第七章 静态优化模型

§1. 引言

人们在工程技术科学研究和经济管理等诸多领域中经常遇到最优化问题.例如, 商品经营者制定价格使得销售利润最高,结构设计要在满足强度要求等条件下,使所用材料的总重量最轻;企业集团订购生产资料时要使订货费用最低;资源分配要使得总效益最大;体育比赛要使成绩最佳;运输方案的安排问题中要使运输成本最小且收益最大;编制生产计划要在满足工艺流程需求的条件下,降低成本使总利润最高.对普遍存在的最优化问题,建立数学模型,用计算机进行模拟求解,提供定量的、科学的最优决策方案,对经济与社会发展具有重要的意义.

本章考虑具有定常特征的应用问题的数学建模方法,这类模型的数学方法为优化方法,模型的求解常归结为函数的极值问题.

§2. 建模举例

1. 存储模型

工厂为了连续生产,必须订购存储原料,水库在雨季蓄水,以便在旱季用于灌溉及航运要求,商店为保证连续的销售过程必须存储商品,我们把这些存储物统称为存储.存储问题的原型可以是具体的仓库存货,水库蓄水,也可以是计算机的存储器的设计问题,甚至是大脑的存储问题.

衡量一个存储策略的优劣的易用的标准是计算该策略所消耗的平均费

用.费用通常主要包括: 订货费、存储费、缺货损失费和生产费. 综上述, 存储问题的一般数学模型为:

$$\min(\text{订货费(或生产费)} + \text{存储费} + \text{缺货费}) \quad (1)$$

这里先考虑不允许缺货的存储模型, 即做如下假设:

(1) 在不允许缺货的条件下, 把缺货费用视为无穷大;

(2) 当存储降到零时, 订货可立即到达;

(3) 需求是连续均匀的且设需求速度 R 为常数;

(4) 每次订货费或生产准备费为 a (元) 不变;

(5) 单位存储费 k (元) 为常数.

假定每隔时间 T 订一次货， T 称为订货周期，货物的单价为 k ，由上述条件来考虑存储系统的运行情况. 从存储量为 $y(t)$ 的任一时刻开始，存储量以 R 的速度递减，直至减少的零为止，此时，须立即进货补充，以便满足需求. 对于这里的模型，只有当存储量减少到零时才进货补充. 若提前补充则会增加不要的存储费用. 根据模型假设，每次的补充进货量是常数，这是一个典型的 T 循环策略.

下面根据上面的假设来建立模型, 只须考虑一个周期 T 的费用即可. 只要每个周期的费用极小化了, 就可总费用极小化.

由于订货应满足需求量, 故订货量为 RT . 于是, 订货费为 $a + kRT$, 平均订货费为 $a/T + kR$.

又因平均存储量为

$$\frac{1}{T}\int_0^T Rtdt = \frac{1}{2}RT$$

所以平均存储费用为 $\frac{1}{2}kRT$, 则在时间 T 内总的平均费用为

$$C(T) = \frac{a}{T} + kR + \frac{1}{2}kRT. \quad (2)$$

于是, 不允许缺货的存储问题归结为函数 $C(T)$ 的极值问题. 因此. 存储模型为

$$\min C(T) = \min(\frac{a}{T} + kR + \frac{1}{2}kRT) \quad (3)$$

上述极值问题的最优解为

$$T^* = \sqrt{\frac{2a}{kR}} \quad (4)$$

即 T^* 时间订货一次，可使平均费用最小，此时每次的订货批量为

$$Q^* = RT^* = \sqrt{\frac{2aR}{k}} \qquad (5)$$

上式即为经济理论中著名的经济订货批量公式（Economic Order Quantity）. 该式表明, 订货费a越高及需求量R越大, 订货批量应越大; 存储费越高, 订货批量应越小. 这些关系符合常识.

2. 隧道车流量问题

通过隧道的车的流量问题在交通管理中具有重要的意义.

