С. Пилипович, Дж. Виндас, Тауберовы оценки класса для векторнозначных обобщенных функций, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 2, 115–142

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9061

2019 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Том 210, № 2

УДК 517.53

**С. Пилипович, Дж. Виндас**

# Тауберовы оценки класса для векторнозначных обобщенных функций

Изучаются тауберовы свойства регуляризующих преобразований векторнозначных обобщенных функций медленного роста, а именно преобразований вида $M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y) = (\mathbf{f} * \varphi_y)(x)$, где ядро $\varphi$ является основной функцией и $\varphi_y(\,\cdot\,) = y^{-n}\varphi(\,\cdot\,/y)$. Исследуются условия, при которых обобщенная функция, априори принимающая значения в локально выпуклом пространстве, в действительности принимает значения в более узком, банаховом пространстве. Цель настоящей статьи состоит в характеризации пространств обобщенных функций медленного роста со значениями в банаховом пространстве в терминах так называемых оценок класса для преобразования $M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y)$. Результаты работы обобщают и уточняют ранее полученные тауберовы теоремы Ю. Н. Дрожжинова и Б. И. Завьялова. Особое внимание уделяется нахождению оптимального класса ядер $\varphi$, для которого справедливы эти тауберовы результаты.

Библиография: 24 названия.

**Ключевые слова:** регуляризующие преобразования, оценки класса, тауберовы теоремы, векторнозначные обобщенные функции, вейвлет-преобразование.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9061

## § 1. Введение

Теоремы тауберова типа представляют собой весьма удобный инструментарий в нескольких областях математики, таких как теория чисел, теория операторов, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая физика. Касательно одномерной теории отошлем читателя к монографии Дж. Кореваара [12]. В случае многомерных тауберовых теорем большое значение имеют обширные исследования Ю. Н. Дрожжинова, В. С. Владимирова и Б. И. Завьялова. Предложенный ими подход к этой области привел к введению в рассмотрение в рамках изучаемой задачи обобщенных функций, в результате чего был развит мощный тауберов аппарат для многомерных преобразований Лапласа обобщенных функций. Сошлемся на монографии [15], [23] и недавнюю статью [7] касательно обзорной информации по тауберовым теоремам для обобщенных функций и их применениям. Примечательно, что методы теории обобщенных функций сыграли решающую роль при получении последних результатов по комплексным тауберовым теоремам [2]–[5], [13].

---

Исследование С. Пилиповича выполнено при поддержке Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije (грант 174024). Исследование Дж. Виндаса выполнено при поддержке Universiteit Ghent (BOF-grant 01N01014).

Целью настоящего исследования является обобщение и уточнение различных результатов Ю. Н. Дрожжинова и Б. И. Завьялова, приведенных в статьях [8], [9]. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение нашей предыдущей статьи [16], в которой мы имели дело с многомерными тауберовыми теоремами для квазиасимптотики векторнозначных обобщенных функций (см. также [21]). Здесь мы займемся характеризацией обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве в терминах так называемых тауберовых оценок класса.

Основная задача, которую мы собираемся рассматривать, может быть сформулирована следующим образом. Зафиксируем основную функцию $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Векторнозначной обобщенной функции медленного роста $\mathbf{f}$ мы сопоставим *регуляризующее преобразование*

$$M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y) = (\mathbf{f} * \varphi_y)(x), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,$$

где $\varphi_y(t) = y^{-n}\varphi(t/y)$. Нас интересуют условия в терминах $M^{\mathbf{f}}_{\varphi}$, при которых обобщенная функция $\mathbf{f}$, априори принимающая значения в “широком” (хаусдорфовом) локально выпуклом пространстве $X$, в действительности принимает значения в более узком, банаховом пространстве $E$, относительно которого предполагается, что оно непрерывно вложено в $X$. Если априори известно, что $\mathbf{f}$ принимает значения в $E$, то можно непосредственно проверить, что имеет место оценка нормы

$$\|M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y)\|_E \leqslant C\frac{(1+y)^k(1+|x|)^l}{y^k} \tag{1.1}$$

с некоторыми константами $k$, $l$ и $C$. Следуя [8], [9], будем называть (1.1) *оценкой класса*. Нас интересует обратная задача: в какой степени оценка класса (1.1) позволяет заключить, что $\mathbf{f}$ принимает значения в банаховом пространстве $E$?

Данный “тауберов” вопрос был поставлен и изучался Ю. Н. Дрожжиновым и Б. И. Завьяловым в одномерном случае в работе [8] и для нескольких переменных в работе [9], где показано, что многие тауберовы теоремы для интегральных преобразований оказываются частными случаями этой задачи. (См. также [10] касательно некоторых других интересных приложений.) В настоящей статье мы еще раз обратимся к данной задаче и получим оптимальные результаты, заключающиеся в нахождении самого широкого класса основных функций $\varphi$, для которых пространство $E$-значных обобщенных функций (с точностью до некоторых поправочных членов) допускает характеризацию в терминах оценки класса.

Здесь мы докажем по существу, что искомые оптимальные тауберовы ядра задаются классом невырожденных основных функций, который мы ввели в статье [16] и который оказался намного шире, чем соответствующий класс в работах [8], [9] (в настоящей статье мы называем его классом сильно невырожденных основных функций, см. определение 5.1). Отметим, что в тауберовой теории Винера [12] тауберовыми являются ядра, преобразования Фурье которых не обращаются в нуль ни в одной точке. В нашей теории тауберовыми ядрами будут такие функции $\varphi$, что их преобразования Фурье $\widehat{\varphi}$ не обращаются в нуль тождественно ни на одном луче, проходящем через начало координат. Наш новый подход, основанный на идеях вейвлет-анализа, не только позволил получить более общие результаты, но и оказался, как мы считаем, намного проще, чем тот подход, что применялся в работах [8], [9], поскольку в нем совершенно не используются аргументы типа теоремы о короне и структура многочленов Тейлора преобразований Фурье $\widehat{\varphi}$ тауберовых ядер.

Статья структурирована следующим образом. В § 2 вводятся обозначения и приводится некоторая необходимая справочная информация по вейвлет-анализу обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве (обобщенных функций Лизоркина). В § 3, который также имеет предварительный характер, обсуждаются некоторые базовые свойства и примеры регуляризующих преобразований. Содержательная часть статьи – это §§ 4–6. В § 4 рассматривается характеризация пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ в терминах глобальной и локальной оценок класса, т.е. когда (1.1) выполняется для всех $(x, y)$ или только для $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1]$. В действительности мы будем здесь иметь дело с более общими интегральными предположениями касательно $M^{\mathbf{f}}_{\varphi}$. В § 4 мы проанализируем случай, когда в качестве ядер регуляризующих преобразований выступают сильно невырожденные основные функции. Наконец, в § 6 мы займемся характеризацией обобщенных функций, сплетающих представление $\mathbb{R}^n$ с группой сдвигов, с помощью тауберовых оценок класса; условия, задающие такие функции, формулируются там в терминах регуляризующих преобразований относительно (обобщенных) пар Литтлвуда–Пэли.

Статья посвящается памяти Василия Сергеевича Владимирова и Бориса Ивановича Завьялова.

## § 2. Предварительная информация

Будем обозначать через $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ верхнее полупространство. Локально выпуклые пространства всегда предполагаются хаусдорфовыми. Через $E$ всегда будет обозначаться фиксированное, но произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Измеримость $E$-значных функций понимается в смысле Бохнера (т.е. измеримыми называются поточечные пределы п.в. $E$-значных непрерывных функций); также и интегралы от $E$-значных функций понимаются в смысле Бохнера. Относительно основных функций мы будем предполагать, что $\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ и $\varphi_y(t) = y^{-n}\varphi(t/y)$.

**2.1. Пространства основных функций.** Мы будем использовать стандартные обозначения, принятые при рассмотрении обобщенных функций, см., например, [15], [22], [23]. В частности, пространства Шварца гладких основных функций с компактным носителем и быстро убывающих будем обозначать соответственно через $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Константы в преобразовании Фурье выбираются следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) e^{-iu\cdot t}\, \mathrm{d}t.$$

Следуя работе [11], пространство $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ функций на $\mathbb{R}^n$ с сильной частотно-временной локализацией определяем как замкнутое подпространство пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из элементов, все моменты которых обращаются в нуль, а именно,

$$\eta \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \int_{\mathbb{R}^n} t^m \eta(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}^n.$$

Это пространство также известно как пространство Лизоркина основных функций. Соответствующее пространство сильно локализованных функций на $\mathbb{H}^{n+1}$ будем обозначать через $\mathscr{S}(\mathbb{H}^{n+1})$. Оно состоит из таких $\Phi \in C^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$, что

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{H}^{n+1}} \left(y + \frac{1}{y}\right)^{k_1} (1+|x|)^{k_2} \left| \frac{\partial^l}{\partial y^l} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \Phi(x,y) \right| < \infty$$

для всех $k_1, k_2, l \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}^n$. Каноническая топология этого пространства определяется стандартным образом [11].

Мы также будем использовать интересный класс подпространств пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, введенный Ю. Н. Дрожжиновым и Б. И. Завьяловым в работе [9]. Пусть $I$ – идеал кольца $\mathbb{C}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ многочленов (со скалярными значениями) над $\mathbb{C}$ от $n$ переменных. Определим $\mathscr{S}_I(\mathbb{R}^n)$ как подпространство пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций $\phi$, у преобразований Фурье $\widehat{\phi}$ которых все многочлены Тейлора в начале координат принадлежат идеалу $I$. Например, $\mathscr{S}_I(\mathbb{R}^n) = \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$, если $I = \{0\}$, или $\mathscr{S}_I(\mathbb{R}^n) = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, если $I = \mathbb{C}[t_1, t_2, \dots, t_n]$.

Предположим, что $P_0, \dots, P_q, \dots$ – система однородных многочленов, где каждый $P_q$ имеет степень $q$ (некоторые многочлены могут тождественно равняться нулю). Рассмотрим идеал $I = [P_0, P_1, \dots, P_q, \dots]$, а именно идеал, порожденный многочленами $P_q$. Можно показать [9], что $\mathscr{S}_I(\mathbb{R}^n)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\phi \in \mathscr{S}_I(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

для всех многочленов $Q$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$P_q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) Q = 0, \qquad q = 0, 1, \dots .$$

Если существует такое число $d \in \mathbb{N}$, что $P_q = 0$ для $q > d$, то данное условие можно ослабить [9; лемма A.5], потребовав, чтобы оно выполнялось для многочленов $Q$ степени не более $d$.

Обозначим через $\mathbb{P}_d$ идеал, состоящий из (скалярнозначных) многочленов вида $Q(t) = \sum_{d\leqslant|m|\leqslant N} a_m t^m$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.

Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $P_q^\varphi$ однородную компоненту степени $q$ многочлена Тейлора преобразования Фурье этой функции в нуле, т.е.

$$P_q^\varphi(u) = \sum_{|m|=q} \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(0)}{m!} u^m, \qquad q = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.1}$$

Идеал, порожденный этими однородными многочленами, будем обозначать через

$$I_\varphi = [P_0^\varphi, P_1^\varphi, \dots, P_q^\varphi, \dots]. \tag{2.2}$$

**2.2. Пространства векторнозначных обобщенных функций.** Пусть $\mathscr{A}(\Omega)$ – топологическое векторное пространство основных функций на открытом подмножестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $X$ – локально выпуклое пространство. Обозначим через $\mathscr{A}'(\Omega, X) = L_b(\mathscr{A}(\Omega), X)$ пространство непрерывных линейных отображений из $\mathscr{A}(\Omega)$ в $X$ с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $\mathscr{A}(\Omega)$ [20]. Нас интересуют в основном пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n, X)$, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, $\mathscr{S}'(\mathbb{H}^{n+1}, X)$ и $\mathscr{S}'_I(\mathbb{R}^n, X)$; см. [18], [19] касательно векторнозначных обобщенных функций.

