第九章 随机模型

前面几章讨论的模型中，有关的量都假定为确定性的，即所研究的问题和与问题有关的因素都是确定的. 然而实际问题中常有许多不确定的因素起作用，特别是随机因素. 下面介绍几类涉及随机变量的模型.

§9.1 库存问题

一、问题的背景与提出

工厂为了稳定的生产，需要贮存一定的原料或零部件；商店为了满足顾客的需要，要有足够的库存商品；银行为了进行正常的营业，需要一定的货币进行周转；医院为了手术的急需，血库必备充足血液. 总之库存问题是普遍存在的. 早在1915年, 哈里斯(Harris)对商业中的库存问题建立了一个简单模型，并求得了最优解, 但未被人们注意. 1918年威尔逊(Wilson)重新得出了哈里斯的公式, 并将其发展. 他们的模型都是确定性的, 二次大战后, 带有随机性因素的库存模型得到研究. 目前, 库存问题的兴趣已转到了多物品、多个库存点的理论.

二、模型假设

(1)只考虑一种物品, 其需求是随机的, 需求量x是非负连续的随机变量，密度函数为$\varphi(x)$, 分布函数为$\Phi(x)$;

(2)只考虑一个库存周期，即在库存周期开始时, 做一次决策, 决定进货量;

(3)瞬时供货;

(4)决策前原有库存量为I, 进货量为Q, 决策后的库存量为$y=I+Q$;

(5)费用包括订货费、存贮费和缺货费. 每次的订购手续费为K, 货物单价为p; 存贮费在周期末结算, 它与期末的库存量成正比, 比例系数为h（单位存贮费）, 缺货费与缺货量成正比, 比例系数为g（单位缺货损失）;

(6)决策的准则是期望总费用最小.

三、建模与求解

库存问题有补充—库存—需求三个环节. 在这一系统中, 若一次进货量多, 进货的次数就少, 进货的费用就少, 但库存量大, 库存费用就大, 造成需求缺货就可能少, 缺货损失就会少; 若一次进货量少, 进货的次数就多, 进货费用就大, 但库存量小, 库存费用就小, 造成需求缺货就可能多, 缺货损失就会大. 如何协调这些矛盾, 使该系统在某种准则下运行最佳. 即如何确定进货量, 使其总费用最小.

进货费用为

$$c_1(y-I)=\begin{cases}K+p(y-I) & y>I\\ 0 & y=I\end{cases}$$

存贮费用为

$$c_2(y-x)=\begin{cases}0 & x\ge y\\ h(y-x) & x<y\end{cases}$$

期望存贮费用为

$$Ec_2(y-x)=\int_0^{\infty}c_2(y-x)\varphi(x)dx=h\int_0^{y}(y-x)\varphi(x)dx$$

缺货损失为

$$c_3(x-y)=\begin{cases}0 & x\le y\\ g(x-y) & x>y\end{cases}$$

期望缺货损失为

$$Ec_3(x-y)=\int_0^{\infty}c_3(x-y)\varphi(x)dx=g\int_y^{\infty}(x-y)\varphi(x)dx$$

记 $L(y)=Ec_2(y-x)+Ec_3(x-y)$ (1)

则总费用为

$$C(y)=\begin{cases}K+p(y-x)+L(y) & y>I\\ L(y) & y=I\end{cases} \qquad (2)$$

目的是求 $\min_y C(y)$

当需要进货时有

$$C(y)=K+p(y-x)+h\int_0^{y}(y-x)\varphi(x)dx+g\int_y^{\infty}(x-y)\varphi(x)dx$$

令 $$\frac{dC(y)}{dx}=p+h\int_0^{y}\varphi(x)dx-g\int_y^{\infty}\varphi(x)dx=0 \qquad (3)$$

若S是使函数达到极小值的点, 则

$$\Phi(S)=\int_0^{S}\varphi(x)dx=\frac{g-p}{h+g} \qquad (4)$$

设s为库存量进货点, 即当初始库存I<s时, 进货至S; 当I≥s不进货. 当I=s时, 不进货. 总费用为L(s), 它应小于y=S（此时进货量为S-s）的总费用K+p(S–s)+L(S), 即

$L(s)\le K+p(S-s)+L(S)$

当I<s时, 进货. 则$L(I)\ge K+p(S-I)+L(S)$, 于是s应满足$L(s)=K+p(S-s)+L(S)$. 即

$$ps+L(s)=K+pS+L(S) \qquad (5)$$

若模型假设(1)改为需求量x是非负离散随机变量, 分布为

$P\{x=k\}=p_k$ (k=0,1,…), $p_k\ge 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$

(1)式可变为

$$L(y)=h\sum_{k=0}^{y}(y-k)p_k+g\sum_{k=y+1}^{\infty}(k-y)p_k \qquad (1)'$$

(4)式可变为

$$\sum_{k=0}^{S-1}p_k\le\frac{g-p}{g+h}\le\sum_{k=0}^{S}p_k \qquad (2)'$$

(5)式变为

$$ps+L(s)\le K+pS+L(S) \qquad (3)'$$

s是满足上式的最小正整数.

四、模型实验

例1 设某公司用某种原料进行生产, 已知该原料每吨单价800元, 订货费60元, 存贮费每吨40元, 缺货损失每吨1015元, 原有存贮量为10吨. 已知对原料需求的概率

P(x=30吨)=0.20, P(x=40吨)=0.20, P(x=50吨)=0.40, P(x=60吨)=0.20

求该公司订购原料的最佳方案.

