Friedrich-Schiller-Universität Jena

Fakultät für Mathematik und Informatik
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Digitale Bildverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Joachim Denzler
http://www.inf-cv.uni-jena.de

Dipl.-Inf. Sven Sickert
Dr. Erik Rodner

Übung zur Vorlesung

Rechnersehen 2

SS 2015

Übungsblatt 1: Starre Transformationen

Ausgabe: 22.04.2015 Abgabe: 06.05.2015

Aufgabe 1 Berechnen einer starren Transformation (4 Punkte)

Ein Bild soll um einen frei wählbaren Punkt $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)^T$ so rotiert werden, dass ein zweiter frei wählbarer Punkt $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y)^T$ dieselbe x-Koordinate p_x erhält. Die starre Transformation f soll also folgende Eigenschaften haben: $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$ und $f(\boldsymbol{q}) = (p_x, q'_y)^T$, wobei q'_y noch zu bestimmen ist.

Der Rotationswinkel α lässt sich wie folgt bestimmen: $\alpha = \operatorname{atan2}(q_x - p_x, q_y - p_y)$. Die Funktion atan2 berechnet den Winkel aus gegebener Gegenkathete und Ankathete. Anmerkung: nur im ersten Quadranten gilt $\operatorname{atan2}(x, y) = \operatorname{atan}\left(\frac{x}{y}\right)$.

Die Transformation ergibt sich damit zu:

$$f(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{p} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Implementieren Sie eine Funktion, die als Eingabe die Punkte $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}$ erhält und $f(\boldsymbol{s})$ berechnet.

Aufgabe 2 Rotation eines Bildes (4 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, das ein Bild lädt und anzeigt. Mit der Maus sollen sich nun die beiden Punkte $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ der vorherigen Aufgabe anwählen lassen. Im Anschluss soll ein neues Bild erstellt werden, das durch Anwendung der entsprechenden Transformation f aus dem Eingabebild entsteht. Aufgrund des diskreten Pixelgitters iteriert man dazu über alle Pixel des *Ausgabebildes* und berechnet jeweils die zugehörige Position im Eingabebild. Dazu wird die Abbildung f invertiert:

$$f^{-1}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{p} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten $f^{-1}(\boldsymbol{s})$ geben somit für jeden Punkt $\boldsymbol{s}$ im Ausgabebild an, welches Pixel im Eingabebild die zugehörige Grauwertinformation enthält. Dabei ist zu beachten, dass $f^{-1}(\boldsymbol{s})$ zumeist nicht ganzzahlig ist und daher gerundet werden muss.

Benötigte Funktionen: `imshow, imread, ginput`

Die Funktion `imrotate` darf natürlich nicht verwendet werden.

Aufgabe 3 Vergleich mit der Interpolation (2 Punkte)

Um ein visuell schöneres Ergebnis zu erhalten, kann die Grauwertinformation an der Stelle $f^{-1}(\boldsymbol{s})$ im Eingabebild bilinear aus den umgebenden Pixeln interpoliert werden. Dies wird zum Beispiel durch `imrotate` mit geeigneten Parametern durchgeführt. Vergleichen Sie daher Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 2 quantitativ mit dem Ergebnis von `imrotate`. Berechnen Sie dafür das Differenzbild und den mittleren quadratischen Fehler.

Aufgabe 4 Projektive Abbildungen (5 Punkte)

Bei Aufnahme mit einer idealen Lochkamera werden 3-D Weltpunkte durch eine projektive Transformation auf 2-D Bildpunkte abgebildet. Für Ebenen lässt sich dabei eine lineare Abbildung von 2-D Ebenen-Koordinaten auf 2-D Bildkoordinaten finden. Für jeden Punkt $\boldsymbol{x}$ auf der Ebene gilt die Gleichung

$$\boldsymbol{x}' = H\boldsymbol{x} \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{x}$ der homogene 3-Vektor der 2-D Koordinaten in der ursprünglichen Ebene, $\boldsymbol{x}'$ der homogene 3-Vektor der abgebildeten 2-D Bildkoordinaten sowie H eine 3×3 Abbildungsmatrix ist.