Заметим, что имеется корректно определенный непрерывный линейный проектор из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$ на $\mathscr{S}'_I(\mathbb{R}^n, X)$, являющийся ограничением $X$-значных обобщенных функций медленного роста на $\mathscr{S}_I(\mathbb{R}^n)$. Мы не будем вводить новое обозначение для этого отображения, так что если $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, то проекцию этой функции на $\mathscr{S}'_I(\mathbb{R}^n, X)$ мы по-прежнему будем обозначать через $\mathbf{f}$.

**2.3. Вейвлет-анализ на $\mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, E)$.** В этом пункте мы отметим некоторые свойства вейвлет-преобразования обобщенных функций (Лизоркина) со значениями в банаховом пространстве $E$. Под вейвлетом мы будем понимать элемент пространства $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Вейвлет-преобразование функции $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, E)$ относительно вейвлета $\psi \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{W}_\psi \mathbf{f}(x, y) = \langle \mathbf{f}(x + yt), \overline{\psi}(t) \rangle \in E, \qquad (x, y) \in \mathbb{H}^{n+1}.$$

Ясно, что $\mathscr{W}_\psi \mathbf{f} \in C^\infty(\mathbb{H}^{n+1}, E)$.

Заметим [11], [14], что $\mathscr{W}_\psi \colon \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathscr{S}(\mathbb{H}^{n+1})$ является непрерывным линейным отображением. Нас интересуют те вейвлеты, для которых отображение $\mathscr{W}_\psi$ допускает обращение слева. Для реконструкции на основе вейвлетов применяется так называемый оператор вейвлет-синтеза [11]. При заданной функции $\Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{H}^{n+1})$ определим *оператор вейвлет-синтеза* относительно вейвлета $\psi$ как

$$\mathscr{M}_\psi \Phi(t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, y) \frac{1}{y^n} \psi\left(\frac{t - x}{y}\right) \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{y}, \qquad t \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Можно показать, что отображение $\mathscr{M}_\psi \colon \mathscr{S}(\mathbb{H}^{n+1}) \to \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ непрерывно [11], [21].

Будем говорить, что вейвлет $\psi \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ допускает *реконструирующий вейвлет*, если существует такой вейвлет $\eta \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$, что величина

$$c_{\psi,\eta}(\omega) = \int_0^\infty \overline{\widehat{\psi}}(r\omega) \widehat{\eta}(r\omega) \frac{\mathrm{d}r}{r} \neq 0, \qquad \omega \in \mathbb{S}^{n-1}, \tag{2.4}$$

не зависит от направления $\omega$; в этом случае положим $c_{\psi,\eta} := c_{\psi,\eta}(\omega)$. Если $\psi$ допускает реконструирующий вейвлет $\eta$, то для вейвлет-преобразования пространства $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ имеет место формула реконструкции

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \mathscr{M}_\eta \mathscr{W}_\psi. \tag{2.5}$$

В работе [16; утверждение 5.1] мы охарактеризовали вейвлеты, имеющие реконструирующие вейвлеты. В действительности они представляют собой элементы из $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$, являющиеся невырожденными в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что основная функция $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *невырождена*, если ее преобразование Фурье не равно нулю тождественно ни на одном луче, проходящем через начало координат.

Оператор вейвлет-синтеза (2.3) можно продолжить на $\mathscr{S}'_0(\mathbb{H}^{n+1}, E)$ следующим образом. Пусть $\mathbf{K} \in \mathscr{S}'_0(\mathbb{H}^{n+1}, E)$. Определим непрерывное линейное отображение $\mathscr{M}_\psi\colon \mathscr{S}'_0(\mathbb{H}^{n+1}, E) \mapsto \mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, E)$ соотношением

$$\langle \mathscr{M}_\psi \mathbf{K}(t), \rho(t)\rangle = \langle \mathbf{K}(x,y), \mathscr{W}_{\overline{\psi}}\rho(x,y)\rangle, \qquad \rho \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

Заметим, что мы решили отождествлять функцию $\mathbf{F}$ медленного роста на $\mathbb{H}^{n+1}$, т.е. функцию, удовлетворяющую условию роста

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{y} + y\right)^{-k} (1+|x|)^{-l} \|\mathbf{F}(x,y)\| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty,$$

с элементом пространства $\mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, E)$ с помощью интеграла Бохнера

$$\langle \mathbf{F}(x,y), \Phi(x,y)\rangle = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y)\mathbf{F}(x,y)\, \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y}, \qquad \Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{H}^{n+1}).$$

Если вейвлет $\psi \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ является невырожденным и $\eta \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ – его реконструирующий вейвлет, то справедлива формула реконструкции (см. [16; утверждение 5.3])

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, E)} = \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \mathscr{M}_\eta \mathscr{W}_\psi; \tag{2.7}$$

кроме того, имеет место формула десингуляризации

$$\langle \mathbf{f}(t), \rho(t)\rangle = \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{W}_\psi \mathbf{f}(x,y) \mathscr{W}_{\overline{\eta}}\rho(x,y)\, \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y}, \tag{2.8}$$

выполненная для всех $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, E)$ и $\rho \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$.

## § 3. Регуляризующее преобразование $E$-значных обобщенных функций

В этом параграфе мы обсудим некоторые базовые свойства регуляризующего преобразования $E$-значных обобщенных функций медленного роста относительно основной функции $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, которое, как и во введении, мы определим как $E$-значную $C^\infty$-функцию

$$M^{\mathbf{f}}_\varphi(x,y) := (\mathbf{f} * \varphi_y)(x), \qquad (x,y) \in \mathbb{H}^{n+1}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. Если $\psi \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$, то очевидно, что

$$\mathscr{W}_\psi \mathbf{f} = M^{\mathbf{f}}_{\check{\overline{\psi}}}.$$

Разумеется, преобразование (3.1) имеет смысл для обобщенных функций со значениями в произвольном локально выпуклом пространстве.

Изучение (тауберова) “обращения” оценки регуляризующего преобразования $E$-значной обобщенной функции, которая дается следующим (абелевым) утверждением, является центральной задачей настоящей статьи.

Утверждение 3.1. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, *и пусть* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $M_\varphi^{\mathbf{f}} \in C^\infty(\mathbb{H}^{n+1}, E)$ *является функцией медленного роста на* $\mathbb{H}^{n+1}$. *Кроме того, линейное отображение* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E) \mapsto M_\varphi^{\mathbf{f}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{H}^{n+1}, E)$ *непрерывно в топологиях равномерной сходимости на ограниченных множествах. Далее, если подмножество* $\mathfrak{B} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ *ограничено в топологии поточечной сходимости, то существуют такие* $k, l$ *и* $C > 0$, *что*

$$\|M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y)\| \leqslant C\biggl(\frac{1}{y}+y\biggr)^k (1+|x|)^l, \qquad (x,y) \in \mathbb{H}^{n+1}, \tag{3.2}$$

*для всех* $\mathbf{f} \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения простое, но мы приведем его для полноты изложения. Пространство $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ является борнологическим. Поэтому мы должны показать, что рассматриваемое отображение переводит ограниченные множества в ограниченные. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ – ограниченное множество. Из теоремы Банаха–Штейнгауза следует существование таких $k_1 \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$, что для всех $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbf{f} \in \mathfrak{B}$ имеет место оценка

$$\|\langle \mathbf{f}, \rho\rangle\| \leqslant C_1 \sup_{t\in\mathbb{R}^n,\, |m|\leqslant k_1} (1+|t|)^{k_1} |\rho^{(m)}(t)|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y)\| &\leqslant C_1\biggl(\frac{1}{y}+y\biggr)^{n+k_1} \sup_{u\in\mathbb{R}^n,\, |m|\leqslant k_1} (1+|x|+y|u|)^{k_1}|\varphi^{(m)}(u)| \\ &\leqslant C\biggl(\frac{1}{y}+y\biggr)^{n+2k_1} (1+|x|)^{k_1} \quad \text{для всех} \ \ \mathbf{f}\in\mathfrak{B},\end{aligned}$$

где $C = C_1 \sup_{u\in\mathbb{R}^n, |m|\leqslant k_1}(1+|u|)^{k_1}|\varphi^{(m)}(u)|$. Таким образом, мы получаем неравенство (3.2) при $k = n+2k_1$ и $l = k_1$. Если $\mathfrak{C} \subset \mathscr{S}(\mathbb{H}^{n+1})$ является ограниченным множеством основных функций, то

$$\begin{aligned}\|\langle M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y), \Phi(x,y)\rangle\| &= \biggl\|\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y)\Phi(x,y)\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y}\biggr\| \\ &\leqslant C\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \biggl(\frac{1}{y}+y\biggr)^k (1+|x|)^l|\Phi(x,y)|\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y},\end{aligned}$$

причем эта оценка верна при $\mathbf{f} \in \mathfrak{B}$ и $\Phi \in \mathfrak{C}$. Таким образом, множество

$$\{M_\varphi^{\mathbf{f}} \colon \mathbf{f} \in \mathfrak{B}\} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{H}^{n+1}, E)$$

ограничено; значит, отображение непрерывно.

Отметим, что регуляризующие преобразования обладают отличными свойствами локализации, что вытекает из следующего простого утверждения.

Утверждение 3.2. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, *и пусть* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Предположим, что* $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} \mathbf{f}$ *– компактное множество. Тогда для любого натурального числа* $k \in \mathbb{N}$ *существует такая константа* $C = C_k$, *что*

$$\sup_{x \in K} \|M_\varphi^{\mathbf{f}}(x, y)\| \leqslant C y^k \quad \textit{для всех} \;\; 0 < y < 1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Введем $C(K, E)$-значную обобщенную функцию медленного роста, значение которой на элементе $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_t)$ задается соотношением $\langle \mathbf{G}(t), \rho(t) \rangle (\xi) = (\mathbf{f} * \rho)(\xi)$, $\xi \in K$. Ясно, что $\mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n_t, C(K_\xi, E))$. Далее, поскольку $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} \mathbf{f}$, для каждого $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется равенство $\langle \mathbf{G}(\varepsilon t), \rho(t) \rangle = 0$. В частности, мы получаем, что для фиксированного числа $k \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\mathbf{G}(\varepsilon t) = O(\varepsilon^k) \quad \text{при} \;\; \varepsilon \to 0^+ \quad \text{в} \;\; \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n_t, C(K, E)), \tag{3.4}$$

которое интерпретируется как квазиасимптотика в смысле, указанном в [15], [16]. (Точный смысл (3.4) выражается равенством $\|\langle \mathbf{G}(\varepsilon t), \rho(t) \rangle\|_{C(K,E)} = O(\varepsilon^k)$ для каждой функции $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.) Известно (ср. с [16; утверждение 7.1] или [24; лемма 6]), что квазиасимптотическое соотношение (3.4) верно и в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n_t, C(K, E))$. Этот факт означает, что мы вправе применить соотношение (3.4) к $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, что сразу дает оценку

$$\sup_{x \in K} \|M_\varphi^{\mathbf{f}}(x, y)\| = \|\langle \mathbf{G}(yt), \varphi(t) \rangle\|_{C(K,E)} \leqslant C y^k$$

для некоторого $C > 0$, как и утверждалось.

В следующих параграфах мы сосредоточим внимание на регуляризующем преобразовании относительно невырожденных основных функций в смысле определения 2.1. Очевидно, что если $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, то $\varphi$ – невырожденная функция. Мы завершаем этот параграф обсуждением двух интегральных преобразований, возникающих в качестве регуляризующих преобразований относительно основных функций, удовлетворяющих последнему условию.