解 由模型假设有: K=60, h=40, g=1015, I=10, p=800

计算 $$\frac{g-p}{g+h}=\frac{1015-800}{1015+40}\approx 0.204$$

因为

P(30)=0.20<0.204, P(30)+P(40)=0.20+0.20=0.40>0.204

所以S=40, Q=S–I=40–10=30

又因为

K+pS+L(S)=60+800×40+40×[(40–30)×0.2]+1015×[(50–40)×0.4+(60–40)×0.2]=40260

800×30+1015×[(40–30)×0.2+(50–30)×0.4+(60–30)×0.2]=40240≤K+pS+L(S)

所以s=30. 故存贮策略为每个阶段开始时检查存贮量I, 当I>30吨时不必补充存贮; 当I≤30吨时补充存贮量到40吨.

例2 某市石油公司希望确定一种油的存贮策略, 以确定应贮存的油量. 该油的市场需求服从指数分布, 其密度函数为

$$\varphi(\mathrm{x})=\begin{cases}0.000001e^{-0.000001\mathrm{x}} & \mathrm{x}\ge 0\\ 0 & \mathrm{x}<0\end{cases}$$

该种油每近2元, 不需进货费. 由于油库归该公司管辖, 油池灌满与没灌满时的管理费用实际上没有多少差别, 故可以认为存贮费用为零. 如缺货就从邻市调用, 缺货费为3元/斤.

解 由模型假设K=0, h=0, p=2, g=3

计算 $$\frac{g-p}{g+h}=\frac{3-2}{3+0}\approx 0.333$$

由 $\int_0^S 0.000001e^{-0.000001\mathrm{x}}\mathrm{dx}=0.333$, 有 $e^{-0.000001\mathrm{x}}=0.667$, 两端取对数解出

S≈405000

因 ps+L(s)=2s+$\int_0^s 0\times(\mathrm{s-x})\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx}+3\int_s^\infty(\mathrm{x-s})\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx}=2s+\int_s^\infty(\mathrm{x-s})\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

K+pS+L(S)= $\int_0^S 0\times(\mathrm{S-x})\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx}+3\int_S^\infty(\mathrm{x-S})\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx}=2S+\int_S^\infty(\mathrm{x-S})\varphi(\mathrm{x})\mathrm{dx}$

由观察可知, 它有唯一解s=S. 所以当库存下降到405000斤以下就应进货, 使库存达到405000斤. 出现s=S, 是因为进货费为零, 可以频繁进货, 又存贮费为零, 存贮量多一些也不会增加费用.

五、模型讨论

由(3)可以看出, 缺货费g越大, 概率越大, 库存水平S应越大, 这是符合常识的. 根据假设(4), Q=S-s, 由(1), (5)经化简便为

$$(\mathrm{g-p})\mathrm{Q}-(\mathrm{h+g})\int_0^{\mathrm{Q}}\Phi(\mathrm{S-x})\mathrm{dx}=\mathrm{K} \tag{6}$$

在S确定的情况下(S由(4)可确定), 由(6)可求得Q, 进而可求出s. 如

$\varphi(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ \ \Phi(x)=1-e^{-\lambda x},\ \ x\ge 0,\ \lambda>0$

由(4)可解出

$$S=-\frac{1}{\lambda}\ln\frac{p+h}{g+h}$$

由(6)有

$$(g-p)Q-(h+g)\int_0^Q[1-e^{-\lambda(S-x)}]dx=K$$

简化后为

$$e^{\lambda Q}=1+\frac{\lambda K}{p+h}+\lambda Q$$

它可由数值方法或图解法求解, 由上式亦可求得Q的近似解, 当λQ较小时, 取 $e^{\lambda Q}$ 展开到二阶项, 此时可得到 $\frac{\lambda^2}{2}Q^2\approx\frac{\lambda K}{p+h}$, 则

$$Q^*\approx\sqrt{\frac{2K}{\lambda(p+h)}}$$

§9.2 维修问题

一、问题的背景与提出

现实中许多系统在使用过程中, 往往由于维修性问题考虑不周, 而使维修费用过大. 特别是系统突发性故障, 常常会造成巨大的损失, 有时会招致灾难性后果. 因而在故障前进行预防性维修是提高系统可靠性、安全性和经济性的有效措施. 维修问题最早起因与机器维修问题, 后发展为可靠性理论, 是应用概率和应用数理统计的一个重要分支.

二、模型假设

(2)只考虑一个部件的故障, 部件寿命是随机的, 遵从指数分布 $1-e^{-\lambda t}, t\geq 0, (\lambda>0)$;
(3)部件故障需检测才会发现, c_i为一次检测费用, 检测时间忽略不计, 检测时间间隔为T;
(4)若发现部件故障, 则立即更换, c_f为一次更换费用, 更换时间忽略不计. 若发现部件仍正常, 则让部件继续工作;
(5)部件故障没能及时发现, 造成的单位时间损失为c_d;
(6)决策准则是期望费用最小.

三、建模与求解

因部件故障需检测才能知道, 所以检测时间间隔过大, 致使设备经常处于故障状态, 造成故障损失(停工损失或需要使用时不能及时提供的损失); 检测时间间隔过小, 造成不必要的过多检测费用损失. 问题是寻找最优的检测时间间隔T.

