Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, Управляемость и необходимые условия оптимальности второго порядка, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 1, 3–26

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9013

УДК 517.977.52

Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев

Управляемость и необходимые условия оптимальности второго порядка

Приводятся достаточные условия локальной управляемости управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержательные для случая, когда линейное приближение этой системы не является вполне управляемым. В качестве следствия получены необходимые условия оптимальности второго порядка для задачи оптимального управления.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: управляемость, оптимальное управление, условия второго порядка.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9013

Введение

В работе изучается абстрактная управляемая система, и основной результат – достаточные условия ее локальной управляемости. Непосредственным следствием этого результата являются условия оптимальности второго порядка для абстрактного варианта задачи оптимального управления. Доказанные общие утверждения применяются к управляемой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), что дает достаточные условия ее локальной управляемости, содержательные в ситуации, когда линейное приближение этой системы не является вполне управляемым. Из этих условий сразу следуют необходимые условия оптимальности второго порядка для сильного минимума в задаче оптимального управления с концевыми ограничениями общего вида. Рассмотрение абстрактной управляемой системы представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес и позволяет полностью исследовать интересующие нас вопросы, не отвлекаясь на специальные свойства управляемых систем, описываемых ОДУ.

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 рассматривается абстрактная управляемая система, доказывается основной результат об условиях ее локальной управляемости и извлекается следствие о необходимых условиях оптимальности второго порядка для абстрактной задачи оптимального управления. Следует сказать, что важным инструментом доказательства основного результата является специальная теорема об обратной функции, которая представляет и самостоятельный интерес. Приложением этих результатов к управляемой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-01-00649-а).

системе ОДУ посвящен § 2, в конце которого приведены соответствующие комментарии. В § 3 дается приложение теоремы о локальной управляемости системы ОДУ к так называемым системам порядка анормальности 1; здесь же рассматриваются некоторые примеры, показывающие, в частности, что условия, гарантирующие локальную управляемость системы, существенны.

§ 1. Абстрактная управляемая система

Пусть X, Z и E – нормированные пространства, $\mathscr{U} \subset E$, $F\colon \mathbb{R}^n \times X \times \mathscr{U} \to Z$, $f\colon \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $g\colon \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}^{m_2}$. Рассмотрим управляемую систему

$$F(\xi, x, u) = 0, \quad u \in \mathscr{U}, \qquad f(\xi, x) \leqslant 0, \quad g(\xi, x) = 0, \tag{1}$$

где неравенство понимается покоординатно.

Система (1) моделирует управляемую систему ОДУ, которая возникает в задачах оптимального управления; x – фазовая переменная, u – управление, а переменная ξ позволяет учитывать граничные условия достаточно общего вида.

Пусть точка $(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u}) \in \mathbb{R}^n \times X \times \mathscr{U}$ является *допустимой* для управляемой системы (1), т.е. она удовлетворяет всем соотношениям в (1).

Определение 1. Скажем, что управляемая система (1) *локально управляема относительно точки* $(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, если для каждой окрестности W точки $(\widehat{\xi}, \widehat{x})$ существуют такие окрестности W_1 и W_2 нулей в $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ соответственно, что для любого $y = (y_1, y_2) \in W_1 \times W_2$ найдется элемент $(\xi_y, x_y, u_y) \in W \times \mathscr{U}$, для которого $F(\xi_y, x_y, u_y) = 0$, $f(\xi_y, x_y) \leqslant y_1$ и $g(\xi_y, x_y) = y_2$.

Введем некоторые обозначения. Пусть X и Y – нормированные пространства, а X^*, Y^* – их сопряженные. Если $A\colon X \to Y$ – линейный непрерывный оператор, то A^* обозначает сопряженный оператор к A. Через $\langle x^*, x\rangle$ обозначаем значение линейного функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$. Сопряженное пространство $(\mathbb{R}^n)^*$ к $\mathbb{R}^n$ отождествляется с вектор-строками, $(\mathbb{R}^n)^*_+$ – конус линейных функционалов, неотрицательных на неотрицательных элементах $\mathbb{R}^n$.

Если $B\colon X \times X \to Y$ – билинейное отображение, то действие B на элементе (x_1, x_2) записываем так: $B[x_1, x_2]$.

Для производных[1] в точке $(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$ часто для краткости записи будем использовать обозначения $\widehat{F}' = F'(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, $\widehat{f}' = f'(\widehat{\xi}, \widehat{x})$, $\widehat{g}' = g'(\widehat{\xi}, \widehat{x})$. Аналогичные сокращения и для частных производных: $\widehat{F}_x = F_x(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, $\widehat{f}_\xi = f_\xi(\widehat{\xi}, \widehat{x})$ и т.д.

Для вторых производных отображений F, f и g (которые отождествляются с соответствующими непрерывными симметричными билинейными формами) также введем краткие обозначения: $\widehat{F}'' = F''(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, $\widehat{f}'' = f''(\widehat{\xi}, \widehat{x})$, $\widehat{g}'' = g''(\widehat{\xi}, \widehat{x})$.

Для каждого $q = (\zeta, h, v) \in \mathbb{R}^n \times X \times E$ (в предположении, что соответствующие производные существуют) рассмотрим систему соотношений относительно

[1] Всюду в настоящей работе имеются в виду производные по Фреше.

переменных $y^* \in Y^*$, $\lambda_f \in (\mathbb{R}^{m_1})^*_+$ и $\lambda_g \in (\mathbb{R}^{m_2})^*$

$$\begin{cases} \widehat{F}^*_\xi y^* + \widehat{f}^*_\xi \lambda_f + \widehat{g}^*_\xi \lambda_g = 0, \\ \widehat{F}^*_x y^* + \widehat{f}^*_x \lambda_f + \widehat{g}^*_x \lambda_g = 0, \\ \min\limits_{u \in \mathscr{U}} \langle y^*, F(\widehat{\xi}, \widehat{x}, u)\rangle = \langle y^*, F(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})\rangle = 0, \\ \langle \lambda_f, f(\widehat{\xi}, \widehat{x})\rangle = 0, \\ \langle y^*, \widehat{F}''[q,q]\rangle + \langle \lambda_f, \widehat{f}''[(\zeta,h),(\zeta,h)]\rangle + \langle \lambda_g, \widehat{g}''[(\zeta,h),(\zeta,h)]\rangle \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Если сопоставить системе (1) функцию Лагранжа

$$\mathscr{L}(\xi, x, u, y^*, \lambda_f, \lambda_g) = \big\langle y^*, F(\xi, x, u)\big\rangle + \langle \lambda_f, f(\xi, x)\rangle + \big\langle \lambda_g, g(\xi, x)\big\rangle,$$

где y^*, λ_f и λ_g – множители Лагранжа, то первые два соотношения в (2) – это условия стационарности данной функции по ξ и x в точке $(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, третье соотношение – условие минимума по u, четвертое – условие дополняющей нежесткости и последнее – неотрицательность второй производной функции Лагранжа на соответствующих элементах.

Обозначим через $\Lambda(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u}, q)$ множество множителей Лагранжа $(y^*, \lambda_f, \lambda_g) \in Y^* \times (\mathbb{R}^{m_1})^*_+ \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$, удовлетворяющих всем соотношениям в (2) при данном q и таких, что $|\lambda_f| + |\lambda_g| \neq 0$.

Система (1) представляет собой, как уже говорилось, абстрактную модель управляемой системы ОДУ в задаче оптимального управления. Предположения ниже – это абстрактные варианты предположений и свойств, которые выполняются в стандартной задаче оптимального управления (подробнее см. § 2).

Обозначим $\Sigma^k = \{\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbb{R}^k_+ \colon \sum_{i=1}^k \alpha_k < 1\}$ и для каждого $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \Sigma^k$ положим $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i$.

Основные предположения. 1) X, Z и E – банаховы пространства;

2) $\widehat{u} \in \operatorname{int} \mathscr{U}$ и существует такая окрестность точки $(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, в которой отображение F имеет непрерывную вторую производную, а отображения f и g имеют непрерывные вторые производные на множестве тех пар (ξ, x), для которых (ξ, x, u) принадлежит указанной окрестности; оператор $F_x(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$ обратим;

3) для любых $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \Sigma^k$ и $\widetilde{u} = (u_0, u_1, \dots, u_k) \in \mathscr{U}^{k+1}$ существует такой элемент $M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \widetilde{u}) \in \mathscr{U}$, что отображение $\overline{\alpha} \mapsto M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \widetilde{u})$ непрерывно на Σ^k, и для любой точки $(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{\widetilde{u}}) \in \mathbb{R}^n \times X \times \mathscr{U}^{k+1}$ найдется такая ее окрестность $\mathscr{O}(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{\widetilde{u}})$, что при всех $(\xi, x, \widetilde{u}) \in \mathscr{O}(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{\widetilde{u}})$ и $\overline{\alpha} \in \Sigma^k$ справедливы оценки

$$\bigg\| F(\xi, x, M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \widetilde{u})) - \sum_{i=0}^k \alpha_i F(\xi, x, u_i) \bigg\|_E < \varepsilon,$$

$$\bigg\| F_x(\xi, x, M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \widetilde{u})) - \sum_{i=0}^k \alpha_i F_x(\xi, x, u_i) \bigg\| < \varepsilon.$$

Предположение 3) означает, что для любой пары (ξ, x) выпуклые оболочки образов множества $\mathscr{U}$ при отображениях $u \mapsto F(\xi, x, u)$ и $u \mapsto F_x(\xi, x, u)$ принадлежат замыканиям этих образов. При этом требуется еще некоторая равномерность по параметрам ξ, x, $\widetilde{u}$ и $\overline{\alpha}$. Заметим, что отсюда следует, что сами замыкания указанных образов суть выпуклые множества.

В задачах оптимального управления, где F – интегральный оператор, соответствующий дифференциальной связи, приведенные предположения всегда выполняются. Величину $M_\varepsilon(\overline{\alpha}, \overline{u})$ будем называть *миксом управлений* u_0, $u_1, \dots, u_k$. Это понятие впервые появилось в работе В. М. Тихомирова [1] (см. также [2]).

Далее мы считаем, что предположения 1)–3) выполнены.

Отображение f, которое участвует в определении системы (1), запишем в координатном виде $f = (f_1, \dots, f_{m_1})^T$. Уберем те координаты f_i, для которых $f_i(\widehat{\xi}, \widehat{x}) < 0$. Если таких координат меньше чем m_1, то оставшийся укороченный вектор обозначим через f_a.

Определим множество – конус критических вариаций – следующим образом:

$$K(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u}) = \bigl\{q = (\zeta, h, v) \in \mathbb{R}^n \times X \times E\colon \\ \widehat{F}'q = 0,\ \widehat{f}_a'[\zeta, h] \leqslant 0,\ \widehat{g}'[\zeta, h] = 0\bigr\}, \tag{3}$$

где выражения $\widehat{f}_a'[\zeta, h]$ и $\widehat{g}'[\zeta, h]$ обозначают действия линейных операторов $\widehat{f}_a'$ и $\widehat{g}'$ на элементе (ζ, h).

Если отображение f таково, что $f(\widehat{\xi}, \widehat{x}) < 0$, то в определении $K(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$ неравенство $\widehat{f}_a'[\zeta, h] \leqslant 0$ отсутствует.

Основным утверждением настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть существует такое* $q = (\zeta, h, v) \in K(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, *что* $\Lambda(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u}, q) = \varnothing$. *Тогда система* (1) *локально управляема относительно точки* $(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$.

Более того, существует такая константа $\kappa_0 > 0$, *что для переменных* y, x_y *и* ξ_y *из определения локальной управляемости системы* (1) *справедлива оценка* $\|x_y - \widehat{x}\|_X + |\xi_y - \widehat{\xi}| \leqslant \kappa_0 |y|^{1/2}$.

Доказательству теоремы предпошлем два предложения и специальную теорему об обратной функции, представляющую, на наш взгляд, самостоятельный интерес, которая гарантирует существование обратной функции при более слабых, чем в классической ситуации, предположениях. Приведем сначала несколько определений.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого набора $\overline{u} = (u_1, \dots, u_k) \in \mathscr{U}^k$ рассмотрим отображение $\mathscr{F}\colon \mathbb{R}^n \times X \times \mathbb{R}^k \times \mathscr{U} \to Y$, определенное по правилу

$$\mathscr{F}(\xi, x, \overline{\alpha}, u; \overline{u}) = F(\xi, x, u) + \sum_{i=1}^k \alpha_i \bigl(F(\xi, x, u_i) - F(\xi, x, u)\bigr), \tag{4}$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$.