Пример 3.1 (регуляризующее преобразование как решение задачи Коши). Если основная функция имеет определенный специальный вид, то регуляризующее преобразование может оказаться решением некоторого дифференциального уравнения в частных производных. В данном примере мы обсудим частный случай этой ситуации. Пусть множество $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ представляет собой замкнутый выпуклый конус с вершиной в начале координат. В частности, мы можем взять $\Gamma = \mathbb{R}^n$. Пусть $P$ – такой однородный многочлен степени $d$, что $\operatorname{Re} P(iu) < 0$ для всех $u \in \Gamma \setminus \{0\}$. Мы обозначим [22], [23] через

$\mathscr{S}'_\Gamma \subseteq \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ подпространство обобщенных функций с носителем в $\Gamma$. Рассмотрим $E$-значную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(x,t) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{U}(x,t), \qquad \lim_{t\to 0^+}\mathbf{U}(x,t) = \mathbf{f}(x) \quad \text{в} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n_x), \tag{3.5}$$
$$\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{f}} \subseteq \Gamma, \qquad (x,t) \in \mathbb{H}^{n+1},$$

в классе $E$-функций медленного роста на $\mathbb{H}^{n+1}$, т.е. функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{H}^{n+1}} \|\mathbf{U}(x,t)\| \left(t + \frac{1}{t}\right)^{-k_1} (1+|x|)^{-k_1} < \infty \quad \text{для некоторых} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}.$$

Легко проверить, что задача (3.5) имеет единственное решение, удовлетворяющее указанному условию медленного роста. Действительно, функция

$$\mathbf{U}(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\langle \widehat{\mathbf{f}}(u), e^{ix\cdot u} e^{tP(iu)} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\langle \widehat{\mathbf{f}}(u), e^{ix\cdot u} e^{P(it^{1/d}u)} \right\rangle$$

является этим искомым решением. Можно найти [23] основную функцию $\eta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ со свойством $\eta(u) = e^{P(iu)}$, $u \in \Gamma$. Выбрав такую функцию $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, что $\widehat{\varphi} = \eta$, выразим $\mathbf{U}$ в виде

$$\mathbf{U}(x,t) = \left\langle \mathbf{f}(\xi), \frac{1}{t^{n/d}}\varphi\left(\frac{x-\xi}{t^{1/d}}\right)\right\rangle = M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y) \quad \text{при} \quad y = t^{1/d}.$$

В частном случае $P(u) = |u|^2$ задача (3.5) является задачей Коши для уравнения теплопроводности и $\varphi(\xi) = (2\sqrt{\pi})^{-n} e^{-\xi^2/4}$.

Пример 3.2 (преобразования Лапласа как регуляризующие преобразования). Пусть $\Gamma$ – замкнутый выпуклый острый конус [22], [23] с вершиной в начале координат. Сопряженный ему конус обозначим через $\Gamma^*$. Из определения острого конуса следует, что у сопряженного конуса $\Gamma^*$ множество внутренних точек $C_\Gamma = \operatorname{int}\Gamma^*$ непусто и $T^{C_\Gamma} = \mathbb{R}^n + iC_\Gamma$. Обозначим через $\mathscr{S}'_\Gamma(E)$ подпространство $E$-значных обобщенных функций медленного роста с носителем $\Gamma$. Для заданной функции $\mathbf{h} \in \mathscr{S}'_\Gamma(E)$ преобразование Лапласа [22] определяются соотношением

$$\mathscr{L}\{\mathbf{h}; z\} = \langle \mathbf{h}(u), e^{iz\cdot u}\rangle, \qquad z \in T^{C_\Gamma};$$

это голоморфная $E$-значная функция на цилиндрической области $T^{C_\Gamma}$. Зафиксируем $\omega \in C_\Gamma$. Мы можем записать $\mathscr{L}\{\mathbf{h}; x + i\sigma\omega\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma > 0$, как $\phi$-преобразование. Выберем такую функцию $\eta_\omega \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, что $\eta_\omega(u) = e^{-\omega\cdot u}$, $u \in \Gamma$. Тогда при $\widehat{\varphi}_\omega = \eta_\omega$ и $\widehat{\mathbf{f}} = (2\pi)^n\mathbf{h}$ справедливо равенство

$$\mathscr{L}\{\mathbf{h}; x + i\sigma\omega\} = M^{\mathbf{f}}_{\varphi_\omega}(x,\sigma).$$

Заметим, что это частный случай примера 3.1 при $P_\omega(\xi) = i\omega\cdot\xi$.

## § 4. Тауберовы оценки класса

Установим тауберову природу оценки

$$\|M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y)\| \leqslant C\frac{(1+y)^k(1+|x|)^l}{y^k}, \qquad (x,y)\in\mathbb{H}^{n+1}. \tag{4.1}$$

Оценку (4.1) будем называть *глобальной оценкой класса.* Мы докажем, что если $\mathbf{f}$ принимает значения в “широком” локально выпуклом пространстве, содержащем более узкое банахово пространство $E$, и если $\mathbf{f}$ удовлетворяет оценке (4.1) для невырожденной основной функции $\varphi$, то существует такая обобщенная функция $\mathbf{G}$ со значениями в широком пространстве, что $\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{G}}\subseteq\{0\}$ и $\mathbf{f}-\mathbf{G}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,E)$. В случае, когда широкое пространство является нормированным, $\mathbf{G}$ оказывается просто многочленом. Всем этим мы займемся в п. 4.1.

Мы также рассмотрим в п. 4.2 следствия оценки (4.1) в случае, когда она предполагается выполненной только для $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times(0,1]$; мы будем называть такую оценку *локальной оценкой класса.* В этом случае ситуация несколько отличается, и мы получим, что $\mathbf{f}-\mathbf{G}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,E)$, где $\widehat{\mathbf{G}}$ имеет компактный носитель, который уже не обязательно совпадает с началом координат. Тем не менее носитель преобразования Фурье поправочного члена останется контролируемым с помощью так называемого показателя невырожденности основной функции, который мы введем ниже.

Появление поправочных членов в обоих случаях глобальной и локальной оценок можно избежать, если дополнить предположения, включив среднее свертки с другой подходящей основной функцией.

Всюду в этом параграфе, если не указано иное, будет предполагаться, что $X$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством, причем банахово пространство $E$ вложено в $X$ и отображение вложения $E\to X$ линейно и непрерывно. Заметим, что преобразование (3.1) также имеет смысл для $X$-значных обобщенных функций. Кроме того, для общности мы будем работать с интегральной версией оценки класса (4.1).

**4.1. Глобальные оценки класса.** Начнем с полной характеризации пространства $\mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n,E)$ в терминах вейвлет-преобразования.

Утверждение 4.1. *Пусть* $\mathbf{f}\in\mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n,X)$, *и пусть* $\psi\in\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ *является невырожденным вейвлетом. Следующие два условия необходимы и достаточны для того, чтобы* $\mathbf{f}\in\mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n,E)$:

$$\begin{gathered}\mathscr{W}_{\psi}\mathbf{f}(x,y)\in E \ \textit{для почти всех значений}\ (x,y)\in\mathbb{H}^{n+1},\\ \textit{причем эта функция измерима как}\ E\textit{-значная функция},\end{gathered} \tag{4.2}$$

*и существуют такие константы* $k,l\in\mathbb{N}$, *что*

$$\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{y}+y\right)^{-k}(1+|x|)^{-l}\|\mathscr{W}_{\psi}\mathbf{f}(x,y)\|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty. \tag{4.3}$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна (утверждение 3.1). Докажем *достаточность.* Пусть $\eta$ – вейвлет реконструкции для $\psi$. Применим оператор вейвлет-синтеза к функции $\mathbf{K}(x,y) = \mathscr{W}_\psi \mathbf{f}(x,y)$, что возможно, поскольку наши предположения (4.2) и (4.3) обеспечивают включение $\mathbf{K} \in \mathscr{S}'(\mathbb{H}^{n+1}, E)$. Итак, положим $\widetilde{\mathbf{f}} := \mathscr{M}_\eta \mathbf{K} \in \mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, E) \subset \mathscr{S}'_0(\mathbb{R}^n, X)$. Значит, мы должны показать, что $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$. Пусть $\rho \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Согласно определению (ср. с (2.6)), (2.3) и (2.5) мы имеем

$$\langle \widetilde{\mathbf{f}}, \rho \rangle = \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \mathbf{f}(t), \frac{1}{y^n} \overline{\psi}\left(\frac{t-x}{y}\right) \mathscr{W}_{\overline{\eta}} \rho(x,y) \right\rangle \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y},$$
$$\langle \mathbf{f}, \rho \rangle = \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \langle \mathbf{f}, \mathscr{M}_{\overline{\psi}} \mathscr{W}_{\overline{\eta}} \rho \rangle = \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \left\langle \mathbf{f}(t), \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{y^n} \overline{\psi}\left(\frac{t-x}{y}\right) \mathscr{W}_{\overline{\eta}} \rho(x,y) \right\rangle \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y}.$$

Таким образом, при

$$\Phi(x,y;t) = \frac{1}{y^{n+1}} \overline{\psi}\left(\frac{t-x}{y}\right) \mathscr{W}_{\overline{\eta}} \rho(x,y)$$

наша задача сводится к обоснованию перестановки интегрирования и дуального спаривания в соотношении

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbf{f}(t), \Phi(x,y;t) \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left\langle \mathbf{f}(t), \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y;t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\rangle. \tag{4.4}$$

Для доказательства (4.4) проверим, что

$$\left\langle \mathbf{w}^*, \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbf{f}(t), \Phi(x,y;t) \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\rangle = \left\langle \mathbf{w}^*, \left\langle \mathbf{f}(t), \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y;t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\rangle \right\rangle \tag{4.5}$$

для произвольного элемента $\mathbf{w}^* \in X'$ (именно здесь локальная выпуклость и хаусдорфовость пространства $X$ играют роль). Поскольку интеграл в левой части соотношения (4.5) является интегралом Бохнера в $E$ и ограничение $\mathbf{w}^*$ на $E$ принадлежит $E'$, мы сразу получаем формулу перестановки

$$\left\langle \mathbf{w}^*, \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbf{f}(t), \Phi(x,y;t) \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\rangle = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbf{w}^*, \langle \mathbf{f}(t), \Phi(x,y;t) \rangle \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4.6}$$

С другой стороны, записав $\displaystyle\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y;t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ в виде предела сумм Римана, сходящихся в $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n_t)$, мы сможем с легкостью обосновать перестановки, дающие соотношение

$$\left\langle \mathbf{w}^*, \left\langle \mathbf{f}(t), \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,y;t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\rangle \right\rangle = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbf{w}^*, \langle \mathbf{f}(t), \Phi(x,y;t) \rangle \rangle \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4.7}$$

Сравнив (4.6) и (4.7), получим равенство (4.5).

Теперь мы рассмотрим общий случай регуляризующих преобразований с невырожденными ядрами (ср. с определением 2.1).

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *и пусть функция* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *является невырожденной. Следующие условия достаточны для существования* *такой $X$-значной обобщенной функции* $\mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *что* $\mathbf{f} - \mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ *и* $\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{G}} \subseteq \{0\}$.

(i) *Функция* $M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x, y)$ *принимает значения в* $E$ *для почти всех* $(x, y) \in \mathbb{H}^{n+1}$ *и измерима как* $E$*-значная функция.*

(ii) *Существуют такие* $k, l \in \mathbb{N}$, *что*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{y} + y\right)^{-k} (1 + |x|)^{-l} \|M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x, y)\| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty. \tag{4.8}$$

*В этом случае также имеет место включение*

$$P^{\varphi}_q \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E) \quad \text{для всех} \ \ q \in \mathbb{N}, \tag{4.9}$$

*где* $P^{\varphi}_q$ – *однородные члены многочленов Тейлора для* $\widehat{\varphi}$ *в начале координат* (*ср. с* (2.1)).