Sind vier korrespondierende Punktepaare $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'$ gegeben, so lassen sich die 9 Unbekannten von H bis auf eine Skalierung bestimmen. Dafür wird ein homogenes Gleichungssystem aufgestellt, indem die Abbildungsgleichung (1) umgeformt wird zu:

$$\boldsymbol{x}' \times H\boldsymbol{x} = 0 \tag{2}$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x'_2 H_{31} x_1 + x'_2 H_{32} x_2 + x'_2 H_{33} x_3 - x'_3 H_{21} x_1 - x'_3 H_{22} x_2 - x'_3 H_{23} x_3 &= 0 \\ -x'_1 H_{31} x_1 - x'_1 H_{32} x_2 - x'_1 H_{33} x_3 + x'_3 H_{11} x_1 + x'_3 H_{12} x_2 + x'_3 H_{13} x_3 &= 0 \end{aligned}$$

und eine dritte, linear abhängige Gleichung, die hier ausgelassen wurde. Fasst man nun H als Vektor $\boldsymbol{h} = (H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{33})^T$ auf, so lässt sich dieses lineare Gleichungssystem schreiben als:

$$A\boldsymbol{h} = 0 \tag{3}$$

wobei A bei n gegebenen korrespondierenden Punkten $\boldsymbol{x}'^{(i)}$ und $\boldsymbol{x}^{(i)}$ eine $2n \times 9$ Matrix ist. Da H durch das homogene System nur bis auf eine Skalierung bestimmt ist, kann man z.B. durch Setzen von $H_{33} = 1$ das Gleichungssystem vereinfachen und mit gängigen Verfahren lösen. Als einfacherer Weg ist z.B. eine Singulärwertzerlegung zur Bestimmung des Nullraumes denkbar.

Markieren Sie durch manuelles Anklicken in einem Bild vier Punkte $\boldsymbol{x}'^{(i)}$. Diese sollen die Abbilder der Eckpunkte der beobachteten 3-D Ebene sein, also die durch eine projektive Transformation H abgebildeten Eckpunkte eines Rechtecks z.B. mit Koordinaten: $\boldsymbol{x}^{(1)} = (0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = (1, 0, 1)^T$, ... Schreiben Sie ein Funktion, die aus diesen Korrespondenzen die projektive Abbildung H berechnet.

Aufgabe 5 Bild projektiv entzerren (5 Punkte)

Wenn die projektive Abbildung H berechnet ist, kann aus den aufgenommenen Pixeln des Bildes die ursprüngliche 3-D Ebene in orthogonaler Aufsicht rekonstruiert werden. Theoretisch wird dafür die inverse Transformation zu der in Aufgabe 1) bestimmten benötigt, also die Homographie, die Bildpunkte $\boldsymbol{x}'$ auf unverzerrte Punkte $\boldsymbol{x}$ in der Ebene abbildet.

Bei einem solchen Vorgehen ergeben sich jedoch Lücken im rekonstruierten Bild, da nicht zwangsläufig jeder Pixel genau erreicht wird. Man berechnet daher für jeden Pixel des unverzerrten Bildes, von welcher korrespondierenden Stelle im verzerrten Bild der Grauwert übernommen werden soll.

Laden Sie ein Bild und markieren Sie darin die vier Eckpunkte einer Ebene. Mit Aufgabe 1 können Sie die Abbildung H bestimmen (oder aus einer Datei auslesen). Durch H kann zu jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ des Einheitsquadrates $(0, 0, 1)^T, (1, 0, 1)^T, \ldots$ ein korrespondierender Punkt $\boldsymbol{x}'$ im geladenen Bild gefunden werden kann. Stellen Sie das angewählte Viereck als projektiv entzerrtes Ausgabebild dar. Die Größe des Ausgabebildes kann dabei beliebig gewählt werden, z.B. auf die selbe Größe, wie das Eingabebild. Achten Sie darauf, die homogenen Koordinaten wieder richtig in Pixelkoordinaten umzurechnen.

Viel Spaß und Erfolg!

Pfade:

Eingabebilder:	/home/sickert/uebung-rechnersehen2/01-rotation/input/
	/home/sickert/uebung-rechnersehen2/01-projective/input/