С. К. Водопьянов, Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 1, 63–112

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8899

УДК 517.518+517.54

С. К. Водопьянов

Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях

Изучаются свойства измеримых отображений на полных римановых многообразиях, индуцирующих по правилу композиции изоморфизмы классов Соболева с первыми обобщенными производными, показатель суммируемости которых отличен от хаусдорфовой размерности многообразия. Доказано, что такие отображения можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы они стали квазиизометриями.

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: риманово многообразие, квазиизометрическое отображение, пространство Соболева, оператор композиции.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8899

§ 1. Введение

Изучение операторов композиции в пространствах Соболева восходит к классической работе С. Л. Соболева [1] (см. работу [2], в которой приведена подробная история и библиография по этому вопросу). Новый импульс для развития этой проблематики возник при решении задачи Ю. Г. Решетняка об описании всех изоморфизмов φ^* однородных пространств Соболева L^1_n, порожденных квазиконформными отображениями φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, сформулированной в 1968 г. на первом Донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений. В работе [3] показано, что таковыми являются структурные изоморфизмы пространств L^1_n и только они. Предложенный в [3] подход к задаче Решетняка естественно рассматривать в контексте предшествующих этому результатов (см., например, [4]): в теоремах Банаха, Стоуна, Эйленберга, Аренса и Келли, Хьюита, Гельфанда и Колмогорова получены условия на различные структуры пространства непрерывных функций $C(S)$, изоморфизм которых определяет топологическое пространство S с точностью до гомеоморфизма. Отметим здесь результат А. Стоуна, согласно которому $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S. С другой стороны, М. Накаи (см. [5]) и Л. Льюис (см. [6]) установили, что изоморфность алгебр Ройдена равносильна квазиконформной эквивалентности областей определения. Выделяя теперь в однородном пространстве Соболева L^1_n две структуры: векторной решетки и полунормированного пространства, мы получаем ситуацию, в алгебраическом смысле близкую к работе А. Стоуна,

Результаты раздела 5.2 подготовлены в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ (грант № 1.3087.2017/4.6), а раздела 5.1 – при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-01-00801-a).

а в метрическом – к работе М. Накаи. Такой взгляд на задачу является наиболее естественным, так как все еще дает возможность восстановить отображение, несмотря на минимум "материала" для его нахождения, доказать его непрерывность и установить его метрические свойства.

В рамках разработанного в [3] подхода к проблеме Ю. Г. Решетняка возникла следующая задача: какие метрические и аналитические свойства имеет измеримое отображение φ, индуцирующее изоморфизм φ^* по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_n$?

Варьируя функциональное пространство, мы каждый раз приходим к новой задаче:

– пространства Соболева W^1_p, $p > n$, рассмотрены в работе [7];

– однородные пространства Бесова $b^l_p(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, $lp = n$, рассмотрены в [8] при $p = n + 1$ и в [9] при $p > n + 1$;

– пространства Соболева W^1_p, $n - 1 < p < n$, рассмотрены в [10];

– пространства риссовых и бесселевых потенциалов рассмотрены в [11];

– трехиндексные шкалы пространств Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля (и их анизотропные аналоги) рассмотрены в [12];

– пространства Соболева L^1_p, $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq n$, на собственных областях многомерных евклидовых областей рассмотрены в [13] (новое по сравнению с работами [7], [11] доказательство);

– пространства Соболева L^1_p, $1 \leqslant p < \infty$, на областях групп Карно рассмотрены в [14]–[16].

В [17] к задаче замены переменной в пространствах Соболева применена теория мультипликаторов. Свойства ограниченного оператора композиции на пространствах Бесова, кроме работы [9], изучались также в [18] и в [19]. Квазиконформная эквивалентность классов Лизоркина–Трибеля исследована в [20].

На основании работ [8]–[16] можно сделать вывод, что изоморфность оператора φ^* влечет в зависимости от соотношения между показателями гладкости, суммируемости и размерностью пространства свойство отображения быть квазиконформным или квазиизометрическим в метрике области определения, адекватной геометрии функционального пространства.

Настоящую работу можно рассматривать как естественное развитие результатов и методов работ [12], [13], успешно примененных в [14]–[16] для решения задачи об операторе композиции на группах Карно. Исследуемая в настоящей работе задача состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия на измеримое отображение φ такие, что φ индуцирует по правилу замены переменной изоморфизм φ^* пространств Соболева с первыми обобщенными производными на областях полного риманова многообразия при условии, что степень суммируемости градиента отлична от топологической размерности пространства (в работе [13] эта задача решена в евклидовых пространствах).

Определение 1. Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области на многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно. Будем говорить, что измеримое отображение $\varphi\colon D \to D'$, определенное п.в. в D, *принадлежит классу* IL^1_p, $p \in [1, \infty)$, если:

1) для любой функции $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ композиция $f \circ \varphi$, определенная п.в. в D, принадлежит классу $L^1_p(D)$;

2) оператор композиции

$$\varphi^*\colon L^1_p(D')\cap C^\infty(D')\to L^1_p(D), \qquad \varphi^*(f)=f\circ\varphi, \quad f\in L^1_p(D')\cap C^\infty(D'), \tag{1.1}$$

удовлетворяет соотношениям

$$K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leqslant \big\|\varphi^*(f)\mid L^1_p(D)\big\| \leqslant K\big\|f\mid L^1_p(D')\big\|, \tag{1.2}$$

где постоянная K не зависит от выбора функции f;

3) образ $\varphi^*(L^1_p(D')\cap C^\infty(D'))$ всюду плотен в $L^1_p(D)$.

Отметим, что условие 3) не зависит от условий 1) и 2). Действительно, рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, действующее по правилу $\varphi(x_1,x_2)=(|x_1|,x_2)$. Очевидно, что условия 1) и 2) выполнены. С другой стороны, образ $\varphi^*(L^1_p(\mathbb{R}^2)\cap C^\infty(\mathbb{R}^2))$ будет состоять из функций, четных относительно оси $x_1=0$, и, следовательно, не будет плотным в $L^1_p(\mathbb{R}^2)$.

Основные результаты работ данного направления сформулированы в следующих двух теоремах.

Теорема 1 (см. [21]). *Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – полные римановы многообразия топологической размерности $n\geqslant 2$, $D\subset\mathbb{M}$, $D'\subset\mathbb{M}'$ – области на многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, $p\geqslant 1$, $p\neq n$. Измеримое отображение $\varphi\colon D\to D'$ принадлежит классу IL^1_p тогда и только тогда, когда φ совпадает п.в. с некоторой квазиизометрией $\Phi\colon D\to\mathbb{M}'$, для которой области $\Phi(D)$ и D' $(1,p)$-эквивалентны.*

Теорема 2 (см. [21]). *Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – полные римановы многообразия топологической размерности $n\geqslant 2$, $D\subset\mathbb{M}$, $D'\subset\mathbb{M}'$ – области на многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно. Измеримое отображение $\varphi\colon D\to D'$ принадлежит классу IL^1_n тогда и только тогда, когда φ совпадает п.в. с некоторым квазиконформным отображением $\Phi\colon D\setminus\Sigma\to\mathbb{M}'$ (здесь $\Sigma\subset D$ – некоторое замкнутое в области D множество нулевой емкости в пространстве W^1_n), для которого области $\Phi(D\setminus\Sigma)$ и D' $(1,n)$-эквивалентны.*

Замечание 1. 1) В силу двусторонней оценки (1.2) оператор (1.1) является мономорфизмом.

2) В лемме 11 будет показано, что оператор (1.1) продолжается по непрерывности до изоморфизма пространств Соболева L^1_p, и продолженный оператор будет в определенном смысле также оператором композиции.

Приведем определения основных понятий из формулировок этих теорем.

Определение 2. Гомеоморфизм $\Phi\colon D\to D'$ двух открытых множеств называется *квазиизометрией*, если выполнены условия

$$\varlimsup_{\substack{u\to x\\ u\in D}}\frac{d'(\Phi(u),\Phi(x))}{d(u,x)}\leqslant L, \qquad \varlimsup_{\substack{v\to z\\ v\in D'}}\frac{d(\Phi^{-1}(v),\Phi^{-1}(z))}{d'(v,z)}\leqslant L \tag{1.3}$$

для всех $x\in D$ и $z\in D'$, L – некоторая константа, не зависящая от выбора точек $x\in D$ и $z\in D'$, а d, d' – римановы расстояния на $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно.

Определение 3. Гомеоморфизм $\Phi\colon D\to D'$ двух открытых множеств называется *квазиконформным*, если выполнены условия

$$\varlimsup_{r\to 0}\frac{\max\{d'(\Phi(y),\Phi(x))\colon y\in S(x,r)\}}{\min\{d'(\Phi(y),\Phi(x))\colon y\in S(x,r)\}}\leqslant K$$

для всех $x\in D$, K – некоторая константа, не зависящая от выбора точек $x\in D$, d, d' – римановы расстояния на $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, а $S(x,r)=\{y\in\mathbb{M}\colon d(y,x)=r\}$ – сфера радиуса r с центром в точке x.

Определение 4. Два открытых множества $D_1,D_2\subset\mathbb{M}$ называются $(1,p)$-*эквивалентными*, $p\in[1,\infty)$, если операторы ограничения $r_i\colon L^1_p(D_1\cup D_2)\to L^1_p(D_i)$, $r_i(f)=f|_{D_i}$, где $f\in L^1_p(D_1\cup D_2)$, являются изоморфизмами.

Свойства $(1,p)$-эквивалентных областей исследованы для евклидова пространства в работе [22], для геометрии векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера, – в работе [23].

Замечание 2. Отметим, что из теорем 1 и 2 и результатов настоящей работы можно получить такое следствие: если отображение $\varphi\colon D\to D'$ – квазиизометрия при $p\neq n$ или квазиконформное отображение при $p=n$, то $f\circ\varphi\in L^1_p(D)$ для любой функции $f\in L^1_p(D')$, а оператор φ^*, индуцированный заменой переменной, является изоморфизмом пространств Соболева L^1_p.

Настоящая работа организована следующим образом. В § 2 и § 3 приводятся основные определения и вспомогательные результаты. В § 4 мы показываем, что оператор композиции (1.1) можно определить на всем пространстве $L^1_p(D')$ с сохранением свойств 1) и 2) из определения 1. Более того, полученный оператор композиции $\varphi^*\colon L^1_p(D')\to L^1_p(D)$ является изоморфизмом пространств Соболева $L^1_p(D')$ и $L^1_p(D)$. Далее, в § 5 мы доказываем основные результаты работы.

Доказательство теоремы 1 разбивается на два основных случая.

Первый случай, $p>n$, более простой. По существу он сводится к ситуации, когда измеримое отображение φ биективно, и базируется на том, что емкость двух точек $x,y\in\mathbb{M}$ в пространстве $L^1_p(\mathbb{M})$ сравнима с величиной $d(x,y)^{n-p}$ (при достаточно близких x,y). Тогда изоморфность оператора φ^* равносильна соотношениям $M^{-1}d(x,y)\leqslant d(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant Md(x,y)$ для достаточно близких точек $x,y\in D$, выбранных из специального всюду плотного подмножества в D. Из последнего выводим (1.3) (см. детали в доказательстве теоремы 4).