Доказательство. Рассмотрим невырожденный вейвлет $\psi_1 \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$, заданный соотношением $\widehat{\psi}_1(u) = e^{-|u| - (1/|u|)}$. Положим $\psi = \overline{\check{\varphi}} * \psi_1$; тогда $\psi \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ также является невырожденным вейвлетом. Используя ту же аргументацию, что и в доказательстве утверждения 4.1, осуществим перестановку интегрирования и дуального спаривания

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_{\psi} \mathbf{f}(x, y) &= \langle \mathbf{f}(x + yt), (\check{\varphi} * \overline{\psi}_1)(t) \rangle = \left\langle \mathbf{f}(x + yt), \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi}_1(u) \varphi(u - t) \, \mathrm{d}u \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi}_1(u) \langle \mathbf{f}(x + yt), \varphi(u - t) \rangle \, \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x + yu, y) \overline{\psi}_1(u) \, \mathrm{d}u; \end{aligned}$$

интеграл в данном соотношении понимается в смысле Бохнера. Таким образом, легко видеть, что ограничение $\mathbf{f}$ на $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет предположениям утверждения 4.1, и потому существует такой элемент $\mathbf{g} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, что $\langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \rho \rangle = 0$ для всех $\rho \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Отсюда сразу следует, что для $\mathbf{G} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$ имеет место вложение $\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{G}} \subseteq \{0\}$ и $\mathbf{f} - \mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$.

Далее, ясно, что $\mathbf{G}$ является $X$-значной целой функцией с разложением в степенной ряд вида, скажем, $\mathbf{G}(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} i^{|m|} t^m \mathbf{w}_m$ при $\mathbf{w}_m \in X$, так что $\widehat{\mathbf{G}}$ задается мультипольным рядом

$$\widehat{\mathbf{G}}(u) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} (-1)^{|m|} \delta^{(m)}(u) \mathbf{w}_m,$$

сходящимся в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$. Мы сразу получим соотношение (4.9), если покажем, что $P^{\varphi}_q(\partial/\partial t)\mathbf{G}$ является $E$-значной функцией. Заметим, что из наших предположений вытекает принадлежность $M^{\mathbf{G}}_{\varphi}(x, y) \in E$ для почти всех $(x, y)$.

Следовательно, для почти всех $(x,y)$ мы имеем

$$\begin{aligned} M_\varphi^{\mathbf{G}}(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \widehat{\mathbf{G}}(u), e^{ix\cdot u}\widehat{\varphi}(yu)\rangle = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\partial^{|m|}}{\partial u^m}(e^{ix\cdot u}\widehat{\varphi}(yu))|_{u=0}\mathbf{w}_m \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} y^q \sum_{|j|=q} \widehat{\varphi}^{(j)}(0) \sum_{j\leqslant m} \binom{m}{j}(ix)^{m-j}\mathbf{w}_m \\ &= \sum_{q=0}^{\infty}(iy)^q\left(P_q^\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{G}\right)(x)\in E. \end{aligned}$$

Из этого факта с легкостью получаем, что $(P_q^\varphi(\partial/\partial x)\mathbf{G})(x)\in E$ для почти всех $q\in\mathbb{N}$ и $x\in\mathbb{R}^n$.

Если $X$ – нормированное пространство, то очевидно, что единственными $X$-значными обобщенными функциями с носителем в начале координат будут в точности те, что имеют вид

$$\sum_{|m|\leqslant N}\delta^{(m)}\mathbf{w}_m, \qquad \mathbf{w}_m\in X.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть $X$ – нормированное пространство, $\mathbf{f}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,X)$, и пусть функция $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ является невырожденной. Тогда из условий* (i) *и* (ii) *теоремы* 4.1 *следует существование такого $X$-значного многочлена $\mathbf{P}$, что $\mathbf{f}-\mathbf{P}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,E)$. Кроме того,*

$$\mathbf{f}\in\mathscr{S}_{I_\varphi}(\mathbb{R}^n,E),$$

*где $I_\varphi$ – идеал, порожденный однородными компонентами многочлена Тейлора для $\widehat{\varphi}$ в начале координат* (*ср. с* (2.1) *и* (2.2)).

Доказательство. Нам остается проверить, что $\mathbf{f}\in\mathscr{S}_{I_\varphi}(\mathbb{R}^n,E)$. Согласно теореме 4.1 если $\mathbf{P}$ является таким $X$-значным многочленом, что $\mathbf{f}-\mathbf{P}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,E)$, то многочлены $P_q^\varphi(\partial/\partial t)\mathbf{P}$ будут $E$-значными для всех $q\in\mathbb{N}$. Нам надо показать, что если $\phi\in\mathscr{S}_{I_\varphi}(\mathbb{R}^n)$, то $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(t)\mathbf{P}(t)\,\mathrm{d}t\in E$. Пусть $N$ – степень $\mathbf{P}$. Существуют такие многочлены $Q_q$, что

$$T_N(u)=\sum_{|m|\leqslant N}\frac{\widehat{\phi}^{(m)}(0)}{m!}u^m=\sum_{q=0}^{N}Q_q(u)P_q^\varphi(u).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}\phi(t)\mathbf{P}(t)\,\mathrm{d}t &= \left\langle\mathbf{P}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\delta(u),\widehat{\phi}(u)\right\rangle = \sum_{q=0}^{N}\left\langle\mathbf{P}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\delta(u),Q_q(u)P_q^\varphi(u)\right\rangle \\ &= \sum_{q=0}^{N}(-i)^qQ_q\left(-i\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(P_q^\varphi\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\mathbf{P})(0)\in E. \right. \end{aligned}$$

Заметим, что степень многочлена $\mathbf{P}$, возникающего в следствии 4.2 может зависеть только от $\mathbf{f}$ и не зависеть от основной функции. Однако если многочлены Тейлора функции $\widehat{\varphi}$ обладают богатой алгебраической структурой, то о степени $\mathbf{P}$ можно сказать больше. Напомним, что идеал $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}^n)$ был определен в п. 2.1.

Следствие 4.2. *Допустим, что условия следствия 4.1 выполняются. Если существует такое натуральное число $d \in \mathbb{N}$, что $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}^n)$ содержится в идеале, порожденном многочленами $P_0^{\varphi}, \dots, P_d^{\varphi}$, то существует такой $X$-значный многочлен $\mathbf{P}$ степени не более $d-1$, что $\mathbf{f}-\mathbf{P} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. В частности, $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'_{\mathbb{P}_d}(\mathbb{R}^n, E)$.*

Доказательство. Из следствия 4.1 вытекает существование такого $X$-значного многочлена $\widetilde{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) + \sum_{d\leqslant|m|\leqslant N} \mathbf{w}_m t^m$, что $\mathbf{f} - \widetilde{\mathbf{P}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ и $\mathbf{P}$ имеет степень не более $d-1$. Тогда нам остается доказать, что $\mathbf{w}_m \in E$ для $d \leqslant |m| \leqslant N$. Но из следствия 4.1 также вытекает, что $Q(\partial/\partial t)\widetilde{\mathbf{P}}$ является $E$-значным многочленом для любого $Q \in I_\varphi$; поскольку $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}^n) \subseteq I_\varphi$, мы сразу получаем, что $\mathbf{w}_m = m!((\partial^{|m|}/\partial t^m)\widetilde{\mathbf{P}})(0) \in E$ для $d \leqslant |m| \leqslant N$.

В общем случае нельзя заменить $X$-значную целую функцию $\mathbf{G}$ в теореме 4.1 на $X$-значный многочлен. Однако у нас есть некоторая полезная информация о $\widehat{\mathbf{G}}$. Так как эта функция имеет носитель в начале координат, как мы уже отмечали, имеет место разложение

$$\widehat{\mathbf{G}} = \sum_{m\in\mathbb{N}^n} \frac{(-1)^{|m|}\delta^{(m)}}{m!}\mu_m(\widehat{\mathbf{G}}),$$

где векторы $\mu_m(\widehat{\mathbf{G}}) = \langle \widehat{\mathbf{G}}(u), u^m\rangle \in X$ – ее моменты и ряд сходится в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$. Этот ряд “слабо конечен” в том смысле, что для каждого элемента $\mathbf{w}^* \in X'$ существует такое число $N_{\mathbf{w}^*} \in \mathbb{N}$, что

$$\langle \mathbf{w}^*, \langle \widehat{\mathbf{G}}, \rho\rangle\rangle = \sum_{|m|\leqslant N_{\mathbf{w}^*}} \frac{\rho^{(m)}(0)}{m!}\langle \mathbf{w}^*, \mu_m(\widehat{\mathbf{G}})\rangle \quad \text{для всех} \quad \rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Далее, если на $X$ задана любая непрерывная полунорма $\mathfrak{p}$, то можно найти такое число $N_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N}$, что

$$\mathfrak{p}\biggl(\langle \widehat{\mathbf{G}}, \rho\rangle - \sum_{|m|\leqslant N_{\mathfrak{p}}} \frac{\rho^{(m)}(0)}{m!}\mu_m(\widehat{\mathbf{G}})\biggr) = 0$$

для всех $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Наконец, как мы уже отмечали, обратное преобразование Фурье $\mathbf{G}$ функции $\widehat{\mathbf{G}}$ можно естественным образом отождествить с целой $X$-значной функцией.

Пример 4.1. Рассмотрим $X = C(\mathbb{R})$ и пусть $E = C_b(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных ограниченных функций. Пусть $\chi_q \in C(\mathbb{R})$ – такая нетривиальная функция, что $\operatorname{supp}\chi_q \subset (q, q+1)$, $q \in \mathbb{N}$. Далее, для каждого $q \in \mathbb{N}$

найдем гармонический однородный многочлен $Q_q$ степени $q$, так что $\Delta Q_q = 0$. Рассмотрим $E$-значную обобщенную функцию

$$\mathbf{G}(t,\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} Q_q(t)\chi_\nu(\xi) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n_t, C(\mathbb{R}_\xi)) \setminus \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n_t, C_b(\mathbb{R}_\xi)).$$

Ее преобразование Фурье задается бесконечным мультипольным рядом с носителем в начале координат, а именно

$$\widehat{\mathbf{G}}(u,\xi) = (2\pi)^n \sum_{q=0}^{\infty} \biggl(Q_q\Bigl(i\,\frac{\partial}{\partial u}\Bigr)\delta\biggr)(u)\chi_\nu(\xi).$$

Пусть $\mathbf{h} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, C_b(\mathbb{R}))$, и пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ является такой невырожденной основной функцией, что ее преобразование Фурье удовлетворяет соотношению $\widehat{\varphi}(u) = |u|^2 + O(|u|^N)$ при $u \to 0$ для всех $N > 2$. Если $\mathbf{f} = \mathbf{h} + \mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, C(\mathbb{R}))$, то $M^{\mathbf{f}}_\varphi(x,y) = M^{\mathbf{h}}_\varphi(x,y)$ для всех $(x,y) \in \mathbb{H}^{n+1}$. Значит, обобщенная функция $\mathbf{f}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1; однако не существует такого $C(\mathbb{R})$-значного многочлена $\mathbf{P}$, что $\mathbf{f} - \mathbf{P} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, C_b(\mathbb{R}))$.

Возникновения в теореме 4.1 корректирующего члена $\mathbf{G}$ можно избежать, включив в ее условия среднее свертки $\mathbf{f}$ с другой основной функции следующим образом. Тогда мы получим характеризацию пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *пусть основная функция* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *является невырожденной, и пусть основная функция* $\varphi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *такова, что* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. *Тогда* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия.*

(i) *Функция* $M^{\mathbf{f}}_\varphi(x,y)$ *принимает значения в* $E$ *для почти всех* $(x,y) \in \mathbb{H}^{n+1}$ *и измерима как* $E$*-значная функция.*

(ii) *Существуют такие* $k, l \in \mathbb{N}$, *что справедлива оценка* (4.8).