Отображение $(\xi, x, \overline{\alpha}, u; \overline{u}) \mapsto \mathscr{F}(\xi, x, \overline{\alpha}, u; \overline{u})$ дважды непрерывно дифференцируемо, $\mathscr{F}_x(\widehat{\xi}, \widehat{x}, 0, \widehat{u}; \overline{u}) = \widehat{F}_x$ и $\widehat{F}_x$ – обратимый оператор. Поэтому согласно классической теореме о неявной функции существует дважды непрерывно дифференцируемое отображение $(\xi,\overline{\alpha},u)\mapsto x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u})$ из некоторой окрестности точки $(\widehat{\xi},0,\widehat{u})$ такое, что $\mathscr{F}(\xi,x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u}),\overline{\alpha},u;\overline{u})=0$ для всех троек $(\xi,\overline{\alpha},u)$ из данной окрестности.

Далее мы предполагаем, что не все компоненты вектора $f=(f_1,\dots,f_{m_1})^T$ таковы, что $f_i(\widehat{\xi},\widehat{x})<0$, и число оставшихся компонент равно l_1. Укороченный вектор, напомним, обозначаем через f_a. Более простой случай, когда $f(\widehat{\xi},\widehat{x})<0$, рассмотрен непосредственно в доказательстве теоремы 1.

Таким образом, для указанных троек $(\xi,\overline{\alpha},u)$ и любых $r\in\mathbb{R}^{l_1}$ определено дважды непрерывно дифференцируемое отображение Φ со значениями в $\mathbb{R}^{l_1+m_2}$ по формуле

$$\Phi(\xi,\overline{\alpha},r,u;\overline{u})=\bigl(f_a(\xi,x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u}))+r,\ g(\xi,x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u}))\bigr)^T. \qquad (5)$$

Обозначим через $\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},r)}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\overline{u})$ частную производную по $(\xi,\overline{\alpha},r)$ отображения $(\xi,\overline{\alpha},r,u)\mapsto\Phi(\xi,\overline{\alpha},r,u;\overline{u})$ в точке $(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u})$, а через $\Phi_{ww}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\overline{u})$, где $w=(\xi,u)$, – вторую частную производную по w этого же отображения в той же точке.

Если a – элемент линейного пространства X, то через $\operatorname{cone}a$ обозначим луч, натянутый на a, т.е. $\operatorname{cone}a=\{\beta a\in X\colon \beta\geqslant 0\}$.

Следующее предложение – это следствие условия $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},q)=\varnothing$ в терминах отображения Φ.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда найдутся $k\in\mathbb{N}$ и набор $\widehat{\overline{u}}=(\widehat{u}_1,\dots,\widehat{u}_k)\in\mathscr{U}^k$ такие, что*

$$\begin{aligned}0\in\operatorname{int}\bigl\{&\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},r)}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\widehat{\overline{u}})(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k_+\times\mathbb{R}^{l_1}_+)\\&+\operatorname{cone}\Phi_{ww}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\widehat{\overline{u}})[(\zeta,v),(\zeta,v)]\bigr\}.\end{aligned} \qquad (6)$$

Доказательство. Предположим, что какое бы $k\in\mathbb{N}$ и какой бы набор $\overline{u}=(u_1,\dots,u_k)\in\mathscr{U}^k$ мы ни взяли, включение (6) не выполняется. Покажем, что в этом случае $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},q)\neq\varnothing$ в противоречии с условием предложения.

По теореме отделимости найдется ненулевой вектор $\lambda(\overline{u})\in(\mathbb{R}^{l_1+m_2})^*$ такой, что

$$\bigl\langle\lambda(\overline{u}),\Phi_{(\xi,\overline{\alpha},r)}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\overline{u})[\xi,\overline{\alpha},r]+\beta\Phi_{ww}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\overline{u})[(\zeta,v),(\zeta,v)]\bigr\rangle\geqslant 0 \qquad (7)$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\overline{\alpha}\in\mathbb{R}^k_+$, $r\in\mathbb{R}^{l_1}_+$ и $\beta\geqslant 0$.

У отображения $(\xi,\overline{\alpha},u)\mapsto x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u})$, определенного выше, частные производные $\widehat{x}_\xi(\overline{u})$ и $\widehat{x}_{\alpha_i}(\overline{u})$ соответственно по ξ и α_i, $1\leqslant i\leqslant k$, в точке $(\widehat{\xi},0,\widehat{u})$ удовлетворяют согласно формуле для производной неявной функции соотношениям

$$\widehat{F}_x\widehat{x}_{\alpha_i}(\overline{u})\alpha_i+\alpha_iF(\widehat{\xi},\widehat{x},u_i)=0,\qquad i=1,\dots,k, \qquad (8)$$

для всех $\alpha_i\in\mathbb{R}$ и

$$\widehat{F}_x\widehat{x}_\xi(\overline{u})\xi+\widehat{F}_\xi\xi=0 \qquad (9)$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Видим, что $\widehat{x}_{\alpha_i}(\overline{u})$ зависит только от i-й компоненты вектора $\overline{u}$, а $\widehat{x}_\xi(\overline{u})$ вообще не зависит от $\overline{u}$, и поэтому ниже пишем $\widehat{x}_{\alpha_i}(u_i)$ и $\widehat{x}_\xi$ вместо $\widehat{x}_{\alpha_i}(\overline{u})$ и $\widehat{x}_\xi(\overline{u})$.

Представляя вектор $\lambda(\overline{u})$ в виде $\lambda(\overline{u})=(\lambda_1(\overline{u}),\lambda_2(\overline{u}))$, где $\lambda_i(\overline{u})\in(\mathbb{R}^{m_i})^*$, $i=1,2$, и используя теорему о производной сложной функции, неравенство (7) запишем так (ниже $\widehat{f}_{ax}$ и $\widehat{f}_{a\xi}$ обозначают частные производные отображения f_a соответственно по x и ξ в точке $(\widehat{\xi},\widehat{x})$):

$$\begin{aligned}\Big\langle \lambda_1(\overline{u}), \widehat{f}_{ax}\widehat{x}_\xi\xi+\widehat{f}_{a\xi}\xi+\widehat{f}_{ax}\sum_{i=1}^k\widehat{x}_{\alpha_i}(u_i)\alpha_i+r\Big\rangle&\\ +\Big\langle \lambda_2(\overline{u}), \widehat{g}_x\widehat{x}_\xi\xi+\widehat{g}_\xi\xi+\widehat{g}_x\sum_{i=1}^k\widehat{x}_{\alpha_i}(u_i)\alpha_i\Big\rangle&\\ +\langle\lambda(\overline{u}),\beta\Phi_{ww}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\overline{u})[(\zeta,v),(\zeta,v)]\rangle\geqslant 0&\end{aligned} \tag{10}$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1,\dots,k$, $r\in\mathbb{R}^{l_1}_+$ и $\beta\geqslant 0$.

Будем считать, что $|\lambda(\overline{u})|=1$. Обозначим множество всех таких $\lambda(\overline{u})$, удовлетворяющих (10), через $\mathscr{A}(\overline{u})$. Ясно, что $\mathscr{A}(\overline{u})$ – замкнутое подмножество единичной сферы в $(\mathbb{R}^{l_1+m_2})^*$. Таким образом, каждому $k\in\mathbb{N}$ и каждому набору $\overline{u}=(u_1,\dots,u_k)$ можно сопоставить замкнутое подмножество указанного компакта. Покажем, что семейство $\mathscr{A}$ всех таких подмножеств образует центрированную систему.

Пусть $\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_s$ – произвольное конечное семейство наборов $\overline{u}_i=(u_{i1},\dots,u_{ik_i})$, $i=1,\dots,s$. Проверим, что $\bigcap_{i=1}^s\mathscr{A}(\overline{u}_i)\neq\varnothing$. Действительно, пусть $\widetilde{\overline{u}}$ – набор, состоящий из объединения всех указанных наборов. Для $\widetilde{\overline{u}}$ справедливо неравенство, аналогичное (10), с $\lambda(\widetilde{\overline{u}})$ и заменой k на число элементов в наборе $\widetilde{\overline{u}}$. Пусть $1\leqslant j\leqslant s$. Положив в этом аналоге неравенства (10) $\alpha_i=0$ для тех индексов i, для которых u_i не принадлежит набору $\overline{u}_j$, получим, что $\lambda(\widetilde{\overline{u}})\in\mathscr{A}(\overline{u}_j)$ и, значит, $\lambda(\widetilde{\overline{u}})\in\bigcap_{j=1}^s\mathscr{A}(\overline{u}_j)$.

Итак, семейство множеств $\mathscr{A}$ образует центрированную систему замкнутых подмножеств компакта, и поэтому существует вектор $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $|\lambda|=1$, для которого справедливо соотношение (10) при любом наборе $\overline{u}$. В частности, оно справедливо для наборов, состоящих из одного элемента: $\overline{u}=u_1$. Будем писать u вместо u_1 и так как в данном случае $\overline{\alpha}=\alpha_1$, то соответственно вместо α_1 будем писать α.

Таким образом, согласно (10) для таких наборов справедливо соотношение

$$\begin{aligned}\langle\lambda_1,\widehat{f}_{ax}\widehat{x}_\xi\xi+\widehat{f}_{a\xi}\xi+\widehat{f}_{ax}\widehat{x}_\alpha(u)\alpha+r\rangle+\langle\lambda_2,\widehat{g}_x\widehat{x}_\xi\xi+\widehat{g}_\xi\xi+\widehat{g}_x\widehat{x}_\alpha(u)\alpha\rangle&\\ +\langle\lambda,\beta\Phi_{ww}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};u)[(\zeta,v),(\zeta,v)]\rangle\geqslant 0&\end{aligned} \tag{11}$$

для всех $u\in\mathscr{U}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\geqslant 0$, $r\in\mathbb{R}^{l_1}_+$ и $\beta\geqslant 0$.

Полагая в (11) $\xi=0$ и $\alpha=\beta=0$, получаем, что $\langle\lambda_1,r\rangle\geqslant 0$ для всех $r\in\mathbb{R}^{l_1}_+$ и, значит, $\lambda_1\in(\mathbb{R}^{l_1})^*_+$.

Положим $y^*=-(\widehat{F}_x^{-1})^*(\widehat{f}^*_{ax}\lambda_1+\widehat{g}^*_x\lambda_2)$. Тогда

$$\widehat{F}^*_x y^*+\widehat{f}^*_{ax}\lambda_1+\widehat{g}^*_x\lambda_2=0. \tag{12}$$

Если в (11) $\xi=0$, $\beta=0$ и $r=0$, то

$$\langle\lambda_1,\widehat{f}_{ax}\widehat{x}_\alpha(u)\alpha\rangle+\langle\lambda_2,\widehat{g}_x\widehat{x}_\alpha(u)\alpha\rangle\geqslant 0 \tag{13}$$

для всех $u\in\mathscr{U}$ и $\alpha\geqslant 0$.

Действуя нулевым функционалом в (12) на элемент $\widehat{x}_\alpha(u)\alpha$, получаем

$$\langle y^*,\widehat{F}_x\widehat{x}_\alpha(u)\alpha\rangle+\langle\lambda_1,\widehat{f}_{ax}\widehat{x}_\alpha(u)\alpha\rangle+\langle\lambda_2,\widehat{g}_x\widehat{x}_\alpha(u)\alpha\rangle=0.$$

Отсюда в силу (8) (где $\alpha_i=\alpha$, $\overline{u}=u_i=u$) и (13) будем иметь для всех $u\in\mathscr{U}$ и $\alpha\geqslant 0$

$$-\langle y^*,\widehat{F}_x\widehat{x}_\alpha(u)\alpha\rangle=\langle y^*,\alpha F(\widehat{\xi},\widehat{x},u)\rangle\geqslant 0=\langle y^*,F(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})\rangle$$

и, значит,

$$\min_{u\in\mathscr{U}}\langle y^*,F(\widehat{\xi},\widehat{x},u)\rangle=\langle y^*,F(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})\rangle=0. \tag{14}$$

Теперь если $\alpha=\beta=0$ и $r=0$ в (11), то в силу произвольности ξ справедливо равенство

$$\langle\lambda_1,\widehat{f}_{ax}\widehat{x}_\xi\xi+\widehat{f_{a\xi}}\xi\rangle+\langle\lambda_2,\widehat{g}_x\widehat{x}_\xi\xi+\widehat{g}_\xi\xi\rangle=0.$$

Отсюда в силу равенства (12), примененного к $\widehat{x}_\xi\xi$, приходим к соотношению

$$-\langle y^*,\widehat{F}_x\widehat{x}_\xi\xi\rangle+\langle\lambda_1,\widehat{f}_{a\xi}\xi\rangle+\langle\lambda_2,\widehat{g}_\xi\xi\rangle=0.$$

Вместе с (9) это означает, что

$$\langle y^*,\widehat{F}_\xi\xi\rangle+\langle\lambda_1,\widehat{f}_{a\xi}\xi\rangle+\langle\lambda_2,\widehat{g}_\xi\xi\rangle=0,$$

или

$$\widehat{F}^*_\xi y^*+\widehat{f}^*_{a\xi}\lambda_1+\widehat{g}^*_\xi\lambda_2=0. \tag{15}$$

Пусть для определенности $f_a=(f_1,\dots,f_{l_1})^T$, и пусть $\lambda_1=(\lambda_{11},\dots,\lambda_{1l_1})$. Положим $\lambda_f=(\lambda_{11},\dots,\lambda_{1l_1},0,\dots,0)\in(\mathbb{R}^{m_1})^*$. Тогда если в равенствах (12) и (15) заменить f_a на f, а λ_1 на λ_f, то, очевидно, эти равенства останутся верными. Кроме того, ясно, что справедливо соотношение $\langle\lambda_f,f(\widehat{\xi},\widehat{x})\rangle=0$. Отсюда в силу (12), (15) (с f и λ_f) и (14), обозначая $\lambda_g=\lambda_2$, получаем, что тройка $(y^*,\lambda_f,\lambda_g)\in Y^*\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$, для которой $|\lambda_f|+|\lambda_g|\neq 0$, удовлетворяет первым четырем соотношениям в (2). Покажем, что она удовлетворяет и пятому соотношению в (2). Для этого преобразуем второе слагаемое в (11). Но сначала сделаем несколько замечаний.