Второй случай, $1\leqslant p<n$ (лемма 23), значительно более деликатный. Лемме 23 предшествуют многошаговые рассуждения, в результате которых на каждом шаге удаляется некоторое множество нулевой меры с целью получения в конце концов суженной области определения $\operatorname{Dom}_6\varphi\subset D$ измеримого отображения φ, $|D\setminus\operatorname{Dom}_6\varphi|=0$, на которой φ обладает рядом замечательных свойств, таких, как инъективность, $\mathscr{N}$-свойство Лузина и $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина. Эти свойства дают возможность доказать аппроксимативную дифференцируемость отображения φ. Последнее – это основа для применения аналитических методов исследования отображения φ. Оказывается, что прямое отображение φ аппроксимативно дифференцируемо, и его аппроксимативный дифференциал

$D\varphi(x)$ и якобиан $J(x,\varphi)=\det D\varphi(x)$ удовлетворяют соответственно соотношениям

$$|D\varphi|(x)\leqslant L<\infty, \qquad |J(x,\varphi)|\geqslant \alpha_1>0 \quad \text{п.в. в} \ \ D.$$

Здесь же мы доказываем аналогичные соотношения для аппроксимативного дифференциала $D\psi(y)$ обратного отображения $\psi=\varphi^{-1}$:

$$|D\psi|(y)\leqslant L'<\infty, \qquad |J(y,\psi)|\geqslant \alpha>0 \quad \text{п.в. в} \ \ D'.$$

С помощью этих соотношений и условий на оператор φ^* мы сводим исследование метрических свойств отображения φ к первому случаю. Эта редукция и позволяет доказать, что φ совпадает п.в. на D с некоторой квазиизометрией $\Phi\colon D\to D'$.

Часть методов, которые используются при доказательстве основных результатов, являются обобщениями классических подходов (например, аппроксимация функций из пространства Соболева гладкими функциями). С другой стороны, в некоторых случаях требуется привлечение новых методов, базирующихся на свойствах метрических пространств с мерой. Основная преодолеваемая трудность состоит в том, чтобы корректно удалить из области определения множество нулевой меры и доказать, что суженное отображение аппроксимативно дифференцируемо п.в. В ходе доказательства, кроме методов работ [12]–[14], применяются также результаты и методы работ [23]–[28].

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ для случая $p=n$ утверждение, аналогичное теореме 2, доказано в [3] при условии, что область D' ограничена.

В рамках настоящего подхода к проблеме основу полученного доказательства теоремы 2, которое будет проведено в другой публикации, составляет метод работы [12] с существенными добавлениями, неизбежными для рассматриваемой в работе ситуации: в работе [12] в качестве областей D и D' рассматривалось евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а в качестве пространства функций – подходящее нормированное функциональное пространство (метод работы [12] успешно был применен в [16]) для доказательства на группах Карно результата, подобного теореме 2.

Теоремы 1 и 2 можно обобщить на субримановы многообразия, по крайней мере для компактно вложенных областей.

§ 2. Классы функций и отображений Соболева на римановом многообразии

Далее мы фиксируем связное полное риманово многообразие $\mathbb{M}=(\mathbf{M},g)$, т.е. гладкое многообразие $\mathbf{M}$, в каждом касательном пространстве $T_x\mathbf{M}$ которого выбрана евклидова метрика g_x, гладко меняющаяся от точки к точке.

Длина абсолютно непрерывной кусочно гладкой кривой $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{M}$ выражается интегралом $l(\gamma)=\displaystyle\int_a^b|\dot\gamma(t)|\,dt$ (здесь $|\dot\gamma(t)|=\sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}$ – длина касательного вектора $\dot\gamma(t)$ в евклидовом пространстве $T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ со скалярным произведением $g_{\gamma(t)}$).

Метрика $d(x,y)$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно гладких кривых с концевыми точками x и y.

Пусть D – область (связное открытое множество) на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определим пространство функций $L_p(D)$, суммируемых в степени $p \in [1,\infty)$, как совокупность измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f \mid L_p(D)\| = \left(\int_D |f(x)|^p \, d\omega\right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь $d\omega$ – стандартный элемент объема на римановом многообразии $\mathbb{M}$. Если измеримая функция $u\colon D \to \mathbb{R}$ суммируема на каждой компактной части области D, то она называется *локально суммируемой*.

Локально суммируемая функция $v\colon D \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной локально суммируемой функции* $f\colon D \to \mathbb{R}$ вдоль векторного поля X, определенного на области D, и обозначается $v = Xf$, если

$$\int_D v\psi \, d\omega = -\int_D fX^*\psi \, d\omega$$

для произвольной финитной функции $\psi \in C_0^\infty(D)$, где $d\omega$ – элемент n-мерного риманова объема (здесь X^* – дифференциальный оператор, сопряженный к дифференциальному оператору X).

Однородное пространство Соболева $L_p^1(D)$ состоит из локально интегрируемых функций $f\colon D \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенный градиент $\nabla f \in L_p(D)$. Полунорма в $L_p^1(D)$ определяется как

$$\big\|f \mid L_p^1(D)\big\| = \big\|\nabla f \mid L_p(D)\big\| = \left(\int_D |\nabla f(x)|^p \, d\omega\right)^{1/p};$$

здесь $\nabla f(x)$ – обобщенный градиент[1] функции f в точке $x \in D$, а $|\nabla f(x)|$ – длина обобщенного градиента $\nabla f(x)$ в евклидовом пространстве $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x.

Пространство Соболева $W_p^1(D)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\big\|f \mid W_p^1(D)\big\| = \|f \mid L_p(D)\| + \|\nabla f \mid L_p(D)\|.$$

Будем говорить, что $f \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(D)$, если $f \in W_p^1(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset D$ такой, что $\overline{V} \subset D$.

В [29] Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{X}, r)$ – полное метрическое пространство, r – метрика на $\mathbb{X}$, а D – область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Отображение $\varphi\colon D \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу* $W_{p,\mathrm{loc}}^1(D;\mathbb{X})$, если выполнены следующие условия:

[1] Напомним, что *обобщенным градиентом локально суммируемой функции* $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ называется локально суммируемая функция $h\colon \mathbb{M} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая интегральному тождеству $\int_{\mathbb{M}} h\eta \, d\omega = -\int_{\mathbb{M}} f\nabla\eta \, d\omega$ для любой гладкой финитной функции $\eta\colon \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. (Здесь $\nabla\eta$ – градиент функции η на $\mathbb{M}$.)

(A) для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[\varphi]_z \colon x \in D \mapsto r(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$;

(B) семейство градиентов $(\nabla[\varphi]_z)_{z\in\mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, т.е. существует функция $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla[\varphi]_z(x)| \leqslant g(x)$ для почти всех $x \in D$.

Если $\mathbb{X} = \mathbb{M}'$ – еще одно риманово многообразие с расстоянием d', то мы получаем определение отображения класса Соболева различных римановых многообразий и обозначаем этот класс $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{M}')$. В этом случае удобно использовать следующее эквивалентное описание отображения класса Соболева (см., например, [25]).

Отображение $\varphi \colon D \mapsto \mathbb{M}'$ *принадлежит* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{M}')$ тогда и только тогда, когда его можно изменить на множестве нулевой меры так, что:

a) функция $D \ni x \mapsto [\varphi]_z(x) = d'(\varphi(x), z)$ принадлежит $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;

b) отображение $\varphi \colon D \to \mathbb{M}'$ абсолютно непрерывно на интегральных линиях базисных векторных полей, т.е. для любого открытого ограниченного множества U, $\overline{U} \subset D$, произвольного определенного на U набора X_j, $j = 1, \dots, n$, базисных векторных полей и слоения Γ_k множества U, определяемого векторным полем X_k, отображение φ абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U \in \Gamma_k$ относительно одномерной меры Хаусдорфа для $d\tau$-почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_k$ (здесь γ – интегральная линия $\exp(tX_k(x))$ векторного поля X_k с началом в точке $x \in U$, а мера $d\tau$ на слоении Γ_k равна внутреннему произведению $i(X_k)$ векторного поля X_k с формой объема ω), $k = 1, \dots, n$;

c) производная $X_k\varphi(x) = \frac{d}{dt}\varphi\big(\exp(tX_k(x))\big)\big|_{t=0}$ существует и принадлежит $T_{\varphi(x))}\mathbb{M}'$ п.в. в открытом множестве U, $\overline{U} \subset D$, и, кроме того, $|X_k\varphi| \in L_p(U)$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Если отображение $\varphi \colon D \mapsto \mathbb{M}'$ удовлетворяет только сформулированным выше условиям a) и b), то говорим, что φ принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$. Для такого отображения φ существуют производные $X_k\varphi \in T_{\varphi(x))}\mathbb{M}'$ вдоль векторных полей X_k, $k = 1, \dots, n$, п.в. в U (см. [31], [30]).

Матрица, столбцы которой – это векторы $(X_k\varphi(x))$, $k = 1, \dots, n$, определяет линейный оператор $D\varphi(x) \colon T_x\mathbb{M} \mapsto T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ касательного пространства $T_x\mathbb{M}$ в касательное пространство $T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ для почти всех x и называется (*формальным*) *дифференциалом* отображения φ в точке x. Пусть $|D\varphi|(x)$ – норма этого оператора. В случае $\dim \mathbb{M} = \dim M'$ якобиан $J(x, \varphi) = \det D\varphi(x)$ представляет собой определитель матрицы $D\varphi(x)$.

Напомним определение локально липшицевых, билипшицевых, квазиизометрических и квазиконформных отображений.

Как обычно, открытые связные множества на полном римановом многообразии $\mathbb{M}$ будем называть областями.

Определение 5. Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области на римановых многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно. Отображение $\varphi \colon U \to \mathbb{M}'$ называется *локально липшицевым* (*билипшицевым*), если для каждой точки $x \in U$ найдутся окрестность

$V \subset U$ и постоянная L_V, для которых выполняются соотношения

$$d'(\varphi(y), \varphi(z)) \leqslant L_V d(y,z) \quad (L_V^{-1} d(y,z) \leqslant d'(\varphi(y), \varphi(z)) \leqslant L_V d(y,z))$$

для всех $y, z \in V$. Если в качестве V можно взять U, то отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{M}$ будем называть *липшицевым* (*билипшицевым*) на U.

Символом $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ обозначим совокупность локально липшицевых функций на области D, т.е. $u \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$, если u определена на D и принимает значения в $\mathbb{R}$, а каждая точка $x \in D$ имеет окрестность $U(x) \subset D$ такую, что неравенство $|u(y) - u(z)| \leqslant L_x\, d(y,z)$ выполняется для всех точек $y, z \in U(x)$ с некоторой постоянной L_x, зависящей лишь от выбора окрестности $U(x)$ (здесь $d(y,z)$ – риманово расстояние между точками $y, z \in \mathbb{M}$). Заметим, что пространство локально липшицевых функций $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ совпадает с пересечением $C(D) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [32]).

Следующие определения эквиваленты определениям 2 и 3 соответственно.

Определение 6. Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области на римановых многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно. Гомеоморфизм $\Phi\colon D \to D'$ двух областей D и D' класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{M}')$ называется *квазиизометрией*, если $|D\Phi(x)| \leqslant M$ и $0 < \alpha \leqslant |J(x,\Phi)|$ для почти всех $x \in D$, где постоянные M и α не зависят от x.

Определение 7. Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области на римановых многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно. Гомеоморфизм $\Phi\colon D \to D'$ двух областей D и D' класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{M}')$ называется *квазиконформным*, если существует постоянная K такая, что $|D\Phi(x)|^n \leqslant K|J(x,\Phi)|$ п.в. в D.

В следующем предложении формулируется свойство о липшицевости соболевского отображения на достаточно больших частях области определения.

Предложение 1. *Пусть $\varphi \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$. Тогда существует представление $\mathbb{M} = E_\varphi \cup \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств таких, что $|E_\varphi| = 0$, A_i измеримо для всех i, а ограничение $\varphi|_{A_i}$ липшицево.*

Применение сформулированных выше свойств отображений классов Соболева позволяет свести доказательство этого предложения к известной аппроксимационной теореме Уитни (см., например, [31], [32]).

В качестве следствия предложения 1 мы получаем следующий вариант формулы замены переменной в интеграле Лебега. (Напомним, что символ χ_A обозначает характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{M}$.)