(iii) *Существует такое число* $l \in \mathbb{N}$, *что* $(\mathbf{f} * \varphi_0)(x) \in E$ *почти всюду, причем эта свертка измерима и удовлетворяет оценке*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-l} \|(\mathbf{f} * \varphi_0)(x)\|\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{4.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение теоремы 4.1 дает такую обобщенную функцию $\mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, что $\mathbf{f} - \mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ и $\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{G}} \subset \{0\}$. Используя (iii), получим, что п.в. $(\mathbf{G} * \varphi_0)(x) \in E$ и что эта функция определяет элемент из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ как $E$-значную функцию медленного роста. Пусть $\sigma > 0$ – такое достаточно малое число, что $|\widehat{\varphi}(u)| > 0$ для $|u| < \sigma$. Поскольку $\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{G}} \subset \{0\}$, достаточно показать, что $\langle \mathbf{G}, \widehat{\rho}\rangle \in E$ для каждого элемента $\rho \in \mathscr{D}(B(0,\sigma))$, откуда будет следовать, что $\mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. Положив $\widehat{\chi} = \rho/\widehat{\varphi}_0$, получаем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{G}, \widehat{\rho}\rangle = \langle \widehat{\mathbf{G}}, \widehat{\chi}\cdot\widehat{\varphi}_0\rangle &= (2\pi)^n \Bigl\langle \mathbf{G}(t), \int_{\mathbb{R}^n} \chi(-\xi)\varphi_0(\xi - t)\,\mathrm{d}\xi \Bigr\rangle \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi(-\xi)(\mathbf{G} * \varphi_0)(\xi)\,\mathrm{d}\xi \in E,\end{aligned}$$

где правомерность перестановки с интегрированием можно обосновать так же, как в доказательстве утверждения 4.1, а самый последний интеграл понимается в смысле Бохнера.

Следует заметить, что если функция $\varphi$ такова, что $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, то в теореме 4.2 можно взять $\varphi = \varphi_0$ и условие (iii) станет частью (ii); более сильный результат, однако, приводится ниже в следствии 4.3.

**4.2. Локальные оценки класса.** Приступим к изучению локальных оценок класса, а именно, оценок (4.1) в предположении, что они выполняются только для $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1]$. Мы снова будем работать с интегральным условием вместо поточечной оценки ради общности рассмотрения вопроса. Для начала отметим, что функция $M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x, y)$ может иногда оказаться тривиальной для $y \in (0, 1)$, причем это может случиться, даже если $\varphi$ является невырожденной функцией.

Пример 4.2. Пусть $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $r \in \mathbb{R}_+$; введем обозначение $[0, r\omega] = \{\sigma\omega\colon \sigma \in [0, r]\}$. Предположим, что обобщенная функция $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$ такова, что $\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{f}} \subset [0, r\omega]$, а $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ – любая основная функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset \mathbb{R}^n \setminus [0, r\omega]$; тогда

$$M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \widehat{\mathbf{f}}(u), e^{ixu} \widehat{\varphi}(yu) \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in (0, 1).$$

К счастью, оказывается, и мы это покажем, что единственными обобщенными функциями $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X) \setminus \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$, которые могут удовлетворять локальной оценке класса относительно невырожденной основной функции, являются обобщенные функции, преобразования Фурье которых имеют компактный носитель.

Чтобы двигаться дальше, нам надо ввести некоторую терминологию. Мы будем использовать слабые интегралы (интегралы Петтиса) от $X$-значных функций в смысле определения, приведенного, например, в работе [17; гл. 3]. Будем говорить, что $X$-значная обобщенная функция медленного роста $\mathbf{g} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$ является *слабо регулярной*, если существует такая $X$-значная функция $\widetilde{\mathbf{g}}$, что функция $\rho\widetilde{\mathbf{g}}$ слабо интегрируема на $\mathbb{R}^n$ для всех $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\langle \mathbf{g}, \rho \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(t) \widetilde{\mathbf{g}}(t)\,\mathrm{d}t \in X,$$

где интеграл понимается в слабом смысле. Мы будем отождествлять $\mathbf{g}$ с $\widetilde{\mathbf{g}}$ и, как всегда в таких случаях, писать $\mathbf{g} = \widetilde{\mathbf{g}}$.

Напомним некоторые факты о (векторнозначных) обобщенных функциях с компактным носителем. Пусть носитель обобщенной функции $\mathbf{g} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$ лежит в $\overline{B(0, r)}$ – замкнутом шаре радиуса $r$. Тогда справедлива следующая версия теоремы Шварца–Пэли–Винера: функция

$$\mathbf{G}(z) = \langle \mathbf{g}(u), e^{-iz \cdot u} \rangle, \qquad z \in \mathbb{C}^n,$$

является $X$-значной целой функцией, определяющей слабо регулярную обобщенную функцию медленного роста, и $\mathbf{G}(\xi) = \widehat{\mathbf{g}}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$; кроме того, функция $\mathbf{G}$ слабо экспоненциального типа, т.е. для всех $\mathbf{w}^* \in X'$ можно найти такие константы $C_{\mathbf{w}^*} > 0$ и $N_{\mathbf{w}^*} \in \mathbb{N}$, что

$$|\langle \mathbf{w}^*, \mathbf{G}(z)\rangle| \leqslant C_{\mathbf{w}^*}(1+|z|)^{N_{\mathbf{w}^*}} e^{r|\operatorname{Im} z|}, \qquad z \in \mathbb{C}^n. \tag{4.11}$$

Наоборот, если $\mathbf{G}$ является $X$-значной целой функцией, определяющей слабо регулярную обобщенную функцию медленного роста, и для всех $w^* \in X'$ существуют такие $C_{w^*} > 0$ и $N_{w^*} \in \mathbb{N}$, что выполняется (4.11), то $\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{g}$, где $\mathbf{g} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$ и $\operatorname{supp} \mathbf{g} \subseteq \overline{B(0,r)}$.

Следующее понятие, касающееся невырожденных основных функций, имеет большое значение в рамках рассматриваемой задачи.

Определение 4.1. Пусть функция $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ является невырожденной. При заданном элементе $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ рассмотрим функцию одной переменной $R_\omega(r) = \widehat{\varphi}(r\omega) \in C^\infty[0,\infty)$. Мы определим *показатель невырожденности* $\varphi$ как (конечное) число

$$\tau = \inf\{r \in \mathbb{R}_+ \colon \operatorname{supp} R_\omega \cap [0,r] \neq \varnothing \ \forall\, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной тауберов результат данного пункта. Мы будем рассматривать несколько более общие оценки норм регуляризующих преобразований $M_\varphi^{\mathbf{f}}$ в терминах функций $\Psi \colon \mathbb{R}^n \times (0,1] \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих при некоторых константах $C_1, C_2 > 0$ и $k, l \in \mathbb{N}$ оценкам

$$\Psi(0,y) \geqslant C_1 y^k \quad \text{и} \quad \Psi(x+\xi, y) \leqslant C_2 \Psi(x,y)(1+|\xi|)^l \tag{4.12}$$

для всех $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ и $y \in (0,1]$. В следующей теореме $L_\Psi^{p,p'}((0,1] \times \mathbb{R}^n, E)$ будет обозначать смешанное $L^{p,p'}$-пространство $E$-значных функций на $(0,1] \times \mathbb{R}^n$ с весом $\Psi$, т.е. пространство таких $E$-значных измеримых функций $\mathbf{F}$, что

$$\int_0^1 \left( \int_{\mathbb{R}^n} (\|\mathbf{F}(x,y)\| \Psi(x,y))^p \, \mathrm{d}x \right)^{p'/p} \frac{\mathrm{d}y}{y} < \infty.$$

Относительно параметров предполагается, что $p, p' \in [1, \infty]$.

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *и пусть* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *является невырожденной основной функцией с показателем невырожденности* $\tau$. *Предположим, что*:

(i) *функция* $M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y)$ *принимает значения в* $E$ *для почти всех* $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times (0,1]$ *и измерима как* $E$-*значная функция на* $\mathbb{R}^n \times (0,1]$;

(ii) *существует функция* $\Psi \colon \mathbb{R}^n \times (0,1]$, *удовлетворяющая оценкам* (4.12), *такая, что* $M_\varphi^{\mathbf{f}} \in L_\Psi^{p,p'}((0,1] \times \mathbb{R}^n, E)$.

*Тогда для любого* $r > \tau$ *существует* $X$-*значная целая функция* $\mathbf{G}$, *которая определяет слабо регулярную* $X$-*значную обобщенную функцию медленного роста и удовлетворяет* (4.11), *причем*

$$\mathbf{f} - \mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E).$$

*Кроме того,* $M^{\mathbf{f}-\mathbf{G}}_{\varphi} \in L^{p,p'}_{\Psi}((0,1] \times \mathbb{R}^n, E)$ *и* $\mathbf{G}$ *можно выбрать так, чтобы* $\widehat{\mathbf{G}} = \chi\widehat{\mathbf{f}}$, *где* $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *является произвольной основной функцией с носителем в шаре радиуса* $r$ *с центром в начале координат, удовлетворяющей условию* $\chi(t) = 1$ *для* $|t| \leqslant \tau$.

Доказательство. Пусть число $r_1$ таково, что $\tau < r_1 < r$. Несложно найти реконструирующий вейвлет $\eta \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ со свойством $\operatorname{supp}\widehat{\eta} \subset B(0, r_1)$ для $\varphi$ в том смысле, что

$$1 = \int_0^\infty \widehat{\varphi}(r\omega)\widehat{\eta}(r\omega)\,\frac{\mathrm{d}r}{r} \quad \text{для каждого } \ \omega \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Действительно, если выбрать неотрицательную функцию $\kappa \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $B(0, r_1) \setminus \{0\}$, равную 1 в окрестности сферы $\tau\mathbb{S}^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| = \tau\}$, то с помощью той же аргументации, что в доказательстве [16; утверждение 5.1], можно показать, что функция

$$\widehat{\eta}(x) = \frac{\kappa(x)\overline{\widehat{\varphi}(x)}}{\displaystyle\int_0^\infty \kappa(rx)|\widehat{\varphi}(rx)|^2\,\mathrm{d}r/r}$$

удовлетворяет нашим требованиям. Выполняя обычные вычисления (см. [11; гл. 1, § 14]), получим для $\rho \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ соотношение

$$\rho(t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{x-t}{y}\right)\mathscr{W}_{\overline{\eta}}\rho(x,y)\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y}.$$

Заметим, что если $\operatorname{supp}\widehat{\rho} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B(0, r_1)$, то

$$\mathscr{W}_{\overline{\eta}}\rho(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot u}\widehat{\rho}(u)\widehat{\eta}(-yu)\,\mathrm{d}u = 0 \quad \text{для всех } \ y \in [1,\infty).$$

Таким образом, проведя те же рассуждения, что и в доказательстве утверждения 4.1, можно показать, что

$$\langle f, \rho\rangle = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y)\mathscr{W}_{\overline{\eta}}\rho(x,y)\,\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y} \tag{4.13}$$

для всех $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ с носителем $\operatorname{supp}\widehat{\rho} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B(0, r_1)$. Выберем такую функцию $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\chi_1(u) = 1$ для всех $u \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, r)$ и $\operatorname{supp}\chi_1 \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, r_1)$. Свертка $\widehat{\chi}_1 * \mathbf{f}$ корректно определена, поскольку $\widehat{\chi}_1 \in \mathscr{O}'_C(\mathbb{R}^n)$ (пространство свертывателей), и из соотношения (4.13) и непрерывности $\mathscr{W}_{\overline{\eta}}$ вытекает, что $(2\pi)^{-n}\widehat{\chi}_1 * \mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. Следовательно, функция $\mathbf{G} = \mathbf{f} - (2\pi)^{-n}\widehat{\chi}_1 * \mathbf{f}$ удовлетворяет нашим требованиями, так как $\widehat{\mathbf{G}} = \chi\widehat{\mathbf{f}}$, где $\chi(\xi) = 1 - \chi_1(-\xi)$, и, таким образом, $\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{G}} \subseteq \overline{B(0,r)}$. Поскольку $\widehat{\chi}_1(\xi) = (2\pi)^n\delta(\xi) - \widehat{\chi}(-\xi)$ и, значит,

$$\begin{aligned} M^{\mathbf{f}-\mathbf{G}}_{\varphi}(x,y) &= M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y) - \frac{1}{(2\pi)^n}\left\langle \mathbf{f}(\xi), \left\langle \frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{x+t-\xi}{y}\right), \widehat{\chi}(t)\right\rangle\right\rangle \\ &= M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x,y) - \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x+t,y)\widehat{\chi}(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

мы с легкостью получаем оценку $L^{p,p'}$-нормы для $M^{\mathbf{f}-\mathbf{G}}_{\varphi}$.