设相邻两次更换的时间间隔为一个周期. 当部件寿命t满足nT<t<(n+1)T时，周期长为(n+1)T. 一个周期内的损失为

$c_f+c_i(n+1)+c_d[(n+1)T-t]$

平均周期长= $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}(n+1)T\lambda e^{-\lambda t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)T[e^{-n\lambda T}-e^{-(n+1)\lambda T}]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} Te^{-n\lambda T} = \frac{T}{1-e^{-\lambda T}}$$

一个周期内的期望损失= $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}\{c_f + c_i(n+1) + c_d[(n+1)T - t]\}\lambda e^{-\lambda t}dt$

$$= c_f + \frac{c_i}{1-e^{-\lambda T}} + c_d\left(\frac{T}{1-e^{-\lambda T}} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

单位时间的期望损失

$$C(T) = \frac{\text{一个周期内的期望损失}}{\text{平均周期长}} = c_d + \frac{c_i + (c_f - \frac{c_d}{\lambda})(1-e^{-\lambda T})}{T} \qquad (1)$$

令 $C'(T) = 0$ 有

$$(c_d - \lambda c_f)(1+\lambda T)e^{-\lambda T} = c_d - \lambda c_f - \lambda c_i \qquad (2)$$

满足（2）的T^*为损失最小的检测时间间隔.

四、模型实验

例3 设某系统中一部件的寿命服从分布$1-e^{-0.0001t}, t \ge 0$(单位：小时). 若该部件发生故障没能及时更换, 将造成单位时间损失为7元, 发现故障更换需更换费50000元, 故障需检测才会发现, 一次的检测费为1000元. 如何制定该部件的维修方案.

解 根据模型假设有: λ=0.0001, c_d=7, c_f=50000, c_i=100, 代入（2），用Mathematica软件解超越方程, 求得T^*≈3457小时.

五、模型的分析与讨论

(1) 对于(2)式, 由于$(1+\lambda T)e^{-\lambda T}$是连续严格单调递减的, 所以, $c_d \le \lambda(c_f - c_i)$是，则$T^*=\infty$, 最小损失$C(T^*)=c_d$; 当$c_d > \lambda(c_f - c_i)$时，则有唯一有限解$T^*$, 此时可用数值方法或图解法求解.

(2) 一般来说, 检测时间间隔T不一定是常数, 而应该根据故障出现时刻的概率来确定. 在故障概率大的时候检测间隔短; 故障概率小时检测间隔长. 故T是时间的函数.

§9.3 风险决策的咨询价值

一、问题的背景与提出

人们在处理问题时, 往往面临着抉择, 即需要做出决策. 而对未来信息的不完全了解, 决策要冒一定的风险. 这种在不确定条件下的抉择, 在现实世界中处处存在, 即风险决策. 在风险决策的情况下，人们为了增强决策的可靠性，常常要对未来信息作进一步的咨询（为获得新信息所进行的试验或调查）. 咨询要付出一定的代价, 人们关心的问题是咨询有多大的价值, 是否值得咨询?

二、模型的假设

(1)面临抉择的方案集合为$A=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$, 即策略集合;

(2)未来状态是随机的, 状态集合为$S=\{S_1,S_2,\dots,S_n\}$, 其概率分布为$P\{S_j\}=p_j$,

(3)决策的损益函数为$v_{ij}=V(A_i,S_j)$, 即采取方案A_i在状态S_j时带来的损失或收益；

(4)咨询的结果集合为$I=\{I_1,I_2,\dots,I_l\}$, 咨询信息I的质量为$P(I_k|S_j)=p_{kj}$, 咨询费用为C;

(5)决策准则为期望损益最优.

三、建模与求解

不妨设损益为收益, 咨询前的最大期望收益

$$\max_i E(A_i)=\sum_{j=1}^{n} v_{ij}p_i = E(A_s)$$

由全概率公式和贝叶斯公式有

$$P(I_k)=\sum_{j=1}^{n} P(I_k \mid S_j)P(S_j) \quad k=1,2,\dots,l$$

$$q_{jk}=P(S_j \mid I_k) \quad \text{k=1,2,…,l, j=1,2,…,n,} \quad \sum_{j=1}^{n} q_{jk}=1$$

咨询结果为I_k时, 最大期望收益为

$$\max_i E(A_i \mid I_k)=\sum_{j=1}^{n} q_{jk}v_{ij}=E(A_t \mid I_k) \quad k=1,2,\dots,l$$

咨询后的期望收益为

$$ER=\sum_{k=1}^{l} E(A_t \mid I_k)P(I_k)$$

当$ER-E(A_s)>C$时，值得咨询；当$ER-E(A_s)\leqslant C$时，不值得咨询.

四、模型试验

例4 某公司生产某种产品有三种生产方案A_1,A_2,A_3, 其收益依未来市场而定. 市场对该产品的需求程度是不确定的, 简单地归结为两种情况, 需求高S_1; 需求低S_2. 根据以往的情况估计概率为$P(S_1)=0.6$, $P(S_2)=0.4$, 已知在不同方案下的后果估计列入下表

后果 策略	状　态	
	S_1	S_2
A_1	180 000元	-150 000元
A_2	120 000元	-50 000元
A_3	100 000元	-10 000元

在决策实施以前再进行一次新的市场调查. 调查结果可能得到对市场情况乐观的报告I_1或者得到对市场情况悲观的报告I_2. 根据市场研究小组过去类似的调查经验，该小组的调研水平为$P(I_1|S_1)=0.7$, $P(I_2|S_2)=0.6$. 调查费用为5000元, 是否值得调查?