Предложение 2 (см. [33]). *Пусть $\varphi \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ – соболевское отображение между римановыми многообразиями одной и той же топологической размерности. Тогда существует подмножество $E_\varphi \subset \mathbb{M}$ нулевой меры такое, что для любой измеримой функции $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{R}_+$ верна формула*

$$\int_{\mathbb{M}} f(x) |J(x,\varphi)(x)|\, d\omega(x) = \int_{\mathbb{M}'} \biggl(\sum_{\varphi(x)=y} f(x) \chi_{\mathbb{M}\setminus E_\varphi}(x) \biggr)\, d\nu(y).$$

Если φ удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству Лузина, можно положить $E_\varphi = \varnothing$.

Здесь $d\nu$ – стандартный элемент объема на римановом многообразии $\mathbb{M}'$. Символом $|E|$ обозначаем далее меру $\omega(E) = \int_E d\omega$ измеримого множества $E \subset \mathbb{M}$. Символом $|F|$ обозначаем меру $\nu(F) = \int_F d\nu$ измеримого множества $F \subset \mathbb{M}'$: из контекста всегда будет ясно, частью какого многообразия является множество E или F.

Лемма 1. *Пусть $g(x) = d(x_0, x)$, где $x_0 \in \mathbb{M}$ – фиксированная точка. Тогда*

$$|\nabla g(x)| = 1 \quad \textit{п.в. в} \ \ \mathbb{M}.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на три шага.

Шаг 1. Имеем

$$|g(x) - g(y)| = |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leqslant d(x, y).$$

Таким образом, g – липшицева функция. Отсюда выводим неравенство

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \leqslant 1 \quad \text{для всех} \ \ x \neq y. \tag{2.1}$$

Шаг 2. Для произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ найдется кратчайшая кривая γ, соединяющая x и x_0. Пусть y – точка на кривой γ. Тогда $|g(x) - g(y)| = d(x, y)$ и, следовательно,

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} = 1 \quad \text{для} \ \ y \in \gamma. \tag{2.2}$$

Из неравенств (2.1) и (2.2) выводим

$$\varlimsup_{y \to x \in \mathbb{M}} \frac{|g(y) - g(x)|}{d(x, y)} = 1. \tag{2.3}$$

Шаг 3. Так как g – липшицева функция, то по теореме Радемахера g дифференцируема п.в. (см. [31]). Пусть $x \in \mathbb{M}$ – точка дифференцируемости функции g, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – локальный базис касательного расслоения в окрестности точки x. Переходя к нормальным координатам в точке x, имеем

$$\lim_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \frac{g(y) - g(0) - \nabla g(0) \cdot y}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\nabla g(0) \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(0) y_i, \qquad y \in T_x\mathbb{M}.$$

Тогда из (2.3) и (2.4) можно вывести

$$\varlimsup_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \frac{|\nabla g(0) \cdot y|}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} = 1. \tag{2.5}$$

Отсюда получаем

$$1 = \varlimsup_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \left| \nabla g(0) \cdot \frac{y}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} \right| = \sup_{y \in T_x\mathbb{M},\, \|y\|_{T_x\mathbb{M}} = 1} |\nabla g(0) \cdot y|.$$

Следовательно, имеем $|\nabla g(x)| = 1$.

Лемма доказана.

Замечание 3. Утверждение леммы 1 справедливо также и для функции

$$g(x) = d(x, F) = \inf_{y\in F} d(x, y)$$

в следующей форме: $|\nabla g(x)| = 1$ п.в. в $\mathbb{M}\setminus F$. Здесь функция g – это расстояние от точки x до фиксированного замкнутого множества F.

2.1. Аппроксимация гладкими функциями. Рассуждения в этом пункте во многом основаны на методах из работ [34] и [35]. Пусть функция η принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\eta \subset B(0,1)$, $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ – евклидов шар радиуса 1 и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $u \in L_p(D)$ и $u(x) \equiv 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n\setminus D$. Рассмотрим семейство усреднений

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) u(y)\, dy.$$

Функция η называется *усредняющим ядром*, а число ε – *радиусом усреднения.*

Предложение 3 (см. [35]). *Если $u \in L_p(D)$, $p \in [1,\infty)$, то имеют место следующие свойства*:

1) $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2) $u_\varepsilon \to u$ *в* $L_p(D)$;

3) *если $V \Subset D$ – компактно вложенная область*[2], *то*

$$X_i u_\varepsilon \to X_i u \quad \textit{в} \quad L_p(V).$$

Предложение 3 позволяет доказать плотность гладких функций в $L_p^1(D)$.

Лемма 2. *Пусть D – область в $\mathbb{M}$. Пространство $L_p^1(D)\cap C^\infty(D)$ плотно в $L_p^1(D)$. Если $f \in L_p^1(D)$ – локально липшицева функция, то существует последовательность функций $f_l \in L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$, $l \in \mathbb{N}$, сходящаяся к f локально равномерно и в $L_p^1(D)$.*

Доказательство. Наши рассуждения основаны на доказательстве теоремы 1 из [35].

Пусть $u \in L_p^1(D)$. В силу [34; следствие 2] существуют локально конечное покрытие[3] $\{B_k\}_{k\geqslant 1}$ области D шарами $B_k \subset D$ и разбиение единицы $\{\psi_k\}_{k\geqslant 1}$, подчиненное этому покрытию (можно считать, что каждый шар B_k содержится в некоторой координатной окрестности). Более того, существует убывающая к нулю последовательность $\{\rho_k\}$ положительных чисел такая, что последовательность шаров $\{(1+\rho_k)B_k\}$ также образует локально конечное покрытие области D. Функцию $u_k = \psi_k u$ перенесем в координатную окрестность и обозначим символом w_k усреднение перенесенной функции $u_k = \psi_k u$ с радиусом усреднения $\rho_k r_k$, где r_k – радиус шара B_k. Перенесем теперь функцию w_k на многообразие $\mathbb{M}$. Легко видеть, что $w = \sum_k w_k$ принадлежит $C^\infty(D)$,

[2] Другими словами, V – ограниченная область такая, что $\overline{V} \subset D$.

[3] То есть для каждой точки $x \in D$ найдется окрестность $U \subset D$, которая пересекается только с конечным числом шаров из покрытия $\{B_k\}$.

так как сумма локально конечна (каждая точка имеет окрестность, в которой только конечное число функций w_k не равны нулю). Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, 1/2)$. В силу предложения 3 можно выбрать ρ_k так, что

$$\big\| u_k - w_k \mid L^1_p(D) \big\| \leqslant \varepsilon^k.$$

На любой ограниченной области V такой, что $\overline{V} \subset D$, выполнено равенство $u = \sum_k u_k$. Следовательно,

$$\big\| u - w \mid L^1_p(V) \big\| \leqslant \sum_k \big\| u_k - w_k \mid L^1_p(V) \big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Таким образом, для любой функции $u \in L^1_p(D)$ и для произвольного $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдется функция $w \in L^1_p(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $\big\| u - w \mid L^1_p(D) \big\| < 2\varepsilon$.

Лемма доказана.

Отметим следующие свойство, очевидным образом вытекающие из леммы 2.

Замечание 4. Если $f \in L^1_p(D)$, то найдется последовательность гладких функций $f_l \in L^1_p(D) \cap C^\infty(D)$, сходящаяся к f п.в. в D. Если $p > n$, то можно подобрать последовательность, которая будет сходится локально равномерно в D.

В качестве желаемой последовательности можно взять суммы $f_l = \sum_k w_k$ функций $\{w_k\}$, построенных в лемме 2 для $\varepsilon_l = 1/l$ вместо ε.

Из леммы 2 выводим следующее

Следствие 1. *Пространство $L^1_p(D) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ плотно в $L^1_p(D)$, где $D \subset \mathbb{M}$ – область.*

2.2. Неравенства Пуанкаре и области Джона. Напомним, что кривая $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{M}$ *спрямляема*, если

$$\sup_P \sum_{i=1}^{k_P} d(\gamma(x_{i-1}), \gamma(x_i)) < \infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k_P} = b\}$. Для двух точек $x, y \in \mathbb{M}$ *кратчайшей* называется кривая с концевыми точками x, y, имеющая минимальную длину.

Определение 8. Область $\Omega \subset \mathbb{G}$ называется *областью Джона* $J(\alpha, \beta)$ (коротко $\Omega \in J(\alpha, \beta)$), $0 < \alpha \leqslant \beta$, если найдется точка $x_0 \in \Omega$ такая, что любую точку $x \in \Omega$ можно соединить с x_0 спрямляемой кривой γ, которая содержится в Ω и удовлетворяет следующим условиям: если $s \in [0, l]$ – натуральная параметризация кривой γ, то $l \leqslant \beta$,

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(l) = x_0, \qquad \operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \frac{\alpha s}{l} \quad \text{для всех} \quad s \in [0, l]. \tag{2.6}$$

Замечание 5. Легко проверить, что шар $B(x_0, r)$ в метрике риманова многообразия является областью Джона $J(r, r)$, где центр шара x_0 – выделенная точка.

Лемма 3. *Пусть D – произвольная область в $\mathbb{M}$ и шары B_0, B_1 содержатся в этой области, причем $\overline{B}_0, \overline{B}_1 \subset D$. Тогда найдется компактно вложенная в D область*[4] *Джона $\Omega \in J(\alpha,\beta)$, $\Omega \Subset D$, с некоторыми параметрами α, β, зависящими от области D и шаров B_0, B_1, которая будет содержать оба этих шара.*

Доказательство. Пусть x_0, x_1 – центры данных шаров, а r_0, r_1 – их радиусы. Построим спрямляемую кривую, соединяющую точки x_0 и x_1.

Для этого рассмотрим сначала произвольную непрерывную кривую K, лежащую в D и соединяющую точки x_0 и x_1, т.е. непрерывное отображение $K\colon [0,1]\to D$ такое, что $K(0)=x_0$ и $K(1)=x_1$. Такая кривая существует, поскольку D – связное открытое множество. (Заметим, что кривая K не обязательно является спрямляемой.)

Совокупность шаров $\{B(K(t)), \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K(t),\partial D)\}_{t\in[0,1]}$ образует покрытие компактного множества $K([0,1])$. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $B(\xi_1,\rho_1),\dots,B(\xi_m,\rho_m)$, где $\xi_j = K(\tau_j)$, $\tau_j \in [0,1]$ и $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$.

Пусть $B(\xi_l,\rho_l)$ – шар с наибольшим номером l, содержащий точку x_0. Если $x_1 \in B(\xi_l,\rho_l)$, то кривая γ, составленная из кратчайших кривых, соединяющих точку ξ_l с точками x_0 и x_1, спрямляема и ее длина $|\gamma|$ не больше $2\rho_l$.

В противном случае существует максимальное значение t_1 параметра $t \in (0,1)$ такое, что $v_1 = K(t_1) \in \partial B(\xi_l,\rho_l)$, а $K(t) \notin \overline{B(\xi_l,\rho_l)}$ для всех $t \in (t_1,1]$. Тогда найдется кривая $\gamma_1 \subset \overline{B(\xi_l,\rho_l)} \subset D$, составленная из кратчайших кривых, соединяющих точку ξ_l с точками x_0 и v_1. Длина кривой γ_1 не превосходит $2\rho_l$.

В свою очередь точка v_1 принадлежит некоторому шару $B(\xi_k,\rho_k)$, где $l < k \leqslant m$ – максимальный номер шара, содержащий точку v_1. Если $x_1 \in B(\xi_k,\rho_k)$, то дополним кривую γ_1 кратчайшими кривыми, соединяющими точку ξ_k с точками v_1 и x_1. Получим кривую γ, длина которой не превосходит $2(\rho_l+\rho_k)$.

В противном случае существует максимальное значение t_2 параметра $t \in (t_1,1)$ такое, что $v_2 = K(t_2) \in \partial B(\xi_k,\rho_k)$, а $K(t) \notin \overline{B(\xi_k,\rho_k)}$ для всех $t \in (t_2,1]$. Тогда дополним кривую γ_1 новой кривой $\gamma_2 \subset \overline{B(\xi_k,\rho_k)} \subset D$, составленной из кратчайших кривых, соединяющих точку ξ_k с точками v_1 и v_2. Так как длина γ_2 не превосходит $2\rho_k$, то длина составленной кривой $\gamma_1\cup\gamma_2$ не превосходит $2(\rho_l+\rho_k)$.

