

第二章初等数学方法建模

现实世界中有很多问题，它的机理较简单，用静态、线性或逻辑的方法即可建立模型，使用初等的数学方法，即可求解，我们称之为初等数学模型。本章主要介绍有关自然数，比例关系，状态转移，及量纲分析等建模例子，这些问题的巧妙的分析处理方法，可使读者达到举一反三，开拓思路，提高分析、解决实际问题的能力。

第一节 有关自然数的几个模型

1.1 鸽笼原理

鸽笼原理又称为抽屉原理，把 N 个苹果放入 $n(n < N)$ 个抽屉里，则必有一个抽屉中至少有 2 个苹果。

问题 1：如果有 N 个人，其中每个人至多认识这群人中的 $n(n < N)$ 个人（不包括自己），则至少有两个人所认识的人数相等。

分析：我们按认识人的个数，将 N 个人分为 $0, 1, 2, \dots, n$ 类，其中 $k(0 \leq k \leq n)$ 类，表示认识 k 个人，这样形成 $n+1$ 个“鸽笼”。若 $n < N-1$ ，则 N 个人分成不超过 $N-1$ 类，必有两人属于一类，也即有两个人所认识的人数相等；若 $n = N-1$ ，此时注意到 0 类和 N 类必有一个为空集，所以不空的“鸽笼”至多为 $N-1$ 个，也有结论成立。

问题 2：在一个边长为 1 的正三角形内最多能找到几个点，而使这些点彼此间的距离大于 0.5。

分析：边长为 1 的正三角形 $\triangle ABC$ ，分别以 A, B, C 为中心，0.5 为半径圆弧，将三角形分为四个部分（如图 1-1），则四部分中任一部分内两点距离都小于 0.5，由鸽笼原理知道，在三角形内最多能找到四个点，使彼此间距离大于 0.5，且确实可找到如 A, B, C 及三角形中心四个点。

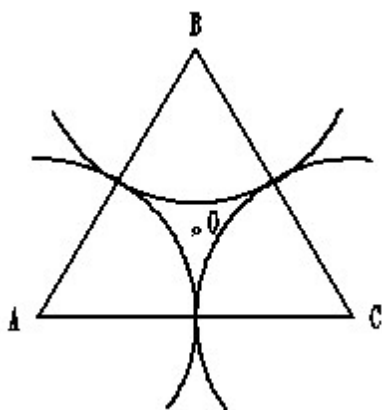


图 1—1

问题 3：能否在 8×8 的方格表 $ABCD$ 的各个空格中，分别填写 1, 2, 3 这三个数中的任一个，使得每行，每列及对角线 AC, BD 的各个数的和都不相同？为什么？

分析：若从考虑填法的种类入手，情况太复杂；这里我们注意到，方格表中行、列及对角线的总数为18个；而用1,2,3填入表格，每行、列及对角线都是8个数，8个数的和最小为8，最大为24，共有 $24-8+1=17$ 种；利用鸽笼原理，18个“鸽”放入17个“鸽笼”，必有两个在一个“鸽笼”，也即必有两个和相同。所以题目中的要求，无法实现。

思考题：在一个边长为1的正三角形内，若要彼此间距离大于 $\frac{1}{n}$ ，最多能找到几个点？

1.2 “奇偶校验”方法

所谓“奇偶校验”，即是如果两个数都是奇数或偶数，则称这两个数具有相同的奇偶性；若一个数是奇数，另一个数是偶数，则称具有相反的奇偶性。在组合问题中，经常使用“奇偶校验”考虑配对问题。

问题1（棋盘问题）：假设你有一张普通的国际象棋盘，一组对角上的两个方格被切掉，这样棋盘上只剩下62个方格（如图1—2）。若你还有31块骨牌，每块骨牌的大小为 1×2 方格。试说明用互不重叠的骨牌完全覆盖住这张残缺的棋盘是不可能的。

分析：关键是对图1—2的棋盘进行黑白着色，使得相邻的两个方格有不同的颜色；用一块骨牌覆盖两个方格，必是盖住颜色不同的方格。我们计算一下黑白着色棋盘的黒格，白格个数，分别为30和32；因此不同能用31块骨牌盖住这张残缺的棋盘。用奇偶校验法，我们可以把黑色方格看成奇数方格，白色方格看成偶数方格；因为奇偶个数不同，所以不能进行奇偶配对，故题中要求的作法是不可能实现的。

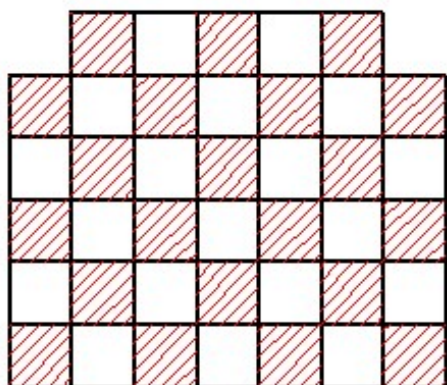


图 1-2

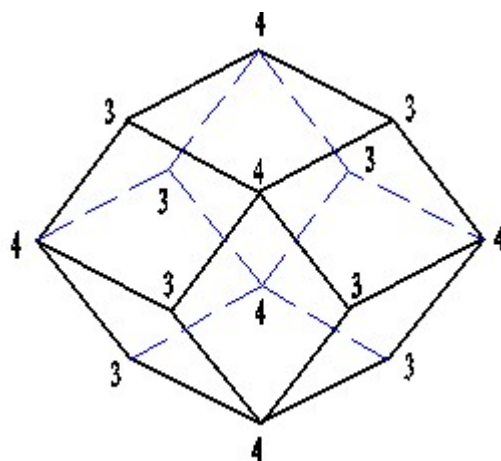


图 1-3

问题2（菱形十二面体上的H路径问题）：沿一菱形十二面体各棱行走，要寻找一条这样的路径它通过各顶点恰好一次，该问题被称为Hamilton路径问题。

分析：我们注意到菱形十二面体每个顶点的度或者为3或者为4，所谓顶点的度是指通过这一顶点的棱数，如图1—3；且每3度顶点刚好与3个4度顶点相连，而每个4度顶点刚好与4个3度顶点相连。因此一个Hamilton路径必是3度与4度顶点交错，故若存在Hamilton路径，则3度顶点个数，与4度顶点个数要么相等，要么相差1。用奇偶校验法3度顶点为奇数顶点，4度顶点为偶数顶点，奇偶配对，最多只能余1个；而事实上菱形十二面体中，有3度顶点8个，4度顶点6个；可得结论，菱形十二面体中不存在Hamilton路径。