Напомним, что $w=(\xi,u)$. Для частных производных F в точке $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ используем краткие обозначения: $\widehat{F}_w=F_w(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$, $\widehat{F}_{xx}=F_{xx}(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$, $\widehat{F}_{xw}=F_{xw}(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ и т.д.

Частную производную по w отображения $(\xi,\overline{\alpha},u)\mapsto x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u})$ в точке $(\widehat{\xi},0,\widehat{u})$ обозначим $\widehat{x}_w$. Согласно правилу дифференцирования неявной функции $\widehat{x}_w=-\mathscr{F}_x(\widehat{\xi},\widehat{x},0,\widehat{u};\overline{u})\mathscr{F}_w(\widehat{\xi},\widehat{x},0,\widehat{u};\overline{u})=-\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}_w$.

По условию $(\zeta,h,v)\in K(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ и поэтому $\widehat{F}_xh+\widehat{F}_wp=0$, где $p=(\zeta,v)$. Следовательно, $h=-\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}_wp=\widehat{x}_wp$. Используя этот факт и известную формулу для второй производной неявной функции (см., например, [3]), будем иметь

$$\begin{aligned}\widehat{x}_{ww}[p,p] &= \widehat{F}_x^{-1}(((\widehat{F}_{xw}+\widehat{F}_{xx}\widehat{x}_w)p)\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}_w p-((\widehat{F}_{ww}+\widehat{F}_{wx}\widehat{x}_w)p)p)\\ &= \widehat{F}_x^{-1}(\widehat{F}_{xw}[p,\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}_w p]+\widehat{F}_{xx}[\widehat{x}_w p,\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}_w p]-\widehat{F}_{ww}[p,p]-\widehat{F}_{wx}[\widehat{x}_w p,p])\\ &= -\widehat{F}_x^{-1}(\widehat{F}_{xx}[h,h]+2\widehat{F}_{xw}[h,p]+\widehat{F}_{ww}[p,p])=-\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}''[q,q].\end{aligned}$$

Далее, непосредственный подсчет показывает, что

$$\begin{aligned}&\Phi_{ww}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\overline{u})[p,p]\\ &\qquad=(\widehat{f}_a''[(\zeta,h),(\zeta,h)]+\widehat{f}_{ax}\widehat{x}_{ww}[p,p],\widehat{g}''[(\zeta,h),(\zeta,h)]+\widehat{g}_x\widehat{x}_{ww}[p,p]).\end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для $\widehat{x}_{ww}[p,p]$, подсчитанное выше, получим из (11) при $\xi=0$, $\alpha=0$, $r=0$ и $\beta=1$, что

$$\begin{aligned}\langle\lambda,\Phi_{ww}(\widehat{\xi},0,0,\widehat{u};\overline{u})[p,p]\rangle &= \langle\lambda_1,\widehat{f}_a''[(\zeta,h),(\zeta,h)]\rangle\\ &+\langle\lambda_2,\widehat{g}''[(\zeta,h),(\zeta,h)]\rangle-\langle\widehat{f}_{ax}^*\lambda_1+\widehat{g}_x^*\lambda_2,\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}''[q,q]\rangle\geqslant 0.\end{aligned}$$

Отсюда и из определения функционала y^* следует, что тройка $(y^*,\lambda_1,\lambda_2)$ удовлетворяет и пятому соотношению в (2), которое с заменой f_a на f останется верным и для тройки $(y^*,\lambda_f,\lambda_g)$. Таким образом, $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},q)\neq\varnothing$ в противоречии с предположением.

Предложение 1 доказано.

Следующее предложение утверждает, что если $x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u})$ – решение уравнения $\mathscr{F}(\xi,x,\overline{\alpha},u;\overline{u})=0$ (см. (4)), то оно может быть сколь угодно точно аппроксимировано решениями уравнения $F(\xi,x,M_\varepsilon(\overline{\alpha},(u,\overline{u})))=0$, где $M_\varepsilon(\overline{\alpha},(u,\overline{u}))$ – микс управлений $(u,\overline{u})$ (см. основные предположения). Точнее говоря, справедливо

Предложение 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $\widehat{\overline{u}}=(\widehat{u}_1,\dots,\widehat{u}_k)$ – набор из предложения 1. Существуют окрестности $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}_0(0)$ и $\mathscr{O}_0(\widehat{u})$ соответственно точки $\widehat{\xi}$, нуля в $\mathbb{R}^k$ и $\widehat{u}$, а также число $\varepsilon_0>0$ такие, что для любого $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ найдется непрерывное отображение $(\xi,\overline{\alpha},u)\mapsto x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},u)$ из $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi})\times(\mathscr{O}_0(0)\cap\Sigma^k)\times\mathscr{O}_0(\widehat{u})$ в $\mathscr{O}(\widehat{x})$, для которого $F(\xi,x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},u),M_\varepsilon(\overline{\alpha},(u,\widehat{\overline{u}})))=0$ и*

$$\|x_\varepsilon(\xi,\overline{\alpha},u)-x(\xi,\overline{\alpha},u;\widehat{\overline{u}})\|_X<2\|\widehat{F}_x^{-1}\|\varepsilon \tag{16}$$

при всех $(\xi,\overline{\alpha},u)\in\mathscr{O}_0(\widehat{\xi})\times(\mathscr{O}_0(0)\cap\Sigma^k)\times\mathscr{O}_0(\widehat{u})$.

Это предложение мы не доказываем, так как оно есть частный случай более общего утверждения из работы авторов [4] (см. следствие 3).

Локальная управляемость системы – это по-существу возможность разрешить определенное уравнение, естественным образом связанное с управляемой системой (1). Доказываемая ниже теорема 2 об обратной функции позволяет эту возможность реализовать. Особенность этой теоремы состоит в том, что для каждого значения правой части уравнения указывается такая окрестность исходного отображения, что уравнение разрешимо с данной правой частью для любого отображения из данной окрестности.

Перед формулировкой теоремы приведем одно определение.

Пусть V – открытое подмножество в нормированном пространстве X. Обозначим через $C(V,\mathbb{R}^m)$ пространство всех непрерывных ограниченных отображений G из V в $\mathbb{R}^m$ с нормой $\|G\|=\sup_{w\in V}|G(w)|$.

Если $\mathscr{X}$ – нормированное пространство, $x_0\in\mathscr{X}$ и $\gamma>0$, то $U_{\mathscr{X}}(x_0,\gamma)$ и $B_{\mathscr{X}}(x_0,\gamma)$ обозначают открытый и замкнутый шары соответственно в $\mathscr{X}$ с центром в точке x_0 радиуса γ.

Теорема 2. *Пусть X – нормированное пространство, K – выпуклый конус в X, V – окрестность точки $\widehat{w}\in K$, отображение $\widehat{G}\colon V\to\mathbb{R}^m$ непрерывно и ограничено на V, дважды дифференцируемо в точке $\widehat{w}$, $p\in\operatorname{Ker}\widehat{G}'(\widehat{w})\cap K$, $\|p\|=1$ и*

$$0\in\operatorname{int}\{\widehat{G}'(\widehat{w})(K-\widehat{w})+\operatorname{conv}\widehat{G}''(\widehat{w})[p,p]\}. \tag{17}$$

Тогда существуют окрестность V_1 точки $\widehat{G}(\widehat{w})$ и константа $\kappa>0$ такие, что для любого $y\in V_1$ найдется окрестность V_y отображения $\widehat{G}\in C(V,\mathbb{R}^m)$, обладающая свойством, что для любого $G\in V_y$ существует точка $w_G(y)\in V\cap K$, для которой справедливы соотношения

$$G(w_G(y))=y,\qquad \|w_G(y)-\widehat{w}\|_X\leqslant\kappa|y-\widehat{G}(\widehat{w})|^{1/2}. \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\Lambda\colon X\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$\Lambda(w,\beta)=\widehat{G}'(\widehat{w})w+\frac{1}{2}\beta\widehat{G}''(\widehat{w})[p,p].$$

Из условия (17) следует, что $0\in\operatorname{int}\Lambda((K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+)$. Отсюда в свою очередь вытекает, что существуют $\rho>0$, для которого $U_{\mathbb{R}^m}(0,\rho)\subset\Lambda((K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+)$, непрерывное отображение $R=(R_1,R_2)\colon U_{\mathbb{R}^m}(0,\rho)\to(K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+$ и константа $\gamma>0$ такие, что

$$\Lambda(R_1(z),R_2(z))=z,\qquad \|R_1(z)\|_X+R_2(z)\leqslant\gamma|z| \tag{19}$$

для всех $z\in U_{\mathbb{R}^m}(0,\rho)$.

Доказательство этого утверждения основано на стандартных фактах выпуклой геометрии. Действительно, так как $0\in\operatorname{int}\Lambda((K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+)$, то существует m-мерный симплекс $S\subset\Lambda((K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+)$ такой, что $0\in\operatorname{int}S$. Пусть $e_1,\dots,e_{m+1}$ – вершины S. Любая точка $z\in S$ представляется единственным образом в виде

$$z=\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(z)e_i, \tag{20}$$

где $\lambda_i(z)\geqslant 0$, функции $z\mapsto\lambda_i(z)$, $i=1,\dots,m+1$, непрерывны на S и $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(z)=1$.

Так как $S\subset\Lambda((K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+)$, то найдутся такие элементы $(w_i,\beta_i)\in(K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+$, что $\Lambda(w_i,\beta_i)=e_i$, $i=1,\dots,m+1$.

Пусть $\rho>0$ таково, что $U_{\mathbb{R}^m}(0,\rho)\subset S$. Определим отображение $R=(R_1,R_2)$: $U_{\mathbb{R}^m}(0,\rho)\to(K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+$ по следующему правилу: $R(0)=0$ и если $z\neq 0$, то

$$R(z)=(R_1(z),R_2(z))=\rho^{-1}|z|\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(\rho|z|^{-1}z)(w_i,\beta_i).$$

Из выпуклости $(K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+$ и того, что нуль принадлежит этому множеству, следует, что $R(z)\in(K-\widehat{w})\times\mathbb{R}_+$.

Далее, учитывая (20) и равенство $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(z)=1$, имеем

$$\begin{aligned}\Lambda R(z)&=\rho^{-1}|z|\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(\rho|z|^{-1}z)\Lambda(w_i,\beta_i)\\&=\rho^{-1}|z|\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(\rho|z|^{-1}z)e_i=\rho^{-1}|z|\rho|z|^{-1}z=z,\\\|R(z)\|_{X\times\mathbb{R}}&=\|(R_1(z)\|_X+R_2(z)\\&\leqslant\rho^{-1}|z|\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i(\rho|z|^{-1}z)\Bigl(\max_{1\leqslant i\leqslant m+1}\|w_i\|_X+\max_{1\leqslant i\leqslant m+1}\beta_i\Bigr)\\&=\rho^{-1}\Bigl(\max_{1\leqslant i\leqslant m+1}\|w_i\|_X+\max_{1\leqslant i\leqslant m+1}\beta_i\Bigr)|z|=\gamma|z|.\end{aligned}$$

Таким образом, справедливы соотношения (19). Непрерывность отображения R следует из его определения и второго из этих соотношений.

