_{M_1, M_2}(\infty) = -\Phi_{M_1, M_2}(-\infty) = 2\pi J(M_1, M_2), \quad (4.6)$$

где

$$J(M_1, M_2) = \begin{cases} 2 \min(M_1, M_2) + 1 & \text{при } M_1 \neq M_2, \\ 2M_1 + \frac{1}{2} & \text{при } M_1 = M_2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Из уравнения (4.3) и (4.6) для Q_M^{\max} получаем следующее значение

$$Q_M^{\max} = \frac{N}{2} - \sum_{M'} J(M, M') v_{M'} - \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

Ограничения на целые или полуцелые числа, участвующие в уравнениях вида (4.3) впервые были получены самим Бете в работе [2]. Он использовал другую ветвь функции $\log V_c(\lambda)$, но его ограничения можно пересчитать в наших терминах и при этом получится формула (4.8). Другой вывод (4.8) приведен в работе Годе-на [8].

Будем называть допустимые значения для чисел $Q_{j,M}$ вакансиями. Число вакансий для каждого M обозначим через P_M . Имеем

$$P_M = 2Q_M^{\max} + 1 = N - 2 \sum_{M'} J(M, M') v_{M'}. \quad (4.9)$$

Перейдем теперь к описанию параметризации решений системы (3.27) и вместе с тем и всех бетевских векторов. Сформулируем основную гипотезу: каждому допустимому набору чисел $Q_{j,M}$ соответствует единственное решение системы (4.3). Эта гипотеза явно или неявно принималась всеми специалистами, начиная с Бе-

те. По-видимому, для ее оправдания следует использовать распространение вариационного принципа Янга и Янга [6], сформулированного ими для вакуумной конфигурации $\ell = q = v_0 = \frac{N}{2}$, $v_M = 0$ при $M > 0$ на произвольные допустимые конфигурации. Тем самым мы считаем, что числа $Q_{j,M}$ играют роль полного набора параметров, классифицирующих бетеовские векторы.

Покажем, что сформулированная гипотеза согласуется с числом состояний в \mathcal{H}_N , $\dim \mathcal{H}_N = 2^N$. Данной конфигурации $(\ell, q, \{v_M\})$ соответствует число состояний $\mathcal{Z}(N | \{v_M\})$, определяемое следующим образом

$$\mathcal{Z}(N | \{v_M\}) = \prod_M C_{P_M}^{v_M}. \quad (4.I0)$$

Наша ближайшая цель – подсчитать число состояний для всех конфигураций с фиксированным ℓ

$$\mathcal{Z}(N, \ell) = \sum_{\sum_M (2M+1)v_M = \ell} \mathcal{Z}(N | \{v_M\}). \quad (4.II)$$

Для подсчета $\mathcal{Z}(N, \ell)$, в котором мы будем следовать Бете [2], используется важное свойство чисел P_M , непосредственно вытекающее из (4.9)

$$P_M(N | \{v_M\}) = P_{M-\frac{1}{2}}(N - 2q, \{v'_M\}), \quad M > 0, \quad (4.I2)$$

где $v'_M = v_{M+\frac{1}{2}}$ и, конечно,

$$q = \sum_M v_M. \quad (4.I3)$$

Введем частичное число состояний

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(N, \ell, q) = & \sum_{\sum_M (2M+1)v_M = \ell} \mathcal{Z}(N | \{v_M\}), \\ & \sum_M v_M = q \end{aligned} \quad (4.I4)$$

так что

$$\mathcal{Z}(N, \ell) = \sum_{q=0}^{\ell} \mathcal{Z}(N, \ell, q). \quad (4.15)$$

Из (4.12) получаем, что

$$\mathcal{Z}(N | \{v_M\}) = C_{N-2q+v_0}^{v_0} \mathcal{Z}(N-2q | \{v'_M\}), \quad (4.16)$$

откуда для $\mathcal{Z}(N, \ell, q)$ получаем рекуррентное соотношение

$$\mathcal{Z}(N, \ell, q) = \sum_{v=0}^{q-1} C_{N-2q+v}^v \mathcal{Z}(N-2q, \ell-q, q-v) \quad (4.17)$$

с начальным условием

$$\mathcal{Z}(N, 1, 1) = N - 1. \quad (4.18)$$

Решение этого соотношения с данным начальным условием найдено Бете [2] и имеет вид

$$\mathcal{Z}(N, \ell, q) = \frac{N-2\ell+1}{N-\ell+1} C_{N-\ell+1}^q C_{\ell-1}^{q-1}. \quad (4.19)$$

Суммирование в формуле (4.15) с учетом (4.19) производится trivialно и приводит к результату

$$\mathcal{Z}(N, \ell) = \frac{N-2\ell+1}{N-\ell+1} C_N^\ell = C_N^\ell - C_N^{\ell-1}. \quad (4.20)$$

Эта формула и была получена Бете.

Вспомним теперь, что каждый бетевский вектор с фиксированным $\ell \leq \frac{N}{2}$ является старшим вектором в мультиплете размерности $N-2\ell+1$. Таким образом, полное число состояний \mathcal{Z} , порожденное допустимыми числами $Q_{j,M}$, равно

$$\mathcal{Z} = \sum_{\ell=0}^{\frac{N}{2}} (N-2\ell+1)(C_N^\ell - C_N^{\ell-1}). \quad (4.21)$$

С помощью суммирования по частям сумма (4.21) легко преобразуется к виду

$$Z = C_{\frac{N}{2}} + 2 \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} C_{\frac{l}{N}} = 2^N. \quad (4.22)$$

Таким образом, мы действительно показали, что основная гипотеза о параметризации бетевских векторов приводит к полной системе собственных векторов оператора H . Мы можем теперь перейти к основной задаче этого параграфа – классификации состояний, с энергией близкой при $N \rightarrow \infty$ к энергии основного состояния.

Основное состояние, как уже было сказано, соответствует конфигурации

$$l = q = v_o = \frac{N}{2}; \quad v_M = 0, \quad M > 0. \quad (4.23)$$

В этой конфигурации число вакансий для струн длины 1 также равно $\frac{N}{2}$. Таким образом, соответствующие числа $Q_{j,0}$ заполняют все вакансию и лежат в интервале

$$-\frac{N}{4} + \frac{1}{2} \leq Q_{j,0} \leq \frac{N}{4} - \frac{1}{2}, \quad (4.24)$$

что еще раз показывает невырожденность этого состояния.