思考题：1、设一所监狱有64间囚室，其排列类似 8×8 棋盘，看守长告诉关押在一个角落里的囚犯，只要他能够不重复地通过每间囚室到达对角的囚室（所有相邻囚室间都有门相通），他将获释，问囚犯能否获得自由？

2、某班有49个学生，坐成7行7列，每个坐位的前后左右的坐位叫做它的邻座，要让49个学生都换到他的邻座上去，问是否有这种调换位置的方案？

3 自然数的因子个数与狱吏问题

令 $d(n)$ 为自然数 n 的因子个数, 则 $d(n)$ 有的为奇数, 有的为偶数, 见下表:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
d(n)	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

我们发现这样一个规律, 当且仅当 n 为完全平方数时, $d(n)$ 为奇数; 这是因为 n 的因子是成对出现的, 也即 $n = ab$; 只有 n 为完全平方数, 才会出现 $n = a^2$ 的情形, $d(n)$ 才为奇数。

下面我们利用上述结论研究一个有趣的问题。

狱吏问题: 某王国对囚犯进行大赦, 让一狱吏 n 次通过一排锁着的 n 间牢房, 每通过一次按所定规则转动门锁, 每转动一次, 原来锁着的被打开, 原来打开的被锁上; 通过 n 次后, 门锁开着的, 牢房中的犯人放出, 否则犯人不得获释。转动门锁的规则是这样的, 第一次通过牢房, 要转动每一把门锁, 即把全部锁打开; 第二次通过牢房时, 从第二间开始转动, 每隔一间转动一次; 第 k 次通过牢房, 从第 k 间开始转动, 每隔 $k-1$ 间转动一次; 问通过 n 次后, 那些牢房的锁仍然是打开的?

问题分析: 牢房的锁最后是打开的, 则该牢房的锁要被转动奇数次; 如果把 n 间牢房用 $1, 2, \dots, n$ 编号, 则第 k 间牢房被转动的次数, 取决于 k 是否为 $1, 2, \dots, n$ 整除, 也即 k 的因子个数, 利用自然数因子个数定理, 我们得到结论: 只有编号为完全平方数的牢房门仍是开着的。

4 相识问题

问题: 在 6 人的集会上, 总会有 3 人互相认识或互相不认识。

分析: 设 6 人为 A_1, A_2, \dots, A_6 ; 下面分二种情形, 1. A_1 至多只和两个人相识, 不妨设 A_1 不认识 A_2, A_3, A_4 ; 若 A_2, A_3, A_4 互相都认识, 则结论成立, 若 A_2, A_3, A_4 中有两人不认识, 则加上 A_1 , 有三人互不相识. 2. A_1 至少和三人相识, 不妨设 A_1 认识 A_2, A_3, A_4 ; 若 A_2, A_3, A_4 互不相识结论成立, 若 A_2, A_3, A_4 有两人相识, 加上 A_1 则有三人的互相认识。这样, 我们就证明了结论成立, 这个问题的讨论, 我们也可以采用几何模拟的方法, 如图 1—4

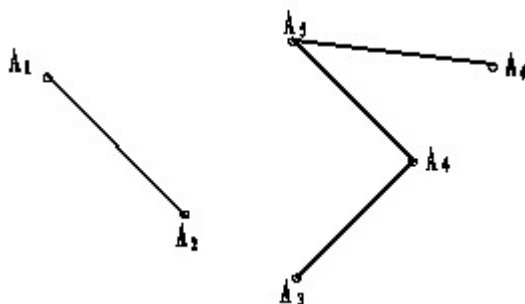


图 1-4

在平面上画出六个点, 表示 6 个人, 两点间存在连线, 表示两人相识; 只需说明, 图中必有三点组成三角形 (有三人相识), 或有三点之间设有一条连线 (三人互不相识) 即可,

思考题:

1. 9 个人的集会中一定有 3 个人互相认识或 4 个人互相不认识
2. 14 个人的集会中一定有 3 个人互相认识或者 5 个人互相不认识
3. 17 个科学家中,每个科学家都和其他科学家通信, 他们之间讨论 3 个题目, 且任意两个科学家之间只讨论 1 个题目, 证明其中至少有 3 名科学家, 他们互相通信中讨论的是同一题目

第二节 状态转移问题

本节介绍两种状态转移问题, 解决这种问题的方法,有状态转移法, 图解法及用图的邻接矩阵等。

2. 1 人、狗、鸡、米问题

人、狗、鸡、米均要过河, 船上除 1 人划船外, 最多还能运载一物, 而人不在场时, 狗要吃鸡, 鸡要吃米, 问人, 狗、鸡、米应如何过河?

