Exo 1

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}i \times u_n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exo 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1) Écrire le nombre $1 + i$ sous forme exponentielle.

2) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

Exo 3

1) Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de $0,3$. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à $0,9$ est :

a) 6 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 12

Exo 4

4) Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $p(A) = 0,3$ et $p(A \cup B) = 0,65$.
La probabilité de l'événement B est :

a) $0,5$ **b)** $0,35$ **c)** $0,46$ **d)** $0,7$

Exo 5

3) Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est au millième près :

a) 0,032 **b)** 0,461 **c)** 0,132 **d)** 0,023

Exo 6

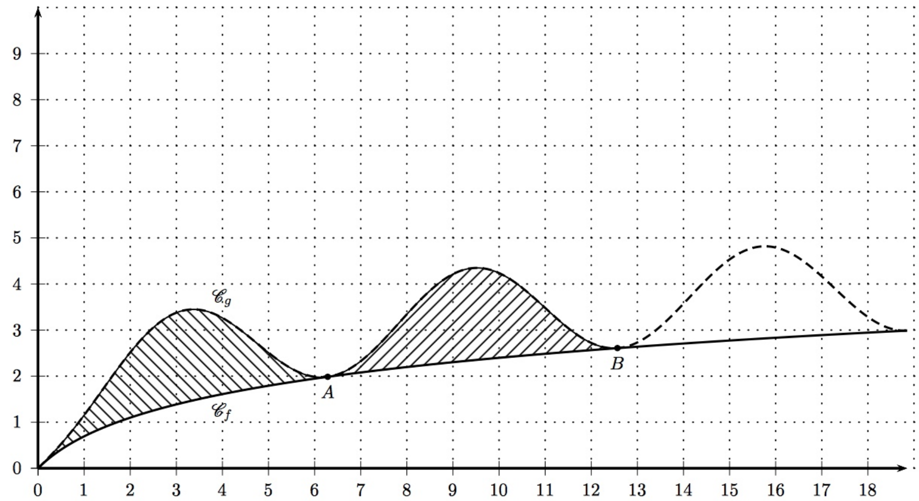
2) On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Calculer u_1.

b) Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Exo 7



On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

Ces courbes sont données en **annexe 1**.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

Exo8

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

Partie I

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x)\,dx$.

1) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

Exo 9

3) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$