Продолжая этот процесс по индукции, через конечное число шагов (не более m) мы получим спрямляемую кривую $\Gamma = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\cdots$ в D, длина которой не превосходит $2\sum_{k=1}^m \rho_k$.

Таким образом, кривая Γ спрямляема и соединяет центры шаров B_0 и B_1: $\Gamma(0) = x_0$, $\Gamma(L) = x_1$ (считаем, что Γ параметризована натуральным параметром, а L – длина Γ).

Фиксируем произвольное число $\delta = [\frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Gamma,\partial D), \operatorname{dist}(\Gamma,\partial D))$. Рассмотрим область $\Omega = B_0\cup B_1\cup\bigcup_{x\in\Gamma} B(x,\delta)$, состоящую из шаров B_0, B_1 и всех шаров радиуса δ с центрами на Γ. Положим $\alpha = \min\{\delta, r_0, r_1\}$, $\beta = L + r_0 + r_1 + \delta$.

[4]То есть $\overline{\Omega} \subset D$ и $\overline{\Omega}$ – компактное множество.

Покажем, что Ω является областью Джона $J(\alpha,\beta)$ с выделенной точкой x_0. Пусть $x \in \Omega$. Если $x \in B_0$, то условия (2.6) выполняются автоматически: в качестве кривой γ выбираем кратчайшую кривую, соединяющую x и x_0. Тогда $l = |\gamma| < r_0 < \beta$ и для всех $s \in [0, l]$ выполнены неравенства

$$\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \operatorname{dist}(\gamma(s), \partial B_0) \geqslant s = \frac{sl}{l} \geqslant \frac{sr_0}{l} \geqslant \frac{\alpha s}{l}.$$

Если $x \in B_1$, то положим $\gamma = \gamma_1 \cup \Gamma$, где γ_1 – кратчайшая кривая, соединяющая x и x_1. Обозначим $l_1 = |\gamma_1| < r_1$; тогда $l = |\gamma| = l_1 + L < r_1 + L < \beta$, $\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \alpha s/l_1 \geqslant \alpha s/l$ для $s \in [0, l_1]$ и $\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \alpha \geqslant \alpha s/l$ для $s \in [l_1, l_1 + L]$. Следовательно, $\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \alpha s/l$ для всех $s \in [0, l]$.

Пусть x не принадлежит ни B_0, ни B_1. Следовательно, $x \in B(\xi, r)$, где ξ – точка на кривой Γ и $r < \delta$. В качестве кривой γ возьмем кривую, состоящую из кратчайшей кривой, соединяющей x и ξ, и сегмента кривой Γ от ξ до x_0. Тогда, как и в предыдущих двух случаях, имеем $l_1 = |\gamma_1| < \delta$, $l = |\gamma| < \delta + L < \beta$,

$$\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \frac{\alpha s}{l_1} \geqslant \frac{\alpha s}{l} \quad \text{для} \quad s \in [0, l_1],$$
$$\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \alpha \geqslant \frac{\alpha s}{l} \quad \text{для} \quad s \in [l_1, l].$$

Таким образом, $\operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geqslant \alpha s/l$ для всех $s \in [0, l]$.

Поэтому $\Omega \Subset D$ является областью Джона, содержащей данные шары B_0, B_1.

Приведем следующее неравенство Пуанкаре для областей Джона (см. [36; § 6]).

Предложение 4 (см. [36; теоремы 4 и 9]). *Пусть $p < n$, $p \leqslant q \leqslant np/(n-p)$ и $U \Subset \mathbb{M}$ – компактно вложенная*[5] *область Джона $J(\alpha,\beta)$. Тогда для любой функции $u \in W_p^1(U)$ имеем*

$$\|u - c_u \mid L_q(U)\| \leqslant C_U \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \operatorname{diam}(U)^{1-n/p+n/q} \|\nabla u \mid L_p(U)\|, \tag{2.7}$$

где c_u и C_U – постоянные, причем $C_U > 0$ не зависит от u, α, β, но зависит от постоянной в условии удвоения[6] *на области U (см. детали в [36; ч. 6]).*

Далее нам потребуется вариант неравенства Пуанкаре в следующей форме (см., например, [26]).

Лемма 4. *Пусть $U \Subset M$ – компактно вложенная область Джона $J(\alpha,\beta)$ и измеримое подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру, $|F| > 0$. Тогда для всех $u(x) \in W_p^1(U)$, $p \leqslant q \leqslant np/(n-p)$, $p < n$, таких, что $u|_F = 0$, выполнено неравенство*

$$\left(\int_U |u(x)|^q \, d\omega\right)^{1/q} \leqslant \frac{|U|^{1/q}}{|F|^{1/q}} C_U \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \operatorname{diam}(U)^{1-n/p+n/q} \left(\int_U |\nabla u(x)|^p \, d\omega\right)^{1/p}. \tag{2.8}$$

---

[5] То есть $\overline{\Omega} \subset \mathbb{M}$ и $\overline{\Omega}$ – компактное множество.

[6] Так как $U \Subset \mathbb{M}$, то существуют (см., например, [37]) положительные числа r_0 и M такие, что $|B(x, 2r)| \leqslant M|B(x, r)|$ для всех $x \in U$ и $r \in (0, r_0)$.

Здесь и далее символ $|A|$ обозначает риманову меру измеримого множества $A \subset \mathbb{M}$: $|A| = \int_A d\omega$.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим произвольную функцию $u(x) \in W_p^1(U)$ такую, что $u|_F = 0$, где подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру. Обозначим $M = \|u \mid L_q(U)\| > 0$. Тогда

$$|F| = \int_U (\chi_F(x))^q \, d\omega \leqslant \int_U \left| 1 - \frac{u(x)|U|^{1/q}}{M} \right|^q d\omega \leqslant \frac{|U|}{M^q} \int_U \left| \frac{M}{|U|^{1/q}} - u(x) \right|^q d\omega.$$

Следовательно,

$$M^q |F| \leqslant |U| \|(M|U|^{-1/q} - u) \mid L_q(U)\|^q. \tag{2.9}$$

Для постоянной c_u из неравенства Пуанкаре (предложение 4) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |M|U|^{-1/q} - c_u| &= \big| \, |U|^{-1/q} \|u \mid L_q(U)\| - |U|^{-1/q} \|c_u \mid L_q(U)\| \, \big| \\ &\leqslant |U|^{-1/q} \|u - c_u \mid L_q(U)\|. \end{aligned}$$

Поэтому, используя неравенство Пуанкаре (2.7), имеем

$$\begin{aligned} \|(M|U|^{-1/q} - u) \mid L_q(U)\| &\leqslant \|(M|U|^{-1/q} - c_u) \mid L_q(U)\| + \|u - c_u \mid L_q(U)\| \\ &\leqslant 2\|u - c_u \mid L_q(U)\| \leqslant 2C_U \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \operatorname{diam}(U)^{1-n/p+n/q} \|\nabla u \mid L_p(U)\|. \end{aligned}$$

Применяя (2.9), получаем

$$\|u \mid L_q(U)\| \leqslant \frac{|U|^{1/q}}{|F|^{1/q}} 2C_U \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \operatorname{diam}(U)^{1-n/p+n/q} \|\nabla u \mid L_p(U)\|.$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $p > n$, а функция $f \in C(D) \cap L_p^1(D)$ такова, что $f(x_0) = 0$ и $f(x_1) = 1$ для некоторых точек $x_0, x_1 \in B = B(x_0, d(x_0, x_1)) \Subset D$. Тогда выполнено неравенство*

$$\frac{1}{d(x_0, x_1)^{1-n/p}} \leqslant K_B \|f \mid L_p^1(D)\|,$$

где постоянная K_B зависит от шара B.

Доказательство. Нам потребуется следующее неравенство Пуанкаре из [36; теорема 4]:

$$\|u - c_u \mid L_\infty(B)\| \leqslant C_B \operatorname{diam}(B)^{1-n/p} \|\nabla u \mid L_p(B)\|.$$

Фиксируем шар $B \Subset \mathbb{M}$ минимального диаметра, содержащий точки $x_0, x_1 \in \overline{B}$. Имеем

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x_1)| &\leqslant |f(x_0) - c_f| + |f(x_1) - c_f| \leqslant 2\|f - c_f \mid L_\infty(B)\| \\ &\leqslant K_B d(x_0, x_1)^{1-n/p} \|\nabla f \mid L_p(B)\| \\ &\leqslant K_B d(x_0, x_1)^{1-n/p} \|\nabla f \mid L_p(D)\|, \end{aligned}$$

где K_B – некоторая постоянная. В нашем случае $|f(x_0) - f(x_1)| = 1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{d(x_0, x_1)^{1-n/p}} \leqslant K_B \|f \mid L_p^1(D)\|.$$

§ 3. Функция множеств

Пусть $D \Subset \mathbb{M}$ – компактно вложенное открытое подмножество. Мы рассматриваем совокупность открытых подмножеств $\Theta(D)$ из D таких, что:

1) $B \in \Theta(D)$ для любого шара $B \subset D$;

2) $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \in \Theta(D)$ для любых попарно не пересекающихся множеств $U_1, \ldots, U_n \in \Theta(D)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 6. Среди совокупностей открытых множеств $\Theta(D)$ из D существуют минимальная – всевозможные объединения конечных наборов открытых шаров, замыкания которых не пересекаются, и максимальная – все открытые подмножества из D.

Определение 9. Отображение $\Phi\colon \Theta(D) \mapsto [0, \infty]$ называется *конечно квазиаддитивной функцией множеств*, если:

1) для любого $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, такое, что $0 \leqslant \Phi(B_\delta(x)) < \infty$;

2) неравенство $\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \leqslant \Phi(U)$ выполнено для любого набора попарно не пересекающихся открытых множеств $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset U$, где $U_i, U \in \Theta(D)$, $i = 1, \ldots, k$.

Конечно квазиаддитивная функция будет также и счетноквазиаддитивной.

Если вместо условия 2) в определении функции множеств потребовать выполнение условий

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) = \Phi\biggl(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\biggr)$$

для любого конечного набора $U_i \in \Theta(D)$, $i = 1, \ldots, k$, попарно не пересекающихся открытых множеств, то такая функция называется *конечно аддитивной*. Если это равенство распространить на счетный набор $\{U_i \colon i \in \mathbb{N}\}$, то функция Φ называется *счетноаддитивной* (при условии $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \Theta(D)$).

Заметим, что из определения квазиаддитивной функции Φ вытекает ее монотонность: $\Phi(U_1) \leqslant \Phi(U_2)$, если $U_1 \subset U_2$, $U_1, U_2 \in \Theta(D)$.

Верхняя и нижняя производные квазиаддитивной функции, заданной на совокупности открытых подмножеств $\Theta(D)$, определяются соответственно как

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{h \to 0} \sup_{\delta < h} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)}, \qquad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{h \to 0} \inf_{\delta < h} \frac{\Phi(B_\delta)}{\mu(B_\delta)}.$$

Здесь супремум и инфимум берутся по всем открытым шарам B_δ, содержащим точку x с радиусом $\delta < h$. Если в некоторой точке x верхняя и нижняя производные совпадают: $\overline{\Phi}'(x) = \underline{\Phi}'(x)$, то их общее значение называется *производной* $\Phi'(x)$ функции множеств Φ в точке x.