分析: 假设人、狗、鸡、米要从河的南岸到河的北岸, 由题意, 在过河的过程中, 两岸的状态要满足一定条件, 所以该问题为有条件的状态转移问题。

1. 允许状态集合

我们用 (w, x, y, z) , $w, x, y, z=0$ 或 1 , 表示南岸的状态, 例如 $(1, 1, 1, 1)$ 表示它们都在南岸, $(0, 1, 1, 0)$ 表示狗, 鸡在南岸, 人, 米在北岸; 很显然有些状态是允许的, 有些状态是不允许的, 用穷举法可列出全部 10 个允许状态向量,

$(1, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 0) (1, 1, 0, 1) (1, 0, 1, 1) (1, 0, 1, 0)$

$(0, 0, 0, 0) (0, 0, 0, 1) (0, 0, 1, 0) (0, 1, 0, 0) (0, 1, 0, 1)$

我们将上述 10 个可取状态向量组成的集合记为 S , 称 S 为允许状态集合

2、状态转移方程

对于一次过河, 可以看成一次状态转移, 我们用向量来表示决策, 例 $(1, 0, 0, 1)$ 表示人, 米过河。令 D 为允许决策集合,

$$D=\{(1, x, y, z): x+y+z=0 \text{ 或 } 1\}$$

另外, 我们注意到过河有两种, 奇数次的为从南岸到北岸, 而偶数次的为北岸回到南岸, 因此得到下述转移方程,

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^k d_k \quad \text{-----}(2.1)$$

$S_k = (w_k, x_k, y_k, z_k)$ 表示第 k 次状态, $d_k \in D$ 为决策向量.

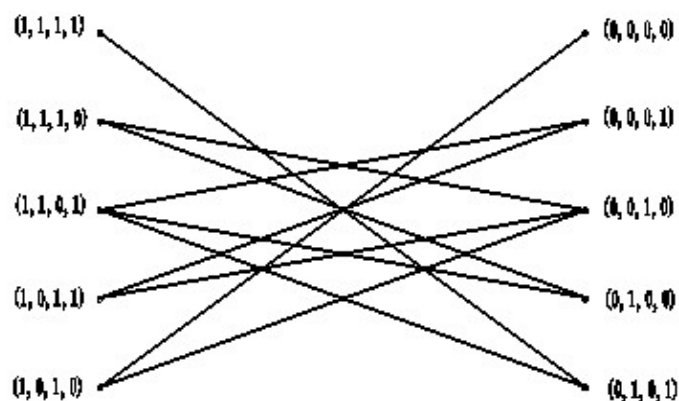


图 2-1

2. 人、狗、鸡、米过河问题，即要找到 $d_1, d_2, \dots, d_{m-1} \in D$, $S_0, S_1, \dots, S_m \in S$ $S_0 = (0,0,0,0)$

$S_m = (1,1,1,1)$ 且满足 (2.1) 式。

下面用状态转移图求解

将 10 个允许状态用 10 个点表示，并且仅当某个允许状态经过一个允许决策仍为允许状态，则这两个允许状态间存在连线，而构成一个图，如图 2—1，在其中寻找一条从 $(1, 1, 1, 1)$ 到 $(0, 0, 0, 0)$ 的路径，这样的路径就是一个解，可得下述路径图，

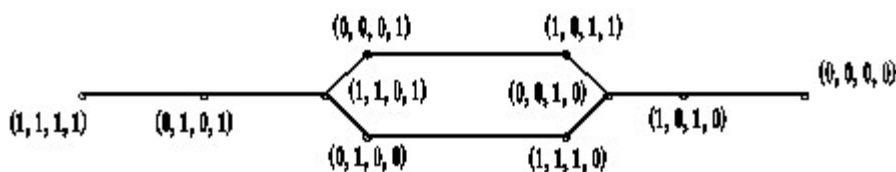


图 2-2

由图 2—2，有两个解都是经过 7 次运算完成，均为最优解

2. 2 商人过河问题

三名商人各带一个随从乘船渡河，现有一只小船只能容纳两个人，由他们自己划行，若在河的任一岸的随从人数多于商人，他们就可能抢劫财物。但如何乘船渡河由商人决定，试给出一个商人安全渡河的方案。

首先介绍图论中的一个定理

G 是一个图， $V(G)$ 为 G 的顶点集， $E(G)$ 为 G 的边集。设 G 中有 n 个顶点 v_1, v_2, \dots, v_n ;

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & v_i v_j \notin E(G) \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

定理 1: 设 $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵, 则 G 中从顶点 v_i 到顶点 v_j , 长度为 k 的道路的条数为 A^k 中的 i 行 j 列元素.

证: 对 k 用数学归纳法

$k=1$ 时, 显然结论成立; 假设 k 时, 定理成立, 考虑 $k+1$ 的情形.

记 A^l 的 i 行 j 列元素为 $a_{ij}^{(l)}$ $l \geq 2$, 因为 $A^l \cdot A = A^{l+1}$, 所以

$$a_{ij}^{(l+1)} = a_{i1}^l a_{1j} + a_{i2}^l a_{2j} + \cdots + a_{in}^l a_{nj} \quad (2.2)$$

而从 v_i 到 v_j 长 $k+1$ 的道路无非是从 v_i 经 k 步到某项 v_l $1 \leq l \leq n$, 再从 v_l 走一步到 v_j ; 由归纳假设从 v_i 到 v_l 长为 k 的道路共计 a_{il}^k 条, 而从 v_l 到 v_j 长为 1 的道路为 a_{lj} 条, 所以长为 $k+1$ 的从 v_i 经 k 步到 v_l 再一步到 v_j 的道路共有 $a_{il}^{(k)} a_{lj}$ 条, 故从 v_i 经 $k+1$ 步到 v_j 的路径共有 $a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k)} a_{lj}$ 条.

下面分析及求解

假设渡河是从南岸到北岸, (m, n) 表示南岸有 m 个商人, n 个随从, 全部的允许状态共有 10 个

$$v_1 = (3,3) \quad v_2 = (3,2) \quad v_3 = (3,1) \quad v_4 = (3,0) \quad v_5 = (2,2)$$

$$v_6 = (1,1) \quad v_7 = (0,3) \quad v_8 = (0,2) \quad v_9 = (0,1) \quad v_{10} = (0,0)$$

以 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ 为顶点集, 考虑到奇数次渡河及偶数次渡河的不同, 我们建立两个邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad B = A^T$$

$$\text{其中} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 A 表示从南岸到北岸渡河的图的邻接矩阵, $B = A^T$ 表示从北岸到南岸渡河的图的邻接矩阵。

由定理 1、我们应考虑最小的 k , $s.t. (AB)^k A$ 中 1 行 10 列的元素不为 0, 此时 $2k+1$ 即为最少的渡河次数, 而矩阵 $(AB)^k A$ 中 1 行 10 列的元素为最佳的路径数目。

经过计算 $K=5$ 时, $(AB)^5 A$ 的第 1 行 10 列元素为 2, 所以需 11 次渡河, 有两条最佳路径.