通过隧道的车的流量与通过隧道的车辆的平均速度有最直接的关系.确定每辆车以多大速度通过隧道时可使车流量最大.统计数据表明,车流量$f(v)$(辆/秒)与平均车速$v(km/h)$近似地满足

$$f(v) = qv/(av^2 + bv + c)$$

设隧道的限速标准为$[20,\ 100]$,则隧道车流量问题的数学模型为

$$\min_{[20,100]} f(v)$$

对一组给定参数的隧道车流量模型的求解的程序和结果如下

```
function y=fun1(x)
a=1/22, b=1.6, c=31.1,q=35,
y=q*x/(a*x^2+b*x+c)
fmin('fun1',20,100)
ans = 26. 15722168850456
```

3. 最佳场址选择问题

要确定一个新仓库的位置 P, 使它供应位于不同地点工厂的需要.设各工厂的需求量在一定时期内已知为$W_i (i = 1,2,\cdots,n)$, 问应如何选择新仓库的位置 P, 使总费用在一定时期内达到最小(假定无现成的道路可利用, 且近似地认为运输费用等于货物量与运输距离的乘积).

设建立平面直角坐标系后, 各工厂的位置为$P_i(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,n)$, 新仓库的位置为$P(x, y)$, 则运输总费用为

$$C(x,y)=\sum_{i=1}^{n}W_i\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

确定 $P(x,y)$ 使 $C(x,y)$ 达到最小. 因此, 这个问题的数学模型为下面的最优化问题

$$\min C(x,y)=\sum_{i=1}^{n}W_i\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

这是一个非线性规划问题.

4. 报童问题

零售商问题的具体模型为报亭书摊等销售经营问题. 报童每天从批发商处购进报纸到街上零售, 至晚上卖不完的报纸可退回,报纸的零售价为 a ,进价为 b ,退回价为 c , 设

$a>b>c>0.$

显然退回报纸要赔钱, 故报童应根据实际需求量作出决策,购进适量的报纸. 设每天购进报纸 n 份,售出 r 份(随机变量),每天售出 r 份报纸的概率为

$f(r)(r=1,2,\cdots.$

n 为多少时,报童的期望收入 $E(n)$ 最高.

据大数定律,期望收入 $E(n)$ 也就时长期平均收入. 售出一份报纸.赚钱 $a-b$;退回一份报纸,赔钱 $b-c$.如果每天的需求量 $r\le n$,则报童的收入

$(a-b)r-(b-c)(n-r)$

如果每天的需求量 $r>n$,则收入为 $(a-b)n$.于是报童的期望收入为

$$E(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)nf(r)$$

所以,报童问题归结为 $a,b,c,f(r)$ 为已知时,求 n^* , 使期望收入 $E(n)$ 最大, n 取正整数.

$$\min_{n\in\mathbf{N}} E(n)$$

下面讨论模型的求解.

多数情形下需求量比较大,可将需求量r视为连续变量, 相应的用概率密度函数$p(r)$代替分布函数$f(r)$.因此

$$E(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)dr+\int_n^\infty(a-b)np(r)dr$$

令

$$\frac{dE}{dn}=(a-b)\int_n^\infty p(r)dr-(b-c)\int_0^n p(r)dr=0$$

得

$$(a-b)\int_n^\infty p(r)dr=(b-c)\int_0^n p(r)dr$$

即

$$\int_n^\infty p(r)dr/\int_0^n p(r)dr=(b-c)/(a-b)$$

其中 $P_1=\int_0^n p(r)dr$ 表示卖不完得概率积分; $P_2=\int_n^\infty p(r)dr$ 表示卖完得概率积分. 注意到

$$\int_0^\infty p(r)dr=1,$$

在$\int_n^\infty p(r)dr/\int_0^n p(r)dr=(b-c)/(a-b)$两端分别加$1$,整理得

$$\int_0^{n^*} p(r)dr=\frac{a-b}{a-c}$$

从$\int_0^{n^*} p(r)dr=\frac{a-b}{a-c}$可知每份报纸赚钱与赔钱的比值$(a-b)/(b-c)$越大,报童可购进的报纸份数$n^*$就应越大.

5. 经济增长模型

扩大生产规模、发展经济所依靠地主要因素有增加投资、增加劳动力以及技术革新等, 在研究国民经济产值与这些因素地数量关系时, 技术水平相对难以量化, 作为简单模型可认为在一定时期内技术水平不变, 只讨论产值和资金、劳动力之间地关系. 在一定的地区和时间内这一假设是可行的.