Рассмотрим теперь примеры простейших возбуждений:

$$\underline{1.} \quad l = \frac{N}{2}, \quad q = \frac{N}{2} - 1, \quad v_o = \frac{N}{2} - 2, \quad v_{\frac{1}{2}} = 1; \quad v_M = 0, \quad M > \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$

Спин этого состояния также равен 0. Для струн длины 1 число вакансий в этой конфигурации равно $\frac{N}{2}$; для струны длины 2 имеется одна вакансия, единственное допустимое $Q_{j,1}$ равно 0. Таким образом описанная конфигурация определяется двумя параметрами – положением двух незаполненных вакансий для струн длины 1 – "дырок", которые независимо меняются в интервале (4.24).

2.

$$l = q = v_o = \frac{N}{2} - 1; \quad v_M = 0, \quad M > 0. \quad (4.26)$$

Спин этого состояния равен 1, так что оно является старшим вектором триплета. Число вакансий для струн длины 1 равно $\frac{N}{2} + 1$. Таким образом эта конфигурация также соответствует двухпараметрическому семейству бетевских векторов и параметризуется двумя дырками.

Примеры 1 и 2 входят в класс конфигураций \mathcal{M}_{AF} , который можно охарактеризовать следующим образом: каждая конфигурация, входящая в \mathcal{M}_{AF} , содержит отличающееся от $\frac{N}{2}$ на конечное количество число струн длины 1 и тем самым конечное число струн длины боль-

ше I. Если $\gamma_0 = \frac{N}{2} - \kappa_0$, где κ_0 положительно и конечно, то из (4.9) получаем

$$P_0 = \frac{N}{2} + \kappa_0 - 2 \sum_{M>0} \gamma_M, \quad (4.27)$$

$$P_M = 2\kappa_0 - 2 \sum_{M'>0} J(M, M') \gamma_{M'}, \quad (4.28)$$

откуда имеем

$$P_0 > \frac{N}{2}, \quad P_M < 2\kappa_0, \quad M > 0. \quad (4.29)$$

Кроме того, из (4.27) следует, что число дырок для струн длины I всегда четно и равно двум только для примеров I и 2. Наглядно класс M_{AF} можно представить как "море" струн длины I с конечным числом погруженных в него струн длины больше I. Мы убедимся ниже, что класс M_{AF} может быть характеризован как класс таких конфигураций, для которых соответствующие состояния имеют при $N \rightarrow \infty$ конечную энергию и импульс относительно антиферромагнитного вакуума.

Следуя Хильтену и де Клуазо-Пирсону, можно дать полную характеристику описанных состояний в пределе $N \rightarrow \infty$. Дело в том, что при $N \rightarrow \infty$ числа $\lambda_{j,0}$ равномерно распределяются по всей вещественной оси с некоторой плотностью. Эта плотность удовлетворяет линейному интегральному уравнению, которое легко решается явным образом. По этой плотности вычисляются основные наблюдаемые для данного состояния.

Рассмотрим эту ситуацию более подробно. Начнем со случая основного состояния. Уравнение (4.3) имеет вид

$$\arct q 2\lambda_j = \frac{\pi Q_j}{N} + \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^{\frac{N}{2}} \arct q (\lambda_j - \lambda_\kappa). \quad (4.30)$$

Здесь и в дальнейшем мы будем опускать индекс 0 у чисел $\lambda_{j,0}$ и $Q_{j,0}$; числа Q_j монотонно возрастают вместе с j в интервале $\left[-\frac{N}{4} + \frac{1}{2}, \frac{N}{4} - \frac{1}{2}\right]$. При $N \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{Q_j}{N} \rightarrow x, \quad -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad \lambda_j \rightarrow \lambda(x), \quad (4.31)$$

где $\lambda(x)$ — монотонная функция, причем $\lambda(-\frac{1}{4}) = -\infty$ и $\lambda(\frac{1}{4}) = \infty$.

Строгое доказательство этого можно найти в работе Янга и Янга [6]. Заменив в (4.30) сумму интегралом, получим предельное уравнение

$$\operatorname{arctg} \lambda(x) = \pi x + \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \operatorname{arctg}(\lambda(x) - \lambda(y)) dy. \quad (4.32)$$

Более подробное исследование, использующее формулу Сонина для замены суммы интегралом, показывает, что уравнение (4.32) аппроксимирует (4.30) с точностью $O(\frac{1}{N^2})$. Введем функцию $x(\lambda)$, обратную к $\lambda(x)$. Функция

$$\rho(\lambda) = \left. \frac{1}{d\lambda(x)} \right|_{x=x(\lambda)} \quad (4.33)$$

играет роль плотности чисел λ_j в интервале $d\lambda$. Дифференцируя (4.32), получаем для $\rho(\lambda)$ интегральное уравнение Хюльтена

$$\pi \rho(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mu)}{1+(\lambda-\mu)^2} d\mu = \frac{2}{1+4\lambda^2}, \quad (4.34)$$

которое решается преобразованием Фурье. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\xi}}{\lambda^2+1} d\lambda = \pi e^{-|\xi|}, \quad (4.35)$$

откуда

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}|\xi|}}{1+e^{-|\xi|}} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{1}{2\operatorname{ch}\pi\lambda}. \quad (4.36)$$

Соответствующие энергия и импульс имеют вид

$$E = \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} h(\lambda_j) = N \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda =$$
(4.37)

$$= -\frac{JN}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\xi|}}{1+e^{-|\xi|}} d\xi = -JN \log 2 ,$$

$$P = \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} p(\lambda_j) = N \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda = \frac{N\pi}{2} (\text{mod } 2\pi) .$$
(4.38)

Кроме того,

$$S = \frac{N}{2} - \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} 1 = \frac{N}{2} - N \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda) d\lambda = 0 ,$$
(4.39)

что, конечно, было очевидно заранее.