Возникает соблазн подумать, что в теореме 4.3 можно взять $\mathbf{G}$ с носителем в $\overline{B(0,\tau)}$, однако в общем случае это не так, что демонстрирует следующий контрпример.

Пример 4.3. Пусть $X$, $E$ и последовательность $\{\chi_q\}_{q=1}^{\infty}$ таковы, как в примере 4.1. Рассмотрим случай размерности $n = 1$. Дополнительно предположим, что $\sup_\xi |\chi_q(\xi)| = 1$ для всех $q \in \mathbb{N}$. Пусть $\tau \geqslant 0$ и пусть вейвлет $\psi$, заданный соотношениями $\widehat{\psi}(u) = e^{-|u|-(1/(|u|-\tau))}$ для $|u| > \tau$ и $\widehat{\psi}(u) = 0$ для $|u| \leqslant \tau$, имеет показатель невырожденности $\tau$. Рассмотрим $C(\mathbb{R})$-значную обобщенную функцию

$$\mathbf{f}(t,\xi) = \sum_{q=1}^{\infty} e^{q+i(\tau+1/q)t}\chi_q(\xi) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_t, C(\mathbb{R}_\xi)) \setminus \mathscr{S}'(\mathbb{R}_t, C_b(\mathbb{R}_\xi)).$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\mathscr{W}_\psi \mathbf{f}(x,y)(\xi)\\ &= \sum_{1\leqslant q<y/(\tau(1-y))} \exp\biggl(q+(ix-y)\biggl(\tau+\frac{1}{q}\biggr)-\frac{q}{y-q\tau(1-y)}\biggr)\chi_q(\xi), \qquad 0<y<1,\end{aligned}$$

и, значит, $\|\mathscr{W}_\psi \mathbf{f}(x,y)\|_{C_b(\mathbb{R})} \leqslant 1$ для всех $0 < y < 1$. Следовательно, все предположения теоремы 4.3 выполнены, однако $\mathbf{f} - \mathbf{G} \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}, C_b(\mathbb{R}))$ для любой $\mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}))$ с носителем $\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{G}} \subseteq [-\tau,\tau]$.

Мы получим характеризацию пространства $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ в терминах локальной оценки класса, объединив теорему 4.3 с теми рассуждениями, что были использованы при доказательстве теоремы 4.2.

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *пусть функция* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *является невырожденной с показателем невырожденности* $\tau$, *и пусть функция* $\varphi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *такова, что* $\widehat{\varphi}_0(u) \neq 0$ *для всех* $|u| \leqslant \tau$. *Тогда* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия.*

(i) *Функция* $M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y)$ *принимает значения в* $E$ *для почти всех* $(x,y) \in \mathbb{H}^{n+1}$ *и измерима как* $E$*-значная функция.*

(ii) *Существуют такие числа* $k, l \in \mathbb{N}$, *что*

$$\int_0^1 y^k (1+|x|)^{-l} \|M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y)\| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty. \tag{4.14}$$

(iii) *Существует такое число* $l \in \mathbb{N}$, *что* $(\mathbf{f} * \varphi_0)(x) \in E$ *п.в., причем эта свертка измерима и удовлетворяет условию* (4.10).

В частном случае, когда $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, условие (iii) в теореме 4.4 становится избыточным, и тем самым имеет место следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *и пусть функция* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *такова, что* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$. *Тогда* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 4.4.

## § 5. Сильно невырожденные основные функции

Справедливы и усиленные версии как теоремы 4.1, так и теоремы 4.3, если ограничиться невырожденными основными функциями, удовлетворяющими следующему определению.

Определение 5.1. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Будем называть функцию $\varphi$ *сильно невырожденной*, если существуют такие константы $N \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $C > 0$, что

$$C|u|^N \leqslant |\widehat{\varphi}(u)| \quad \text{для всех} \quad |u| \leqslant r. \tag{5.1}$$

Класс основных функций, подпадающих под определение 5.1, оказался тем же, что был использован Ю. Н. Дрожжиновым и Б. И. Завьяловым в работе [9], хотя понятие невырожденности сформулировано ими в терминах многочленов Тейлора функции $\widehat{\varphi}$. Будем говорить, что многочлен $P$ является *невырожденным* (в начале координат, в смысле Дрожжинова и Завьялова), если для каждого элемента $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ мы имеем

$$P(r\omega) \not\equiv 0, \qquad r \in \mathbb{R}_+.$$

Дрожжинов и Завьялов рассмотрели класс основных функций $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, для которых существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{|m| \leqslant N} \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(0) u^m}{m!}$$

представляет собой невырожденный многочлен. Легко убедиться, что данное свойство, введенное Дрожжиновым и Завьяловым, эквивалентно сильной невырожденности в смысле определения 5.1. Следует также отметить, что сильно невырожденные функции входят в класс функций, введенных определением 2.1, хотя, естественно, этот класс намного шире (ср. с [16; замечание 4.3]).

Теперь мы можем сформулировать наш первый результат, касающийся сильно невырожденных основных функций.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *и пусть функция* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *является сильно невырожденной. Предположим, что*:

(i) *функция* $M^{\mathbf{f}}_{\varphi}(x, y)$ *принимает значения в* $E$ *для почти всех* $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1]$ *и измерима как* $E$*-значная функция на* $\mathbb{R}^n \times (0, 1]$;

(ii) *существуют такие числа* $k, l \in \mathbb{N}$, *что справедлива оценка* (4.14).

*Тогда существует такая обобщенная функция* $\mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$, *что* $\mathbf{f} - \mathbf{G} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ *и* $\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{G}} \subseteq \{0\}$. *Кроме того, имеют место соотношения* (4.9).

*Если дополнительно выполняется условие* (iii) *теоремы* 4.4 *для некоторой основной функции* $\varphi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *такой, что* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, *то* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$.

Доказательство. Ввиду теоремы 4.3 можно предположить, что $\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{f}} \subseteq \overline{B(0,1)}$. Пусть функция $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\rho(u) = 1$ для $u \in B(0, 3/2)$ и $\operatorname{supp} \rho \subset B(0, 2)$. Можно найти такие $\sigma, C_1 > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $2\sigma \leqslant 1$ и $C_1|u|^N \leqslant |\widehat{\varphi}(u)|$ для всех $u \in \overline{B(0, 2\sigma)}$. При заданной функции $\widehat{\eta} \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ соотношение

$\widehat{\chi}(u) = \widehat{\chi}_{\widehat{\eta}}(u) = \rho(u)\eta(u)/\widehat{\varphi}(\sigma u)$ определяет элемент пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ непрерывным образом; следовательно, отображение $\gamma\colon \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$, заданное равенством $\gamma(\widehat{\eta}) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^l |\chi(\xi)| \, \mathrm{d}\xi$, представляет собой непрерывную полунорму на $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Теперь для любой функции $\widehat{\eta} \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ мы имеем

$$\langle \mathbf{f}, \widehat{\eta} \rangle = \langle \widehat{\mathbf{f}}(u), \widehat{\chi}(u)\widehat{\varphi}(\sigma u) \rangle = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi(-\xi) M_{\varphi}^{\mathbf{f}}(\xi, \sigma) \, \mathrm{d}\xi.$$

Значит, $\|\langle \mathbf{f}, \eta \rangle\| \leqslant (C/\sigma^k)\gamma(\widehat{\eta})$ для всех $\widehat{\eta} \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$, откуда следует, что ограничение $\mathbf{f}$ на $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $\mathscr{S}_0'(\mathbb{R}^n, E)$. Из рассуждений, которые мы уже проводили при доказательстве теоремы 4.1, вытекает существование обобщенной функции $\mathbf{G}$, удовлетворяющей всем требованиям. То, что соотношение (4.9) выполняется для каждого $q$, показывается в точности так же, как в доказательстве теоремы 4.1. Наконец, доказать последнее утверждение теоремы можно так же, как соответствующее утверждение теоремы 4.2.

В случае размерности $n = 1$ нет разницы между невырожденностью и сильной невырожденностью для основных функций из $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \setminus \mathscr{S}_0(\mathbb{R})$. В действительности в одномерном случае имеет место более сильный результат, чем теорема 5.1.

Утверждение 5.1. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, X)$, *и пусть функция* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *такова, что* $\int_{-\infty}^{\infty} t^d \varphi(t) \, \mathrm{d}t \neq 0$ *для некоторого* $d \in \mathbb{N}$. *Если выполняются условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 5.1, *то существует такой* $X$*-значный многочлен* $\mathbf{P}$ *степени не более* $d-1$, *что* $\mathbf{f} - \mathbf{P} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, E)$.

Доказательство. Предположим, что $d$ является наименьшим целым числом с указанным свойством. Существует такая функция $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, что $\phi^{(d)} = (-1)^d \varphi$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \, \mathrm{d}t \neq 0$. Тогда $M_{\phi}^{\mathbf{f}^{(d)}}(x,y) = y^{-d} M_{\varphi}^{\mathbf{f}}(x,y)$. Таким образом, применяя следствие 4.3, получим, что $\mathbf{f}^{(d)} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}, E)$, откуда с очевидностью следует существование $\mathbf{P}$ с требуемыми свойствами.

Заметим, что утверждение 5.1 в общем случае неверно для многомерных регуляризующих преобразований, даже если ядра $\varphi$ являются сильно невырожденными. Этот факт подтверждается примером 4.1. Естественно, если $X$ в теореме 5.1 – нормированное пространство, то функция $\mathbf{G}$ должна быть $X$-значным многочленом, что утверждается в нижеприведенном следствии. Следствие 5.1 расширяет важный результат Ю. Н. Дрожжинова и Б. И. Завьялова [9; теорема 2.1].

Следствие 5.1. *Предположим, что условия теоремы* 5.1 *выполнены. Если* $X$ *– нормированное пространство, то существует такой* $X$*-значный многочлен* $\mathbf{P}$, *что* $\mathbf{f} - \mathbf{P} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. *Кроме того,* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'_{I_\varphi}(\mathbb{R}^n, E)$.

Как и в следствии 4.2, мы получаем следующий результат Ю. Н. Дрожжинова и Б. И. Завьялова (ср. [9; теорема 2.2]).

Следствие 5.2. *Предположим, что условия следствия 5.1 выполнены. Если существует такое число* $d \in \mathbb{N}$, *что* $\mathbb{P}_d(\mathbb{R}^n)$ *содержится в идеале, порожденном многочленами* $P_0^\varphi, P_1^\varphi, P_2^\varphi, \dots, P_d^\varphi$, *то существует такой* $X$*-значный многочлен* $\mathbf{P}$ *степени не более* $d-1$, *что* $\mathbf{f} - \mathbf{P} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$. *В частности,* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'_{\mathbb{P}_d}(\mathbb{R}^n, E)$.

## § 6. Векторнозначные обобщенные функции, сплетающие представления $\mathbb{R}^n$

В качестве приложения нашего подхода мы перенесем рассуждения, проведенные в одномерном случае в работе [8; § 4], на многомерный случай. Всюду в настоящем параграфе мы предполагаем, что банахово пространство $E$ непрерывно и линейно вложено в локально выпуклое пространство $X$ и что оба они снабжены представлением группы $(\mathbb{R}^n, +)$, т.е. существует такое отображение $\pi\colon \mathbb{R}^n \to L_b(X)$, что:

(a) $\pi(x+h) = \pi(x)\pi(h)$ для всех $x, h \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\pi(x)\mathbf{v} \in E$ для каждого $\mathbf{v}$ и $x \in \mathbb{R}^n$.