Для квазиаддитивной функции множества справедливо

Предложение 5 (см. [28]). *Пусть* $\mathbb{M}$ – *риманово многообразие, а квазиаддитивная функция множества* Φ *определена на некоторой системе* $\Theta(D)$ *открытых подмножеств компактно вложенной области* $D \Subset \mathbb{M}$. *Тогда*:

a) *почти в каждой точке* $x \in D$ *существует конечная производная*

$$\Phi'(x) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|};$$

b) $\Phi'(x)$ – *измеримая функция*;

c) *для любого открытого множества* $U \in \Theta(D)$ *справедливо неравенство*

$$\int_U \Phi'(x)\, d\omega \leqslant \Phi(U).$$

Использование функций множеств позволяет доказать следующую теорему Лебега.

Теорема 3 (см. [28]). *Пусть* $\mathbb{M}$ – *риманово многообразие,* D – *область в* $\mathbb{M}$. *Предположим, что функция* f *принадлежит* $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. *Тогда для почти всех* $x \in D$ *имеем*

$$\lim_{\delta\to 0,\, x\in B_\delta} \frac{1}{|B_\delta|} \int_{B_\delta} |f(y) - f(x)|\, d\omega(y) = 0.$$

Лемма 6 (см. [28; лемма 10]). *Пусть монотонная счетноаддитивная функция* Φ *определена на открытых подмножествах компактно вложенного открытого множества* $D \subset \mathbb{M}$. *Тогда для всякого открытого множества* $U \Subset D$, $U \neq D$, *содержащегося в некоторой координатной окрестности, существует последовательность евклидовых шаров* $\{B_j\}$ *такая, что*:

1) *семейства* $\{B_j\}$ *и* $\{2B_j\}$ *образуют конечнократное покрытие* U;

2) $\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_j) \leqslant \zeta_n \Phi(U)$, *где* ζ_n – *постоянная, зависящая только от размерности* n *и области* U.

§ 4. Оператор композиции

Всюду далее $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области на римановых многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, а отображение $\varphi\colon D \to D'$ принадлежит IL^1_p.

Напомним определение сходимости в полунормированном пространстве $L^1_p(D)$.

Определение 10. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\}\in L^1_p(D)$ *сходится к функции* $f \in L^1_p(D)$ (т.е. $f_n \to f$) в пространстве $L^1_p(D)$, если

$$\|f_n - f \mid L^1_p(D)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Заметим, что если $f_n \to f$ в пространстве $L^1_p(D)$, то также $f_n + C_n \to f + C_0$ при $n \to \infty$, где $C_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \dots, k, \dots$, – произвольные константы.

Лемма 7. *Пусть* $f \in L^1_p(D')$, $f_n \in L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(D')$, $f_n \to f$ *при* $n \to \infty$ *в пространстве* $L^1_p(D')$, $p \in [1, \infty)$, *и выполнены следующие условия*:

a) *функция* $f \circ \varphi$ *определена п.в. на* D *и п.в. принимает конечные значения*;

b) $f_n \circ \varphi(x) \to f \circ \varphi(x)$ *при* $n \to \infty$ *для почти всех* $x \in D$.

Тогда:

1) $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$;

2) $K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant \|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leqslant K\|f \mid L^1_p(D')\|$.

Доказательство. *Шаг* 1. Сначала рассмотрим случай, когда $|f| < C$ (применяя срезки, можно считать, что $|f_n| < 2C$ для всех $n \in N$). Обозначим $g_n(x) = f_n \circ \varphi(x)$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости последовательность $\{g_n\}$ сходится к функции $f \circ \varphi$ в $L_1(B)$ на всяком шаре $B \Subset D$. Кроме того, последовательность градиентов $\{\nabla g_n\}$ является фундаментальной в $L_p(D)$ и поэтому имеет предел в $L_p(D)$. Перечисленные свойства обеспечивают локальную суммируемость функции $f \circ \varphi$ и существование обобщенных производных этой функции класса $L_p(D)$. Следовательно, $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$.

Шаг 2. Пусть теперь f – произвольная функция в $L^1_p(D')$, которую можно считать положительной, так как $f = f^+ - f^-$, а $f^+, f^- \in L^1_p(D')$.

Фиксируем шар $B_0 \Subset D$. Можно считать, что $f \circ \varphi = 0$ на некотором измеримом множестве $F \subset B_0$ положительной меры. Действительно, множество $\{x \in B_0 \colon f(\varphi(x)) - k_0 \leqslant 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$. Тогда вместо f можно рассматривать функцию $\max\{f(y) - k_0, 0\}$, а вместо последовательности $\{f_n\}$ – функции $\max\{f_n(y) - k_0, 0\}$. При этом

$$f_n \circ \varphi \to 0 \quad \text{п.в. на } F \text{ при } n \to \infty.$$

Далее рассматриваем неотрицательную функцию $f \in L^1_p(D')$ такую, что множество $F = \{x \in B_0 \colon f \circ \varphi(x) = 0\}$ имеет положительную меру.

Определим монотонную последовательность функций $u_m = g_m \circ \varphi$, где $g_m = \min\{f, m\}$. Поскольку g_m является ограниченной функцией, $u_m \in L^1_p(D)$ в силу шага 1. Также $u_m \to f \circ \varphi$ п.в. при $m \to \infty$. Действительно, для почти каждой точки $x \in D$ найдется номер $m_x \in \mathbb{N}$ такой, что $f(\varphi(x)) < m_x$. Тогда $u_k(x) = f(\varphi(x))$ для всех $k > m_x$.

Для произвольного шара $B \Subset D$ выберем компактно вложенную в D область Джона $U \supset B \cup B_0$ и применим к функциям u_m неравенство Пуанкаре (2.8). При $q = p$ получаем

$$\begin{aligned}
\int_U |u_m(x)|^p \, d\omega &\leqslant \frac{|U|}{|F|} C (\operatorname{diam} U)^p \int_U |\nabla u_m(x)|^p \, d\omega \\
&= C \frac{|U|}{|F|} (\operatorname{diam} U)^p \int_U |\nabla (g_m \circ \varphi)(x)|^p \, d\omega \\
&\leqslant C \frac{|U|}{|F|} (\operatorname{diam} U)^p \|\varphi^* g_m \mid L^1_p(D)\|^p \\
&\leqslant KC \frac{|U|}{|F|} (\operatorname{diam} U)^p \|g_m \mid L^1_p(D')\|^p \\
&\leqslant C_2 \|f \mid L^1_p(D')\|^p.
\end{aligned}$$

В третьем неравенстве мы воспользовались результатом шага 1. Таким образом, $u_m \in L_p(B)$. Так как функции $u_m = g_m \circ \varphi$, монотонно возрастая, сходятся на B к функции $f \circ \varphi$, то по теореме Б. Леви $f \circ \varphi \in L_p(B)$. Поскольку шар $B \Subset D$ произвольный, то композиция $f \circ \varphi$ локально суммируема на D. Заметим еще, что последовательность градиентов ∇u_m является фундаментальной в $L_p(D)$, поскольку таковой является последовательность градиентов ∇g_m. Действительно, имеем

$$\|\nabla g_l - \nabla g_m \mid L_p(D')\| \leqslant \int_{\{x \in D' :\, f(x) \geqslant m\}} |\nabla f|^p \, d\omega \quad \text{при} \quad l > m.$$

Следовательно, $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$. Таким образом, лемма доказана и в случае, когда f не является ограниченной.

Лемма 8. *Пусть $p > n$. Тогда для любой функции $f \in L^1_p(D')$:*

1) $\widetilde{f} \circ \varphi \in L^1_p(D)$;

2) $K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant \|\widetilde{f} \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leqslant K\|f \mid L^1_p(D')\|$;

здесь $\widetilde{f}$ – непрерывный представитель f.

Доказательство. Пусть $f \in L^1_p(D')$ и $\widetilde{f}$ – непрерывный представитель f. Тогда найдется последовательность $f_n \in C^\infty(D') \cap L^1_p(D')$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $f_n \to \widetilde{f}$ в $L^1_p(D')$ и $f_n(x) \to \widetilde{f}(x)$ для всех $x \in D'$ (см. замечание 4). Заметим, что композиция непрерывной функции $\widetilde{f}$ с отображением φ определена п.в. на D. Тогда имеем

$$f_n \circ \varphi(x) \to \widetilde{f} \circ \varphi(x) \quad \text{при } n \to \infty \text{ для почти всех } x \in D.$$

Таким образом, для функции $\widetilde{f}$ выполнены условия леммы 7, и поэтому утверждения 1) и 2) леммы доказаны.

Нам понадобится следующее

Определение 11. Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области на римановых многообразиях $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно. Будем говорить, что измеримое отображение $\varphi\colon D \to D'$, определенное п.в. на D, *порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^*\colon L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D), \qquad 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty, \quad \varphi^* f = f \circ \varphi,$$

если:

1) для любой функции $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ композиция $f \circ \varphi$, определенная п.в. в D, принадлежит классу $L^1_q(D)$;
2) оператор композиции

$$\varphi^*\colon L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D), \qquad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D'), \tag{4.1}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\big\|\varphi^*(f) \mid L^1_q(D)\big\| \leqslant K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|,$$

где постоянная K не зависит от выбора функции f.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 6 (см. [27; лемма 1]). *Предположим, что отображение* $\varphi\colon D \to D'$ *порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^*\colon L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D), \qquad 1 \leqslant q < p \leqslant \infty, \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

Тогда

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(A') \cap C^\infty(A')} \left(\frac{\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A')\|} \right)^{\varkappa}, \quad \textit{где} \ \ \varkappa = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} & \textit{при } p \leqslant \infty, \\ q & \textit{при } p = \infty, \end{cases}$$

– ограниченная монотонная счетноаддитивная функция, определенная на открытых ограниченных подмножествах $A' \subset D'$.

Из леммы 6 можно получить следующее

Следствие 2 (см. [27; следствие 1]). *Аддитивная функция множеств из предложения 6 абсолютно непрерывна.*

Замечание 7. В работе [27] утверждения следствия 2 и предложения 6 доказаны для $\mathbb{R}^n$. Подобно тому, как это было сделано в [28], доказательства с очевидными изменениями переносятся и на риманово многообразие.

Лемма 9 (см. [27; теорема 4]). *Если отображение* $\varphi\colon D \to D'$ *порождает ограниченный мономорфизм*

$$\varphi^*\colon L^1_p(D') \cap C^\infty_0(D') \to L^1_p(D), \qquad 1 \leqslant p \leqslant n,$$

то отображение φ *обладает* $\mathscr{N}^{-1}$*-свойством Лузина, т.е.* $|\varphi^{-1}(A)| = 0$, *если* $|A| = 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что прообраз всякого открытого множества имеет положительную меру. Пусть $U \subset D'$ – открытое множество. Покажем, что $|\varphi^{-1}(U)| > 0$. Предположим, что это не так, т.е. $|\varphi^{-1}(U)| = 0$. Поскольку U является открытым множеством, можно выбрать шар $B = B(y_0, r)$ так, что $2B = B(y_0, 2r) \subset U$. Возьмем функцию класса $f \in C^\infty_0(D')$ такую, что $f = 1$ на B и $f = 0$ вне $2B$. Таким образом, $f \not\equiv 0$. С другой стороны, $\varphi^* f = 0$ п.в. на D. Следовательно, $\varphi^* f = 0$, чего быть не может, поскольку φ^* является мономорфизмом. Таким образом, прообраз любого открытого множества не может иметь нулевую меру.

Рассмотрим шар $B(y, r) \subset D'$ такой, что $B = B(y, 2r)$ содержится в некоторой координатной окрестности, и липшицеву функцию

$$f_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B\left(y, \dfrac{5}{4} r\right), \\ 0, & \text{если } x \notin B\left(y, \dfrac{7}{4} r\right), \\ 1 - \dfrac{2}{r} \operatorname{dist}\left(x, B\left(y, \dfrac{5}{4} r\right)\right), & \text{если } x \in B\left(y, \dfrac{7}{4} r\right) \setminus B\left(y, \dfrac{5}{4} r\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

Для полунормы этой функции выполнена следующая оценка (см. замечание 3):

$$\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant C_1|B|^{1/p-1/n}, \tag{4.3}$$

где постоянная C_1 зависит от выбора шара B.