Рассмотрим теперь возбуждения из примеров 1 и 2. Начнем с более простого примера 2. Уравнение (4.3) принимает вид, аналогичный (4.30)

$$\operatorname{arctg} 2\lambda_j = \frac{\pi Q_j}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{arctg}(\lambda_j - \lambda_k) ,$$
(4.40)

но числа Q_j теперь лежат в интервале $[-\frac{N}{4}, \frac{N}{4}]$ и имеют два пропуска-дырки. Обозначим пропуски через $Q_1^{(h)}$ и $Q_2^{(h)}$, $Q_1^{(h)} < Q_2^{(h)}$. При

$$\frac{Q_1^{(h)}}{N} \rightarrow x_1 , \frac{Q_2^{(h)}}{N} \rightarrow x_2 , \frac{Q_j}{N} \rightarrow x + \frac{1}{N}(\theta(x-x_1) + \theta(x-x_2)) ,$$
(4.41)

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\theta(x) = 0$ при $x \leq 0$, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$. Предельное уравнение

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 2\lambda(x) = & \pi x + \frac{\pi}{N} (\theta(x-x_1) + \theta(x-x_2)) + \\ & + \int_{-\frac{N}{4}}^{\frac{N}{4}} \operatorname{arctg}(\lambda(x) - \lambda(y)) dy \end{aligned}$$
(4.42)

опять выполняется с точностью $O(\frac{1}{N^2})$. Для функции $\rho_t(\lambda)$, определяемой по формуле, аналогичной (4.33), получаем линейное интегральное уравнение

$$\pi\rho_t(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_t(\mu)}{1+(\lambda-\mu)^2} d\mu = \frac{2}{1+4\lambda^2} - \frac{\pi}{N} (\delta(\lambda-\lambda_1) + \delta(\lambda-\lambda_2)), \quad (4.43)$$

где λ_i — параметры дырок, $\lambda_i = \lambda(x_i)$, $i = 1, 2$. Очевидно, что $\rho_t(\lambda)$ имеет вид

$$\rho_t(\lambda) = \rho(\lambda) + \frac{1}{N} (\sigma(\lambda-\lambda_1) + \sigma(\lambda-\lambda_2)), \quad (4.44)$$

где функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению де Клуазо-Пирсона

$$\pi\sigma(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\mu)}{1+(\lambda-\mu)} d\mu = -\pi\delta(\lambda). \quad (4.45)$$

Решение имеет вид

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \quad \hat{\sigma}(\xi) = -\frac{1}{1+e^{-|\xi|}}. \quad (4.46)$$

Энергия и импульс этого состояния, отсчитанные от основного состояния, имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(\lambda_1, \lambda_2) &= \\ &= N \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) (\rho_t(\lambda) - \rho(\lambda)) d\lambda = \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2), \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \kappa_t(\lambda_1, \lambda_2) &= N \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) (\rho_t(\lambda) - \rho(\lambda)) d\lambda = \\ &= \kappa(\lambda_1) + \kappa(\lambda_2) (\text{mod } 2\pi), \end{aligned} \quad (4.48)$$

где

$$\varepsilon(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu) \sigma(\lambda - \mu) d\mu = \Im \frac{\pi}{2ch\pi\lambda}, \quad (4.49)$$

$$\kappa(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mu) \sigma(\lambda - \mu) d\mu = \arctg \operatorname{sh} \pi \lambda - \frac{\pi}{2}, \quad -\pi \leq \kappa(\lambda) \leq 0, \quad (4.50)$$

причем

$$\varepsilon = -\frac{\Im \pi}{2} \sin \kappa. \quad (4.51)$$

Мы видим, что импульс $\kappa_t(\lambda_1, \lambda_2)$ меняется в интервале $[0, 2\pi]$, т.е. в полной зоне, когда λ_1 и λ_2 независимо пробегают всю вещественную ось. Кроме того, полный спин состояния может быть вычислен по формуле

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma(\lambda - \lambda_1) + \sigma(\lambda - \lambda_2)) d\lambda = 1. \quad (4.52)$$

Перейдем теперь к примеру I. Обозначим через λ_s единственное из чисел $\lambda_j, \frac{1}{2}$, характеризующее струну длины 2; числа $\lambda_{j,0}$ для струн длины 1 будем по-прежнему обозначать через λ_j . Уравнения (4.3) расщепляются на два уравнения

$$\begin{aligned} \arctg 2\lambda_j &= \\ &= \frac{\pi Q_j}{N} + \frac{1}{N} \varphi(\lambda_j - \lambda_s) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-2} \arctg (\lambda_j - \lambda_k), \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\arctg \lambda_s = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-2} \varphi(\lambda_s - \lambda_j), \quad (4.54)$$

где

$$\varphi(\lambda) = \arctg 2\lambda + \arctg \frac{2}{3}\lambda. \quad (4.55)$$

При этом $\frac{N}{2} - 2$ чисел Q_j меняются в интервале $-\frac{N}{4} + \frac{1}{2} \leq Q_j \leq \frac{N}{4} - \frac{1}{2}$, так что среди них опять есть две дырки $Q_1^{(h)}$ и $Q_2^{(h)}$, $Q_1^{(h)} < Q_2^{(h)}$.

Уравнение (4.53) мы можем рассмотреть также, как и выше, считая λ_s произвольным параметром. Уравнение (4.54) служит для его определения. Для плотности $\rho_s(\lambda)$ чисел λ_j получаем уравнение

$$\pi \rho_s(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_s(\mu)}{1 + (\lambda - \mu)^2} d\mu = \frac{2}{1 + 4\lambda^2} - \frac{1}{N} \varphi'(\lambda - \lambda_s) - \frac{\pi}{N} (\delta(\lambda - \lambda_1) + \delta(\lambda - \lambda_2)) \quad (4.56)$$

и решение имеет вид

$$\rho_s(\lambda) = \rho(\lambda) + \frac{1}{N} (\sigma(\lambda - \lambda_1) + \sigma(\lambda - \lambda_2) + \omega(\lambda - \lambda_s)), \quad (4.57)$$

где $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ введены выше, а $\omega(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\pi\omega(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(\mu)}{1+(\lambda-\mu)^2} d\mu = -\varphi'(\lambda). \quad (4.58)$$

Решение уравнения (4.58) имеет вид

$$\omega(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}|\xi|} + e^{-\frac{3}{2}|\xi|}}{1+e^{-|\xi|}} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \quad (4.59)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\xi|-i\lambda\xi} d\xi = -\frac{2}{\pi(1+4\lambda^2)}.$$