解 根据假设$v_{11}=180000$, $v_{12}=-150000$, $v_{21}=120000$, $v_{22}=-50000$, $v_{31}=100000$, $v_{32}=-10000$

如果不调查，三个方案的期望收益为

$E(A_1)=0.6\times180000+0.4\times(-150000)=48000$

$E(A_2)=0.6\times120000+0.4\times(-50000)=52000$

$E(A_3)=0.6\times100000+0.4\times(-10000)=56000$

其中方案A_3的期望收益最大，决策便是执行方案A_3.

如果调查，计算概率有

$P(I_1)=0.58$, $P(I_2)=0.42$

q_{11}=P(S_1|I_1)=0.72, q_{21}=P(S_2|I_1)=0.28, q_{12}=P(S_1|I_2)=0.43, q_{22}=P(S_2|I_2)=0.57

咨询结果为I_1时, 最大期望收益为

$$\max_i E(A_i \mid I_1) = \sum_{j=1}^{n} q_{j1} v_{ij} = E(A_1|I_1)=89000$$

咨询结果为I_2时, 最大期望收益为

$$\max_i E(A_i \mid I_2) = \sum_{j=1}^{n} q_{j2} v_{ij} = E(A_3|I_2)=37100$$

咨询后的期望收益为

$$ER = \sum_{k=1}^{l} E(A_t \mid I_k) P(I_k) =67202$$

因ER–E(A_3)=67202–56000=11202>C=5000, 所以值得调查.

五、模型的分析与讨论

(1) 灵敏度分析. 在咨询前, 考察状态概率的估计值对最优策略的选择是否灵敏, 即如果概率值轻微的改变就会影响到最优策略的选择, 则咨询是非常必要的; 相反, 如果概率旨在较大的范围内变化也不会改变原来的决策, 则咨询应停止. 灵敏度分析的步骤是：

a.选择某状态的概率估计作为分析变量；

b.通过计算期望值确定最优策略A_i和次最优策略A_j;

c.令E(A_i)=E(A_j), 并从中解出分析变量的值；

d.把上一步解出的值与原来的估计值相比较，观察改变量对决策是否灵敏，并选择新变量重复上述过程.

以例4为例, 选择状态S_1的概率p作为分析变量，由策略对应的期望值知，最优策略为A_3, 次最优策略为A_2, 令E(A_3)=E(A_2), 即p×100000+(1－p) ×(－10000)=p×120000+(1－p) ×(－50000). 解得：$p = \frac{2}{3} \approx 0.67$, 这说明当$S_1$的概率估计值在0.6到0.67之间都不会改变对$A_3$的选择，状态概率的估计对决策较灵敏. 咨询有必要.

(2) 全信息的价值. 假定咨询可以绝对准确地预报未来出现的状态, 这称为全信息. 通过全信息下的期望收益与未咨询时的最大期望收益值差, 可考察在信息方面有多大的潜力可挖. 如例4，P(S_1|I_1)=1, P(S_2|I_2)=1. 咨询后的期望收益为ER=180000×0.6+(-10000) ×0.4=104000, ER－E(A_3)=104000－56000=48000. 这是全信息的价值，是咨询费用的上界.

§9.4 对策问题

一、问题的背景与提出

在现实世界中，我们经常见到带有竞争或对抗性质的现象. 像体育比赛、市场竞争、军事斗争、政治谈判等，这类现象的共同特点是参加的往往是利益相冲突的双方或几方，为了达到各自的目标和利益，各方必须考虑对手的各种可能的策略，并力图选取对自己最有力或最为合理的策略. 对抗的结果并不只取决于某一方所选取得策略, 而是与各方所选取得策略有关. 这类带有对抗性质的现象, 称为对策现象. 用数学方法来研究对策现象, 就是研究在对策现象中, 对抗各方是否存在着最合理的策略, 以及如何找到这个合理的策略.

二、模型的假设

(1)由两个对策参与者, 即局中人, 局中人集合为I={1,2};

(2)局中人1, 2的策略集合分别为$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m\}$,$S_2=\{\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n\}$;

(3)局中人1的赢得函数为$a_{ij}=H(\alpha_i, \beta_j)$, 局中人2的赢得函数为－$a_{ij}$, 即局中人1赢得$a_{ij}$, 局中人2就失去－$a_{ij;}$

(4)局中人1, 2是理智的.

三、建模与求解

由假设(3)有局中人1的赢得矩阵为$A=(a_{ij})_{m\times n}$.

我们的问题是考虑，在这个对策现象中，是否存在一个局势(α, β), $\alpha\in S_1$, $\beta\in S_2$, 使得局中人1采取α策略是最合理的，居中人2采取β策略是最合理的. 如果存在我们称该局势为平衡局势. 考虑到对策双方的行为是理智的, 谁也不会去冒险, 必然采取最稳妥的策略. 最稳妥的策略是指: 局中人采取各种策略时, 最不利的情况是什么, 而从这些最不利的情况中选择最有利的一种. 即对局中人1来讲最稳妥是考虑$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$所对应的策略，同样对局中人2来讲最稳妥是考虑$\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$所对应的策略.

由此, 当$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}=a_{i^*j^*}$时，平衡局势$(\alpha_{i^*}, \beta_{j^*})$存在，否则平衡局势不存在. 当平衡局势不存在时, 双方都不能连续不变的使用某中策略. 因一方连续的使用某种策略而获利时, 另一方必察觉, 从而改换其策略以对付. 所以双方必须考虑如何随机地使用自己的策略, 从而使对方难以捉摸.