最后我们用图解法求解：

前面我们已求出问题的 10 种允许状态，允许决策向量集合 $D = \{(u, v) : u + v = 1, 2\}$ ，状态转移方程为 $S_{k+1} = S_k + (-1)^k d_k$ ，如图 2—3，标出 10 种允许状态，找出从 s_1 经由允许状态到原点的路径，该路径还要满足奇数次向左，向下；偶数次向右，向上。

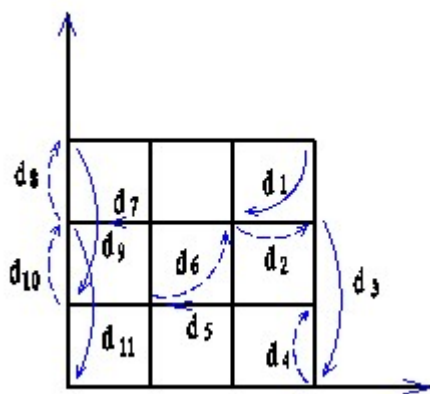


图 2--3

由图 2—3 可得这样的过河策略，共分 11 次决策

(3, $\xrightarrow{\text{去一商一随}}$ (2, $\xrightarrow{\text{回一商}}$ (3, $\xrightarrow{\text{去二随}}$ (3, $\xrightarrow{\text{回一随}}$ (3, $\xrightarrow{\text{去二商}}$ (1, $\xrightarrow{\text{回一商一随}}$ (2, $\xrightarrow{\text{去二商}}$ (0, $\xrightarrow{\text{回一随}}$ (0, $\xrightarrow{\text{去二随}}$ (0, $\xrightarrow{\text{回一随}}$ (0, $\xrightarrow{\text{去二随}}$ (0,

思考题：1、在商人过河中若有 4 名商人，各带一随从能否过河？

2、夫妻过河问题：有 3 对夫妻过河，船最多能载 2 人，条件是任一女子不能在其丈夫不在的情况下与其他男子在一起，如何安排三对夫妻过河？若船最多能载 3 人，5 对夫妻能否过河？

第三节 量纲分析法

量纲分析是 20 世纪初提出的，在物理领域中建立数学模型的一种方法，它是在经验和实验的基础上，利用物理定律的量纲齐次原则，确定各物理量之间的关系。

3.1 量纲齐次原则与 Pi 定理

许多物理量是有量纲的，有些物理量的量纲是基本的，另一些物理量的量纲则可以由基本量纲根据其定义或某些物理定律推导出来。例如在动力学中，把长度 l ，质量 m 和时间 t 的量纲作为基本量纲，记为 $[l] = L$ ， $[m] = M$ ， $[t] = T$ ；而速度 v ，力 f 的量纲可表示为 $[v] = LT^{-1}$ ， $[f] = MLT^{-2}$ 。

在国际单位制中，有 7 个基本量：长度、质量、时间、电流、温度、光强度和物质的量，它们的量纲分别为 L 、 M 、 T 、 I 、 Θ 、 J 、和 N ；称为基本量纲。任一个物理量 q 的量纲都可以表成基本量纲的幂次之积，

$$[q] = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\varepsilon N^\xi J^\eta$$

量纲齐次性原则：用数学公式表示一个物理定律时，等式两端必须保持量纲一致。

量纲分析就是在保证量纲一致的原则下，分析和探求物理量之间关系；先看一个具体的例子，再给出量纲分析的一般方法。

例3—1：单摆运动，质量为 m 的小球系在长度为 l 的线的一端，线的另一端固定，小球偏离平衡位置后，在重力 mg 作用下做往复摆动，忽略阻力，求摆动周期 t 的表达式。

解：在这个问题中有关的物理量有 t, m, l, g 设它们之间有关系式

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3} \quad \text{----- (3.1)}$$

其中 $\alpha, \alpha_2, \alpha_3$ 为待定常数， λ 为无量纲的比例系数，取（3. 1）式的量纲表达式有

$$[t] = [m]^{\alpha_1} [l]^{\alpha_2} [g]^{\alpha_3} \quad \text{整理得：} T = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2 + \alpha_3} T^{-2\alpha_3} \quad \text{----- (3.2)}$$

由量纲齐次原则应有

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 = 1 \end{cases} \quad \text{----- (3.3)}$$

$$\text{解得：} \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2}, \quad \text{代入（3. 1）得 } t = \lambda \sqrt{l/g} \quad \text{----- (3.4)}$$

（3.4）式与单摆的周期公式是一致的

下面我们给出用于量纲分析建模的 Buckingham Pi 定理，

定理：设 n 个物理量 x_1, x_2, \dots, x_n 之间存在一个函数关系

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{----- (3.5)}$$

$[x_1] \dots [x_m]$ 为基本量纲， $m \leq n$ 。 x_1 的量纲可表示为

$$[x_i] = \prod_{j=1}^m [x_j]^{\alpha_{ij}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

矩阵 $A = (\alpha_{ij})_{n \times m}$ 称为量纲矩阵，若 $\text{Rank} A = r$ ，则（3.5）式与下式等价，

$$F(\pi_1 \pi_2 \dots \pi_{n-r}) = 0$$

其中 F 为一个未定的函数关系， π_s 为无量纲量，且 π_s 可表示为

$$\pi_s = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i^{(s)}} \quad \text{----- (3.6)}$$

而 $\beta^{(s)} = (\beta_1^{(s)} \beta_2^{(s)} \dots \beta_n^{(s)})$ 为线性齐次方程组 $A^T \beta = 0$ 的基本解向量。

利用 Pi 定理建模，关键是确定与该问题相关的几个基本量纲的无量纲量 $\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{n-r}$,

作为量纲分析法的应用，下面我们介绍航船阻力的建模.