Для определения λ_s перейдем в уравнении (4.54) к пределу $N \rightarrow \infty$

$$\arctg \lambda_s = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_s - \lambda) \rho(\lambda) d\lambda + \quad (4.60)$$

$$+ \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_s - \lambda) (\sigma(\lambda - \lambda_1) + \sigma(\lambda - \lambda_2) + \omega(\lambda - \lambda_s)) d\lambda.$$

Первый интеграл в правой части (4.60) при любом λ_s равен левой части. Далее, вследствие нечетности $\varphi(\lambda)$ и четности $\omega(\lambda)$ последнее слагаемое во втором интеграле исчезает и для определения λ_s мы получаем условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_s - \lambda) (\sigma(\lambda - \lambda_1) + \sigma(\lambda - \lambda_2)) d\lambda = 0. \quad (4.61)$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda - \mu) \sigma(\mu) d\mu = -\arctg 2\lambda, \quad (4.62)$$

так что условие (4.61) принимает вид

$$\operatorname{arctg} \vartheta(\lambda_s - \lambda_1) + \operatorname{arctg} \vartheta(\lambda_s - \lambda_2) = 0, \quad (4.63)$$

решением которого является

$$\lambda_s = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \quad (4.64)$$

Таким образом параметр струны λ_s определяется однозначно.

Замечательный факт состоит в том, что наше струна не вносит вклада в энергию и импульс возбуждения. Действительно, легко показать, что

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \omega(\lambda - \lambda_s) d\lambda = \\ & = \frac{J}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi| - i\lambda_s \xi} d\xi = \frac{J}{1 + \lambda_s^2} = -h_{\frac{1}{2}}(\lambda_s) \end{aligned} \quad (4.65)$$

и аналогично для импульса

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) \omega(\lambda - \lambda_s) d\lambda = -p_{\frac{1}{2}}(\lambda_s), \quad (4.66)$$

где $h_{\frac{1}{2}}(\lambda_s)$ и $p_{\frac{1}{2}}(\lambda_s)$ энергия и импульс струны длины 2, которые даются формулами (3.28) и (3.29). Имеем теперь выражения для энергии и импульса

$$\begin{aligned} & \varepsilon_s(\lambda_1, \lambda_2) = \\ & = h_{\frac{1}{2}}(\lambda_s) + N \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) (\rho_s(\lambda) - p(\lambda)) d\lambda = \varepsilon(\lambda_1) + \varepsilon(\lambda_2), \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\kappa_s(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda) (\rho_s(\lambda) - p(\lambda)) d\lambda = \kappa(\lambda_1) + \kappa(\lambda_2), \quad (4.68)$$

где функции $\varepsilon(\lambda)$ и $\kappa(\lambda)$ введены в (4.49) и (4.50). Таким образом, энергия и импульс построенного нами состояния такие же, как и в примере 2. Единственное различие этих состояний состоит в значении спина. Спин последнего может быть вычислен по формуле

$$S = -\vartheta - \int_{-\infty}^{\infty} (\vartheta \sigma(\lambda) + \omega(\lambda)) d\lambda = 0. \quad (4.69)$$

Формулы, аналогичные (4.52) и (4.69), впервые были предложены Корепиным в [32] для вычисления заряда в массивной модели Тирринга.

Также заметим, что формулы (4.65) и (4.66) являются частными случаями общей теоремы, говорящей, что в конфигурациях из класса \mathcal{M}_{AF} вклад струн длины больше I в энергию и импульс исчезает. Действительно, аналогично разобранным выше примерам 1 и 2 можно убедиться, что вклад струн длины больше I в плотность $\rho(\lambda)$ для струн длины I аддитивен. Соответствующая каждой струне длины $2M+1 > I$ функция $\omega_M(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\pi \omega_M(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_M(\mu)}{1+(\lambda-\mu)^2} d\mu = -\varphi'_{M,0}(\lambda). \quad (4.70)$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_M(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\omega}_M(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi = -\frac{M}{\pi(M^2+\lambda^2)}, \\ \hat{\omega}_M(\xi) &= -e^{-M|\xi|}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Соответствующий вклад в энергию есть

$$\begin{aligned} h_M(\lambda_s) + \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \omega_M(\lambda-\lambda_s) d\lambda &= \\ = h_M(\lambda_s) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(M+\frac{1}{2})|\xi|-i\lambda\xi} d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Аналогичным образом рассматривается и импульс.

Отмеченное обстоятельство важно для классификации всех состояний из класса \mathcal{M}_{AF} . Вследствие указанной выше аддитивности их энергия и импульс складываются из энергий и импульсов четного числа дырок в море струн длины I и тем самым конечны. Роль струн длины больше I сводится к разделению этих состояний по спину. Спин можно вычислять по формуле Корепина

$$S = - \sum_{M>0} (2M+1)v_M - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2(v_o - \sum_{M>0} v_M) \sigma(\lambda) + \right.$$

$$+ \sum_{M>0} v_M \omega_M(\lambda) \} d\lambda = - \sum_{M>0} (2M+1)v_M - 2v_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\lambda) d\lambda. \quad (4.73)$$

Состояния, отвечающие не введенным в класс \mathcal{M}_{AF} конфигурациям, имеют бесконечную относительную энергию при $N \rightarrow \infty$. Мы не провели строгое исследования, однако простой перебор всех возможных примеров убедительно это доказывает. Действительно, конфигурации $(l, q, \{v_M\})$ с конечным числом q , имеют бесконечную относительную энергию. Далее, конфигурации с морем из струн длины больше 1 также имеют бесконечную энергию над основным состоянием, так как энергия струн длины $2M+1$, $M > 0$ всегда больше энергии набора струн длины 1 с тем же импульсом. Таким образом, условие конечности относительной энергии позволяет нам выделить из несепарабельного при $N \rightarrow \infty$ пространства \mathcal{H}_∞ сепарабельное подпространство \mathcal{H}_{AF} , натянутое на векторы, соответствующие конфигурациям из класса \mathcal{M}_{AF} .