设$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$是局中人1在策略集合$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m\}$上的一个概率分布，即局中人1采取策略$\alpha_i$概率为$x_i$, $x_i\geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i=1$, 称为局中人1的一个混合策略. $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$是局中人2在策略集合$S_2=\{\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n\}$上的一个概率分布，即局中人2采取策略$\beta_j$概率为$y_j$, $y_j\geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j=1$, 称为局中人2的一个混合策略.

由于局中人1,2采取策略是相互独立的, 所以局中人1赢得a_{ij}的概率为x_iy_j, 局中人1的期望赢得为$E(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$此时局中人2的期望赢得为－E(X,Y).

类似于前面的讨论，对局中人1来讲希望达到$\max\limits_i \min\limits_j E(X,Y)$，对于局中人2来讲希望达到$\min\limits_j \max\limits_i E(X,Y)$，则当$\max\limits_i \min\limits_j E(X,Y)=\min\limits_j \max\limits_i E(X,Y)$时，是双方最好的选择.根据对策论的结论, $E(X^*,Y^*)=\max\limits_i \min\limits_j E(X,Y)=\min\limits_j \max\limits_i E(X,Y)$成立的充要条件是, 存在数v, 使得$X^*$,$Y^*$分别是不等式组

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v & j = 1, 2, ..., \mathrm{n} \\
\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 & \\
x_i \geq 0 & i = 1, 2, ..., \mathrm{m}
\end{cases}
\tag{1}
$$

和不等式组

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v & i = 1,2,..., m \\
\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 & \\
y_j \geq 0 & j = 1,2,..., n
\end{cases}
\tag{2}
$$

的解，且v=E(X^*,Y^*).

如果局中人1的赢得矩阵A=(a_{ij})的每一个数都加上一个常数k以后，赢得矩阵就变为(a_{ij}+k). 由上面（1），（2）两式，显然两个局中人的最优策略不会改变，只是值由v变成v+k.. 所以我们不妨设a_{ij}>0, (I=1,2,…,m, j=1,2,…,n), v>0. 这样不等式（1），（2）就可改写成

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} a_{ij} (\frac{x_i}{v}) \geq 1 \quad \mathrm{j} = 1,2,..., \mathrm{n},\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,..., m \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\frac{y_j}{v}) \leq 1 \quad \mathrm{i} = 1,2,..., \mathrm{m},\ \mathrm{y}_{\mathrm{j}} \geq 0,\ j = 1,2,..., n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

将不等式组（3）变成一组对偶线性规划问题：

找 $X' = (x_1', x_2', ..., x_m')$ 满足

$$
\min \sum_{i=1}^{m} x_i'
$$

$$
\begin{cases}
\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} x_i' \geq 1 & j = 1,2,..., n \\
x_i' \geq 0 & i = 1,2,..., m
\end{cases}
\tag{4}
$$

找 $Y' = (y_1', y_2', ..., y_n')$ 满足

$$\max \sum_{j=1}^{n} y'_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y'_j \le 1 & i = 1,2,\dots,m \\ y'_j \ge 0 & j = 1,2,\dots,n \end{cases} \tag{5}$$

由（4），（5）即可找到局中人1,2的最好选择X^*,Y^*.

四、模型试验

例5 某公司计划将30万元投资与三种不同的行业A_1、A_2、A_3. 一年后所得利润(单位:万元)将随该年内的经济发展而定, 对不同的经济状况, 这笔投资可能获得的利润预测如下:

状态 利润 行业	经济展望		
	不良	一般	良好
A_1	2	0	2
A_2	0	3	1
A_3	1	2	1

试问该公司应如何决定其投资方案.

解 我们将投资公司看作局中人1, 三种行业A_1、A_2、A_3看作三个策略α_1、α_2、α_3, 将经济展望的不同状态看作局中人2的三个策略β_1、β_2、β_3. 就可将此问题看作一个对策问题.

根据上面的讨论, 我们只需解线性规划

$$\min f = \sum_{i=1}^{3} x'_i \qquad\qquad \max g = \sum_{j=1}^{3} y'_j$$

$$\begin{cases} 2x'_1 + x'_3 \ge 1 \\ 3x'_2 + 2x'_3 \ge 1 \\ 2x'_1 + x'_2 + x'_3 \ge 1 \\ x'_1, x'_2, x'_3 \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 2y'_1 + 2y'_3 \le 1 \\ 3y'_2 + y'_3 \le 1 \\ y'_1 + 2y'_2 + y'_3 \le 1 \\ y'_1, y'_2, y'_3 \ge 0 \end{cases}$$

用线性规划方法可解的

$$x'_1 = \frac{1}{4}, x'_2 = 0, x'_3 = \frac{1}{2}, f = \frac{3}{4}, y'_1 = \frac{1}{4}, y'_2 = \frac{1}{4}, y'_3 = \frac{1}{4}, g = \frac{3}{4}$$

所以局中人1的最优策略为$X^* = (\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$, 局中人2的最优策略为$Y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, 矩阵对策的值为$v = \frac{4}{3}$.

由此可知，在不能肯定下一年的经济状况的条件下，该公司的最合理的投资方案为：向A_1投资$\frac{1}{3} \times 30 = 10$（万元），向$A_3$投资$\frac{2}{3} \times 30 = 20$（万元），不向$A_2$投资. 该公司至少可获得利润$\frac{4}{3}$(万元).