Из свойства (b) и теоремы о замкнутом графике следует, что в действительности (ограничение) $\pi(x)$ принадлежит $L_b(E)$ и, таким образом, $\pi$ индуцирует представление $\mathbb{R}^n$ также и на $E$. В дальнейшем будем предполагать, что $\pi$ является $C_0$-группой медленного роста операторов на $E$, а именно:

(c) существуют такие $l$ и $C$, что $\|\pi(x)\|_{L_b(E)} \leqslant C(1+|x|)^l$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \|\pi(x)\mathbf{v} - \mathbf{v}\| = 0$ для каждого $\mathbf{v} \in E$.

Будем обозначать операторы сдвига на $\mathbb{R}^n$ через $T_h$, так что действие этих операторов на функции (и векторнозначные обобщенные функции) задается соотношением $(T_h\phi)(x) = \phi(x-h)$. Будем говорить, что обобщенная функция $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$ *сплетает* $\pi$ и $T$, если $\pi(x) \circ \mathbf{f} = T_{-x}\mathbf{f} (= \mathbf{f} \circ T_x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. если

$$\pi(x)(\langle \mathbf{f}, \varphi\rangle) = \langle \mathbf{f}, T_x\varphi\rangle \quad \text{для любых} \ \ \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \text{ и } x \in \mathbb{R}^n.$$

Нам также понадобится понятие правильно меняющихся функционалов, введенных и изученных Ю. Н. Дрожжиновым и Б. И. Завьяловым в работе [8; § 2]. Пусть $\mathbb{J}$ – неотрицательный функционал, действующий на неотрицательные измеримые функции $g\colon (0,1] \to [0,\infty]$. С точки зрения обозначений удобно использовать фиктивную переменную и писать $\mathbb{J}(g) = \mathbb{J}_y(g(y))$. Функционал называется *правильно меняющимся с показателем* $\alpha$, если выполняются следующие пять условий.

(I) $\mathbb{J}_y\biggl(\displaystyle\int g(y,\xi)\,\mathrm{d}\xi\biggr) \leqslant \displaystyle\int \mathbb{J}_y(g(y,\xi))\,\mathrm{d}\xi$ для всех неотрицательных измеримых функций $g(y,\xi)$.

(II) Функционал $\mathbb{J}$ является монотонным, т.е. $\mathbb{J}(g_1) \leqslant \mathbb{J}(g_2)$ для $g_1(y) \leqslant g_2(y)$ п.в.

(III) Функционал $\mathbb{J}$ является однородным, т.е. $\mathbb{J}(\lambda g) = \lambda\mathbb{J}(g)$, $\lambda \geqslant 0$.

(IV) Функционал $\mathbb{J}$ обладает свойством монотонной сходимости, т.е. $\mathbb{J}(g_k) \to \mathbb{J}(g) \to$ при $k \to \infty$, если $g_k(y) \nearrow g(y)$ п.в. при $k \to \infty$.

(V) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $C_\varepsilon > 0$, что для каждой неотрицательной измеримой функции с носителем в полуинтервале $(0, 1]$

$$\mathbb{J}_y(g(ay)) \leqslant \begin{cases} C_\varepsilon a^{\alpha+\varepsilon} \mathbb{J}_y(g(y)), & \text{если} \quad a \geqslant 1, \\ C_\varepsilon a^{\alpha-\varepsilon} \mathbb{J}_y(g(y)), & \text{если} \quad a \leqslant 1. \end{cases}$$

Пример 6.1. Типичным примером такого функционала $\mathbb{J}$ является $L^q$-норма ($1 \leqslant q \leqslant \infty$), взвешенная с функцией, правильно меняющейся по Карамате. Пусть $c \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0, 1]$ будет правильно меняющейся функцией в 0 с показателем $\alpha$, т.е. положительной измеримой функцией, удовлетворяющей соотношению

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{c(ay)}{c(y)} = a^\alpha, \qquad a > 0.$$

Ввиду оценок Поттера (см. [1; гл. 1]) функционал

$$\mathbb{J}^{q,c}(g) = \left( \int_0^1 \left( \frac{g(y)}{c(y)} \right)^q \frac{\mathrm{d}y}{y} \right)^{1/q}$$

(с очевидными корректировками при $p = \infty$) является правильно меняющимся с показателем $\alpha$. Если $c(y) = y^\alpha$, мы будем писать просто $\mathbb{J}^{q,c} = \mathbb{J}^{q,\alpha}$.

Нам также понадобится следующее определение.

Определение 6.1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ – невырожденная основная функция с показателем невырожденности $\tau$. Пара $(\varphi_0, \varphi)$ называется *парой Литтлвуда–Пэли* (LP-парой) порядка $\alpha$, если $\widehat{\varphi}_0(u) \neq 0$ для $|u| \leqslant \tau$ и $\varphi \in \mathscr{S}_{\mathbb{P}_{\lfloor \alpha \rfloor}}(\mathbb{R}^n)$, т.е. $\int_{\mathbb{R}^n} t^m \varphi(t)\, \mathrm{d}t = 0$ для всех мультииндексов $m \in \mathbb{N}^n$ при $|m| \leqslant \lfloor \alpha \rfloor$. (Заметим, что если $\alpha < 0$, то последнее условие на моменты функции $\varphi$ оказывается бессодержательным и, таким образом, мы имеем просто $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.)

Мы также отметим, что каждый правильно меняющийся функционал $\mathbb{J}$ с показателем $\alpha$ удовлетворяет неравенствам

$$\mathbb{J}^{1,\beta}(g) \leqslant C_\beta \mathbb{J}(g) \tag{6.1}$$

при некоторых $C_\beta > 0$, если $\beta < \alpha$ [8; лемма 2.5].

Теорема 6.1. *Пусть обобщенная функция* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, X)$ *сплетает представление* $\pi$ *и группу сдвигов* $T$, *пусть* $\mathbb{J}$ *является правильно меняющимся функционалом с показателем* $\alpha \in \mathbb{R}$, *и пусть* $(\varphi_0, \varphi)$ – LP-*пара порядка* $\alpha$. *Предположим, что* $\langle \mathbf{f}, \varphi_0 \rangle \in E$, *функция* $M^{\mathbf{f}}_\varphi(0, y)$ *принимает значения в* $E$ *для почти всех* $y \in (0, 1]$ *и является измеримой как* $E$-*значная функция на* $(0, 1]$ *и*

$$\mathbb{J}_y(\|M^{\mathbf{f}}_\varphi(0, y)\|) < \infty. \tag{6.2}$$

*Тогда* $\mathbf{f} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ *и существует такая непрерывная полунорма* $\gamma$ *на* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *не зависящая от* $\mathbf{f}$, *что*

$$\|\langle \mathbf{f}, \rho \rangle\| + \mathbb{J}_y(\|M^{\mathbf{f}}_\theta(0, y)\|) \leqslant (\|\langle \mathbf{f}, \varphi_0 \rangle\| + \mathbb{J}_y(\|M^{\mathbf{f}}_\varphi(0, y))\|)(\gamma(\rho) + \gamma(\theta)) \tag{6.3}$$

*для всех* $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\theta \in \mathscr{S}_{\mathbb{P}_{\lfloor \alpha \rfloor}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Заметим, что справедливо равенство

$$M_\varphi^{\mathbf{f}}(x,y)=\pi(x)(M_\varphi^{\mathbf{f}}(0,y)),$$

с учетом которого можно проверить, что предположение (i) теоремы 4.4 выполняется ввиду условия (d) на $\pi$. Используя (6.2), свойство (c) представления $\pi$ и (6.1), получим, что предположение (ii) теоремы 4.4 выполняется. Далее, функция $\mathbf{f}*\check{\varphi}_0\in C(\mathbb{R}^n,E)$ и удовлетворяет предположению (iii) теоремы 4.4. Следовательно, $\mathbf{f}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,E)$.

Чтобы найти полунорму $\gamma$, для которой справедлива оценка (6.3), сначала рассмотрим пространство

$$L^{\mathbb{J}}((0,1],E)=\{\mathbf{g}\colon (0,1]\to E\colon \text{ норма } \|\mathbf{g}(\lambda)\|_E \text{ измерима и } \mathbb{J}_\lambda(\|\mathbf{g}(\lambda)\|_E)<\infty\}$$

(для других правильно меняющихся функционалов вводятся аналогичные пространства); это банахово пространство (ср. с [8; замечание 2.1]). Очевидно, что существует такое число $\beta\in\mathbb{R}$, что

$$\int_0^1\|\langle\mathbf{f}(\lambda t),\phi(t)\rangle\|\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{\beta+1}}<\infty \quad \text{для каждой функции } \ \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Это означает, что векторнозначная обобщенная функция $\mathbf{F}$, заданная соотношением

$$\langle\mathbf{F}(t),\phi(t)\rangle(\lambda)=\langle\mathbf{f}(\lambda t),\phi(t)\rangle,$$

принимает значения в банаховом пространстве $L^{\mathbb{J}^{1,\beta}}((0,1],E)$, где $\mathbb{J}^{1,\beta}$ определяется как в примере 6.1. Можно предположить, что $\beta<\alpha$, так что пространство $L^{\mathbb{J}}((0,1],E)$ будет непрерывно вложено в $L^{\mathbb{J}^{1,\beta}}((0,1],E)$, как следует из (6.1). Поскольку

$$\begin{aligned}\|M_\varphi^{\mathbf{F}}(x,y)\|_{L^{\mathbb{J}}((0,1],E)}&=\mathbb{J}_\lambda(\|M_\varphi^{\mathbf{f}}(\lambda x,\lambda y)\|)\leqslant(1+|x|)^l\mathbb{J}_\lambda(\|M_\varphi^{\mathbf{f}}(0,\lambda y)\|)\\&\leqslant C_\varepsilon y^\alpha\left(y^\varepsilon+\frac{1}{y^\varepsilon}\right)(1+|x|)^l\mathbb{J}_\lambda(\|M_\varphi^{\mathbf{f}}(0,\lambda)\|),\qquad (x,y)\in\mathbb{H}^n,\end{aligned}$$

применим следствие для доказательства существования таких функций $\mathbf{c}_m\in L^{\mathbb{J}^{1,\beta}}((0,1],E)$, $|m|\leqslant N$, что

$$\mathbb{J}_\lambda\left(\left\|\langle\mathbf{f}(\lambda t),\phi(t)\rangle-\sum_{|m|\leqslant N}\mathbf{c}_m(\lambda)\int_{\mathbb{R}^n}t^m\phi(t)\,\mathrm{d}t\right\|\right)<\infty,\qquad \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).\tag{6.4}$$

Можно также предположить, что каждая функция $\mathbf{c}_m$ ограничена на $[1/2,1]$. Зафиксируем $|m|\leqslant N$ и возьмем функцию $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, моменты которой равны $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}t^j\phi(t)\,\mathrm{d}t=\delta_{j,m}$. Тогда для каждого фиксированного числа $a>0$ мы имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_m(a\lambda)-a^{|m|}\mathbf{c}_m(\lambda)&=\left(\left\langle\mathbf{f}(\lambda t),a^{-n}\phi\left(\frac{t}{a}\right)\right\rangle-\sum_{|m|\leqslant N}\mathbf{c}_m(\lambda)a^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}t^m\phi\left(\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t\right)\\&\quad-\left(\langle\mathbf{f}(a\lambda t),\phi(t)\rangle-\sum_{|m|\leqslant N}\mathbf{c}_m(a\lambda)\int_{\mathbb{R}^n}t^m\phi(t)\,\mathrm{d}t\right)\in L^{\mathbb{J}}((0,1],E).\end{aligned}$$