Обратимся теперь к интерпретации полученных результатов в терминах квантовой теории поля. Мы считаем, что приведенные рассуждения показывают, что все возбуждения над антиферромагнитным вакуумом описывают состояния рассеяния только четного числа квазичастиц одного сорта с импульсом, пробегающим половину зоны Бриллюэна $-\pi \leq k \leq 0$, и законом дисперсии $\epsilon(k) = -\frac{Jk}{2} \sin k$.

Индивидуальные одиноччастичные состояния не существуют. В этом смысле квазичастицы являются кинками и напоминают солитоны в квантовой модели Sine-Gordon [32], [14]. Спин кинка – спиновой волны равен $\frac{1}{2}$. Действительно, состояния из примеров 1 и 2 имеют спин 0 и 1 и являются старшими векторами, составленными из двух кинков. В первом случае спины кинков антипараллельны, а во втором – параллельны.

Более формально, мы считаем, что гильбертово пространство \mathcal{H}_{AF} раскладывается в прямой интеграл

$$\mathcal{H}_{AF} = \sum_{n=0}^{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} \dots \int_{-\pi}^{2\pi} dk_1 \dots dk_{2n} \prod_{j=1}^{2n} \otimes \mathbb{C}^2 \quad (4.74)$$

и отличается от обычного фоковского пространства для бозонов со спином $\frac{1}{2}$ правилом суперотбора, запрещающим состояния с нечетным числом частиц. Поскольку импульсы их меняются независимо, то можно считать, что отдельный кинк можно локализовать и имеет смысл говорить об их рассеянии. Соответствующую S -матрицу мы вычислим в следующем параграфе.

Отметим, что разобранный пример дает реализацию явления, которое в квантовой теории поля принято называть обесцвечиванием. Действительно, исходная модель инвариантна по отношению к группе $SU(2)$, в то время как физические состояния классифицируются по $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \approx SO(3)$, где \mathbb{Z}_2 – центр $SU(2)$. Кинки (аналоги夸克ов) вылетают, но их число в физических состояниях обязательно четно.

Наша интерпретация возбуждений кардинально отличается от общепринятой картины, восходящей к де Клуазо-Пирсону. Именно в работе [4] при конечном N был предъявлен набор состояний со спином 1, который авторы считали переходящим в одночастичное триплетное состояние при $N \rightarrow \infty$. Импульс этого состояния меняется во всей зоне, которая в этом случае имеет вид $-\pi \leq k \leq \pi$. Закон дисперсии выглядит следующим образом

$$\varepsilon(k) = \frac{\pi}{2} |\sin k|. \quad (4.75)$$

Далее, в работе [II] утверждается, что возбуждения де Клуазо-Пирсона не единственные одночастичные возбуждения; кроме них существуют синглетные связанные состояния с законом дисперсии

$$\varepsilon(k) = \frac{\pi}{2} |\sin \frac{k}{2}|, \quad -\frac{\pi}{2} \leq k \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.76)$$

Наконец, в работах [33], [34] критиковались результаты [II], однако их авторы по-прежнему считали, что есть много возбуждений, в том числе и синглетные, с законом дисперсии (4.75). Таким образом, налицо противоречие, которое требует разрешения.

В одной фразе это разрешение выглядит следующим образом: авторы всех упомянутых работ искусственно выделяли однопараметрическое семейство векторов из общего вида двухпараметрического семейства, фиксируя один из параметров.

Поясним это более детально. Возбуждения де Клуазо-Пирсона в наших терминах имеют следующий вид: рассматривается конфигурация из примера 2, в которой две незаполненных вакансии выбраны специальным образом

a) $Q_1^{(h)} = -Q^{\max}, \quad Q_2^{(h)} = \text{произвольно}, \quad \frac{2\pi Q_2}{N} = k_2, \quad -\frac{\pi}{2} \leq k_2 \leq \frac{\pi}{2};$

b) $Q_1^{(h)} = \text{произвольно}, \quad Q_2^{(h)} = Q^{\max}, \quad \frac{2\pi Q_1}{N} = k_1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq k_1 \leq \frac{\pi}{2}.$

Будем считать, что полученный набор векторов характеризуется параметром

$$k = \begin{cases} k_1 - \frac{\pi}{2}, & -\pi \leq k \leq 0; \\ k_2 + \frac{\pi}{2}, & 0 \leq k \leq \pi. \end{cases} \quad (4.77)$$

Из приведенных выше вычислений очевидно, что для такого набора векторов закон дисперсии действительно имеет вид (4.75). Однако столь же очевидно, что этот набор является частным значением векторов из двухпараметрического семейства при фиксированном значении импульса одной из квазичастиц.

Поясним здесь в общих терминах, что мы имеем в виду под отличием одночастичных состояний от многочастичных. Пространство состояний \mathcal{H} имеет разложение в прямой интеграл

$$\mathcal{H} = \int dk \mathcal{H}(k) \quad (4.78)$$

по собственным подпространствам оператора импульса. Одночастичное состояние $\Psi(k)$ с импульсом k является вектором с конечной нормой в $\mathcal{H}(k)$. В то же время двухчастичное состояние $\Psi(k_1, k_2)$ при $k = k_1 + k_2$ имеет в $\mathcal{H}(k)$ бесконечную норму. Таким образом, фиксируя один из аргументов в двухчастичном состоянии, мы не можем добиться, чтобы оно имело конечную норму в $\mathcal{H}(k)$.

Конечно, наши рассуждения могут стать строгими лишь после того, как будет доказано разложение (4.74). Однако мы считаем, что наша интерпретация несравненно более естественна, чем конструкция де Клуазо-Пирсона особенно после того, как последняя была расширена в терминах заполнений допустимых вакансий.

Аналогичным образом рассматриваются и другие ложные возбуждения. Так возбуждение из работы [II] с законом дисперсии (4.76) является суммой двух возбуждений де Клуазо-Пирсона с совпадающими импульсами и требует еще привлечения струны длины больше I с определенным импульсом. Все это показывает, что даже вычисления на ЭВМ, проведенные в [4], [33], могут привести к недоразумению, если их неправильно интерпретировать.

По-видимому, технически простейшим способом разрешения обсужденного "противоречия" является подсчет нормы состояния (3.20) в пространстве \mathcal{H}_N . Состояния, соответствующие конфигурациям из примеров 1 и 2, должны иметь норму, отличающуюся от нормы основного состояния множителем, пропорциональным N^2 ,

что и явилось бы несомненным свидетельством их двухчастичности и оправданием разложения (4.74). В связи с этим комбинаторная задача, упомянутая в конце § I, становится особенно актуальной.