3. 2 航船的阻力，

长 l 吃水深度 h 的船以速度 v 航行，若不考虑风的影响，航船受到的阻力 f 除依赖于船的诸变量 l 、 h 、 v 以外，还与水的参数——密度 ρ ，粘性系数 μ ，以及重力加速度 g 有关。

我们利用 pi 定理分析 f 和上述物理之间的关系

1. 航船问题中涉及的物理量及其量纲为

$$\left\{ \begin{array}{l} [f] = LMT^{-2} \\ [l] = L \\ [h] = L \\ [v] = LT^{-1} \\ [\rho] = L^{-3}M \\ [\mu] = L^{-1}MT^{-1} \\ [g] = LT^{-2} \end{array} \right.$$

我们要寻求的关系式为 $\varphi(f, l, h, v, \rho, \mu, g) = 0$ ----- (3.7)

这些物理量中涉及到的基本量纲为 L、M、T

2. 写出量纲矩阵

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L \\ M \\ T \end{matrix}$$

$$\text{rank } A = 3$$

3. 解齐次线性方程组 $A^T \beta = 0$ ，可得 $n - \text{rank } A = 4$ 个基本解向量

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^{(1)} = (0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)^T \\ \beta^{(2)} = (0, 1, 0, -2, 0, 0, 1)^T \\ \beta^{(3)} = (0, 1, 0, 1, 1, -1, 0)^T \\ \beta^{(4)} = (1, -2, 0, -2, -1, 0, 0)^T \end{array} \right.$$

由 (3.6) 式，可给出 4 个无量纲量

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = lh^{-1} \\ \pi_2 = lv^{-2}g \\ \pi_3 = lv\rho\mu^{-1} \\ \pi_4 = fl^{-2}v^{-2}\rho^{-1} \end{array} \right. \quad \text{----- (3.8)}$$

由 Pi 定理，(3.7) 等价于下列方程 $\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$ ----- (3.9)

这里 Φ 是未定的函数

由 (3.8)，(3.9) 可得阻力 f 的显式表达式，

$$f = l^2 v^2 \rho \psi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad \text{-----} \quad (3.10)$$

其中 ψ 是由 (3.9) 可得到的未知的函数关系, 在力学上, $\frac{v}{\sqrt{lg}}$ 称为 Froude 数, 记为 Fr ; $\frac{lv\rho}{\mu}$ 称为

$$\text{Reynold 数, 记为 } Re, \text{ 因此 (3.10) 又可写为 } f = l^2 v^2 \rho \psi(l/h, Fr, Re) \quad \text{-----} \quad (3.11)$$

4. 下面我们利用物理模拟进一步确定航船在水中的阻力。

设: f 、 l 、 h 、 v 、 ρ 、 μ 、 g 和 f' 、 l' 、 h' 、 v' 、 ρ' 、 μ' 、 g' 分别表示模型和原型中的各物理量,

由(3.11)有

$$f = l^2 v^2 \rho \psi\left(\frac{l}{h}, \frac{v}{\sqrt{lg}}, \frac{lv\rho}{\mu}\right) \quad f' = l'^2 v'^2 \rho' \psi\left(\frac{l'}{h'}, \frac{v'}{\sqrt{l'g'}}, \frac{l'v'\rho'}{\mu'}\right)$$

$$\text{当无量纲量} \quad \frac{l}{h} = \frac{l'}{h'} \quad \frac{v}{\sqrt{lg}} = \frac{v'}{\sqrt{l'g'}} \quad \frac{lv\rho}{\mu} = \frac{l'v'\rho'}{\mu'} \quad \text{-----} \quad (3.12)$$

$$\text{成立时, 可得} \quad \frac{f'}{f} = \left(\frac{l'v'\rho'}{lv\rho}\right)^2 \quad \text{-----} \quad (3.13)$$

则此时由模型船的阻力 f , 及其它的 l 、 v 、 ρ 、 l' 、 v' 、 ρ' ; 可确定原型船的阻力 f' 。

下面, 我们讨论一下(3.12)成立的条件, 如果在实验中采用跟实际同样的水质, 则 $p' = p, \mu' = \mu$; 又 $g = g'$

$$\text{故可得:} \quad \frac{l}{h} = \frac{l'}{h'} \quad \frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{l}{l'}} \quad \frac{v}{v'} = \frac{l'}{l} \quad \text{-----} \quad (3.14)$$

要使得(3.14)成立, 必有 $l = l', h = h'$; 也即模型船与原型船一样大, 这显然排除了物理模拟的可

行性。若考虑选用不同的水质, $s.t. \mu' \neq \mu$, 仍设 $\rho' = \rho$ 则(3.12)式化为

$$\frac{l}{h} = \frac{l'}{h'} \quad \frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{l}{l'}} \quad \frac{v}{v'} = \frac{l'}{l} \cdot \frac{\mu}{\mu'} \quad \text{-----} \quad (3.15)$$

$$\text{由(3.15)可得} \quad \frac{\mu}{\mu'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^{\frac{3}{2}},$$

若按 1: 20 的比例, $\mu = 0.011\mu'$, 显然无法找到如此小的粘性系数的液体

实际上的一种近似处理方法是, 在一定条件下 Re 数的影响很小, 这样可近似得到,

$$f \approx l^2 v^2 \rho \psi\left(\frac{l}{h}, \frac{v}{\sqrt{lg}}\right)$$

类似地分析, 只要 $\frac{l}{h} = \frac{l'}{h'}$ $\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{l}{l'}}$ 即有

$$\frac{f'}{f} = \left(\frac{l'}{l}\right)^3 \quad \text{-----} \quad (3.16)$$

由 (3.16) 式就容易确定原型船的阻力 f'

3.3 无量纲化 抛射问题

下面我们通过一个例子, 介绍如何使用无量纲化方法简化模型。

抛射问题: 在某星球表面以初速度 v 竖直向上发射火箭, 记星球半径为 r , 星球表面重力加速度为 g , 忽略阻力, 讨论发射高度 x 随时间 T 的变化规律.