五、模型的分析与讨论

当矩阵对策的赢得矩阵阶数较高时, 解(4)、（5）线性规划的计算量是较大的. 考虑到频率是概率的近似, 局中人1的一个混合策略X=($x_1,x_2,\ldots,x_m$)，可设想成当两个局中人多次重复进行对策时，局中人1分别采取策略$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m$的频率. 同样, Y=($y_1,y_2,\ldots,y_n$) 可设想成局中人2分别采取策略$\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$的频率. 于是, 求解矩阵对策可以用一种近似的方法—迭代法. 其基本思想是: 假设两个局中人反复进行对策多次, 在每一局中各局中人都从的策略即中选取一个使对方获得最不利结果的策略, 即第k局对策策略的选取欲使对手在前k-1局中的累计所得（或累计所失）最少（或最多）. 具体做法是: 在第1局种, 从两个局中人中任选一人, 例如局中人1, 让他先采取任意一个策略, 例如α_i. 然后局中人2随之采取策略β_j使采取了α_i的局中人1的所得为最少. 在第2局种, 局中人1认为局中人2还将采取β_j,故采取某一策略α_k使局中人2所失为最多, 然后局中人2有采取某一策略, 使局中人1在前两局中的累计赢得为最少. 在第3局种, 局中人1又采取某一策略使局中人2在前两局中的累计所失为最多, 然后局中人2又采取某一策略使局中人1在前两局中的累计所得为最少. 以后各局均照此方式对策下去, 直到迭代的结果达到一定的满意程度为止. 当迭代结束时, 我们就用局中人各策略在已进行的N局对策(N步迭代)中出现的频率分布作为最优混合策略中概率分布的一个近似.

设$\overline{X}^k=(\overline{x}_1^k,\overline{x}_2^k,\ldots,\overline{x}_m^k)$, $\overline{Y}^k=(\overline{y}_1^k,\overline{y}_2^k,\ldots,\overline{y}_n^k)$, 其中$\overline{x}_i^k$ (i=1,2,…,m), $\overline{y}_j^k$ (j=1,2,…,n)分别表示局中人1,2在第k局对策中取策略α_i, β_j的次数. $X^k=\frac{1}{k}\overline{X}^k$, $Y^k=\frac{1}{k}\overline{Y}^k$ 分别为X^*,Y^*的近似值. 算法如下:

(1). 给定N, k:=1, 任取$\overline{X}^1=(0,0,\ldots,1,0,\ldots0),\overline{x}_{i_1}^1=1$.

(2). 求$\min\limits_j(\sum\limits_{i=1}^m a_{ij}\overline{x}_i^1)=\min\{a_{i_1 1},a_{i_1 2},\ldots,a_{i_1 n}\}=a_{i_1 j_1}$得$\overline{Y}^1=(0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)$.

(3). 一般地，设已求得$\overline{X}^{k-1}和\overline{Y}^{k-1}$

如果$\max\limits_i(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\overline{y}_j^{k-1})=\sum\limits_{j=1}^n a_{i_k j}\overline{y}_j^{k-1}$，则令$\overline{x}_i^k=\begin{cases}\overline{x}_i^{k-1} & 如果 i\neq i_k\\ \overline{x}_i^{k-1}+1 & 如果 i=i_k\end{cases}$

如果$\min\limits_j(\sum\limits_{i=1}^m a_{ij}\overline{x}_i^k)=\sum\limits_{i=1}^m a_{ij_k}\overline{x}_i^k$，则令$\overline{y}_j^k=\begin{cases}\overline{y}_j^{k-1} & 如果 j\neq j_k\\ \overline{y}_j^{k-1}+1 & 如果 j=j_k\end{cases}$

$x_i^k=\frac{1}{k}\overline{x}_i^k(i=1,2,\ldots,m)$, $y_j^k=\frac{1}{k}\overline{y}_j^k(j=1,2,\ldots,n)$

(4). 如果k=N, 计算结束. 如果k<N, 转向第3步.

以例5为例, 取N=30, $\overline{X}^1=(1,0,0)$, $X^{30}=(\frac{11}{30},\frac{3}{30},\frac{16}{30})$, $Y^{30}=(\frac{20}{30},\frac{10}{30},0)$.

§9.5 试验设计问题

一、问题的背景与提出

在科学研究和生产中，无论是改革旧工艺，还是研制新产品，都需要做试验. 如果作全面试验的话, 试验的次数往往很多. 如某问题中所考察的指标受8个因素的影响, 若每个因素取5个水平, 则要作全面试验的话, 需作5^8=390625次试验, 显然这根本不可能. 于是, 如何安排试验是一个很值得研究的问题. 试验安排的好, 次数不多就能掌握其内在规律, 得到正确的结果; 试验安排的不好, 往往作了很多次试验, 仍然得不出明确的结论. 因此, 做试验要讲究如何安排试验, 即试验设计. 通过试验设计给出最好的工艺条件.

正交试验设计法是得到广泛应用的一种试验设计方法. 它是借助预先设计好的“正交表”来安排试验和对数据进行统计分析的一种试验设计法. 下面我们不准备讨论正交表的构造, 只考虑如何使用正交表和安排试验和进行统计分析.

二、模型的假设

（1）只考虑一个指标f, 指标值越大越好；
（2）影响指标的因素至少在两个以上；
（3）不考虑因素之间的作用.