Так как отображение $\widehat{G}$ дважды дифференцируемо в точке $\widehat{w}$, то существует такое $0<\delta\leqslant\min((8\gamma\rho)^{1/2},(8\gamma\|\widehat{G}''(\widehat{w})\|)^{-1},1)$, что $U_X(\widehat{w},\delta)\subset V$ и для всех $w\in U_X(\widehat{w},\delta)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}&\Bigl|\widehat{G}(w)-\widehat{G}(\widehat{w})-\widehat{G}'(\widehat{w})(w-\widehat{w})-\frac{1}{2}\widehat{G}''(\widehat{w})[w-\widehat{w},w-\widehat{w}]\Bigr|\\&\qquad\leqslant\frac{1}{16\gamma}\|w-\widehat{w}\|_X^2.\end{aligned}\tag{21}$$

Пусть $V_1=U_{\mathbb{R}^m}(\widehat{G}(\widehat{w}),\delta^2/(16\gamma))$. Для каждого $y\in V_1$ положим $V_y=U_{C(V,\mathbb{R}^m)}(\widehat{G},|y-\widehat{G}(\widehat{w})|/4)$ (считаем, что если $y=\widehat{G}(\widehat{w})$, то $V_y=\{\widehat{G}\}$; в этом случае соотношения (18) выполняются очевидным образом).

Пусть $y\in V_1$, $y\neq\widehat{G}(\widehat{w})$ и $G\in V_y$. Рассмотрим отображение $\Psi_y\colon B_{\mathbb{R}^m}(\widehat{G}(\widehat{w}),2|y-\widehat{G}(\widehat{w})|)\to\mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$\Psi_y(z)=y+z-G(\widehat{w}+R_1(z-\widehat{G}(\widehat{w}))+(R_2(z-\widehat{G}(\widehat{w})))^{1/2}p).$$

Определение корректно. Действительно, если $z\in B_{\mathbb{R}^m}(\widehat{G}(\widehat{w}),2|y-\widehat{G}(\widehat{w})|)$, то

$$|z-\widehat{G}(\widehat{w})|\leqslant2|y-\widehat{G}(\widehat{w})|<2\frac{\delta^2}{16\gamma}\leqslant\rho.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\|R_1(z-\widehat{G}(\widehat{w}))\|_X\leqslant\gamma|z-\widehat{G}(\widehat{w})|\leqslant2\gamma|y-\widehat{G}(\widehat{w})|<2\gamma\Bigl(\frac{\delta^2}{16\gamma}\Bigr)<\frac{\delta}{2},\\\|(R_2(z-\widehat{G}(\widehat{w})))^{1/2}p\|_X=(R_2(z-\widehat{G}(\widehat{w})))^{1/2}\leqslant(\gamma|z-\widehat{G}(\widehat{w})|)^{1/2}\\\leqslant(2\gamma|y-\widehat{G}(\widehat{w})|)^{1/2}<(2\gamma)^{1/2}\Bigl(\frac{\delta}{4\gamma^{1/2}}\Bigr)<\frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widehat{w} + R_1(z - \widehat{G}(\widehat{w})) + (R_2(z - \widehat{G}(\widehat{w})))^{1/2}p \in \widehat{w} + U_X(0, \delta) \subset V.$$

Обозначим для краткости $r(z) = R_1(z - \widehat{G}(\widehat{w}))$, $\beta(z) = R_2(z - \widehat{G}(\widehat{w}))$ и $v(z) = r(z) + (\beta(z))^{1/2}p$.

Покажем, что образ отображения Ψ_y содержится в шаре $B_{\mathbb{R}^m}(\widehat{G}(\widehat{w}), 2|y - \widehat{G}(\widehat{w})|)$. Действительно, учитывая равенство

$$\widehat{G}'(\widehat{w})v(z) + \frac{1}{2}\beta(z)\widehat{G}''(\widehat{w})[p, p] + \widehat{G}(\widehat{w}) = z,$$

которое следует из первого соотношения в (19) и из того, что $p \in \operatorname{Ker} \widehat{G}'(\widehat{w})$, элементарно проверяемое соотношение

$$-\frac{1}{2}\widehat{G}''(\widehat{w})[v(z), v(z)] + \frac{1}{2}\beta(z)\widehat{G}''(\widehat{w})[p, p] = -\widehat{G}''(\widehat{w})\left[\frac{1}{2}r(z) + (\beta(z))^{1/2}p,\, r(z)\right],$$

неравенство (21) и то, что $G \in V_y$, будем иметь

$$\begin{aligned}
|\Psi_y(z) - \widehat{G}(\widehat{w})| &\leqslant |y - \widehat{G}(\widehat{w})| + |G(\widehat{w} + v(z)) - \widehat{G}(\widehat{w} + v(z))| \\
&\quad + \left|\widehat{G}(\widehat{w} + v(z)) - \widehat{G}(\widehat{w}) - \widehat{G}'(\widehat{w})v(z) - \frac{1}{2}\widehat{G}''(\widehat{w})[v(z), v(z)]\right| \\
&\quad + \left|\widehat{G}''(\widehat{w})\left[\frac{1}{2}r(z) + (\beta(z))^{1/2}p, r(z)\right]\right| \\
&\leqslant |y - \widehat{G}(\widehat{w})| + \frac{1}{4}|y - \widehat{G}(\widehat{w})| + \frac{1}{16\gamma}\|v(z)\|_X^2 \\
&\quad + \|\widehat{G}''(\widehat{w})\|\left\|\frac{1}{2}r(z) + (\beta(z))^{1/2}p\right\|_X \|r(z)\|_X.
\end{aligned}$$

Так как $\delta \leqslant 1$, то из оценок выше следует, что $2\gamma|y - \widehat{G}(\widehat{w})| < 1$, и тогда имеем

$$\begin{aligned}
\|v(z)\|_X^2 &\leqslant (\|r(z)\|_X + \|(\beta(z))^{1/2}p\|_X)^2 \leqslant (2\gamma|y - \widehat{G}(\widehat{w})| + (2\gamma|y - \widehat{G}(\widehat{w})|)^{1/2})^2 \\
&\leqslant (2(2\gamma|y - \widehat{G}(\widehat{w})|)^{1/2})^2 = 8\gamma|y - \widehat{G}(\widehat{w})|.
\end{aligned}$$

Далее, из тех же оценок получаем

$$\left\|\frac{1}{2}r(z) + (\beta(z))^{1/2}p\right\|_X \leqslant \frac{1}{2}\|r(z)\|_X + \|(\beta(z))^{1/2}p\|_X < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Следовательно,

$$\|\widehat{G}''(\widehat{w})\|\left\|\frac{1}{2}r(z) + (\beta(z))^{1/2}p\right\|_X \|r(z)\|_X \leqslant \|\widehat{G}''(\widehat{w})\|\delta 2\gamma|y - \widehat{G}(\widehat{w})| \leqslant \frac{1}{4}|y - \widehat{G}(\widehat{w})|.$$

Объединяя все оценки, приходим к нужному утверждению:

$$\begin{aligned}
|\Psi_y(z) - \widehat{G}(\widehat{w})| &\leqslant |y - \widehat{G}(\widehat{w})| + \frac{1}{4}|y - \widehat{G}(\widehat{w})| + \frac{1}{2}|y - \widehat{G}(\widehat{w})| + \frac{1}{4}|y - \widehat{G}(\widehat{w})| \\
&= 2|y - \widehat{G}(\widehat{w})|.
\end{aligned}$$

Отображение Ψ_y непрерывно как суперпозиция непрерывных отображений. Поэтому по теореме Брауэра о неподвижной точке существует $\overline{z} = \overline{z}(y, G) \in B_{\mathbb{R}^m}(\widehat{G}(\widehat{w}), 2|y - \widehat{G}(\widehat{w})|)$ такое, что $\Psi_y(\overline{z}) = \overline{z}$, т.е. $G(\widehat{w} + v(\overline{z})) = y$. Пусть $w_G(y) = \widehat{w} + v(\overline{z})$. Тогда $G(w_G(y)) = y$, $\|w_G(y) - \widehat{w}\|_X = \|v(\overline{z})\| \leqslant (8\gamma|y - \widehat{G}(\widehat{w})|)^{1/2}$. Выше показано, что $w_G(y) \in V$. Так как K – выпуклый конус, то $w_G(y) \in \widehat{w} + (K - \widehat{w}) + K = K$. Полагая $\kappa = (8\gamma)^{1/2}$, получаем все утверждения теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Схема доказательства этой теоремы такова. Из предложения 1 следует, что гладкое отображение Φ (см. (5)), в котором $x(\xi, \overline{\alpha}, u; \widehat{\overline{u}})$ – решение уравнения (4), удовлетворяет теореме об обратной функции. Из предложения 2 вытекает, что отображение Φ может быть сколь угодно точно аппроксимировано отображением Φ_ε, подобным Φ, но вместо $x(\xi, \overline{\alpha}, u; \widehat{\overline{u}})$ стоит $x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, u)$ – решение уравнения $F(\xi, x, M_\varepsilon(\overline{\alpha}, (u, \widehat{\overline{u}}))) = 0$, где $M_\varepsilon(\overline{\alpha}, (u, \widehat{\overline{u}}))$ – микс управлений $(u, \widehat{\overline{u}})$. По теореме об обратной функции уравнение, задаваемое отображением Φ_ε, разрешимо, откуда непосредственно следует локальная управляемость исходной системы.

Перейдем к точным рассуждениям. Напомним, что вектор f_a получен из вектора $f = (f_1, \ldots, f_{m_1})^T$ выбрасыванием тех компонент f_i, для которых $f_i(\widehat{\xi}, \widehat{x}) < 0$. Предположим сначала, что таких компонент меньше чем m_1. Число оставшихся обозначим через l_1.

Согласно предложению 1 найдется такой набор $\widehat{\overline{u}} = (\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_k) \in \mathscr{U}^k$, что выполнено включение (6).

Пусть $\mathscr{O}(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}(0_{\mathbb{R}^k})$, $\mathscr{O}(\widehat{u})$ и $\mathscr{O}(0_{\mathbb{R}^{l_1}}))$ – такие окрестности (соответственно точки $\widehat{\xi}$, нуля в $\mathbb{R}^k$, $\widehat{u}$ и нуля в $\mathbb{R}^{l_1}$), что отображение Φ с набором $\overline{u} = \widehat{\overline{u}}$ ограничено на $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(0_{\mathbb{R}^k}) \times \mathscr{O}(0_{\mathbb{R}^{l_1}}) \times \mathscr{O}(\widehat{u})$.

Так как отображения f и g непрерывно дифференцируемы по (ξ, x), а отображение $(\xi, \overline{\alpha}, u) \mapsto x(\xi, \overline{\alpha}, u; \widehat{\overline{u}})$ непрерывно дифференцируемо по $(\xi, \overline{\alpha}, u)$, то, уменьшая, если необходимо, окрестности $\mathscr{O}(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}(\widehat{x})$, $\mathscr{O}(0_{\mathbb{R}^k})$ и $\mathscr{O}(\widehat{u})$ (и считая их выпуклыми), получим по теореме о среднем, что для некоторой константы $c > 0$ выполняются неравенства

$$|f(\xi, x) - f(\xi', x')| \leqslant c(|\xi - \xi'| + \|x - x'\|_X), \tag{22}$$

$$|g(\xi, x) - g(\xi', x')| \leqslant c(|\xi - \xi'| + \|x - x'\|_X) \tag{23}$$

для всех (ξ, x) и (ξ', x') из $\mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(\widehat{x})$, а также неравенство

$$\|x(\xi, \overline{\alpha}, u; \widehat{\overline{u}}) - \widehat{x}\|_X \leqslant c(|\xi - \widehat{\xi}| + |\overline{\alpha}| + \|u - \widehat{u}\|_E) \tag{24}$$

для всех $(\xi, \overline{\alpha}, u) \in \mathscr{O}(\widehat{\xi}) \times \mathscr{O}(0_{\mathbb{R}^k}) \times \mathscr{O}(\widehat{u})$.

Согласно предложению 2 существуют такие окрестности $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \subset \mathscr{O}(\widehat{\xi})$, $\mathscr{O}_0(0_{\mathbb{R}^k}) \subset \mathscr{O}(0_{\mathbb{R}^k})$, $\mathscr{O}_0(\widehat{u}) \subset \mathscr{O}(\widehat{u})$ и число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ найдется такое непрерывное отображение $(\xi, \overline{\alpha}, u) \mapsto x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, u)$ из $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \times (\mathscr{O}_0(0_{\mathbb{R}^k}) \cap \Sigma^k) \times \mathscr{O}_0(\widehat{u})$ в $\mathscr{O}(\widehat{x})$, что

$$F(\xi, x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, u), M_\varepsilon(\overline{\alpha}, (u, \widehat{\overline{u}}))) = 0 \tag{25}$$

и при всех $(\xi, \overline{\alpha}, u) \in \mathscr{O}_0(\widehat{\xi}) \times (\mathscr{O}_0(0_{\mathbb{R}^k}) \cap \Sigma^k) \times \mathscr{O}_0(\widehat{u})$ справедливо неравенство (16).