用Q,K,L分别表示产值、资金、劳动力, 对确定数量关系$Q(K,L)$作如下

假设:

(1)产值依赖与每个劳动力的投资强度且与劳动力的数量成正比,即

$$Q(K,L)=G(y)L, \qquad y=\frac{K}{L}$$

其中 $G(y)$ 表示某一函数.

(2)产值随资金、劳动力的增加而增长,但增长速率越来越来小.根据这个假设选择上式中的函数如下

$$G(y)=ay^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

由前两式得

$$Q(K,L)=aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

这就是经济学中的著名的柯布-道格拉斯生产函数,其更一般得形式为

$$Q(K,L)=aK^{\alpha}L^{\beta}, \quad 0<\alpha,\beta<1$$

上式中得参数 α,β,a 须由经济统计数据确定. 通过 Q,K,L 的统计数据,用线性最小二乘拟合(取对数)求出参数 α,β,a.

6. 飞行管理问题

在约 H 千米高空的某边长 a 的正方形区域内,经常有若干架飞机作水平飞行.区域内飞行的每架飞机的位置和速度向量均由计算机记录其数据,以便进行飞行管理.当一架欲进入该区域的飞机到达区域的边界时,记录其数据后,须立即判断是否将与区域内的飞机相碰撞.若可能发生碰撞,则计算如何调整各架飞机的飞行的方向.

作如下假设:

(1)任意两架飞机的安全飞行距离为 8 公里;

(2)所有飞机的飞行速度为 800 公里/小时;

(3)进入该区域的飞机在到达区域边界时,与区域内的飞机的距离应在 60 公里以上;

(4)最多考虑 6 架飞机;

(5)不必考虑飞机离开此区域后的情况.

引进如下符号

(x_{i0}, y_{i0})	第 i 架飞机的初始位置
a_i	第 i 架飞机的方位角
C_{ij}	$\cos a_i - \cos a_j$
Δx_{ij}	$x_{i0} - x_{j0}$
f	偏差平方和函数
$\mathbf{u}_{ij}$	两架飞机 P_i 相对 P_j 的速度
a_{i0}	第 i 架飞机的初始方位角
v	飞机速率
S_{ij}	$\sin a_i - \sin a_j$
Δy_{ij}	$y_{i0} - y_{j0}$
m	步长缩小的倍数
$\mathbf{h}_{ij}$	两架飞机 P_i 相对 P_j 的位移

下面建立飞行问题的数学模型.

该问题是一个优化问题, 目标函数为各飞机调整的角度最小,约束条件为按调整后的角度飞行,任意两架飞机在区域内的飞行距离大于 8 公里,各飞机飞行方向的调整角度为决策变量.可取目标函数为各飞机调整角度的平方和, 即 $f = \sum_{i=1}^{6}(a_i - a_{i0})^2$. 根据相对运动原理,飞机 P_i 与飞机 P_j 的相对速度为 $\mathbf{u}_{ij} = (vC_{ij}, vS_{ij})$, 飞机 P_i 与飞机 P_j 的相对位移为 $\mathbf{h}_{ij} = (\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij})$, 易知,飞行中飞机 P_i 与飞机 P_j 的可能的最短距离 (点到直线的距离)为 $l_{ij} = |P_j B|$, 利用 $\mathbf{h}_{ij}$ 和 $\mathbf{u}_{ij}$ 可求出

$$l_{ij}^2 = \frac{(S_{ij}\Delta x_{ij} - C_{ij}\Delta y_{ij})^2}{S_{ij}^2 + C_{iu}^2}.$$

若 $\mathbf{h}_{ij}$ 和 $\mathbf{u}_{ij}$ 的方向一致(夹角小于 90 度), 则飞机 P_i 与飞机 P_j 不会相撞. 而 $l_{ij}^2 = \frac{(S_{ij}\Delta x_{ij} - C_{ij}\Delta y_{ij})^2}{S_{ij}^2 + C_{iu}^2}$>64 等价于 $T = \mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ij} = \Delta x_{ij} C_{ij} + \Delta y_{ij} S_{ij} > 0$

故问题的约束条件为 $l_{ij}^2 = \frac{(S_{ij}\Delta x_{ij} - C_{ij}\Delta y_{ij})^2}{S_{ij}^2 + C_{iu}^2}$>64 或 $T = \mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ij} = \Delta x_{ij} C_{ij} + \Delta y_{ij} S_{ij} > 0$. 从而数学模型为

$$\min f = \sum_{i=1}^{6} (a_i - a_{i0})^2$$

s.t. $l_{ij}^2 = \frac{(S_{ij}\Delta x_{ij} - C_{ij}\Delta y_{ij})^2}{S_{ij}^2 + C_{iu}^2}$>64

或 $T = \mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ij} = \Delta x_{ij} C_{ij} + \Delta y_{ij} S_{ij} > 0$.