三、建模与求解

首先分析问题, 确定影响指标的主要因素及各因素的变化范围(即因素水平). 若确定影响指标的主要因素有s个，每个因素有t个水平. 其次选取正交表, 因每个因素有t个水平，所以应选取正交表$L_n(t^m)$（m≥s）.将各因素随机安排在表上方的各列中. 根据正交表, 可得试验次数为n, 每行为确定水品下的一次试验，即一次试验方案. 记T_{ij}为第j列第i水平. 最后记录各次实验结果y_i（I=1,2,…,n），作极差或方差分析. 若无空列作极差分析, 有空列作方差分析.

极差分析:

计算每一列第i水平所对应的实验结果之和. 记$|T_{ij}|$为第j列第i水平所对应的实验结果之和. 取每一列极差：

$$R_j=\max_i|T_{ij}|-\min_i|T_{ij}| \qquad (1)$$

由极差大小排出因素的主次$R_{j1}\leq R_{j2}\leq\ldots\leq R_{jm}$, 即各因素对指标的影响. 选取较好的水平, 若 $\max_i|T_{ij}|=|T_{i_\alpha j}|$, 则选取第j因素的$i_\alpha$水平. 则最好的工艺条件为

$$\prod_{k=1}^{s}T_{i_\alpha jk}=T_{i_\alpha j1}T_{i_\alpha j2}\ldots T_{i_\alpha js}$$

方差分析:

计算 $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $r=\frac{n}{t}$

$$\begin{cases} S_j = r\sum_{i=1}^{t}(\frac{|T_{ij}|}{r}-\bar{y}) & j=1,2,\ldots,m \\ f_j = t-1 & j=1,2,\ldots,m \end{cases} \tag{2}$$

由S_j的大小排出因素的主次, 对各因素作用做显著性检验. 若某一列未安排因素, 则称该列的S_j为误差平方和. 将所有误差平方和$S_{j1},S_{j2},\ldots,S_{jl}$及$f_{j1},f_{j2},\ldots,f_{jl}$相加，记为

$$S_e=\sum_{k=1}^{l}S_{jk}\ ,f_e=\sum_{k=1}^{l}f_{jk}$$

构造统计量

$$F_j \triangleq \frac{S_j/f_j}{S_e/f_e} \tag{3}$$

当各因素作用不显著时, $F_j \sim F(f_j, f_e)$ $(j=1,2,\ldots,s)$. 于是，对于给定的显著水平α，当F_j值大于$F_{1-\alpha}(f_j, f_e)$时，则在检验水平α下，推断该因素作用显著，否则认为不显著. 由此排出各因素的显著性的主次$F_{j1},F_{j2},\ldots,F_{js}$, 若$\max_i |T_{ij}|=|T_{i_\alpha j}|$, 则选第j因素的$i_\alpha$水平. 故最好的工艺条件为

$$\prod_{k=1}^{s}T_{i_\alpha jk}=T_{i_\alpha j1}T_{i_\alpha j2}\ldots T_{i_\alpha js}.$$

四、模型试验

例6 某种钢材的强度受三个因素的影响: 淬火温度A、回火温度B和回火时间C. 根据经验,三种因素的变化范围为

因素 水平	淬火温度A (℃)	回火温度B (℃)	回火时间C （″）
1	840	410	40
2	850	430	60
3	860	450	80

试确定此钢材的热处理工艺条件.

解 因这是一个三水平的试验问题, 故应选取$L_n(3^m)$型的正交表. 由于只有三个因素A,B,C, 故选$L_9(3^4)$表. 将因素填在表上方, 如将A,B,C分别填在$L_9(3^4)$的第1、第3和第4列的表头，就得到所需试验方案. 共需做9次试验. 假设9次试验的结果为:190、200、175、165、183、212、196、178、187. 计算有关数据见下表

序号	A		B	C	数据
试验号	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	$y_1=190$
2	1	2	2	2	$y_2=200$
3	1	3	3	3	$y_3=175$
4	2	1	2	3	$y_4=165$
5	2	2	3	1	$y_5=183$
6	2	3	1	2	$y_6=212$
7	3	1	3	2	$y_7=196$
8	3	2	1	3	$y_8=178$
9	3	3	2	1	$y_9=187$

$\|T_{1j}\|$	565	551	580	560	$\bar{y}=187.3$
$\|T_{2j}\|$	560	561	552	608	
$\|T_{3j}\|$	561	574	554	518	
R_j	5	23	28	90	
S_j	4.67	88.67	162.67	1352	
f_j	2	2	2	2	
F_j	0.05		1.86	15.23	

用极差分析法可知：回火时间C是强度的主要因素，最好的工艺条件为$A_1B_1C_2$.

用方差分析法可知: 回火时间C显著，回火温度B和淬火温度A不显著. 最好的工艺条件为$A_1B_1C_2$.

五、模型的分析与讨论

(1) 分析各因素水平变化时指标变化的情况.

a. 若$|T_{ij}|$严格单调变化较快，则说明第j因素随着水平i的变化，指标值上升幅度较大，由此，若还希望进一步提高指标值的话，则可取第j因素更高的水平做进一步的探索试验, 以便能提高指标值；

b. 若$|T_{ij}|$先递增后递减，则说明在极大点附近已是最好的水平了；

c. 若$|T_{ij}|$单调变化较慢，则说明第j因素随着水平i的变化，指标值变化不大，若该因素对指标影响甚微的话，可根据节约、方便等方面的考虑任取一个水平.