Закончим на этом классификацию возбуждений в антиферромагнитном случае.

§ 5. Рассеяние спиновых волн

В этом параграфе мы рассмотрим только рассеяние друг на друге двух спиновых волн. Подобно ферромагнитному случаю, полная S -матрица факторизуема и все рассеяние сводится к двухчастичному. Однако, в отличие от ферромагнитного случая, где при рассеянии сорт частиц (длина струны) не меняется и сами частицы характеризуются только импульсом, в антиферромагнитном случае единственное возбуждение — кинк характеризуется помимо импульса еще и спином. Общий вид двухчастичной S -матрицы для квазичастиц со спином $\frac{1}{2}$ дается формулой

$$S_{ab;cd}(\lambda_1, \lambda_2) = S_1(\lambda_1, \lambda_2) \delta_{ac} \delta_{bd} + S_2(\lambda_1, \lambda_2) \delta_{ad} \delta_{bc}, \quad (5.1)$$

где $a, b, c, d = 1, 2$ и λ_1, λ_2 — параметры сталкивающихся квазичастиц. Триплетный и синглетный фазовые множители имеют вид

$$S_t = S_1 + S_2, \quad S_s = S_1 - S_2. \quad (5.2)$$

К настоящему времени в литературе обсуждался только один способ вычисления фазовых множителей для рассеяния дырок в море, основанный на подсчете сдвига импульса одной из дырок при наличии второй дырки. Этот способ разработан Корепиным [32] в квантовой теории солитонов. В работе [12] Кулиш и Решетихин вычислили $S_t(\lambda_1, \lambda_2)$ по методу Корепина.

Здесь мы приведем формальный вывод выражений для S_t и S_s , обобщая процедуру с операторами Замолодчикова из § 3. Для этого достаточно изучить собственные значения S -матрицы на бетевских векторах, так как они являются старшими векторами в каждом неприводимом представлении $SU(2)$. S -матрица кратна единичному оператору. Напомним структуру бетевских векторов для антиферромагнитного вакуума и триплетных и синглетных двухчастичных состояний

$$\Omega_{AF} = \prod_j B(\lambda_j) \Omega, \quad (5.3)$$

$$\Omega_t(\lambda_1, \lambda_2) = \prod_j B(\lambda_j^{\text{t}}) \Omega, \quad (5.4)$$

$$\Omega_s(\lambda_1, \lambda_2) = B\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + i}{2}\right) B\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - i}{2}\right) \prod_j B(\lambda_j^{(s)}) \Omega, \quad (5.5)$$

где числа λ_j , $\lambda_j^{(t)}$ и $\lambda_j^{(s)}$ при $N \rightarrow \infty$ распределены с плотностями $\rho(\lambda)$, $\rho_t(\lambda)$ и $\rho_s(\lambda)$ соответственно, а λ_1 и λ_2 – параметры дырок. Операторы рождения состояний $\Omega_t(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\Omega_s(\lambda_1, \lambda_2)$ из состояния Ω_{AF} обозначим соответственно через $B_t(\lambda_1, \lambda_2)$ и $B_s(\lambda_1, \lambda_2)$. Формально $B_t(\lambda_1, \lambda_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} B_t(\lambda_1, \lambda_2) &= \prod_j B(\lambda_j^{(t)}) \cdot \prod_j B^{-1}(\lambda_j) = \\ &= \exp \left\{ N \int_{-\infty}^{\infty} \log B(\lambda) \rho_t(\lambda) d\lambda \right\} \exp \left\{ -N \int_{-\infty}^{\infty} \log B(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \log B(\lambda) (\sigma(\lambda - \lambda_1) + \sigma(\lambda - \lambda_2)) d\lambda \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где мы использовали коммутативность операторов $B(\lambda)$ и формулу (4.44). Мы видим, что

$$B_t(\lambda_1, \lambda_2) = B_{kink}(\lambda_1) B_{kink}(\lambda_2), \quad (5.7)$$

где оператор

$$B_{kink}(\lambda) = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \log B(\mu) \sigma(\lambda - \mu) d\mu \right\} \quad (5.8)$$

можно интерпретировать как оператор рождения кинка. Конечно, мы знаем, что этот оператор выводит из пространства \mathcal{H}_{AF} , в котором имеет смысл только произведение (5.7). Однако этот формальный объект удобно использовать для построения *in* и *out* – состояний для старшего вектора триплета.

По аналогии с формулой (3.36) рассмотрим оператор Замолодчикова

$$Z_{kink}(\lambda) = B_{kink}(\lambda) A_{\infty}^{-1}(\lambda). \quad (5.9)$$

Здесь оператор $A_{\infty}(\lambda)$ получается из $A_N(\lambda)$ в пределе $N \rightarrow \infty$ после выделения расходящегося вакуумного собственного значения:

$$A_{\infty}(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(\lambda) \left(\lambda + \frac{i}{2} \right)^{-N} \exp \left\{ -N \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{\lambda - \mu - i}{\lambda - \mu} \rho(\mu) d\mu \right\} \quad (5.10)$$

(см. формулу (I.22)). Имеет место коммутационное соотношение, аналогичное (3.32)

$$A_\infty(\lambda)B_{\text{kink}}(\mu) = B_{\text{kink}}(\mu)A_\infty(\lambda) \frac{1}{C_\infty(\mu-\lambda)}, \quad (5.\text{II})$$

где

$$\frac{1}{C_\infty(\lambda)} = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{1}{C(\mu)} \sigma(\mu-\lambda) d\mu \right\}. \quad (5.\text{I2})$$

Соотношение (5.II) следует из (I.I4), если в нем опустить второе слагаемое в правой части. Возможность этого можно оправдать после корректного перехода к пределу $N \rightarrow \infty$. Из (5.II) следует, что операторы Замолодчикова удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\sum_{\text{kink}}(\lambda) \sum_{\text{kink}}(\mu) = \sum_{\text{kink}}(\mu) \sum_{\text{kink}}(\lambda) S_{\text{kink}}(\mu-\lambda), \quad (5.\text{I3})$$