该数学模型是非线性规划问题,一种解法是分割枚举法.即将决策区域进行分割(构造多重循环),对所有可能的解(分割网格点)进行枚举判断,直接得出在一定精度范围内得最优解.

7. 水资源模型

(一)问题

在地区用水规划中,设地区的水源有 n 个, 在第 j 个水源处取除去生物氧(表示污染物) x_j 单位所需的费用为 $f_j(x_j)$.又设 m 个供水点从这些水源取水,且记在水源 j 处每除去一个重量单位的生物氧,能使供水点 i 的水质表征量提高 a_{ij} 个单位,并且在水源 j 处最多能除去生物氧 μ_j 个单位,那末要使供水点 i 处的水质至少使表征量提高 b_i 个单位($(i=1,2,\cdots,m)$,怎样确定排除生物氧的重量使费用为最少?

(二)模型的假设

(1)假设每一个供水点到每一个水源取水的机会均等;

(2)在水源j处除去生物氧跟其他水源没有任何关系,这样费用函数$f_j(x_j)$只是x_j的非线性函数.如果我们在第j个水源处取水除去生物氧0单位,那么所需的费用显然为零($f_j(0)=0$).

(三)模型的建立

因为在水源j处每除去一个单位的生物氧能使供水点i的水质表征量提高a_{ij},所以因为在水源j处除去x_j单位的生物氧能使供水点i的水质表征量提高$a_{ij}.x_j$个单位,因总共有n个水源,所以由假设(1)知, 要使供水点i的水质表征量提高d_i个单位,则$d_i=\sum_{j=2}^{n}a_{ij}.x_j$,又由已知在水源j处最多能除去生物氧μ_j个单位,所以$x_j\le\mu_j$,显然

$x_j\ge 0$,那末要使供水点i的水质表征量提高d_i个单位所需的费用为

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j)$$

我们的问题是要使供水点i的水质表征量提高b_i个单位,怎样确定排除生物氧的重量(x_j)使总非费用最少.

综上所述, 模型如下

$$\min\sum_{j=1}^{n}f_j(x_j)$$

$$\textbf{s.t.}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

$$0\le x_j\le\mu_{j,}\quad j=1,2,\cdots,n.$$

8. **最优价格模型**

企业家通过产品成本和销售情况制定商品的价格,使利润最大.这里讨论产销平衡的最优价格模型,即假定企业产品的产量等于市场销售量.

设产品的单价为 p,成本为 q,产量与销量均是 x,则总销售收入和总成本分别是

$$I = px \qquad C = qx$$

在市场经济条件下,销售量依赖于产品的价格,即 $x = f(p)$

f 称为需求函数,它是减函数.所以,总销售收入 I 和总成本 C 都是价格的 p 函数.