Заметим, что формально значение оператора $\varphi^* f_B$ не определено. Однако мы можем определить его по непрерывности аналогично тому, как это было сделано в лемме 8. Действительно, функцию f_B можно аппроксимировать последовательностью гладких функций $g_k \in L^1_p(D') \cap C_0^\infty(D')$ таких, что $g_k \in C_0^\infty(B(y, 2r))$, $k \in \mathbb{N}$, $g_k \to f_B$ в $L^1_p(D')$ и $g_k \to f_B$ в равномерной норме при $k \to \infty$. Тогда последовательность $\varphi^* g_k = g_k \circ \varphi \in L^1_p(D)$ сходится в $L^1_p(D)$, причем ее пределом будет композиция $\varphi^* f_B = f_B \circ \varphi$, к которой последовательность $\varphi^* g_k$ сходится п.в. Для предельной функции имеем

$$\begin{aligned}\|\varphi^* f_B \mid L^1_p(D)\| &= \lim_{k\to\infty} \|\varphi^* g_k \mid L^1_p(D)\| \leqslant \|\varphi^*\| \cdot \lim_{k\to\infty} \|g_k \mid L^1_p(D')\| \\ &= \|\varphi^*\| \cdot \|f_B \mid L^1_p(D')\| \leqslant 2\|\varphi^*\| \cdot r^{-1}|B(x_i, 2r_i)|^{1/p}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Фиксируем открытое множество $U \subset D'$ такое, что $D' \setminus \overline{U} \neq \varnothing$. Выберем покрытие области D счетным числом компактно вложенных в D шаров $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$, т.е. $Q_l \Subset D$ и $\bigcup_l Q_l = D$. Пусть множество нулевой меры $E \subset D'$ находится на положительном расстоянии от открытого множества U. Выберем еще покрытие дополнения $D' \setminus \overline{U}$ счетным числом компактно вложенных в $D' \setminus \overline{U}$ шаров $Q'_0, Q'_1, Q'_2, \dots$, каждый из которых находится в некоторой достаточно малой координатной окрестности. Основу доказательства составляет проверка того, что $\varphi^{-1}(Q'_k \cap E) \cap Q_l$ имеет меру нуль для всех возможных $k, l \in \mathbb{N}$.

Случай $p < n$. По теореме Лузина найдется компактное множество $T \subset \varphi^{-1}(U)$ положительной меры такое, что отображение φ непрерывно на T и, следовательно, $\varphi(T)$ – тоже компактное множество. Кроме того, можно считать, что $T \subset Q_0$.

Фиксируем некоторое Q'_k и рассмотрим открытое множество малой меры $V \subset Q'_k \subset D'$ (скажем, $|V| = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно малым) такое, что $V \supset Q'_k \cap E$ и $V \cap \varphi(T) = \varnothing$. Так как (V, d) – это метрическое пространство однородного типа (см. [37]), то существуют наборы шаров $\{B(y_i, r_i)\} \subset V$ и $\{B_i = B(y_i, 2r_i)\} \subset V$, образующие конечнократные покрытия множества V (см. [37]). Для функции $f_{B_i}(x)$, определенной, как в (4.2), с шаром B_i вместо B, имеем $\varphi^* f_{B_i} = 1$ на $\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))$ и $\varphi^* f_{B_i} = 0$ вне $\varphi^{-1}(B(y_i, 2r_i))$, в частности $\varphi^* f_{B_i} = 0$ на множестве T. В этом случае оценка (4.4) с учетом (4.3) имеет вид

$$\|\varphi^* f_{B_i} \mid L^1_p(D)\| \leqslant C_2\|\varphi^*\| \cdot |B_i|^{1/p-1/n}, \tag{4.5}$$

где в силу компактности вложения $V \Subset \mathbb{M}'$ постоянную C_2 можно подобрать одной и той же для всех шаров B_i. Кроме того, справедлива также оценка меры прообраза $\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))$

$$|\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))| \leqslant \int_D |\varphi^* f_{B_i}|^q \, dx \tag{4.6}$$

для произвольного $q \geqslant 1$. Для произвольного шара Q_j из покрытия $\{Q_l\}$ найдется компактно вложенная область Джона $\Omega \Subset D$ ($\Omega \in J(\alpha,\beta)$) такая, что $Q_j \subset \Omega$ и $Q_0 \subset \Omega$ (лемма 3). Далее, воспользовавшись неравенством Пуанкаре (2.8), получим

$$\left(\int_\Omega |g|^{p^*}\,dx\right)^{1/p^*} \leqslant C_3(\operatorname{diam}(\Omega))^{n/p^*}\left(\int_\Omega |\nabla g|^p\,dx\right)^{1/p}, \tag{4.7}$$

где $q = p^* = pn/(n-p)$ и $g \in L^1_p(D)$ – произвольная функция, равная нулю на множестве $T \subset Q_0 \subset \Omega$ положительной меры, а постоянная C_3 имеет следующий вид:

$$C_3 = \frac{C}{|T|^{1/p^*}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n.$$

Подставим в неравенство (4.7) функцию $g = \varphi^* f_{B_i}$ и применим оценки (4.5) и (4.6). Приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned}|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))\cap Q_j|^{1/p-1/n} &\leqslant \left(\int_\Omega |\varphi^* f_{B_i}|^{p^*}\,dx\right)^{1/p^*}\\ &\leqslant C_3(\operatorname{diam}(\Omega))^{n/p^*}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi^* f_{B_i}|^p\,dx\right)^{1/p}\\ &\leqslant C_3(\operatorname{diam}(\Omega))^{n/p^*}C_2\|\varphi^*\|\cdot|B_i|^{1/p-1/n},\end{aligned}$$

откуда получаем

$$|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))\cap Q_j| \leqslant C_4|B(y_i,2r_i)|.$$

Так как $\{B(y_i,r_i)\}$, $\{B(y_i,2r_i)\}$ образуют конечнократные покрытия V и объединение множеств $\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))\cap Q_j$ по индексу i покрывает $\varphi^{-1}(E\cap Q'_k)\cap Q_j$, можно заключить, что

$$\begin{aligned}|\varphi^{-1}(E\cap Q'_k)\cap Q_j| &\leqslant \sum_i |\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))\cap Q_j|\\ &\leqslant C_4\sum_i |B(y_i,2r_i)| \leqslant C_4\zeta_n|V| = C_4\zeta_n\varepsilon,\end{aligned}$$

где постоянная ζ_n – кратность покрытия. Поскольку ε произвольно мало, получаем $|\varphi^{-1}(E\cap Q'_k)\cap Q_j| = 0$ для произвольного шара Q_j из счетного набора $\{Q_l\}$. Следовательно, $|\varphi^{-1}(E\cap Q'_k)| = 0$. Так как k – произвольный номер, то и $|\varphi^{-1}(E)| = 0$.

Если $E \subset D' \setminus U$ – множество нулевой меры такое, что $\operatorname{dist}(E,U) = 0$, то его можно представить в виде $E = \bigcup E_k$, где $E_k = \{y \in E\colon \operatorname{dist}(y,U) \geqslant 1/k\}$. Тогда $\varphi^{-1}(E) \subset \bigcup \varphi^{-1}(E_k)$. Так как $|\varphi^{-1}(E_k)| = 0$, то и $|\varphi^{-1}(E)| = 0$.

Таким образом, для всех множеств $E \subset D'\setminus U$ нулевой меры прообраз $\varphi^{-1}(E)$ имеет нулевую меру. Другими словами, если $|E| = 0$, то $|\varphi^{-1}(E\setminus\overline{U})| = 0$.

Пусть теперь U_1 – другое открытое множество, находящееся на положительном расстоянии от U. Любое множество $E \subset D'$ может быть представлено в виде $E = (E\setminus U)\cup(E\setminus U_1)$. Тогда если множество E имеет нулевую меру, то $|\varphi^{-1}(E \setminus U)| = 0$ и $|\varphi^{-1}(E \setminus U_1)| = 0$ и, следовательно, $|\varphi^{-1}(E)| \leqslant |\varphi^{-1}(E \setminus U)| + |\varphi^{-1}(E \setminus U_1)| = 0$.

Случай $p = n$. Фиксируем произвольный шар $Q_l \Subset D$, тогда если $g \in L^1_n(D)$, то $g \in L^1_p(B_1)$, где $p \in [1, n)$ – произвольное число. Рассмотрим ограниченный оператор $\varphi^*_l \colon L^1_n(D') \to L^1_p(Q_l)$, определенный по правилу $\varphi^*_l f = \varphi^* f|_{Q_l}$.

Пусть $E \subset Q'_k$ – множество нулевой меры и V, $Q'_k \supset V \supset E$, – открытое множество меры $\varepsilon > 0$, где Q'_k и V выбираются таким же образом, как при $p < n$, с тем отличием, что малость окрестности Q'_k гарантирует билипшицеву эквивалентность римановой метрики и евклидовой метрики, рассматриваемой на координатной окрестности, содержащей Q'_k. Выберем совокупность евклидовых шаров $\{B^E_i = B^E(x_i, r_i) \subset V\}$ такую, что оба набора $\{B^E_i\}$ и $\{2B^E_i\}$ образуют конечнократные покрытия множества V. В этом случае вместо функции вида (4.2) удобнее рассматривать функции

$$f_{B^E_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B^E_i\Big(y, \dfrac{5}{4}r\Big), \\ 0, & \text{если } x \notin B^E_i\Big(y, \dfrac{7}{4}r\Big), \\ 1 - \dfrac{2}{r}\operatorname{dist}\Big(x, B^E_i\Big(y, \dfrac{5}{4}r\Big)\Big), & \text{если } x \in B^E_i\Big(y, \dfrac{7}{4}r\Big) \setminus B^E_i\Big(y, \dfrac{5}{4}r\Big). \end{cases}$$

Для полунормы этой функции выполнена следующая оценка (см. замечание 3):

$$\|f_{B^E_i} \mid L^1_p(D')\| \leqslant C_5 r^{-1} |2B^E_i|^{1/n} \leqslant C_6,$$

где постоянная C_6 не зависит от выбора шара $\{B^E_i\} \subset V$.

В этом случае неравенство (4.5) принимает вид

$$\|\varphi^*_B f_{B^E_i} \mid L^1_p(Q_l)\| \leqslant C_6 \Phi(2B^E_i)^{1/\varkappa},$$

где функция Φ и число $\varkappa$ такие, как в предложении 6.

По аналогии с рассуждениями для случая $p < n$, используя лемму 6, для любого фиксированного шара Q_l получаем

$$|\varphi^{-1}(E \cap Q'_k) \cap Q_l| \leqslant \sum_i |\varphi^{-1}(B^E_i) \cap Q_l| \leqslant C_6 \sum_i \Phi(2B^E_i) \leqslant C_6 \zeta_n \Phi(V).$$

В силу абсолютной непрерывности функции Φ (следствие 2) получаем, что для любого множества нулевой меры $E \in D'$ справедливо $|Q_l \cap \varphi^{-1}(E)| = 0$. В силу произвольности шара Q_l получаем требуемое.

Таким образом, прообраз любого множества нулевой меры также является множеством меры нуль, т.е. отображение $\varphi \colon D \to D'$ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Лемма 9 полностью доказана.

Лемма 10. *Пусть* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ *– римановы многообразия топологической размерности* $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ *– области на римановых многообразиях* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ *соответственно, а отображение* $\varphi \colon D \to D'$ *принадлежит* IL^1_p, $p \leqslant n$.

Тогда для любой функции $f \in L^1_p(D')$:

1) $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$;

2) $K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant \|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leqslant K\|f \mid L^1_p(D')\|$.