где

$$\frac{1}{i} \log S_{\text{kink}}(\lambda) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \log V_o(\mu) \sigma(\mu-\lambda) d\mu. \quad (5.\text{I4})$$

Отметим, что в отличие от (5.9) и (5.II), произведения в (5.I3) имеют смысл в пространстве \mathcal{H}_{AF} . Для вычисления возникшего в (5.I4) интеграла удобно его продифференцировать по λ , после чего он сводится к интегралу

$$\cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\mu)}{1+(\lambda-\mu)^2} d\mu = -2\pi(\sigma(\lambda)+\sigma(\lambda)), \quad (5.\text{I5})$$

где мы использовали уравнение (4.45). Из (4.46) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \log S_{\text{kink}}(\lambda) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\xi|}}{1+e^{-|\xi|}} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \Psi\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right) + \Psi\left(\frac{1-i\lambda}{2}\right) - \Psi\left(1+\frac{i\lambda}{2}\right) - \Psi\left(1-\frac{i\lambda}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.\text{I6})$$

где $\Psi(z)$ — логарифмическая производная Γ — функции (см. [35]). Таким образом,

$$S_{\text{kink}}(\lambda) = \frac{1}{i} \frac{\Gamma(\frac{1+i\lambda}{2}) \Gamma(1 - \frac{i\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{1-i\lambda}{2}) \Gamma(1 + \frac{i\lambda}{2})}. \quad (5.17)$$

Аналогично рассуждениям § 3 строим старший *in* и *out* вектор в триплетном состоянии в виде

$$\Psi_{\text{in}}^{(t)} = Z_{\text{kink}}(\lambda_1) Z_{\text{kink}}(\lambda_2) \Omega_{\text{AF}}, \quad (5.18)$$

$$\Psi_{\text{out}}^{(t)} = Z_{\text{kink}}(\lambda_2) Z_{\text{kink}}(\lambda_1) \Omega_{\text{AF}}. \quad (5.19)$$

Тогда из (5.13) следует, что S -матрица рассеяния кинков в триплетном состоянии имеет вид

$$S_t(\lambda_1, \lambda_2) = S_{\text{kink}}(|\lambda_1 - \lambda_2|) \quad (5.20)$$

и совпадает с ответом, приведенным в [12].

К сожалению, приведенное рассуждение непосредственно не обобщается на синглетное состояние, так как соответствующий оператор рождения состояния $\Omega_S(\lambda_1, \lambda_2)$ из Ω_{AF} имеет вид

$$B_S(\lambda_1, \lambda_2) = B\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + i}{2}\right) B\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - i}{2}\right). \quad (5.21)$$

$$\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \log B(\mu) \omega\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \mu\right) d\mu\right\} B_{\text{kink}}(\lambda_1) B_{\text{kink}}(\lambda_2)$$

и не факторизуется на два элементарных оператора рождения.

Однако заметим, что *in* и *out* - состояния из (3.39) с точностью до нормировки могут быть записаны в виде

$$\Psi_{\text{in}} = \bar{A}^{-1}(\lambda_1) B(\lambda_1) B(\lambda_2) \bar{A}^{-1}(\lambda_2) \Omega \quad (5.22)$$

и

$$\Psi_{\text{out}} = \bar{A}^{-1}(\lambda_2) B(\lambda_2) B(\lambda_1) \bar{A}^{-1}(\lambda_1) \Omega, \quad (5.23)$$

где $\lambda_1 > \lambda_2$. Аналогичным образом можно поступить и в рассмотренном уже случае триплета (5.18), (5.19) и мы используем это соображение для синглета, полагая при $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\Psi_{\text{in}}^{(s)} = \bar{A}_{\infty}^{-1}(\lambda_1) B_S(\lambda_1, \lambda_2) \bar{A}_{\infty}^{-1}(\lambda_2) \Omega_{\text{AF}} \quad (5.24)$$

и

$$\Psi_{\text{out}}^{(s)} = \bar{A}^{-1}(\lambda_2) B_S(\lambda_1, \lambda_2) \bar{A}^{-1}(\lambda_1) \Omega_{\text{AF}}. \quad (5.25)$$

Тогда

$$\Psi_{\text{out}}^{(s)} = S_s(\lambda_1 - \lambda_2) \Psi_{\text{in}}^{(s)}, \quad (5.26)$$

где

$$S_s(\lambda) = S_{\text{kick}}(|\lambda|) S_o\left(\frac{|\lambda|}{2}\right). \quad (5.27)$$

Используя (5.11), (5.12) и (5.21) для $\frac{1}{i} \log S_o(\lambda)$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \log S_o(\lambda) &= \\ &= \frac{1}{i} \log V_{\frac{1}{2}}(\lambda) + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \log V_o(\mu) \omega(\mu - \lambda) d\mu. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Логарифмическая производная $S_o(\lambda)$ упрощается на основании интегрального уравнения (4.58) и мы имеем

$$\frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \log S_o(\lambda) = -2\pi\omega(\lambda) = \frac{4}{1+4\lambda^2}, \quad (5.29)$$

откуда

$$S_o\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda-i}{\lambda+i}. \quad (5.30)$$

Таким образом мы вычислили S_t и S_s и можем записать S -матрицу (5.1) в виде

$$S(\lambda_1, \lambda_2) = S(|\lambda_1 - \lambda_2|), \quad (5.31)$$

$$S(\lambda) = S_t(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda+i} I + \frac{i}{\lambda+i} P \right),$$

где I и P соответственно единичный оператор и оператор перестановки в пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Формула (5.31) согласуется с общей формулой факторизуемых S -матриц Замолодчиковых [31]

и Каровского и др. [36]. Естественно, что мы получили бы тот же ответ, используя метод Корепина [32]. В некотором смысле последнее можно считать оправданием формул (5.18), (5.19) и (5.24), (5.25), так как до сих пор единственным основанием для них была аналогия с ферромагнитным случаем из § 3.

Отметим, что мы не построили реализации полной алгебры Замолодчикова, то есть не нашли набор операторов $Z_\alpha(\lambda)$,

удовлетворяющих соотношениям

$$Z_a(\lambda) Z_b(\mu) = Z_c(\mu) Z_d(\lambda) S_{ab;cd}(\mu-\lambda), \quad (5.32)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 2. Однако для подсчета $S_{ab;cd}(\lambda)$ оказалось достаточным реализовать только операторы рождения старших векторов.