Таким образом, для всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ на $\mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,) \times (\mathscr{O}_0(0_{\mathbb{R}^k}) \cap \Sigma^k) \times \mathbb{R}^{l_1} \times \mathscr{O}_0(\widehat{u})$ определено непрерывное отображение Φ_ε, сопоставляющее четверке $(\xi, \overline{\alpha}, r, u)$ вектор из $\mathbb{R}^{l_1+m_2}$ по правилу

$$\Phi_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, r, u) = (f_a(\xi, x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, u)) + r,\; g(\xi, x_\varepsilon(\xi, \overline{\alpha}, u)))^T. \tag{26}$$

Воспользуемся теоремой 2 для $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{l_1} \times E$, $K = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^{l_1}_+ \times E$, $\widehat{w} = (\widehat{\xi}, 0_{\mathbb{R}^k}, 0_{\mathbb{R}^{l_1}}, \widehat{u})$, $V = \mathscr{O}_0(\widehat{\xi}\,) \times \mathscr{O}_0(0) \times \mathbb{R}^{l_1} \times \mathscr{O}_0(\widehat{u})$, $\widehat{G}(w) = \widehat{G}(\xi, \overline{\alpha}, r, u) = \Phi(\xi, \overline{\alpha}, r, u; \widehat{\overline{u}})$ и $p = a(\zeta, 0, -\widehat{f}'_a[\zeta, h], v)$, где $a > 0$ таково, что $\|p\| = 1$.

Ясно, что $p \in K$. Проверим, что $p \in \operatorname{Ker} \widehat{G}'(\widehat{w})$. Действительно,

$$\begin{aligned}\widehat{G}'(\widehat{w})[p] = (&\widehat{f}_{a\xi}\zeta + \widehat{f}_{ax}\widehat{x}_\xi\zeta + \widehat{f}_{ax}\widehat{x}_{\overline{\alpha}}0 + \widehat{f}_{ax}\widehat{x}_u v - \widehat{f}'_a[\zeta, h],\\ &\widehat{g}_\xi\zeta + \widehat{g}_x\widehat{x}_\xi\zeta + \widehat{g}_x\widehat{x}_{\overline{\alpha}}0 + \widehat{g}_x\widehat{x}_u v).\end{aligned}$$

Так как $(\zeta, h, v) \in K(\widehat{\xi}, \widehat{x}, \widehat{u})$, то $h = -\widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}_\xi\zeta - \widehat{F}_x^{-1}\widehat{F}_u v = \widehat{x}_\xi\zeta + \widehat{x}_u v$, и поэтому первый член в скобках в выражении для $\widehat{G}'(\widehat{w})[p]$ равен $\widehat{f}_{a\xi}\zeta + \widehat{f}_{ax}h - \widehat{f}'_a[\zeta, h] = \widehat{f}'_a[\zeta, h] - \widehat{f}'_a[\zeta, h] = 0$ и, аналогично, второй член равен $\widehat{g}'[\zeta, h] = 0$. Таким образом, $p \in \operatorname{Ker} \widehat{G}'(\widehat{w})$.

Из включения (6) следует включение (17) (для нашего случая), поскольку в последнем множество в фигурных скобках шире, чем соответствующее множество в (6).

Все предположения теоремы 2 выполнены. Ясно, что $\widehat{G}(\widehat{w}) = 0$. Пусть V_1 – окрестность нуля в $\mathbb{R}^{l_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ и $\kappa > 0$ – константа из этой теоремы.

Пусть для определенности $f_a = (f_1, \dots, f_{l_1})^T$. Ясно, что существует такое $\delta > 0$, что $f_i(\widehat{\xi}, \widehat{x}) < -\delta$, $i = l_1 + 1, \dots, m_1$. Из дифференцируемости функций f_i в точке $(\widehat{\xi}, \widehat{x})$ следует, что найдется $\rho > 0$ такое, что $f_i(\xi, x) < -\delta/2$, $i = l_1 + 1, \dots, m_1$, если $|\xi - \widehat{\xi}\,| + \|x - \widehat{x}\|_X < \rho$.

Пусть W – произвольная окрестность точки $(\widehat{\xi}, \widehat{x})$ и $0 < \rho_0 \leqslant \rho$ такое, что $U_{\mathbb{R}^n \times X}((\widehat{\xi}, \widehat{x}), \rho_0) \subset W$. Обозначим $\kappa_0 = 1 + (c+1)\kappa$ (c – константа в неравенствах (22)–(24)), и пусть $0 < r \leqslant \min(\rho_0^2/(\kappa_0^2\sqrt{2}), \delta/2)$ таково, что $U_{\mathbb{R}^{l_1}}(0, r) \times U_{\mathbb{R}^{m_2}}(0, r) \subset V_1$.

Положим $W_1 = U_{\mathbb{R}^{l_1}}(0, r) \times U_{\mathbb{R}^{m_1 - l_1}}(0, r)$ и $W_2 = U_{\mathbb{R}^{m_2}}(0, r)$. Пусть $y = (y_1, y_2) \in W_1 \times W_2$. Запишем $y_1 = (y_1', y_1'')$, где $y_1' \in U_{\mathbb{R}^{l_1}}(0, r)$, $y_1'' \in U_{\mathbb{R}^{m_1 - l_1}}(0, r)$, и обозначим $y' = (y_1', y_2)$.

Пусть $V_{y'}$ – соответствующая окрестность из теоремы 2. Из (22), (23) и (16) следует существование такого $\varepsilon = \varepsilon(y') \leqslant |y'|^{1/2}/(2\|\widehat{F}_x^{-1}\|)$, что $\Phi_\varepsilon \in V_{y'}$. Тогда согласно этой теореме найдется точка $(\xi_{y'}, \overline{\alpha}_{y'}, r_{y'}, u_{y'}) \in V \cap K$, для которой справедливы соотношения

$$f_a(\xi_{y'}, x_\varepsilon(\xi_{y'}, \overline{\alpha}_{y'}, u_{y'})) + r_{y'} = y_1', \qquad g(\xi_{y'}, x_\varepsilon(\xi_{y'}, \overline{\alpha}_{y'}, u_{y'})) = y_2, \tag{27}$$

$$|\xi_{y'} - \widehat{\xi}\,| + |\overline{\alpha}_{y'}| + |r_{y'}| + \|u_{y'} - \widehat{u}\|_E \leqslant \kappa |y'|^{1/2}. \tag{28}$$

В силу (16), (24), (28) и выбора ε имеем

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon(\xi_{y'},\overline{\alpha}_{y'},u_{y'})-\widehat{x}\|_X+|\xi_{y'}-\widehat{\xi}\,|&\\ \leqslant \|x_\varepsilon(\xi_{y'},\overline{\alpha}_{y'},u_{y'})-x(\xi_{y'},\overline{\alpha}_{y'},u_{y'};\widehat{\overline{u}})\|_X&\\ +\|x(\xi_{y'},\overline{\alpha}_{y'},u_{y'};\widehat{\overline{u}})-\widehat{x}\|_X+|\xi_{y'}-\widehat{\xi}\,|&\\ <|y'|^{1/2}+c\kappa|y'|^{1/2}+\kappa|y'|^{1/2}=\kappa_0|y'|^{1/2}.&\end{aligned} \tag{29}$$

Далее, по предположению $y_1''=(y''_{1(l_1+1)},\dots,y''_{1m_1})^T\in U_{\mathbb{R}^{m_1-l_1}}(0,r)$ и поэтому $y''_{1i}>-r$, $i=l_1+1,\dots,m_1$. Из оценки (29), учитывая, что $\kappa_0|y'|^{1/2}<\rho_0\leqslant\rho$, получаем соотношения $f_i(\xi_{y'},x_\varepsilon(\xi_{y'},\overline{\alpha}_{y'},u_{y'}))<-\delta/2<-r<y''_{1i}$, $i=l_1+1,\dots,m_1$.

Обозначим $\xi_y=\xi_{y'}$, $x_y=x_\varepsilon(\xi_{y'},\overline{\alpha}_{y'},u_{y'})$ и $u_y=M_\varepsilon(\overline{\alpha}_{y'},(u_{y'},\widehat{\overline{u}}))$. Тогда $F(\xi_y,x_y,u_y)=0$ в силу (25). Из (27), поскольку $r_{y'}\geqslant 0$, следует $f_a(\xi_y,x_y)\leqslant y_1'$. Отсюда и из только что доказанного вытекает неравенство $f(\xi_y,x_y)\leqslant y_1$. Из (27) также следует, что $g(\xi_y,x_y)=y_2$. Из (29) получаем, что $\|x_y-\widehat{x}\|_X+|\xi_y-\widehat{\xi}\,|\leqslant\kappa_0|y'|^{1/2}<\rho_0$ и, значит, $(x_y,\xi_y)\in W$.

Для завершения доказательства теоремы 1 в рассматриваемом случае осталось заметить, что $\|x_y-\widehat{x}\|_X+|\xi_y-\widehat{\xi}\,|\leqslant\kappa_0|y'|^{1/2}\leqslant\kappa_0|y|^{1/2}$.

Доказательство теоремы 1 в ситуации, когда $f(\widehat{\xi},\widehat{x})<0$, совершенно аналогично. Здесь мы полагаем $\Phi(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u})=g(\xi,x(\xi,\overline{\alpha},u;\overline{u}))$, и дальнейшие рассуждения те же, что и раньше, но проще, поскольку более просто устроено отображение Φ. Заметим только, что в данном случае $y_1=y_1''$.

Теорема 1 доказана.

Теперь в качестве непосредственного следствия теоремы 1 получим необходимые условия сильного минимума второго порядка в следующей абстрактной задаче оптимального управления:

$$\begin{gathered} f_0(\xi,x)\to\min,\\ F(\xi,x,u)=0,\quad u\in\mathscr{U},\qquad f(\xi,x)\leqslant 0,\qquad g(\xi,x)=0,\end{gathered}\tag{30}$$

где $\mathscr{U}$ и отображения F, f и g те же, что и в определении управляемой системы (1), и задана еще функция $f_0\colon\mathbb{R}^n\times X\to\mathbb{R}$.

Допустимая в этой задаче точка $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ называется *сильным минимумом*, если найдется такая окрестность W точки $(\widehat{\xi},\widehat{x})$, что $f_0(\xi,x)\geqslant f_0(\widehat{\xi},\widehat{x})$ для всех допустимых точек $(\xi,x,u)\in W\times\mathscr{U}$.

Считаем, что функция f_0 обладает теми же свойствами, что и отображения f и g (см. основные предположения).

Сопоставим задаче (30) следующую функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(\xi,x,u,\overline{\lambda})=\lambda_0f_0(\xi,x)+\langle y^*,F(\xi,x,u)\rangle+\langle\lambda_f,f(\xi,x)\rangle+\langle\lambda_g,g(\xi,x)\rangle,$$

где $\overline{\lambda}=(\lambda_0,y^*,\lambda_f,\lambda_g)\in\mathbb{R}\times Y^*\times(\mathbb{R}^{m_1})^*\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$.

Определим конус критических вариаций как

$$\begin{aligned}K_0(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})=\bigl\{q=(\zeta,h,v)\in\mathbb{R}^n\times X\times Z\colon&\\ \widehat{F}'q=0,\ \widehat{f}_0'[\zeta,h]\leqslant 0,\ \widehat{f}_a'[\zeta,h]\leqslant 0,\ \widehat{g}'[\zeta,h]=0\bigr\},&\end{aligned}$$

где f_a имеет тот же смысл, что и раньше, и если $f(\widehat{\xi},\widehat{x})<0$, то неравенство $\widehat{f}_a'[\zeta,h]\leqslant 0$ отсутствует в определении этого множества.