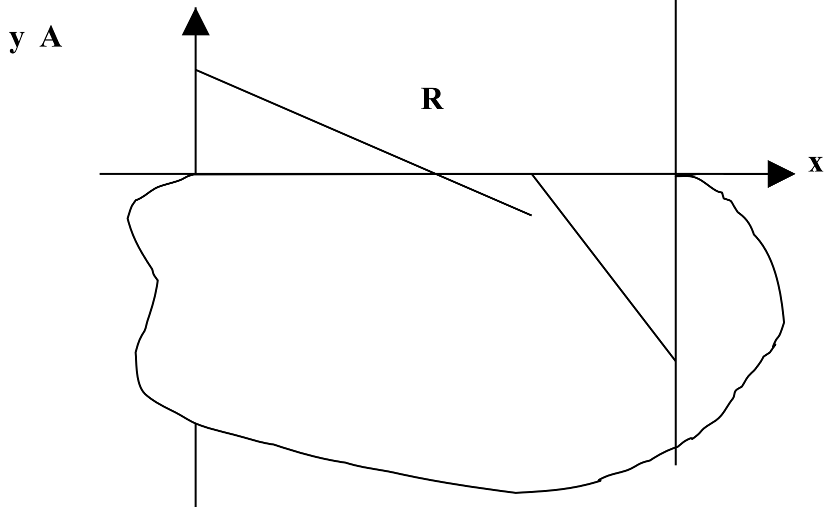
利润 U 可表示为 $U(p) = I(p) - C(p)$

使利润 $U(p)$ 达到最大的最优价格满足 $\dfrac{dU}{dp} = 0$

故最优价格 p^* 满足 $I'(p^*) = C'(p^*)$

$\dfrac{dI}{dp}$ 表示收入关于价格的变化率,数量经济学中称边际收入; $\dfrac{dC}{dp}$ 表示支出对于价格的变化率,称为边际支出. 式 $I'(p^*) = C'(p^*)$ 表明,最大利润在边际收入等于边际支出时达到.

9. **越野赛问题**



越野赛在湖边举行,场地如图所示.出发点在陆地 A 处,终点在湖心岛 B 处. A,B 南北相距 5 公里,东西相距 7 公里.湖岸是一条东西走向的长堤,位于 A 点南侧 2 公里.在比赛中运动员可以自由选择路线,但必须先从 A 点出发跑步到达长堤,再由长堤下水游泳到达终点处.已知某运动员的跑步速度 $v_1=18(km/h)$,游泳的速度 $v_2=6(km/h)$,问他应该在长堤的何处下水才能最快达到终点.

以长堤为轴建立直角坐标系,使 A,B 的坐标分别为 $A(0,2),B(7,3)$.设运动员在 $R(x,0)$ 处下水.根据题意,运动员须选择耗时最少的路线行进.由于两点之间的直线距离最短,运动员在陆地和水中的路线都应取直线.

跑步所用时间 $t_1=|AR|/v_1=\sqrt{x^2+4}/18$,

游泳所用的时间 $t_2=|RB|/v_2=\sqrt{(7-x)^2+9}/6$,

总耗时间 $T(x)=\sqrt{x^2+4}/18+\sqrt{(7-x)^2+9}/6$.

模型为

$$\min T(x)$$

下面是越野赛模型求解的 Matlab 程序和计算结果.

```
function y=fun(x)
y=sqrt(x^2+4)/18+sqrt((7-x)^2+9)/6;
fmin('fun',0,7)
   ans =6.00000215443994
```

由计算结果知,运动员在 $x=6$ 公里处下水用时最少.

习 题 七

1. 某出版社下个月将出版 3 本新书, 印刷过程中将使用 4 种原材料. 但这些原材料的供应将受如下限制:1000 磅纸, 80 磅的墨汁,2000 个机器工作时及 4000 个人力工作时. 合约要求至少印刷甲种书 50 册,乙种和丙种书各 40 册. 下表给出这几种原材料的使用(磅/册 或 小时/册), 甲乙丙三种书的价格分别为 15 元、20 元、16 元,

书	甲	乙	丙
纸	10	15	18
墨汁	0.5	0.8	1.0
机器小时	30	24	20
人力小时	50	45	46

假设所有的印刷的书籍将全部售出, 确定每种书的印刷数量使收益最大.

2. 在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上找出 n 各分点,使这些分点对应的正弦曲线的折线,逼近正弦曲线的误差达到最小, 试建立数学模型.

参考文献

1. 姜启源. 数学模型(第二版).北京:高等教育出版社,1993
2. 姜启源,何青,高立. 数学实验. 北京:高等教育出版社,1999
3. 陈开周. 最优化计算方法.西安:西安电子科技大学出版社,1985
4. 李卫国. 高等数学实验课. 北京:高等教育出版社; 海德堡:施普林格出版, 2000
5. 蔡常丰. 数学模型建模分析.北京:科学出版社,1995
6. 陈义华. 数学模型.重庆:重庆大学出版社,1995
7. J. N. Kapur. Mathematical Modelling. *John Wiley & Sons*, 1988
8. 王信峰,戈西元,邢春峰. 应用数学与计算上机实训. 北京:电子工业出版社,2000
9. 郭锡伯,徐安农.高等数学实验课讲义. 北京:中国标准出版社,1998