Заметим также, что построенная S -матрица не имеет полюсов в полосе $|Im\lambda| < 1$. Эта область играет роль физического листа для наших возбуждений. Об этом можно судить по выражениям для аддитивных наблюдаемых, например для $\varepsilon(\lambda)$ и $\kappa(\lambda)$, которые имеют, как функции λ , период $2i$, что следует из (4.49) и (4.50). Это лишний раз подтверждает, что спиновые волны не имеют связанных состояний и представляют собой единственное элементарные возбуждения в нашей модели.

Литература

- [1] Heisenberg W. Zur Theorie des Ferromagnetismus. - Zeitschr. für Physik, 1928, Bd.49, H.9-10, S.619-636.
- [2] Bethe H. Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. - Zeitschr. für Physik, 1931, Bd.71, H.3-4, S.205-226.
- [3] Hulthen L. Über das Austauschproblem eines Kristalles. - Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, 1938, Bd. 26A, H.3, N 11, S.1-106.
- [4] Des Cloizeaux J., Pearson J.J. Spin-Wave Spectrum of the Antiferromagnetic Linear Chain. - Phys.Rev., 1962, v.128, N 5, p.2131-2135.
- [5] Orbach R. Linear antiferromagnetic chain with anisotropic coupling. - Phys.Rev., 1958, v.112, N 2, p.309-316.
- [6] Yang C.N., Yang C.P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interaction. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system. - Phys.Rev., 1966, v.150, N 1, p.321-327.
- [7] Yang C.N., Yang C.P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interaction. II. Properties of the ground state energy per lattice site for an infinite system. - Phys.Rev., 1966, v.150, N 1, p.327-339.
- [8] Baxter R.J. One-dimensional anisotropic Heisenberg chain. - Ann.Phys., 1972, v.70, N 2, p.323-327.
- [9] Gaudin M. Modeles exacts en mecanique statistique: La methode de Bethe et ses generalisations. - Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, CEA-N-1559(1), Septembre 1972.

- [10] Takahashi M. One-dimensional Heisenberg model at finite temperatures. - Progr.Theor.Phys., 1971, v.46, N 2, p.401-415.
- [11] Овчинников А.А. Спектр возбуждений антиферромагнитной гейзенберговой цепочки. - ЖЭФ, 1969, т.56, № 4, с.1354-1365.
- [12] Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю. Обобщенный ферромагнетик Гейзенberга и модель Гросса-Неве. - ЖЭФ, 1981, т.80, № 1, с.214-228.
- [13] Faddeev L.D. Quantum completely integrable models in field theory. - In: Soviet Scientific Reviews, Harvard Academic, London, 1980, p.107-155.
- [14] Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи. - ТМФ, 1979, т.40, № 2, с.194-220.
- [15] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга. - УМН, 1979, т.34, № 5, с.13-63.
- [16] Belavin A.A. Exact solution of the two-dimensional model with asymptotic freedom. - Phys.Lett., 1979, v.87B, N 1-2, p.117-121.
- [17] Andrei N., Lowenstein J.H. Diagonalization of the chiral invariant Gross-Neveu Hamiltonian. - Phys.Rev.Lett., 1979, v.43, N 23, p.1698-1700.
- [18] Andrei N., Lowenstein J.H. Derivation of the chiral Gross-Neveu spectrum for arbitrary $SU(N)$ -symmetry. - Phys.LettB., 1980, v.90B, N 3, p.106-110.
- [19] Gaudin M. Etude d'un modèle à une dimension pour un système de fermions en interaction. - Centre d'Etude Nucléaires de Saclay, Rapport CEA-R-3569, 1968.
- [20] Yang C.N. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. - Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, N 23, p.1312-1314.
- [21] Lieb E.H., Wu V.F. Absence of Mott transition in an exact solution of short-range 1-band model in 1-dimension. - Phys.Rev.Lett., 1968, v.20, N 25, p.1445-1448.
Correction: ibid., 1968, v.21, N 3, p.192.
- [22] Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands. - Proc.Roy.Soc., 1963, v.A276, N 1365, p.238-257.
- [23] Kulish P.P., Sklyanin E.K. Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet. - Phys. Lett.A, 1979, v.70A, N 5-6, p.461-463.

- [24] Gaudin M., McCoy B.M., Wu T.T. Normalization sum for the Bethe's hypothesis wave functions of the Heisenberg-Ising chain. - Phys.Rev. D, 1981, v.23, N 2, p.417-419.
- [25] von Neumann J. On infinite direct products. - Comp.Math., 1938, v.6, fasc.1, p.1-77.
- [26] Склянин Е.К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.55-128.
- [27] Склянин Е.К., Фаддеев Л.Д. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля. - Докл.АН СССР, 1978, т.243, № 6, с.1430-1433.
- [28] Thomas L.E. Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet.I. - J.Math. Anal. and Appl., 1977, v.59, N 2, p.392-414.
- [29] Babbitt D., Thomas L. Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet. II. An explicit Plancherel formula. - Comm.Math.Phys. 1977, v.54, N 3, p.255-278.
- [30] Babbitt D., Thomas L. Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet. III. Scattering theory. - J.Math.Phys., 1978, v.19, N 8, p.1699-1704.
- [31] Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B. Factorized S -matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. - Ann.Phys., 1979, v.120, N 2, p.253-291.
- [32] Корепин В.Е. Непосредственное вычисление S -матрицы в массивной модели Тирринга. - ТМФ, 1979, т.41, № 2, с.169-189.
- [33] Fazekas P., Süto A. On the spectrum of singlet excitations of the $S = \frac{1}{2}$ linear Heisenberg anti-ferromagnet. - Solid State Comm., 1976, v.19, N 11, p.1045-1048.
- [34] Süto A. Excitations in the antiferromagnetic Heisenberg chain. - Solid State Comm., 1976, v.20, N 11, p.681-682.
- [35] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1, М., 1973.
- [36] Berg B., Karowski M., Weiss P., Kurak V. Factorized $U(n)$ symmetric S -matrices in two dimensions. - Nucl.Phys., 1978, v.B134, N 1, p.125-132.