Следствие 1 (условия минимума второго порядка для задачи (30)). *Пусть точка* $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ *доставляет сильный минимум в задаче* (30). *Тогда для любого* $q=(\zeta,h,v)\in K_0(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ *найдутся ненулевой набор* $\lambda=\lambda(q)=(\lambda_0,\lambda_f,\lambda_g)\in\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$ *и функционал* $y^*=y^*(q)\in Y^*$ *такие, что*

$$\mathscr{L}_\xi(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},\overline{\lambda})=0 \iff \lambda_0\widehat{f}_{0\xi}+\widehat{F}^*_\xi y^*+\widehat{f}^*_\xi\lambda_f+\widehat{g}^*_\xi\lambda_g=0,$$
$$\mathscr{L}_x(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},\overline{\lambda})=0 \iff \lambda_0\widehat{f}_{0x}+\widehat{F}^*_x y^*+\widehat{f}^*_x\lambda_f+\widehat{g}^*_x\lambda_g=0,$$
$$\langle\lambda_f,f(\widehat{\xi},\widehat{x})\rangle=0,$$
$$\min_{u\in\mathscr{U}}\mathscr{L}(\widehat{\xi},\widehat{x},u,\overline{\lambda})=\mathscr{L}(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},\overline{\lambda})$$
$$\iff \min_{u\in\mathscr{U}}\langle y^*,F(\widehat{\xi},\widehat{x},u)\rangle=\langle y^*,F(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})\rangle=0,$$
$$\mathscr{L}_{(\xi,x,u)(\xi,x,u)}(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},\overline{\lambda})[q,q]\geqslant 0 \iff \lambda_0\widehat{f}_0''[(\zeta,h),(\zeta,h)]+\langle y^*,\widehat{F}''[q,q]\rangle$$
$$+\langle\lambda_f,\widehat{f}''[(\zeta,h),(\zeta,h)]\rangle+\langle\lambda_g,\widehat{g}''[(\zeta,h),(\zeta,h)]\rangle\geqslant 0.$$

Если для управляемой системы, задающей ограничения в задаче (30), *справедливо условие* $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},q)=\varnothing$ *для некоторого* $q\in K_0(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$, *то* $\lambda_0\neq 0$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть существует такое $q=(\zeta,h,v)\in K_0(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$, что только наборы $\overline{\lambda}=(\lambda_0,y^*,\lambda_f,\lambda_g)$, где $(\lambda_0,\lambda_f,\lambda_g)=0$, удовлетворяют всем соотношениям в утверждении теоремы. Покажем, что в этом случае $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ не является сильным минимумом.

Сделанное предположение означает, что если для управляемой системы

$$F(\xi,x,u)=0,\quad u\in\mathscr{U},\qquad f_0(\xi,x)-f_0(\widehat{\xi},\widehat{x})\leqslant 0,$$
$$f(\xi,x)\leqslant 0,\qquad g(\xi,x)=0$$

обозначить, скажем, через $\Lambda_1(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},q)$ аналог множества $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},q)$, то $\Lambda_1(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u},q)=\varnothing$. Тогда в силу теоремы 1 эта система локально управляема относительно точки $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$.

Пусть W – произвольная окрестность точки $(\widehat{\xi},\widehat{x})$ и W_1, W_2 – соответствующие окрестности нулей в $\mathbb{R}^{m_1+1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ соответственно из определения локальной управляемости. Ясно, что $y(\varepsilon)=((-\varepsilon,0),0)\in W_1\times W_2$ для достаточно малых $\varepsilon>0$. Поэтому в силу локальной управляемости для каждого такого ε найдется элемент $(\xi_{y(\varepsilon)},x_{y(\varepsilon)},u_{y(\varepsilon)})\in W\times\mathscr{U}$, для которого

$$F(\xi_{y(\varepsilon)},x_{y(\varepsilon)},u_{y(\varepsilon)})=0,$$
$$f_0(\xi_{y(\varepsilon)},x_{y(\varepsilon)})\leqslant f_0(\widehat{\xi},\widehat{x})-\varepsilon,\qquad f(\xi_{y(\varepsilon)},x_{y(\varepsilon)})\leqslant 0,$$
$$g(\xi_{y(\varepsilon)},x_{y(\varepsilon)})=0,\qquad (\xi_{y(\varepsilon)},x_{y(\varepsilon)})\in W$$

в противоречии с тем, что $(\widehat{\xi},\widehat{x},\widehat{u})$ – сильный минимум в задаче (30).

Следствие доказано.

§ 2. Приложение к управляемой системе ОДУ

Пусть $[t_0,t_1]$ – отрезок прямой, U – открытое подмножество $\mathbb{R}^r$, $\varphi\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$ – отображение переменных $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ и $u\in U$, а $f\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m_1}$ и $g\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m_2}$ – отображения переменных $\zeta_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2$.

Рассмотрим управляемую систему ОДУ

$$\begin{gathered} \dot x = \varphi(t,x,u), \qquad u(t) \in U \quad \text{для почти всех } \ t \in [t_0,t_1], \\ f(x(t_0),x(t_1)) \leqslant 0, \qquad g(x(t_0),x(t_1)) = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

где $x(\,\cdot\,) \in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ (абсолютно непрерывные вектор-функции на $[t_0,t_1]$) и $u(\,\cdot\,) \in L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$.

Всюду далее мы предполагаем, что отображение φ непрерывно вместе со своей второй производной по (x,u) на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times U$, а отображения f и g имеют непрерывные вторые производные на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Пару $(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$ будем называть *допустимым процессом* для этой системы, если она удовлетворяет всем ограничениям в (31).

Определение 2. Скажем, что система (31) *локально управляема относительно допустимого процесса* $(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$, если для каждой окрестности W точки $\widehat x(\,\cdot\,)$ существуют такие окрестности W_1 и W_2 нулей в $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ соответственно, что для любого $y=(y_1,y_2)\in W_1\times W_2$ найдется пара $(x_y(\,\cdot\,),u_y(\,\cdot\,))\in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$, удовлетворяющая условиям

$$\dot x_y(t) = \varphi(t,x_y(t),u_y(t)), \qquad u_y(t)\in U \quad \text{для почти всех } \ t\in[t_0,t_1]$$

и такая, что $x_y(\,\cdot\,)\in W$, $f(x_y(t_0),x_y(t_1))\leqslant y_1$ и $g(x_y(t_0),x_y(t_1)) = y_2$.

Если фиксирован допустимый процесс $(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$ для системы (31), то для сокращения записи производные отображений f и g в точке $(\widehat x(t_0),\widehat x(t_1))$ обозначаем $\widehat f'$ и $\widehat g'$, а их частные производные по ζ_1 и ζ_2 в той же точке записываем так: $\widehat f_{\zeta_i}$ и $\widehat g_{\zeta_i}$, $i=1,2$. Сопряженные операторы к ним обозначаем соответственно $\widehat f^*_{\zeta_i}$ и $\widehat g^*_{\zeta_i}$. Пишем также $\widehat\varphi(t)=\varphi(t,\widehat x(t),\widehat u(t))$ и аналогично для производных: $\widehat\varphi_x(t)=\varphi_x(t,\widehat x(t),\widehat u(t))$ и $\widehat\varphi_u(t)=\varphi_u(t,\widehat x(t),\widehat u(t))$.

Обозначим через $H(t,x,u,p(\,\cdot\,))=\langle p(t),\varphi(t,x,u)\rangle$ функцию Понтрягина, где $p(\,\cdot\,)\colon[t_0,t_1]\to(\mathbb{R}^n)^*$. Если фиксирована функция $p\colon[t_0,t_1]\to(\mathbb{R}^n)^*$, то пишем $\widehat H(t)=H(t,\widehat x(t),\widehat u(t),p(t))$ и аналогично для частных производных по x и u.

Пусть $(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$ – допустимый процесс для системы (31). Для каждой пары $q(\,\cdot\,)=(h(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,))\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$ рассмотрим следующую систему соотношений относительно переменных $p(\,\cdot\,)\in\mathrm{AC}([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)$, $\lambda_f\in(\mathbb{R}^{m_1})^*_+$ и $\lambda_g\in(\mathbb{R}^{m_2})^*$:

$$\begin{cases} -\dot p = p\widehat\varphi_x(t), \quad p(t_0)=\widehat f^*_{\zeta_1}\lambda_f+\widehat g^*_{\zeta_1}\lambda_g, \quad p(t_1) = -\widehat f^*_{\zeta_2}\lambda_f-\widehat g^*_{\zeta_2}\lambda_g, \\ \max\limits_{u\in U} H(t,\widehat x(t),u,p(t)) = H(t,\widehat x(t),\widehat u(t),p(t)) \quad \text{для почти всех } \ t\in[t_0,t_1], \\ \langle\lambda_f, f(\widehat x(t_0),\widehat x(t_1))\rangle = 0, \\ -\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\big(\widehat H_{xx}(t)[h(t),h(t)]+2\widehat H_{xu}(t)[h(t),v(t)]+\widehat H_{uu}(t)[v(t),v(t)]\big)\,dt \\ \qquad +\langle\lambda_f,\widehat f''[\eta,\eta]\rangle+\langle\lambda_g,\widehat g''[\eta,\eta]\rangle\geqslant 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $\eta=(h(t_0),h(t_1))$.

Будем обозначать через $\Lambda(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,),q(\,\cdot\,))$ множество таких троек $(p(\,\cdot\,),\lambda_f,\lambda_g)\in\mathrm{AC}([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$, которые удовлетворяют всем соотношениям в (32) при данном $q(\,\cdot\,)$ и при этом $|\lambda_f|+|\lambda_g|\neq 0$.

Пусть $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ – допустимый процесс для системы (31). Введем следующий конус критических вариаций:

$$K(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,)) = \bigl\{q(\,\cdot\,) = (h(\,\cdot\,), v(\,\cdot\,)) \in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)\colon \\ \dot h(t) = \widehat{\varphi}_x(t)h(t) + \widehat{\varphi}_u(t)v(t),\ \widehat{f}'_a[h(t_0),h(t_1)] \leqslant 0,\ \widehat{g}'[h(t_0),h(t_1)] = 0\bigr\},$$

где, как и раньше, f_a – вектор, который получается из f удалением тех координат f_i, для которых $f_i(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1)) < 0$. Если $f(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1)) < 0$, то неравенство $f'_a[h(t_0),h(t_1)] \leqslant 0$ в определении $K(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ отсутствует.

Основное утверждение работы – теорема 1 – для системы (31) звучит так.

Теорема 3. *Пусть $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ – допустимый процесс для системы* (31), *причем $\widehat{u}(t)$ для почти всех $t \in [t_0,t_1]$ принадлежит некоторому компакту в U, и существует такое $q(\,\cdot\,) = (h(\,\cdot\,), v(\,\cdot\,)) \in K(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$, что $\Lambda(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,), q(\,\cdot\,)) = \varnothing$. Тогда система* (31) *локально управляема относительно процесса $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$.*

Более того, существует такая константа $c_0 > 0$, что для переменных y и $x_y(\,\cdot\,)$ из определения локальной управляемости системы (31) *справедлива оценка $\|x_y(\,\cdot\,) - \widehat{x}(\,\cdot\,)\|_{C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)} \leqslant c_0|y|^{1/2}$.*

Доказательство. Сопоставим управляемой системе (31) управляемую систему вида (1). Пусть $X = Z = C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, $E = L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)$ и $\mathscr{U} = \{u(\,\cdot\,) \in L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)\colon u(t) \in U$ для почти всех $t \in [t_0,t_1]\}$. Отображение $F\colon \mathbb{R}^n \times X \times \mathscr{U} \to Z$ определим формулой

$$F(\xi, x(\,\cdot\,), u(\,\cdot\,))(t) = -\xi + x(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))\,d\tau \quad \forall\, t \in [t_0,t_1].$$

Отображения f и g в (31) рассматриваем как отображения $f\colon \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}^{m_1}$ и $g\colon \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}^{m_2}$, сопоставляющие паре $(\xi, x(\,\cdot\,))$ соответственно векторы $f(\xi, x(t_1))$ и $g(\xi, x(t_1))$.

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered} F(\xi, x(\,\cdot\,), u(\,\cdot\,))(\,\cdot\,) = 0, \qquad u(\,\cdot\,) \in \mathscr{U}, \\ f(\xi, x(\,\cdot\,)) \leqslant 0, \qquad g(\xi, x(\,\cdot\,)) = 0, \end{gathered} \tag{33}$$

которая имеет вид системы (1).

Если $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ – допустимый процесс для системы (31), то, очевидно, точка $(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ допустима для управляемой системы (33).

Нетрудно проверить, что если $\widehat{u}(t)$ для почти всех $t \in [t_0,t_1]$ принадлежит некоторому компакту, содержащемуся в U, то $\widehat{u}(\,\cdot\,) \in \operatorname{int} \mathscr{U}$.

Для системы (33) выполнены основные предположения. Действительно, справедливость предположения 1) очевидна. Далее, стандартные рассуждения показывают, что предположения относительно отображений в системе (31) гарантируют выполнение предположения 2), и, кроме того, как хорошо известно, оператор $F_{x(\,\cdot\,)}(\widehat{\xi}, \widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ обратим. Справедливость предположения 3) доказана в [4] (и при более слабых предположениях).

По условию $q(\,\cdot\,)=(h(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,))\in K(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$. Отсюда следует, что тройка $q_1(\,\cdot\,)=(h(t_0),h(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,))$ принадлежит конусу (3), выписанному для системы (33).

Обозначим через $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,),q_1(\,\cdot\,))$ множество троек

$$(y^*,\lambda_f,\lambda_g)\in Y^*\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*,\qquad |\lambda_f|+|\lambda_g|\neq 0,$$

которые удовлетворяют соотношениям в (2), выписанным для системы (33). Покажем, что в предположениях теоремы $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,),q_1(\,\cdot\,))=\varnothing$.