Доказательство. Пусть $f \in L^1_p(D')$ и $\{f_n\}$ – последовательность функций из $L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ такая, что $\|f - f_n \mid L^1_p(D')\| \to 0$ и $f_n \to f$ п.в. на D' (см. замечание 4). Поскольку оператор (1.1) является мономорфизмом (см. замечание 1), то отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина (лемма 9). Следовательно, функция $f \circ \varphi$ определена п.в. на D и

$$f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi \quad \text{п.в. на} \ \ D.$$

Далее, из леммы 7 получаем требуемые утверждения 1) и 2).

Лемма 11. *Пусть* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ *– римановы многообразия топологической размерности* $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ *– области на римановых многообразиях* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ *соответственно, а отображение* $\varphi\colon D \to D'$ *принадлежит* IL^1_p, $p \in [1,\infty)$. *Тогда оператор* $\varphi^*\colon L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D)$ *продолжается по непрерывности до оператора* $\widetilde{\varphi^*}\colon L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *и обладает следующими свойствами*:

1) *значение оператора* $\widetilde{\varphi^*}\colon L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *на классах* $[f] \in L^1_p(D')$ *можно найти по формуле*

$$\widetilde{\varphi^*}([f]) = \begin{cases} f \circ \varphi & \text{при } p \leqslant n, \text{ где } f \text{ – произвольный представитель класса } [f], \\ \widetilde{f} \circ \varphi & \text{при } p > n, \text{ где } \widetilde{f} \text{ – непрерывный представитель класса } [f]; \end{cases}$$

2) $K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leqslant \big\|\widetilde{\varphi^*}(f) \mid L^1_p(D)\big\| \leqslant K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|$;

3) $\widetilde{\varphi^*}\colon L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *– изоморфизм.*

Доказательство. Поскольку $L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ плотно в $L^1_p(D')$, то оператор $\varphi^*\colon L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D)$ можно продолжить по непрерывности на $L^1_p(D')$: пусть $f \in L^1_p(D')$, выбираем последовательность $f_n \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ такую, что $f_n \to f$ в $L^1_p(D')$. Тогда последовательность $\varphi^* f_n$ будет сходиться в пространстве $L^1_p(D)$. С другой стороны, можно считать, что эта же последовательность сходится поточечно п.в. Тогда на основании леммы 7 естественно положить $\lim_{n\to\infty} \varphi^* f_n = f \circ \varphi$, поскольку композиция $f \circ \varphi$ определена п.в. при $p \leqslant n$ (при $p > n$ следует рассматривать непрерывный представитель $\widetilde{f} \in L^1_p(D')$).

Из лемм 8 и 10 для любой функции $f \in L^1_p(D')$ имеем $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ при $p \leqslant n$ и $\widetilde{f} \circ \varphi \in L^1_p(D)$ при $p > n$, откуда получаем утверждения 1), 2). Из двусторонней оценки 2) и плотности образа $\varphi^*(L^1_p(D') \cap C^\infty(D'))$ в $L^1_p(D)$ выводим изоморфность оператора $\widetilde{\varphi^*}$.

Лемма доказана.

Далее предполагаем, что оператор φ^* определен на $L^1_p(D')$.

Замечание 8. В лемме 11 мы определили оператор

$$\varphi^*\colon L^1_p(D') \to L^1_p(D), \tag{4.8}$$

действующий на классах эквивалентностей соболевских функций из $L^1_p(D')$ по описанному правилу. В отличие от (1.1) оператор (4.8) определен на классах функций. Этот оператор является изоморфизмом классов Соболева $L^1_p(D')$ и $L^1_p(D)$.

§ 5. Основные теоремы

Приведенное ниже определение квазиизометрического гомеоморфизма эквивалентно определению 2. Напомним (см. определение 6), что гомеоморфизм $\Phi\colon D \to D'$, где $D, D' \subset \mathbb{M}$, класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D,\mathbb{M})$ называется *квазиизометрией*, если

$$|D\Phi(x)| \leqslant M, \qquad 0 < \alpha \leqslant |\det D\Phi(x)| \tag{5.1}$$

для почти всех $x \in D$, где постоянные M и α не зависят от x.

Используя неравенство Адамара $|\det D\Phi(x)| \leqslant |D\Phi(x)|^n$, из условия (5.1) выводим неравенство

$$L^{-1} \leqslant |D\Phi(x)| \leqslant L,$$

где постоянная L такая, что $L^{-1} \leqslant \alpha^{1/n}$ и $L \geqslant M$.

Отметим еще, что определение 6 эквивалентно следующему определению, сформулированному в работе [38].

Определение 12. Пусть U – открытое множество на дифференцируемом многообразии $\mathbb{M}$, и пусть $\Phi\colon U \to \mathbb{M}$ – гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{M})$. Отображение Φ является *квазиизометрией*, если якобиан $J(x,\Phi)$ сохраняет знак на U и $L^{-1}|\xi| \leqslant |D\Phi(x)\xi| \leqslant L|\xi|$ для всех $\xi \in T_x\mathbb{M}$ и для почти всех $x \in U$, где $L \geqslant 1$ – постоянная.

Следующая лемма устанавливает связь между квазиизометриями и локально билипшицевыми отображениями (см. определение 5).

Лемма 12 (см. [38; лемма 1]). *Гомеоморфизм $\Phi\colon D \to D'$ является квазиизометрией тогда и только тогда, когда отображение Φ локально билипшицево с одной и той же постоянной билипшицевости.*

Лемма 13. *Пусть $D, D' \subset \mathbb{M}$ – открытые множества и $|D| < \infty$, $\varphi\colon D \to D'$ – измеримое отображение, определенное п.в. в D. Тогда найдется возрастающая последовательность компактов $\{T_k\} \subset \operatorname{Dom}\varphi \subset D$ такая, что φ непрерывно на каждом T_k и $|D \setminus \bigcup_k T_k| = 0$.*

Доказательство. По теореме Лузина найдется такое компактное множество $P_1 \subset \operatorname{Dom}\varphi$, что отображение φ будет непрерывным на P_1 и $|\operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1| < 1$. Аналогично, найдется компактное множество $P_2 \subset \operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1$ такое, что отображение φ непрерывно на P_2 и $|(\operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1) \setminus P_2| < 1/2$, и так далее. Таким образом, получаем последовательность множеств $\{P_i\}$. Обозначим $T_k = \bigcup_1^k P_i$, тогда $T_k \subset T_{k+1} \subset \operatorname{Dom}\varphi$. Отображение φ непрерывно на каждом T_k, поскольку T_k представляет собой конечное объединение компактных попарно не пересекающихся множеств $P_1, \dots, P_k$, на каждом из которых отображение φ

непрерывно. Кроме того, $|D \setminus T_k| = |\operatorname{Dom}\varphi \setminus T_k| < 1/k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $|D \setminus \bigcup_k T_k| = 0$.

Лемма доказана.

Таким образом, областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_1 \varphi = \bigcup_k T_k.$$

Замечание 9. Можно выбрать множества $\widetilde{T}_k \subset T_k$ (где T_k – множества из леммы 13), состоящие только из точек ненулевой плотности. Отображение φ непрерывно на каждом $\widetilde{T}_k$ и $|D \setminus \bigcup_k \widetilde{T}_k| = 0$. Более того, $\widetilde{T}_k \subset T_k$ можно выбрать так, что будет выполняться включение $\widetilde{T}_k \subset \widetilde{T}_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Действительно, положим $\widetilde{T}_1 = \widetilde{P}_1$. Так как $T_{k+1} = T_k + P_{k+1}$, то $\widetilde{T}_k$ определяем по индукции: если $\widetilde{T}_k$ выбрано, то $\widetilde{T}_{k+1} = \widetilde{T}_k + \widetilde{P}_k$. (Здесь $\widetilde{P}_k \subset P_k$ – множество точек ненулевой плотности из множества P_k, $k \in \mathbb{N}$.)

Следовательно, элементы $\widetilde{T}_k$ – это точки ненулевой плотности из множества T_k. Тогда $|T_k \setminus \widetilde{T}_k| = 0$, $\widetilde{T}_{k+1} \supset \widetilde{T}_k$ и $|D \setminus \bigcup_k \widetilde{T}_k| = 0$.

Замечание 10. Лемма 13 и замечание 9 верны также и в том случае, когда область D не ограничена.

Действительно, область D можно представить в виде счетного объединения непересекающихся множеств: $D = \bigcup_i D_i$, например, $D_1 = D \cap B(x_0, 1)$, $D_2 = (D \cap B(x_0, 2)) \setminus \overline{D}_1$ и т.д., где $x_0 \in D$ – фиксированная точка. По лемме 13 для каждого множества D_i имеем возрастающую (по индексу k) последовательность компактов $T_k^i \subset \operatorname{Dom}\varphi$ такую, что $|D_i \setminus \bigcup_k T_k^i| = 0$. Полагая $T_1 = T_1^1$, $T_2 = T_2^1 \cup T_2^2$, $T_3 = T_3^1 \cup T_3^2 \cup T_3^3$ и т.д., мы получаем возрастающую последовательность компактов $T_k \subset \operatorname{Dom}\varphi$. В частности, $|D^i \setminus \bigcup_k T_k| = 0$ (поскольку $\bigcup_k T_k^i \subset \bigcup_k T_k$). Тогда имеем $D \setminus \bigcup_k T_k = \bigcup_i \bigl(D^i \setminus \bigcup_k T_k\bigr)$. Следовательно, $|D \setminus \bigcup_k T_k| = 0$ как счетное объединение множеств нулевой меры.

Для каждого i так же, как и в замечании 9, можно построить $\widetilde{T}_k^i$, $k \in \mathbb{N}$. Теперь полагаем $\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_1^1$, $\widetilde{T}_2 = \widetilde{T}_2^1 \cup \widetilde{T}_2^2$, $\widetilde{T}_3 = \widetilde{T}_3^1 \cup \widetilde{T}_3^2 \cup \widetilde{T}_3^3$ и далее по индукции: если $\widetilde{T}_k$ построено, то $\widetilde{T}_{k+1} = \widetilde{T}_{k+1}^1 \cup \widetilde{T}_{k+1}^2 \cup \dots \cup \widetilde{T}_{k+1}^{k+1}$.

Далее нам понадобятся следующее очевидные свойства непрерывных функций.

Предложение 7. 1) *Пусть f, g – непрерывные функции на множестве T, состоящем из точек положительной плотности. Если $f = g$ п.в. на T, то $f = g$ всюду на T.*

2) *Непрерывная функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ определяется однозначно своими значениями на плотном в D множестве T.*

5.1. Случай $p > n$.

Лемма 14. *Пусть $p > n$ и $\varphi\colon D \to D'$ – измеримое отображение (здесь D, D' – области в $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ соответственно). Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *отображение* φ *непрерывно на некотором множестве* $T \subset D$ *и все точки множества* T *являются точками положительной плотности в* $\mathbb{M}$;

2) *для любой липшицевой функции* f *с компактным носителем в* $\mathbb{M}'$ *верно* $f \circ \varphi \in L_p^1(D)$ *и*

$$\|f \circ \varphi \mid L_p^1(D)\| \leqslant C\|f \mid L_p^1(D')\|.$$

Тогда для любых двух точек $x_0, x_1 \in T$, $x_0 \neq x_1$, *таких, что* $B(x_1, d(x_0, x_1)) \Subset D$, *справедливо неравенство*

$$d'(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leqslant cd(x_0, x_1). \tag{5.2}$$

Если вместо условия 2) *выполнено условие*

2$'$) *для любой липшицевой функции* g *с компактным носителем в* D *существует функция* $f \in L_p^1(D')$ *такая, что* $g = f \circ \varphi$ *и*

$$\|f \mid L_p^1(D')\| \leqslant C'\|f \circ \varphi \mid L_p^1(D)\|,$$

то для любых двух точек $x_0, x_1 \in T$ *таких, что* $B(\varphi(x_1), d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \Subset D'$ *и* $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$, *выполняется неравенство*

$$d(x_0, x_1) \leqslant c'd'(\varphi(x_0), \varphi(x_1)). \tag{5.3}$$

Здесь постоянные c *и* c' *зависят только от* n, p, C *и* C', *а также от шаров* $B(x_1, d(x_0, x_1)) \Subset D$ *и* $B(\varphi(x_1), d'(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \Subset D'$.