模型建立: 设 x 轴竖直向上, $t=0$ 时 $x=0$, 火箭和星球质量分别记为 m_1 和 m_2 , 由牛顿第二定律和万有引力定律可得:

$$m_1 \ddot{x} = -k \frac{m_1 m_2}{(x+r)^2} \quad \text{-----} \quad (3.17)$$

以 $x(0)=0$, $\ddot{x}(0)=-g$ 代入 (3.17) 可得 $km_2 = gr^2$

故得如下初值问题

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{r^2 g}{(x+r)^2} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases} \quad \text{-----} \quad (3.18)$$

(3.18)式的解可以表为 $x = (t, r, v, g)$ 也即发射高度是以 r, v, g 为参数的 t 的函数, 下面我们采用无量纲化方法化简方程 (3.18),

显然抛射问题中的基本量纲为 L, T ; 而 $[x]=L$ $[t]=T$ $[r]=L$ $[v]=LT^{-1}$ $[g]=LT^{-2}$

所谓无量纲化是指, 对(3.18)式中的 x 和 t 分别构造且有相同的参数组合 x_c 和 t_c , 使得新变量

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0} \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}$$

为无量纲量, 其中 x_c, t_c 称为特征尺度或参考尺度; 把方程 (3.18) 化为 \bar{x} 对 \bar{t} 的微分方程,

即可简化模型, 如何寻找特征尺度, 这里我们以 t_c 为例, 首先写出参数 r, v, g 的量纲距阵 A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{t} 的量纲向量为 $(0,1)^T$ 记为： β_0

求解线性方程组 $A\beta = \beta_0$ 得通解： $\beta = (1, -1, 0)^T + k(1, -2, 1)^T$

任取 k ，即得到一种特征尺度，例如 $k=0$ 得 $t_c = rv^{-1}$ ； $k=-1$ 得 $t_c = vg^{-1}$ ； $k=-\frac{1}{2}$ 得 $t_c = \sqrt{rg^{-1}}$ 同理可得 x 的几种特征尺度 r ， v^2g^{-1} 等

以下，我们利用不同的 x_c 和 t_c 化简 (3.18)

1. 令 $x_c = r$ ， $t_c = rv^{-1}$ ；则 $\bar{x} = x/r$ ， $\bar{t} = t/rv^{-1}$

由 $\dot{x} = v \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$ ， $\ddot{x} = \frac{v^2}{r} \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}$

代入(3.18)可得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \ddot{\bar{x}} = -\frac{1}{(\bar{x}+1)^2}, \quad \varepsilon = \frac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \dot{\bar{x}}(0) = 1 \end{array} \right. \quad \text{----- (3.19)}$$

(3.19)式的解可表为 $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t}, \varepsilon)$ ，含一个独立参数且 ε 为无量纲量.

2. 令 $x_c = r$ ， $t_c = \sqrt{rg^{-1}}$ ，类似地可将(3.18)化为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\bar{x}} = -\frac{1}{(\bar{x}+1)^2}, \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \dot{\bar{x}}(0) = \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{v^2}{rg} \end{array} \right. \quad \text{----- (3.20)}$$

3. 令 $x_0 = v^2g^{-1}$ ， $t_0 = vg^{-1}$ ；可将(3.19)化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \ddot{\bar{x}} = -\frac{1}{(\varepsilon \bar{x}+1)^2}, \quad \varepsilon = \frac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \dot{\bar{x}}(0) = 1 \end{array} \right. \quad \text{----- (3.21)}$$

按照现有科技能力， $v \ll \sqrt{rg} \approx 8000$ 米/秒，

$\therefore \varepsilon \ll 1$ ，在 (3.21) 中令 $\varepsilon = 0$ ，则有

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -1 \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \dot{\bar{x}}(0) = 1 \end{cases} \quad \text{----- (3.22)}$$

(3.22) 的解为: $\bar{x}(\bar{t}) = -\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{t}$,

代回原变量 得: $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$, ----- (3.23)

(3.23)式恰为假定火箭运动过程中所受星球引力 不变的运动方程。

小结: 无量纲化是用数学工具研究物理问题时常用的方法, 恰当地选择特征尺度不仅可以减少参数的个数, 而且可以帮助人们决定舍弃哪些次要因素

思考题: 在 (3.19) 和(3.20)式中,令 $\varepsilon = 0$ 会得到什么结果?

第四节 比例与函数建模

本节介绍的几个模型,都是利用基本的比例关系与函数建立起的数学模型。

4.1 动物体型问题

问题: 某生猪收购站, 需要研究如何根据生猪的体长 (不包括头尾) 估计其体重?