(2) 做因素显著性检验时, 可先计算$\overline{S}_j = S_j / f_j$, $\overline{S}_j = S_e / f_e$. 当$\overline{S}_j < \overline{S}_j$时，$S_j$就可以当作误差平方和并入$S_e$中去，将全部可以当作误差的$S_j$皆并入$S_e$后得到新的误差平方和，记为$S_e^{\Delta}$. 相应的自由度$f_j$也并入$f_e$, 记为$f_e^{\Delta}$. 然后再对其他的$S_j$用$F_j^{\Delta} \triangleq \dfrac{S_j / f_j}{S_e^{\Delta} / f_e^{\Delta}}$做检验. 各因素作用不显著时, 有$F_j^{\Delta} \sim F(f_j, f_e^{\Delta})$. 与适当$F_j^{\Delta} > F_{1-\alpha}(f_j, f_e^{\Delta})$时, 则以检验水平α推断该因素影响显著; 否则认为不显著.

以例6为例, 第2列为空列, 因此S_e/f_e=88.67/2=44.34, 而第1列的S_1/f_1=4.67/2=2.34比$\overline{S}_e$小，故将此列并入误差，有S_e^{Δ}=S_e+ S_1=88.67+4.67=93.34, f_e^{Δ} = f_e+ f_1=2+2=4, $F_3^{\Delta} = \dfrac{162.67/2}{93.34/4} = 3.49$, $F_4^{\Delta} = \dfrac{1352/2}{93.34/4} = 28.97$, $F_{0.1}(2,4)$=4.32. 故回火时间C显著，回火温度B不显著.

习　题　九

1．某商店要订购一批商品零售，设购进价为c，售出价p，一次订购手续费k，随机需求量x的密度函数为f(x)，每件商品的贮存费h. 问如何确定订购量才能使商店的平均利润最大. 这个平均利润是多少. 为使这个平均利润为正值, 需要对订购费k加什么限制?

2. 某企业对于某中材料的月需求量为随机变量，具有如下表概率分布：

需求量（吨）	50	60	70	80	90	100	110	120
P(x=k)	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.10	0.10	0.05

每次订货费为500元，每月每吨保管费50元，每月每吨缺货费为1500元，每吨材料的购价为1000元. 该企业应如何进货?

实施结果 咨询意见	成功	失败
可以投资	152	3
不宜投资	38	7

3. 某人有5万元资金, 若用于某项投资, 估计成功率为0.9, 一年后可获利20%; 一旦失败, 则将丧失全部资金. 若把资金存入银行, 则可稳得年利6%. 为获得更多信息, 可求助于咨询公司, 咨询费500元. 据统计, 咨询公司过去200次类似咨询的情况如表所示, 试问此人将如何使用这笔资金.
4. 某公司有一份拥有钻探某处油井权力的租约. 该公司可自行钻井开采. 也可将此租约出售, 从而获利5万元. 钻井的可能结果如下表所示. 假定有一试验需花费5千元, 可以确定地下构层类型. 局以往统计, 有25口井随机择自此地附近. 其情况如下表所示. 如试验不加防范, 将有90%的可能会泄密, 出现这种情况此租约就不再能出售; 如严加防范需花费7千元, 能使泄密的可能性降至10%. 时对此做出决策.

可能的结果	概率	获利(万元)	构层 井类	I	II	III
干井	0.16	-15	干井	4	0	0
气井	0.40	5	气井	1	9	0
油气井	0.24	10	油气井	0	6	0
油井	0.20	20	油井	0	0	5

	β_1	β_2	β_3
α_1	4	-1	5
α_2	0	5	3
α_3	3	3	7

5. 一工厂, 用三种不同的设备α_1, α_2, α_3加工三种不同的产品β_1, β_2, β_3, 已知这三种设备分别加工三种产品时, 单位时间内创造的价值如下表所示. 其中负值表示设备消耗大于所创造的价值. 试求一组合理的加工方案.

类型 疗效 方案	I	II	III	IV	V
A_1	0.5	0.5	0.5	0.51	0.1
A_2	1	0.3	0	0	0.1
A_3	1	0.5	0	0	1

6. 某种疾病, 知道是由五种不同类型细菌中的一种所引起的, 但目前尚不能肯定是有哪一种所引起的. 对此医生针对五种不同情况, 使用三种治疗方案, 其疗效如下表所示. 问医生应采取怎样的治疗方案最有利.

7. 某毛纺厂为了摸索洗呢工艺对织物弹性的影响, 从而找出较优洗呢工艺, 进行了二水平四因素试验, 因素间的交互作用均可忽略. 考核指标为织物弹性(次数越多越好), 因素水平如下表. 选用表$L_8(2^7)$, 因素A、B、C、D依次排在第1、2、4、7列上. 8次实验结果为:150,135,156,147,130,131,144,131. 使用方差分析法选出较优工艺及因素的主次顺序(取检验水平α=0.05)

因素 水平	A 洗呢时间	B 洗呢温度	C 洗涤剂浓度	D 煮呢槽规格
1 2	20 30	30 50	5 10	单槽 双槽

参 考 文 献

[1] 姜启源，数学模型，高等教育出版社，1993.
[2] 徐光辉等，运筹学基础手册，科学出版社，1999.
[3] 刘来福，曾文艺,数学模型与数学建模，北京师范大学出版社，1997.
[4] 雷功炎，数学模型讲义，北京大学出版社，1999.
[5] 数学建模试验，西安交通大学出版社，1999.
[6] 吴翊等，应用数理统计，国防科技大学出版社，1995.