Воспользовавшись этими соотношениями при фиксированном мультииндексе $\alpha \leqslant |m| \leqslant N$ и $a = 1/2$, запишем

$$\mathbf{c}_m\left(\frac{\lambda}{2}\right) - 2^{-|m|}\mathbf{c}_m(\lambda) = \mathbf{b}(\lambda) \in L^{\mathbb{J}}((0,1], E). \tag{6.5}$$

Проитерировав соотношение (6.5) $\nu$ раз, для любого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ получим формулу

$$\mathbf{c}_m(\lambda) = 2^{|m|}\left(2^{-\nu|m|}\mathbf{c}_m(2^\nu\lambda) + \sum_{j=1}^{\nu} 2^{-|m|j}\mathbf{b}(2^j\lambda)\right), \qquad 0 < \lambda \leqslant 2^{-\nu}.$$

Обозначим через $\chi_A$ характеристическую функцию множества $A$ и возьмем $0 < \varepsilon < |m| - \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{J}(\|\mathbf{c}_m\|) &\leqslant \mathbb{J}(\chi_{(1/2,1]}\|\mathbf{c}_m\|) + 2^{|m|}\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu|m|}\mathbb{J}_\lambda(\chi_{(1/2,1]}(2^\nu\lambda)\|\mathbf{c}_m(2^\nu\lambda)\|) \\ &\quad + 2^{|m|}\mathbb{J}_\lambda\left(\left\|\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j|m|}\mathbf{b}(2^j\lambda)\chi_{(0,2^{-j}]}(\lambda)\right\|\right) \\ &\leqslant C_\varepsilon(\mathbb{J}(\chi_{(1/2,1]}\|\mathbf{c}_m\|) + \mathbb{J}(\chi_{(0,1/2]}\|\mathbf{b}\|))\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(m-\alpha-\varepsilon)} < \infty,\end{aligned}$$

так что

$$\mathbf{c}_m \in L^{\mathbb{J}}((0,1], E) \quad \text{для} \quad \alpha < |m| \leqslant N. \tag{6.6}$$

Объединив (6.4) и (6.6), заключаем, что

$$\mathbb{J}_y(\|M^{\mathbf{f}}_\phi(0,y)\|) < \infty \quad \text{для каждой функции} \quad \phi \in \mathscr{S}_{\mathbb{P}_{\lfloor\alpha\rfloor}}(\mathbb{R}^n). \tag{6.7}$$

Нам осталось, воспользовавшись оценкой (6.7)), показать, что искомая полунорма $\gamma$ существует. Введем два нормированных пространства $E$-значных обобщенных функций, сплетающих $\pi$ и $T$. Первое из них – это пространство $Y$, состоящее из всех тех обощенных функций $\mathbf{g}$, для которых

$$\|\mathbf{g}\|_Y = \|\langle\mathbf{g}, \varphi_0\rangle\| + \mathbb{J}_y(M^{\mathbf{g}}_\varphi(0,y)) < \infty. \tag{6.8}$$

Чтобы ввести второе пространство, мы рассмотрим фиксированное, но произвольное ограниченное множество $\mathfrak{B} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}_{\mathbb{P}_{\lfloor\alpha\rfloor}}(\mathbb{R}^n)$ с единственным требованием, чтобы $\mathfrak{B}$ содержало LP-пару $(\varphi_0, \varphi)$, и определим $\widetilde{Y}$ как пространство тех $\mathbf{g}$, для которых

$$\|\mathbf{g}\|_{\widetilde{Y}} = \sup_{(\rho,\theta)\in\mathfrak{B}} (\|\langle\mathbf{g}, \rho\rangle\| + \mathbb{J}_y(M^{\mathbf{g}}_\theta(0,y))) < \infty. \tag{6.9}$$

Путем стандартных рассуждений (см., например, [8; утверждение 6.2] или [14; утверждение 5.4]) можно показать, что оба пространства $Y$ и $\widetilde{Y}$ являются банаховыми. Из соотношения (6.7)) в применении к произвольному элементу из $Y$ и теоремы Банаха–Штейнгауза следует, что $Y = \widetilde{Y}$ как векторные пространства. Поскольку тождественное отображение $(Y, \|\cdot\|_{\widetilde{Y}}) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ с очевидностью является непрерывным, из принципа сохранения области следует, что нормы (6.8) и (6.9) эквивалентны. Следовательно, применяя снова теорему Банаха–Штейнгауза, мы получаем, что билинейное отображение

$$Y \times (\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}_{\mathbb{P}_{\lfloor \alpha \rfloor}}(\mathbb{R}^n)) \ni (\mathbf{g}, (\rho, \theta)) \mapsto (\langle \mathbf{g}, \rho \rangle, M_\theta^{\mathbf{g}}(0, \,\cdot\,)) \in E \times L^{\mathbb{J}}((0,1], E)$$

непрерывно. Отсюда вытекает существование $\gamma$ с требуемыми свойствами. Доказательство завершено.

Пример 6.2 (пространства Бесова). Пусть $(\varphi_0, \varphi)$ является LP-парой порядка $s$, пусть $p, q \in [1, \infty]$, и пусть $c \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0,1]$ – правильно меняющаяся функция (в 0) с показателем $s$. Определим пространство Бесова $B^c_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ как банахово пространство, состоящее из всех тех обобщенных функций $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых[1] $f * \varphi_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $M^f_\varphi(\,\cdot\,, y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ для любого $(0,1]$ и

$$\|f\|_{B^c_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f * \varphi_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}| + \mathbb{J}^{q,c}_y(\|M^f_\varphi(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)}) < \infty.$$

При $c(y) = y^s$ мы получаем классическое пространство Бесова $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^c_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Если рассмотреть $E = L^p(\mathbb{R}^n)$ и векторнозначную обобщенную функцию $\mathbf{f}$, заданную соотношением $\langle \mathbf{f}, \rho \rangle = f * \check{\rho}$ и принимающую значения в $X = L^p(\mathbb{R}^n, (1+|x|)^N \,\mathrm{d}x)$ для некоторого достаточно большого $N$, то из теоремы 6.1 следует, что определение пространства $B^c_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ не зависит от $(\varphi_0, \varphi)$ и что при различном выборе LP-пар порядка $s$ получаются эквивалентные нормы. Кроме того, при произвольно заданных $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\theta \in \mathscr{S}_{\mathbb{P}_{\lfloor \alpha \rfloor}}(\mathbb{R}^n)$ существуют такие константы $C_1$ и $C_2$, что

$$\|f * \rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|f\|_{B^c_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.10}$$

$$\mathbb{J}^{q,c}_y(\|M^f_\theta(x,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)}) \leqslant C_2 \|f\|_{B^c_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \tag{6.11}$$

для всех $f \in B^c_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Константы $C_1$ и $C_2$ в этих неравенствах можно выбрать равными в случае, когда $\rho$ и $\theta$ мы берем из ограниченных подмножеств пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Если $s < 0$, то можно взять любую функцию $\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ без каких бы то ни было условий на ее моменты.

## Список литературы

[1] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Paperback ed., Encyclopedia Math. Appl., **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, xx+494 pp.

[2] R. Chill, “Tauberian theorems for vector-valued Fourier and Laplace transforms”, *Studia Math.*, **128**:1 (1998), 55–69.

[3] G. Debruyne, J. Vindas, “Generalization of the Wiener–Ikehara theorem”, *Illinois J. Math.*, **60**:2 (2016), 613–624.

[4] G. Debruyne, J. Vindas, “Optimal Tauberian constant in Ingham’s theorem for Laplace transforms”, *Israel J. Math.*, **228**:2 (2018), 557–586.

---

[1] Если $p = \infty$, то мы будем рассматривать $E = UC(\mathbb{R}^n)$ – пространство равномерно непрерывных функций; само предположение касательно $L^\infty$ влечет тот факт, что $f * \varphi_0 \in UC(\mathbb{R}^n)$ и $M^f_\varphi(\,\cdot\,, y) \in UC(\mathbb{R}^n)$ для каждого $y > 0$ [6; теорема 3].

[5] G. Debruyne, J. Vindas, “Complex Tauberian theorems for Laplace transforms with local pseudofunction boundary behavior”, *J. Anal. Math.* (to appear).

[6] P. Dimovski, S. Pilipović, J. Vindas, “New distribution spaces associated to translation-invariant Banach spaces”, *Monatsh. Math.*, **177**:4 (2015), 495–515.

[7] Ю. Н. Дрожжинов, “Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций”, *УМН*, **71**:6(432) (2016), 99–154; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, “Multidimensional Tauberian theorems for generalized functions”, *Russian Math. Surveys*, **71**:6 (2016), 1081–1134.

[8] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, “Тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 47–118; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Tauberian theorems for generalized functions with values in Banach spaces”, *Izv. Math.*, **66**:4 (2002), 701–769.

[9] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, “Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах”, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 17–64; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Multidimensional Tauberian theorems for Banach-space valued generalized functions”, *Sb. Math.*, **194**:11 (2003), 1599–1646.

[10] Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, “Применения тауберовых теорем в некоторых задачах математической физики”, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 373–390; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zavyalov, “Applications of Tauberian theorems in some problems in mathematical physics”, *Theoret. and Math. Phys.*, **157**:3 (2008), 1678–1693.

[11] M. Holschneider, *Wavelets. An analysis tool*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995, xiv+423 pp.

[12] J. Korevaar, *Tauberian theory. A century of developments*, Grundlehren Math. Wiss., **xvi+483**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[13] J. Korevaar, “Distributional Wiener–Ikehara theorem and twin primes”, *Indag. Math. (N.S.)*, **16**:1 (2005), 37–49.

[14] S. Pilipović, D. Rakić, J. Vindas, “New classes of weighted Hölder–Zygmund spaces and the wavelet transform”, *J. Funct. Spaces Appl.*, **2012** (2012), 815475, 18 pp.

[15] S. Pilipović, B. Stanković, J. Vindas, *Asymptotic behavior of generalized functions*, Ser. Anal. Appl. Comput., **5**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012, xiv+294 pp.

[16] S. Pilipović, J. Vindas, “Multidimensional Tauberian theorems for vector-valued distributions”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **95**:109 (2014), 1–28.

[17] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975, 443 с.; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., Internat. Ser. Pure Appl. Math., New York, 1991, xviii+424 pp.

[18] L. Schwartz, “Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I”, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **7** (1957), 1–141.

[19] J. Sebastião e Silva, “Sur la définition et la structure des distributions vectorielles”, *Portugal. Math.*, **19** (1960), 1–80.

[20] F. Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York–London, 1967, xvi+624 pp.

[21] J. Vindas, S. Pilipović, D. Rakić, “Tauberian theorems for the wavelet transform”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **17**:1 (2011), 65–95.

[22] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of generalized functions*, Anal. Methods Spec. Funct., **6**, Taylor & Francis, London, 2002, xiv+311 pp.

[23] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986, 304 с.; англ. пер.: V. S. Vladimirov, Yu. N. Drozzinov, B. I. Zavialov, *Tauberian theorems for generalized*

*functions*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **10**, Kluwer Acad. Publl., Dordrecht, 1988, xvi+293 pp.

[24] Б. И. Завьялов, "Об асимптотических свойствах функций, голоморфных в трубчатых конусах", *Матем. сб.*, **136(178)**:1(5) (1988), 97–114; англ. пер.: B. I. Zav'yalov, "On the asymptotic properties of functions holomorphic in tubular cones", *Math. USSR-Sb.*, **64**:1 (1989), 97–113.

**Стеван Пилипович**
**(Stevan Pilipović)**
Department of Mathematics and Informatics,
University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia
*E-mail*: `pilipovic@dmi.uns.ac.rs`

Поступила в редакцию
05.01.2018

**Джассон Виндас**
**(Jasson Vindas)**
Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete Mathematics,
Ghent University, Ghent, Belgium
*E-mail*: `jasson.vindas@UGent.be`