模型假设:

1. 将四足动物的躯干 (不含头尾) 视为质量为 m 的圆柱体, 长度为 l , 截面面积 s , 直径为 d 如图 4-1

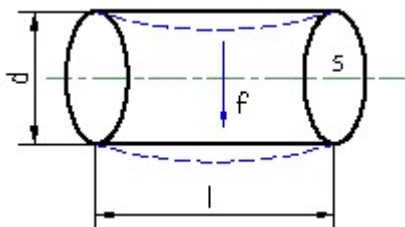


图 4-1

2. 把圆柱体的躯干看作一根支撑在四肢上的弹性梁, 动物在体重 f 作用下的最大下垂为 δ , 即梁的最大弯曲, 根据弹性力学弯曲度理论, 有:

$$\delta \propto \frac{fl^3}{sd^2} \quad \text{----- (4.1)}$$

3. 以生物进化学的角度, 可认为动物的相对下垂度 $\frac{\delta}{l}$ 已达到一个最合适的数值, 也即 $\frac{\delta}{l}$ 为常数

模型建立:

$$\because s = \frac{\pi d^2}{4} \quad ; \quad f = \frac{\pi d^2}{4} l \quad \text{----- (4.2)}$$

由 (1) 式 可令 $\delta = k_1 \frac{fl^3}{sd^2}$ k_1 为比例常数

$$\text{由 (2) 式 } sd^2 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} d^2 l \right)^2 \cdot \frac{1}{l^2} = \frac{4}{\pi} f^2 \cdot \frac{1}{l^2} \quad \text{----- (4.3)}$$

$$\therefore \delta = k_1 \frac{\pi}{4} \frac{l^5}{f}$$

$$\therefore f = \frac{\pi}{4} k_1 \frac{l^5}{\delta} = \frac{\pi}{4} k_1 \frac{l}{\delta} \cdot l^4$$

$$\text{令 } k = \frac{\pi}{4} k_1 \frac{l}{\delta} \quad \text{由假设 3, } k \text{ 为常数}$$

$$\therefore f = kl^4 \quad \text{----- (4.4)}$$

因此生猪的体重与体长的四次方成正比，在实际工作中，工作人员可由实际经验及统计数据找出常数 K，则可近似地由生猪的体长估计它的体重。

4. 2 双重玻璃的功效

问题： 房间居室的窗户有的是双层的，即在窗户上装两层玻璃，且中间留有一定的空隙，试比较双层玻璃窗与单层玻璃窗的热量流失？

模型假设： 1. 设双层玻璃窗的两玻璃的厚度都为 d，两玻璃的间距为 L；单层玻璃窗的玻璃厚度为 2d，所用玻璃材料相同，如图 4-2

2. 假设窗户的封闭性能很好，两层玻璃之间的空气不流动，即忽略热量的对流，只考虑热量的传导.

3. 室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变，热传导过程处于稳定状态，即单位时间通过单位面积的热量为常数

4. 玻璃材料均匀，热传导系数为常数.

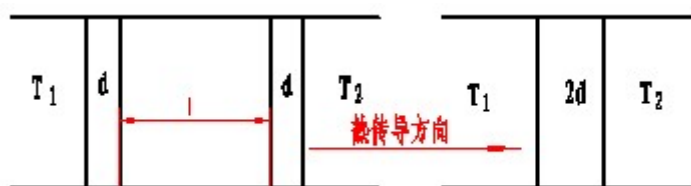


图 4-2

模型建立:

对于厚度为 d 的均匀介质，两侧温度差为 ΔT ，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量 Q 满足

$$Q = k \cdot \frac{\Delta T}{d} \quad k \text{ 为热传导系数}$$

设玻璃的热传导系数为 k_1 ，空气的热传导系数为 k_2

(1) 先考虑单层玻璃的单位时间, 单位面积的热量传导

$$Q_1 = k_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{2d} \quad \text{----- (4.5)}$$

(2) 考虑双层玻璃情形

此时热量先通过厚度为 d 的玻璃传导到两层玻璃的夹层空气中, 再通过空气传导, 再通过厚度为 d 的玻璃传导; 设内层玻璃的外侧温度为 T_a , 外层玻璃的内侧温度为 T_b ; 则有:

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d} \quad \text{----- (4.6)}$$

由 (4.6) 式可得

$$\begin{cases} T_a + T_b = T_1 + T_2 \\ T_a - T_b = \frac{k_1 l}{k_2 d} (T_b - T_2) \end{cases} \quad \text{----- (4.7)}$$

记 $s = \frac{k_1 l}{k_2 d}$

则 $2T_b = T_1 + T_2 - s(T_b - T_2) \quad \text{----- (4.8)}$

$$2(T_b - T_2) = T_1 - T_2 - s(T_b - T_2) \quad \text{----- (4.9)}$$

$$(T_b - T_2) = \frac{1}{2+s} (T_1 - T_2) \quad \text{----- (4.10)}$$

$$Q_2 = \frac{1}{(2+s)} \frac{k_1}{d} (T_1 - T_2) \quad \text{----- (4.11)}$$

考虑两者之比

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2}{2+s} \quad \text{----- (4.12)}$$

显然 $Q_2 < Q_1$, 也即双层玻璃的热量损失较小.

模型分析与应用:

常用玻璃的热传导系数 $k_1 = 4 \times 10^{-3} \sim 8 \times 10^{-3} \quad J/cm \cdot s \cdot c$,

而不流通, 干燥空气的热传导系数 $k_2 = 2.5 \times 10^{-4} \quad J/cm \cdot s \cdot c$,

若取 $\frac{l}{d} = h$, 则 $16h \leq S \leq 32h$,

故 $\frac{Q_2}{Q_1} \leq \frac{1}{1+8h} \quad \text{----- (4.13)}$

若取 $h = 4$, 则 $\frac{Q_2}{Q_1} \leq \frac{1}{33}$ 又此可见双层玻璃的保暖效果是相当可观的。

我国北方寒冷地区的建筑物, 通常采用双层玻璃; 由 (4.13) 式 $h=4$ 时, $Q_2 \approx \frac{1}{33} Q_1$, h 再大, 热量传递的减少就不明显了, 再考虑到墙体的厚度; 所以建筑规范通常要求 $h \approx 4$.