Действительно, в работе [4] доказано, что если набор $(y^*,\lambda_f,\lambda_g)\in Y^*\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$, где $|\lambda_f|+|\lambda_g|\neq 0$, удовлетворяет равенствам в (2), то существует такое $p(\,\cdot\,)\in \mathrm{AC}([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)$, что набор $(p(\,\cdot\,),\lambda_f,\lambda_g)$, удовлетворяет равенствам в (32).

Проверим теперь, что если $(y^*,\lambda_f,\lambda_g)$ удовлетворяет и неравенству в (2), то $(p(\,\cdot\,),\lambda_f,\lambda_g)$ удовлетворяет неравенству в (32). В [4] показано, что функционал y^* как линейный непрерывный функционал на $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$ задается функцией ограниченной вариации $\mu(\,\cdot\,)$, которая связана с функцией $p(\,\cdot\,)$ условиями: $p(t)=\mu(t_1)-\mu(t)$, если $t\in[t_0,t_1)$, и $p(t_1)=-\widehat{f}^*_{\zeta_2}\lambda_f-\widehat{g}^*_{\zeta_2}\lambda_g$. Тогда если $q(\,\cdot\,)=(h(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,))$, после перемены порядка интегрирования будем иметь

$$\begin{aligned}
&\langle y^*,\ \widehat{F}''[q_1(\,\cdot\,),q_1(\,\cdot\,)]\rangle\\
&\quad=\int_{t_0}^{t_1}\biggl(-\int_{t_0}^{t}(\widehat{\varphi}_{xx}(\tau)[h(\tau),h(\tau)]+2\widehat{\varphi}_{xu}(\tau)[h(\tau),v(\tau)]\\
&\qquad\qquad+\widehat{\varphi}_{uu}(\tau)[v(\tau),v(\tau)]\,d\tau\biggr)d\mu(t)\\
&\quad=-\int_{t_0}^{t_1}\langle p(t),\ \widehat{\varphi}_{xx}(\tau)[h(\tau),h(\tau)]+2\widehat{\varphi}_{xu}(\tau)[h(\tau),v(\tau)]\\
&\qquad\qquad+\widehat{\varphi}_{uu}(\tau)[v(\tau),v(\tau)]\rangle\,dt.
\end{aligned}$$

Ясно, что если $\eta=(h(t_0),h(t_1))$, то второе и третье слагаемые слева в неравенстве в соотношениях (2) имеют вид $\langle\lambda_f,\widehat{f}''[\eta,\eta]\rangle$ и $\langle\lambda_g,\widehat{g}''[\eta,\eta]\rangle$, т.е. $(p(\,\cdot\,),\lambda_f,\lambda_g)$ удовлетворяет неравенству в (32), и, тем самым, справедливо включение $(p(\,\cdot\,),\lambda_f,\lambda_g)\in\Lambda(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,),q(\,\cdot\,))$.

Итак, если $\Lambda(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,),q(\,\cdot\,))=\varnothing$, то $\Lambda(\widehat{\xi},\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,),q_1(\,\cdot\,))=\varnothing$. Тогда по теореме 1 получаем, что система (33) локально управляема относительно точки $(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$, откуда сразу следует локальная управляемость системы (31) относительно процесса $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$.

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3, как и в случае абстрактной ситуации, сразу следуют необходимые условия второго порядка для следующей задачи оптимального управления:

$$\begin{gathered}
f_0(x(t_0),x(t_1))\to\min,\\
\dot{x}=\varphi(t,x,u),\quad u(t)\in U,\qquad f(x(t_0),x(t_1))\leqslant 0,\qquad g(x(t_0),x(t_1))=0,
\end{gathered}\tag{34}$$

где множество U и отображения φ, f и g те же, что и в системе (31), функция f_0 определена на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ и обладает теми же свойствами, что f и g.

Допустимая в этой задаче точка $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ называется *сильным минимумом*, если найдется такая окрестность функции $\widehat{x}(\,\cdot\,)$ в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, что для всех допустимых точек $(x(\,\cdot\,),u(\,\cdot\,))$, для которых $x(\,\cdot\,)$ – функция из этой окрестности, справедливо неравенство $f_0(x(t_0),x(t_1))\geqslant f_0(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1))$.

Определим следующий конус критических вариаций:

$$
\begin{aligned}
K_0(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))=\bigl\{q(\,\cdot\,)=(h(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,))\in \mathrm{AC}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^r)\colon&\\
\dot h(t)=\widehat{\varphi}_x(t)h(t)+\widehat{\varphi}_u(t)v(t),\ \widehat{f}_0'[h(t_0),h(t_1)]\leqslant 0,&\\
\widehat{f}_a'[h(t_0),h(t_1)]\leqslant 0,\ \widehat{g}'[h(t_0),h(t_1)]=0\bigr\}.&
\end{aligned}
$$

Следствие 2 (условия минимума второго порядка для задачи (34)). *Если $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ – сильный минимум в задаче (34) и $\widehat{u}(t)$ для почти всех $t\in[t_0,t_1]$ принадлежит некоторому компакту в U, то для любого $q(\,\cdot\,)\in K_0(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ найдутся ненулевой набор $(\lambda_0,\lambda_f,\lambda_g)\in\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$ и функция $p(\,\cdot\,)\in$ $\mathrm{AC}([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)$ такие, что*

$$
\begin{cases}
-\dot p=p\widehat{\varphi}_x(t),\quad p(t_0)=\lambda_0\widehat{f}_{0\zeta_1}+\widehat{f}^*_{\zeta_1}\lambda_f+\widehat{g}^*_{\zeta_1}\lambda_g,\\
\qquad p(t_1)=-\lambda_0\widehat{f}_{0\zeta_2}-\widehat{f}^*_{\zeta_2}\lambda_f-\widehat{g}^*_{\zeta_2}\lambda_g,\\
\max\limits_{u\in U}H(t,\widehat{x}(t),u,p(t))=H(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t))\quad \text{для почти всех}\ \ t\in[t_0,t_1],\\
\langle\lambda_f,f(\widehat{x}(t_0),\widehat{x}(t_1))\rangle=0,\\
\lambda_0\widehat{f}_0''[\eta,\eta]-\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\bigl(\widehat{H}_{xx}(t)[h(t),h(t)]+2\widehat{H}_{xu}(t)[h(t),v(t)]\\
\qquad+\widehat{H}_{uu}(t)[v(t),v(t)]\bigr)\,dt+\langle\lambda_f,\widehat{f}''[\eta,\eta]\rangle+\langle\lambda_g,\widehat{g}''[\eta,\eta]\rangle\geqslant 0.
\end{cases}
$$

Если для системы, задающей ограничения в задаче (34), справедливо равенство $\Lambda(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,)q(\,\cdot\,))=\varnothing$ для некоторого $q(\,\cdot\,)\in K_0(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$, то $\lambda_0\neq 0$.

Доказательство этого следствия точно такое же, как доказательство следствия 1.

Приведем теперь некоторые комментарии к полученным в этом параграфе результатам. Рассмотрим наряду с соотношениями (32) еще соотношение

$$
H_u(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t))=0\quad\text{для почти всех}\ \ t\in[t_0,t_1]. \tag{35}
$$

Обозначим через $\Lambda_{\max}(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ множество троек $(p(\,\cdot\,),\lambda_f,\lambda_g)\in\mathrm{AC}([t_0,t_1],$ $(\mathbb{R}^n)^*)\times(\mathbb{R}^{m_1})^*_+\times(\mathbb{R}^{m_2})^*$, $|\lambda_f|+|\lambda_g|\neq 0$, удовлетворяющих соотношениям в (32), кроме последнего неравенства, а через $\Lambda(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ – множество подобных троек, но с заменой условия максимума на условие (35).

Локальная управляемость системы (31) относительно допустимого процесса $(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))$ в случае открытого множества U следует, как хорошо известно, из вполне управляемости линейного приближения этой системы в окрестности данной точки. По-видимому, впервые это было установлено Р. Калманом в [5] (см. также [6]). В наших терминах это равносильно тому, что

$$
\Lambda(\widehat{x}(\,\cdot\,),\widehat{u}(\,\cdot\,))=\varnothing. \tag{36}
$$

В работе [4] показано, в частности, что локальная управляемость имеет место и при более слабых предположениях, а именно когда

$$\Lambda_{\max}(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,)) = \varnothing, \tag{37}$$

причем U – произвольное множество, а $\widehat{u}(\,\cdot\,)$ не обязательно для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ принадлежит некоторому компакту в U (но если принадлежит и U открыто, то это сразу следует из теоремы 3 при $q(\,\cdot\,) = 0$). Аналогичный результат можно извлечь из принципа максимума для геометрической задачи оптимального управления, полученного в [7]. В работе [8] приведены условия локальной управляемости для динамической системы с закрепленными концами, которые можно рассматривать как достаточные условия того, что выполняется (37) для случая $\widehat{x}(\,\cdot\,) = 0$, $\widehat{u}(\,\cdot\,) = 0$.

Теорема 3 дает достаточные условия локальной управляемости в ситуации, когда соотношения (36) и/или (37) могут не выполняться. В литературе весьма широко представлены задачи локальной управляемости в подобной ситуации для динамических систем, линейных по управлению. В этом случае, если множество U открыто, условия (36) и (37), очевидно, эквивалентны. Необходимые и достаточные условия локальной управляемости для таких задач наиболее полно представлены в [9] (см. также библиографию в [7]). Характер этих условий отличен от тех, которые дает теорема 3. Отметим еще работу [10], в которой получены необходимые и достаточные условия локальной управляемости в предположении введенного там условия 2-нормальности динамической системы. Эти условия содержательны для задач, когда условие (36) не выполняется.

Полученные в качестве непосредственного следствия теоремы 3 необходимые условия оптимальности второго порядка для задачи оптимального управления (30) подобны тем, которые анонсированы Н. П. Осмоловским в [11; п. Д.2] и доказаны в [12].

§ 3. Управляемые системы ОДУ порядка анормальности 1. Примеры

Пусть $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ – допустимый процесс для системы (31). Нетрудно проверить, что множество $\Lambda_{\max}(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,)) \cup \{0\}$ есть выпуклый конус в конечномерном пространстве.

Будем говорить, что система (31) относительно процесса $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ имеет *порядок анормальности* $k \in \mathbb{N}$, если размерность линейной оболочки $\Lambda_{\max}(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,)) \cup \{0\}$ равна k.

Данное определение можно рассматривать как развитие определения понятия порядка анормальности, введенное Дж. Блиссом (см. [13]).

Напомним, что конус в линейном пространстве, содержащий нуль, называется *острым*, если он не содержит нетривиального подпространства.

Назовем допустимый процесс $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ *особым*, если конус $\Lambda_{\max}(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,)) \cup \{0\}$ не является острым.

Нетрудно проверить, что равносильное определение состоит в том, что найдется ненулевая тройка $(p(\,\cdot\,), 0, \lambda_g) \in \Lambda_{\max}(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$ такая, что отображение $u \mapsto H(t, \widehat{x}(t), u, p(t))$ постоянно для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

Для случая, когда порядок анормальности равен единице, приведем одно следствие из теоремы 3, которое удобно для приложений.

Обозначим через $Q(p(\cdot),\lambda_f,\lambda_g)[q(\cdot),q(\cdot)]$ выражение слева в последнем неравенстве в (32).

Следствие 3. *Пусть система* (31) *относительно неособого допустимого процесса* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ *имеет порядок анормальности* 1 *и* $(p(\cdot),\lambda_f,\lambda_g)\in\Lambda_{\max}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$. *Тогда если найдется элемент* $q(\cdot)\in K(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ *такой, что* $Q(p(\cdot),\lambda_f,\lambda_g)[q(\cdot),q(\cdot)]<0$, *то система* (31) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Доказательство. Пусть система (31) не является локально управляемой относительно процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$. Тогда $\Lambda(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot),q'(\cdot))\neq\varnothing$ для любого $q'(\cdot)\in K(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$. Пусть $(p'(\cdot),\lambda'_f,\lambda'_g)\in\Lambda(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot),q'(\cdot))$. Поскольку порядок анормальности равен 1 и пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ неособая, то $(p(\cdot),\lambda_f,\lambda_g)=\alpha(p'(\cdot),\lambda'_f,\lambda'_g)$ для некоторого $\alpha>0$. Но тогда

$$Q(p(\cdot),\lambda_f,\lambda_g)[q'(\cdot),q'(\cdot)]=\alpha Q(p'(\cdot),\lambda'_f,\lambda'_g)[q'(\cdot),q'(\cdot)]\geqslant 0$$

в противоречии с предположением.

Приведем теперь три примера. Примеры 1 и 3 иллюстрируют следствие 3. Пример 2 показывает, что предположения теоремы 3 существенны.

Пример 1. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered}\dot{x}_1=u,\quad \dot{x}_2=u^2-x_1^2,\qquad u(t)\in\mathbb{R}\quad\text{для почти всех }\ t\in[0,T],\\ x_1(0)=x_2(0)=x_1(T)=x_2(T)=0,\end{gathered}\tag{38}$$

где $T>0$.

Процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))=(0,0)$, где $\widehat{x}(\cdot)=(\widehat{x}_1(\cdot),\widehat{x}_2(\cdot))$, допустим для данной системы. В соответствии с общей постановкой здесь $f=0$, и считаем, что $g=(x_1(0),x_2(0),x_1(T),x_2(T))^T$. Несложный подсчет показывает, что пары $(p(\cdot),\lambda_g)=((0,\alpha),(0,\alpha,0,\alpha))$, где $\alpha\leqslant 0$, и только они удовлетворяют первым четырем соотношениям в (32) и, тем самым,

$$\Lambda_{\max}(0,0)=\bigl\{(p(\cdot),\lambda_g)=((0,\alpha),(0,\alpha,0,\alpha)),\ \alpha<0\bigr\}.$$

Очевидно, что $\Lambda_{\max}(0,0)\cup\{0\}$ – острый конус (луч), и поэтому процесс $(0,0)$ неособый, а порядок анормальности системы (41) относительно этого процесса равен 1. Воспользуемся следствием 3.

В нашем случае, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned}K(0,0)=\{q(\cdot)=(h(\cdot),v(\cdot))\in\mathrm{AC}([0,T],\mathbb{R}^2)\times L_\infty([0,T])\colon&\\ \dot{h}_1(\cdot)=v(\cdot),\ h_2(\cdot)=0,\ h_1(0)=h_1(T)=0\}.&\end{aligned}$$

Пусть $(p(\cdot),\lambda_g)\in\Lambda_{\max}(0,0)$. Непосредственные вычисления показывают, что для любого $q(\cdot)\in K(0,0)$

$$\begin{aligned}Q(p(\cdot),\lambda_2)[q(\cdot),q(\cdot)]&=-2\alpha\int_0^T(v^2(t)-h_1^2(t))\,dt\\ &=-2\alpha\int_0^T(\dot{h}_1^2(t)-h_1^2(t))\,dt.\end{aligned}$$

Хорошо известно (и легко проверяется), что интеграл неотрицателен на $[0,T]$, если $T \leqslant \pi$, и принимает отрицательные значения на $[0,T]$, если $T > \pi$. Но тогда величина $Q(p(\,\cdot\,),\lambda_g)[q(\,\cdot\,),q(\,\cdot\,)]$ при $T > \pi$ принимает отрицательные значения, и, значит, согласно следствию 3 рассматриваемая система локально управляема относительно процесса $(0,0)$.

Пример 2. Рассмотрим такую управляемую систему:

$$\begin{gathered} \dot x_1 = u, \quad \dot x_2 = u^3, \qquad u(t) \in (-2,+\infty) \quad \text{для почти всех} \;\; t\in[0,1], \\ x_1(0)=x_2(0)=0, \qquad x_1(1)=x_2(1)=1. \end{gathered} \tag{39}$$

Процесс $(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$, где $\widehat x_1(t)=\widehat x_2(t)=t$, $\widehat u(t)=1$, $t\in[0,1]$, допустим для системы (39). Непосредственный анализ первых четырех соотношений в (32) показывает, что если пара $(p(\,\cdot\,),\lambda_g)$ им удовлетворяет, то необходимо $p(\,\cdot\,) = (\alpha,-\alpha/3)$, $\lambda_g=(\alpha,-\alpha/3,\alpha,-\alpha/3))$,

$$\alpha\biggl(u-\frac{u^3}{3}\biggr) \leqslant \alpha\frac{2}{3} \quad \forall\, u\in(-2,+\infty) \tag{40}$$

для некоторого $\alpha\in\mathbb{R}$.

Покажем, что $\Lambda(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,),q(\,\cdot\,))\ne\varnothing$ для любого $q(\,\cdot\,)\in K(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$, где

$$\begin{aligned} K(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,)) = \{&q(\,\cdot\,)=(h(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,))\in \mathrm{AC}([0,1],\mathbb{R}^2)\times L_\infty([0,1])\colon \\ &\dot h_1(\,\cdot\,)=v(\,\cdot\,),\ \dot h_2(\,\cdot\,)=3v(\,\cdot\,),\ h_i(0)=h_i(1)=0,\ i=1,2\}, \end{aligned}$$

и в то же время система (39) не является локально управляемой относительно процесса $(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$ (т.е. условие $\Lambda(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,),q(\,\cdot\,))=\varnothing$ существенно для локальной управляемости).

Действительно, условие (40) справедливо для любого $\alpha>0$ и обращается в равенство в точке $u=1$. Пусть $(p(\,\cdot\,),\lambda_g)\in\Lambda_{\max}(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$. Нетрудно проверить, что

$$Q(p(\,\cdot\,),\lambda_g)[q(\,\cdot\,),q(\,\cdot\,)] = 2\alpha\int_0^1 v^2(t)\,dt$$

для любого $q(\,\cdot\,)=(h(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,))\in K(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,))$ и, таким образом, $\Lambda(\widehat x(\,\cdot\,),\widehat u(\,\cdot\,), q(\,\cdot\,))\ne\varnothing$.

Для доказательства неуправляемости системы относительно процесса $(\widehat x(\,\cdot\,), \widehat u(\,\cdot\,))$ достаточно показать, что для любого процесса $(x(\,\cdot\,),u(\,\cdot\,))$ $(x(\,\cdot\,)=(x_1(\,\cdot\,), x_2(\,\cdot\,)))$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению в (39), $u(t)\in(-2,+\infty)$ для почти всех $t\in[0,1]$, $x_1(1)=1$ и $x_1(0)=x_2(0)=0$, справедливо неравенство $x_2(1)\geqslant 1$.

В самом деле, обозначая $\eta(\,\cdot\,)=u(\,\cdot\,)-1$ и учитывая, что $\eta(t)>-3$ для почти всех $t\in[0,1]$ и $\displaystyle\int_0^1\eta(t)\,dt=0$, будем иметь

$$\begin{aligned} x_2(1) &= \int_0^1 u^3(t)\,dt = \int_0^1 (1+\eta(t))^3\,dt \\ &= 3\int_0^1\eta(t)\,dt + \int_0^1 \eta^2(t)(3+\eta(t))\,dt + 1 \geqslant 1. \end{aligned}$$

Таким образом, система (39) не является локально управляемой относительно процесса $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,))$.

Пример 3. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = \langle a, u\rangle + \langle x^T, Au\rangle, \qquad \dot{x}_2 = \langle x^T, Bu\rangle + u_1^2 - u_2^2, \qquad \dot{x}_3 = (u_1 - u_2)^2,\\ u(t) = (u_1(t), u_2(t) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{для почти всех} \ \ t \in [0, T],\\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \qquad x_3(0) = -x_1^2(1), \qquad x_3(1) = 0,\end{gathered} \tag{41}$$

где $a = (a_1, a_2)$, $a_1 + a_2 \neq 0$, A и B – произвольные (2×2)-матрицы.

Процесс $(\widehat{x}(\,\cdot\,), \widehat{u}(\,\cdot\,)) = (0, 0)$, где $\widehat{x}(\,\cdot\,) = (\widehat{x}_1(\,\cdot\,), \widehat{x}_2(\,\cdot\,), \widehat{x}_3(\,\cdot\,))$ и $\widehat{u}(\,\cdot\,) = (\widehat{u}_1(\,\cdot\,), \widehat{u}_2(\,\cdot\,))$, допустим для данной системы. Непосредственный подсчет показывает, что пары $(p(\,\cdot\,), \lambda_g) = ((0, 0, \alpha), (0, 0, \alpha, 0, 0, -\alpha))$, где $\alpha \leqslant 0$, и только они удовлетворяют первым четырем соотношениям в (32) и, тем самым,

$$\Lambda_{\max}(0, 0) = \{(p(\,\cdot\,), \lambda_g) = ((0, 0, \alpha), (0, 0, \alpha, 0, 0, -\alpha)),\ \alpha < 0\}.$$

Очевидно, что $\Lambda_{\max}(0, 0) \cup \{0\}$ – острый конус, и поэтому процесс $(0, 0)$ неособый, а порядок анормальности системы (41) относительно этого процесса равен 1. Конус критических вариаций, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\begin{aligned}K(0, 0) = \{&(h(\,\cdot\,), v(\,\cdot\,)) \in \mathrm{AC}([0, 1], \mathbb{R}^3) \times L_\infty([0, 1], \mathbb{R}^2)\colon\\ &\dot{h}_1(\,\cdot\,) = a_1 v_1(\,\cdot\,) + a_2 v_2(\,\cdot\,),\ h_2(\,\cdot\,) = h_3(\,\cdot\,) = 0,\ h_1(0) = 0\}.\end{aligned}$$

Для любого $q(\,\cdot\,) = (h(\,\cdot\,), v(\,\cdot\,)) \in K(0, 0)$ имеем

$$Q(p(\,\cdot\,), \lambda_g)[q(\,\cdot\,), q(\,\cdot\,)] = -2h_1^2(1) - 2\alpha \int_0^1 (v_1(t) - v_2(t))^2\, dt.$$

Пусть $q(\,\cdot\,)$ такое, что $v_1(\,\cdot\,) = v_2(\,\cdot\,) = v(\,\cdot\,)$ и $\displaystyle\int_0^1 v(t)\, dt \neq 0$. Тогда $h_1(1) \neq 0$ и, значит, $Q(p(\,\cdot\,), \lambda_g)[q(\,\cdot\,), q(\,\cdot\,)] < 0$. Согласно следствию 3 рассматриваемая система локально управляема относительно процесса $(0, 0)$.

Список литературы

[1] В. М. Тихомиров, *Принцип Лагранжа и задачи оптимального управления*, МГУ, М., 1982.

[2] Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений”, *УМН*, **68**:3(411) (2013), 5–38; англ. пер.: E. R. Avakov, G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, “Lagrange’s principle in extremum problems with constraints”, *Russian Math. Surveys*, **68**:3 (2013), 401–433.

[3] В. А. Зорич, *Математический анализ*, т. II, Наука, М., 1984, 640 с.; англ. пер. 4-го и 6-го изд.: V. A. Zorich, *Mathematical analysis*, v. II, 2nd ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xvi+681 pp.

[4] Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, “Релаксация и управляемость в задачах оптимального управления”, *Матем. сб.*, **208**:5 (2017), 3–37; англ. пер.: E. R. Avakov, G. G. Magaril-Il’yaev, “Relaxation and controllability in optimal control problems”, *Sb. Math.*, **208**:5 (2017), 585–619.

[5] R. E. Kalman, "Discussion: "On the existence of optimal controls"", *ASME J. Basic. Eng.*, **84**:1 (1962), 21–22.

[6] Э. Б. Ли, Л. Маркус, *Основы теории оптимального управления*, Наука, М., 1972, 574 с.; пер. с англ.: E. B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1967, x+576 pp.

[7] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005, 392 с.; пер. с англ.: A. A. Agrachev, Yu. L. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Encyclopaedia Math. Sci., **87**, Control theory and optimization II, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xiv+412 pp.

[8] Н. Н. Петров, "Об управляемости автономных систем", *Дифференц. уравнения*, **4**:4 (1968), 606–617.

[9] H. J. Sussmann, "A general theorem on local controllability", *SIAM J. Control Optim.*, **25**:1 (1987), 158–194.

[10] А. В. Арутюнов, В. Ячимович, "2-нормальные процессы управляемых динамических систем", *Дифференц. уравнения*, **38**:8 (2002), 1017–1029; англ. пер.: A. V. Arutyunov, V. Jacimovic, "2-normal processes in controlled dynamical systems", *Differ. Equ.*, **38**:8 (2002), 1081–1094.

[11] Е. С. Левитин, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, "Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями", *УМН*, **33**:6(204) (1978), 85–148; англ. пер.: E. S. Levitin, A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, "Conditions of high order for a local minimum in problems with constraints", *Russian Math. Surveys*, **33**:6 (1978), 97–168.

[12] N. P. Osmolovskii, "Necessary quadratic conditions of extremum for discontinuous controls in optimal control problems with mixed constraints", *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **183**:4 (2012), 435–576.

[13] Г. А. Блисс, *Лекции по вариационному исчислению*, ИЛ, М., 1950, 349 с.; пер. с англ.: G. A. Bliss, *Lectures on the calculus of variations*, Univ. of Chicago Press, Chicago, Ill., 1946, ix+296 pp.

Евгений Рачиевич Аваков
(Evgenii R. Avakov)
Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук, г. Москва;
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: eramag@mail.ru

Поступила в редакцию
22.09.2017 и 18.09.2018

Георгий Георгиевич Магарил-Ильяев
(Georgii G. Magaril-Il'yaev)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: magaril@mech.math.msu.su