4.3 席位分配模型

问题: 某校有 200 名学生, 甲系 100 名, 乙系 60 名, 丙系 40 名; 若学生会中学生代表有 20 个席位, 则公平又简单的分法应各有 10, 6, 4 个席位。若丙系有 6 名学生分别转入甲、乙两系各 3 人, 此时各系的人数为 103, 63, 34; 按比例席位分配应为 10.3, 6.3 和 3.4, 出现了小数, 19 个整数席位分配完后, 最后一席留给小数部分最大的丙系, 分别为 10, 6, 4。为方便提案表决, 现增加 1 席共 21 席, 按比例计算甲、乙、丙三系分别占有 10.815, 6.615, 3.570; 按上面的分法应分别为 11, 7, 3; 这样虽然增加了一个席位, 但丙系的席位反而减少一席, 因此这种分法显然是不合理的, 请给出一个比较公平的席位分配方案?

问题分析: 席位分配问题, 当出现小数时, 无论如何分配都是不完全公平的。那么一个比较公平的分法应该是找到一个不公平程度最低的方法, 因此首先要给出不公平程度的数量化, 然后考虑使之最小的分配方案。

模型建立:

一、讨论不公平程度的数量化

设 A, B 两方人数分别为 p_1, p_2 ; 分别占有 n_1 和 n_2 个席位, 则两方每个席位所代表的人数分别为

$$\frac{p_1}{n_1} \text{ 和 } \frac{p_2}{n_2} .$$

我们称 $\left| \frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2} \right|$ 为绝对不公平值。例: $p_1 = 120, p_2 = 100, n_1 = n_2 = 10$

$$\text{则 } \left| \frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2} \right| = 2 \quad \text{又} \quad p_1 = 1020, p_2 = 1000, n_1 = n_2 = 10 \quad \text{则} \quad \left| \frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2} \right| = 2$$

由上例可知, 用绝对不公平程度作为衡量不公平的标准, 并不合理, 下面我们给出相对不公平值

$$\text{若 } \frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2} \quad \text{则称} \quad \frac{\frac{p_1}{n_1} - \frac{p_2}{n_2}}{\frac{p_2}{n_2}} = \frac{p_1 n_2}{p_2 n_1} - 1 \quad \text{为对 A 的相对不公平值, 记为 } r_A(n_1, n_2)$$

$$\text{若 } \frac{p_1}{n_1} < \frac{p_2}{n_2} \quad \text{则称} \quad \frac{\frac{p_2}{n_2} - \frac{p_1}{n_1}}{\frac{p_1}{n_1}} = \frac{p_2 n_1}{p_1 n_2} - 1 \quad \text{为对 B 的相对不公平值, 记为 } r_B(n_1, n_2)$$

上例中, 相对不公平值分别为: 0.2 和 0.02, 可见相对不公平值较合理。

二、 下面我们用相对不公平值建立模型，

设，A，B 两方人数分别为 p_1, p_2 ；分别占有 n_1 和 n_1 个席位现在增加一个席位，应该给 A 还

是 B？不妨设 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$ ，此时对 A 不公平，下面分二种情形

(1) $\frac{p_1}{n_1+1} \geq \frac{p_2}{n_2}$ ，这说明即使 A 增加 1 席，仍对 A 不公平，故这一席应给 A。

(2) $\frac{p_1}{n_1+1} < \frac{p_2}{n_2}$ ，说明 A 方增加 1 席时，将对 B 不公平，此时计算对 B 的相对不公平值

$$r_B(n_1+1, n_2) = \frac{p_2(n_1+1)}{p_1 n_2} - 1$$

若这一席给 B，则对 A 的相对不公平值为

$$r_A(n_1, n_2+1) = \frac{p_1(n_2+1)}{p_2 n_1} - 1$$

本着使得相对不公平值尽量小的原则，

$$\text{若 } r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1) \quad \text{----- (4.14)}$$

则增加的 1 席给 A 方，

$$\text{若 } r_A(n_1, n_2+1) < r_B(n_1+1, n_2) \quad \text{----- (4.15)}$$

则增加的 1 席给 B 方

$$\text{由 (4.14) 式可得：} \quad \frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

$$\text{由 (4.15) 式可得：} \quad \frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} > \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

$$\text{记：} \quad Q_i = \frac{p_i}{n_i(n_i+1)} \quad \text{则增加的 1 席，应给 } Q \text{ 值大的一方}$$

第一种情形，显然也符合该原则，

现在将上述方法推广到 m 方分配席位的情况 A_i 方人数为 p_i 已占有 n_i 席 $i=1, 2, \dots, m$

$$\text{计算 } Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)} \quad \text{则将增加的 1 席分配应给 } Q \text{ 值最大的一方}$$

下面考虑原问题：

前 19 席的分配没有争议，甲系得 10 席，乙系得 6 席，丙系得 3 席

第 20 席的分配

$$Q_1 = \frac{103^2}{10(10+1)} = 96.4$$

$$Q_2 = \frac{63^2}{6(6+1)} = 94.5$$

$$Q_3 = \frac{34^2}{3(3+1)} = 96.3$$

故第 20 席分配给甲系

第 21 席的分配

$$Q_1 = \frac{103^2}{11(11+1)} = 80.4$$

$$Q_2 = 94.5, \quad Q_3 = 96.3$$

故第 21 席分配给乙系

甲、乙、丙三系各分得 11, 6, 4 席, 这样丙系保住它险些丧失的 1 席。

思考题:

1. 若单层玻璃窗的玻璃厚度也是 d , 结果将如何?
2. 怎样讨论三层玻璃的功效?
3. 怎样讨论双层玻璃的隔音效果?
4. 比利时 ($d'Hondt$) 分配方案:

将甲、乙、丙三系的人数都用 $1, 2, 3, \dots$ 去除, 将商从大到小排列, 取前 21 个最大的, 这 21 个中

各系占有几个, 就分给几个席位, 你认为这种方法合理吗?

5. 学校共有 1000 名学生, 235 人住在 A 楼, 333 人住在 B 楼, 432 人住在 C 楼。学生们要组成一个 10 人委员会, 使用 Q 值方法及 $d'Hondt$ 方法给出分配方案。如果委员会为 15 人, 分配方案是什么?