Доказательство. Пусть $x_0, x_1 \in T \cap D$ – это такие точки, что $B(x_1, d(x_0, x_1)) \Subset D$. Если $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$, то неравенство (5.2) очевидно.

Пусть $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ и выполнены условия 1) и 2). Рассмотрим функцию

$$D' \ni y \mapsto f(y) = \left(1 - \frac{d'(y, \varphi(x_1))}{d'(\varphi(x_0), \varphi(x_1))}\right)^+, \tag{5.4}$$

где $(\,\cdot\,)^+$ – положительная часть числа. Заметим, что $f(\varphi(x_0)) = 0$, $f(\varphi(x_1)) = 1$. В силу леммы 1 справедливы оценки

$$\|f \mid L_p^1(D')\| \leqslant \|f \mid L_p^1(\mathbb{M}')\| \leqslant \frac{\varkappa}{d'(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-n/p}}, \tag{5.5}$$

где постоянная $\varkappa$ зависит от геометрии шара $B(\varphi(x_1), d'(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \Subset D'$.

Носитель функции f содержится в шаре $B(\varphi(x_1), d'(\varphi(x_1), \varphi(x_0)))$. Пусть g – непрерывный представитель композиции $f \circ \varphi$. По лемме 11 непрерывная функция g совпадает с $f \circ \varphi$ п.в. на D. Однако на множестве T, состоящем из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно. Поэтому $g|_T(x) = f \circ \varphi|_T(x)$ для всех $x \in T$. Следовательно, имеем $g(x_0) = 0$ и $g(x_1) = 1$. По лемме 5 для любой непрерывной функции $g \in L_p^1(D)$ такой, что $g(x_0) = 0$ и $g(x_1) = 1$, где $B(x_1, d(x_0, x_1)) \Subset D$, справедлива оценка

$$\frac{1}{d(x_0, x_1)^{1-n/p}} \leqslant K\|g \mid L_p^1(D)\|. \tag{5.6}$$

Возвращаясь к тому, что $g = f\circ\varphi$, где f определена в (5.4), с учетом соотношений (5.6), (5.5) и $\|g \mid L^1_p(D)\| \leqslant C\|f \mid L^1_p(D')\|$ имеем

$$\frac{1}{d(x_0,x_1)^{1-n/p}} \leqslant K\|g \mid L^1_p(D)\| \leqslant KC\cdot\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant \frac{KC\varkappa}{d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1))^{1-n/p}}.$$

Отсюда выводим

$$d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1)) \leqslant cd(x_0,x_1);$$

здесь постоянная c зависит только от n, p, C и от геометрии шара $B(x_1, d(x_0,x_1)) \Subset D$.

Пусть выполнены условия 1) и 2′). Рассмотрим функцию

$$D \ni x \mapsto g(x) = \left(1 - \frac{d(x,x_1)}{d(x_0,x_1)}\right)^+.$$

Снова отметим, что $g(x_0) = 0$, $g(x_1) = 1$ и справедлива оценка (лемма 1)

$$\|g \mid L^1_p(D)\| \leqslant \frac{\varkappa}{d(x_0,x_1)^{1-n/p}}, \tag{5.7}$$

где $\varkappa$ зависит от геометрии шара $B(x_1, d(x_0,x_1)) \Subset D$.

Пусть функция $f \in L^1_p(D')$ такова, что $g = f\circ\varphi$ (можно считать, что f непрерывна). Поскольку отображение φ непрерывно на T, имеем $f\circ\varphi|_T(x) = g|_T(x)$ для всех $x \in T$ (предложение 7). Тогда $f(\varphi(x_0)) = 0$, $f(\varphi(x_1)) = 1$ и в силу леммы 5 получаем

$$\frac{1}{d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1))^{1-n/p}} \leqslant K'\|f \mid L^1_p(D')\| \tag{5.8}$$

при условии $B(\varphi(x_1), d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1))) \Subset D'$ и $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$. Используя соотношения $\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant C'\cdot\|g \mid L^1_p(D)\|$, (5.7) и (5.8), получаем

$$\frac{1}{d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1))^{1-n/p}} \leqslant K'\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant K'C'\cdot\|g \mid L^1_p(D)\| \leqslant \frac{K'C'\varkappa}{d(x_0,x_1)^{1-n/p}}.$$

Отсюда следует

$$d(x_0,x_1) \leqslant c'd(\varphi(x_0),\varphi(x_1)),$$

где постоянная c' зависит только от n, p, C' и от шаров $B(x_1, d(x_0,x_1)) \Subset D$ и $B(\varphi(x_1), d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1))) \Subset D'$. Последнее неравенство совпадает с (5.3).

Лемма 14 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ *– два римановых многообразия одной и той же топологической размерности*, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ *– области в* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ *соответственно, а* $\varphi\colon D \to D'$ *– измеримое отображение класса* IL^1_p, $p \in (n,\infty)$. *Тогда отображение* φ *совпадает п.в. с некоторой квазиизометрией.*

Доказательство. *Шаг* 1. Мы докажем, что данное отображение $\varphi\colon D \to D'$ можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы получилось непрерывное локально липшицево отображение $\varphi\colon D \to \mathbb{M}$. Более того, на открытом множестве $\Omega = \varphi^{-1}(D')$ отображение $\varphi\colon \Omega \to D'$ будет инъективным.

По лемме 13 с учетом замечаний 9 и 10 найдется возрастающая последовательность множеств $\{\widetilde{T}_k\} \subset D$ такая, что отображение φ непрерывно на каждом $\widetilde{T}_k$ и $|D \setminus \bigcup_k \widetilde{T}_k| = 0$, где $\widetilde{T}_k$ состоит только из точек ненулевой плотности $k \in \mathbb{N}$. Тогда областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_2 \varphi = \bigcup_k \widetilde{T}_k.$$

Пусть $x_0, x_1 \in \operatorname{Dom}_2 \varphi$ – две различные точки. Найдется номер k такой, что $x_0, x_1 \in \widetilde{T}_k$. Поскольку $\varphi^* \colon L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ является ограниченным оператором, то для любой липшицевой функции $f \in L^1_p(D')$ с компактным носителем верно $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ и

$$\|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leqslant C \|f \mid L^1_p(D')\|.$$

Таким образом, выполнены условия леммы 14 с множеством $\widetilde{T}_k$ вместо T. Следовательно,

$$d'(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leqslant c d(x_0, x_1) \tag{5.9}$$

при условии, что

$$B(x_0, d(x_0, x_1)) \Subset D, \qquad x_0, x_1 \in \widetilde{T}_k. \tag{5.10}$$

Так как выбор точек $x_0, x_1 \in \operatorname{Dom}_2 \varphi$ произволен, то условие липшицевости (5.9) выполняется для всех точек $x_0, x_1 \in \operatorname{Dom}_2 \varphi$, удовлетворяющих условию (5.10). Вспомним теперь, что множество $\operatorname{Dom}_2 \varphi$ всюду плотно в D, а по условию (5.9) отображение φ равномерно непрерывно на каждой компактной части A пересечения $\operatorname{Dom}_2 \varphi \cap D$, не приближающейся к границе ∂D: $\operatorname{dist}(A, \partial D) \geqslant \alpha > 0$. (Здесь замыкание $\bar{A}$ компактно и содержится в D.) Поэтому отображение φ можно продолжить по непрерывности на A, а так как выбор A произволен, то отображение φ продолжается по непрерывности на всю область D. Продолженное отображение $\varphi \colon D \to \mathbb{M}$ будем обозначать тем же символом. Более того, для всех точек x_0, x_1 таких, что

$$B(x_0, d(x_0, x_1)) \Subset D,$$

будет выполняться неравенство (5.9). Следовательно, отображение $\varphi \colon D \to \mathbb{M}$ локально липшицево.

Прообраз $\varphi^{-1}(D') \subset D$ открыт. Введем обозначение $\Omega = \varphi^{-1}(D')$. Заметим, что $\varphi(D \setminus \Omega) \subset \partial D'$.

Пусть $g \in L^1_p(D)$ – произвольная непрерывная функция. В силу леммы 8 найдется непрерывная функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = \varphi^* f$ и $g(x) = f \circ \varphi(x)$ для почти всех $x \in D$. Так как отображение φ непрерывно на Ω, то $f \circ \varphi$ тоже непрерывно на Ω и, следовательно, имеем поточечное совпадение

$$g|_\Omega(x) = f \circ \varphi|_\Omega(x)$$

для всех $x \in \Omega$.

Покажем, что φ инъективно на Ω. Пусть, напротив, для двух различных точек $x_0, x_1 \in \Omega$ имеем $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$. Рассмотрим непрерывную функцию

$g \in L^1_p(D)$ такую, что $g(x_0) \neq g(x_1)$ (очевидно, что такая функция найдется, так как точки x_0 и x_1 находятся на положительном расстоянии друг от друга). В силу установленного выше найдется непрерывная функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g(x) = f \circ \varphi(x)$ для всех $x \in \Omega$. Отсюда получаем $g(x_0) = f(\varphi(x_0)) = f(\varphi(x_1)) = g(x_1)$, т.е. $g(x_0) = g(x_1)$, что противоречит выбору функции g. Итак, $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ для любых различных точек $x_0, x_1 \in \Omega$. Следовательно, на открытом множестве Ω отображение φ инъективно.

Шаг 2. Докажем, что $\varphi(\Omega)$ – открытое множество, а отображение $\varphi\colon \Omega \to \varphi(\Omega)$ локально билипшицево в смысле определения 5.

Фиксируем точку $x_0 \in \Omega$. Докажем прежде всего, что для любого $r > 0$ такого, что $B(x_0, r) \Subset \Omega$, существует $\rho(r) \in (0, r)$ такое, что для любой точки $x \in \Omega \setminus B(x_0, r)$ имеем $\varphi(x) \notin B(\varphi(x_0), \rho(r))$. Пусть, напротив, существует положительное число r такое, что $B(x_0, r) \Subset \Omega$, и для любой последовательности $\rho_n \in (0, r)$ такой, что $\rho_n \to 0$, найдется точка $x_n \in \Omega \setminus B(x_0, r)$ такая, что $\varphi(x_n) \in B(\varphi(x_0), \rho_n)$. Можно при этом считать, что $B(\varphi(x_0), d'(\varphi(x_0), \varphi(x_n))) \Subset D'$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим функцию

$$D \ni x \mapsto g(x) = \left(1 - \frac{d(x, x_0)}{r}\right)^{+}.$$

Отметим, что $g(x_0) = 1$, $g(x) = 0$ для всех $x \notin B(x_0, r)$ и справедлива оценка (лемма 1)

$$\|g \mid L^1_p(D')\| \leqslant \frac{\varkappa}{r^{1-n/p}}.$$

Пусть функция $f \in L^1_p(D') \cap C(D')$ такова, что $g(x) = f \circ \varphi(x)$ для всех $x \in \Omega$. Тогда $f(\varphi(x_0)) = 1$, $f(\varphi(x_n)) = 0$ и в силу леммы 5 получаем

$$\frac{1}{d'(\varphi(x_0), \varphi(x_n))^{1-n/p}} \leqslant K' \|f \mid L^1_p(D')\|.$$

Используя соотношение $\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant C' \cdot \|g \mid L^1_p(D)\|$, из двух предыдущих неравенств выводим следующее неравенство:

$$\frac{1}{d'(\varphi(x_0), \varphi(x_n))^{1-n/p}} \leqslant K' \|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant K'C' \cdot \|g \mid L^1_p(D)\| \leqslant \frac{K'C'\varkappa}{r^{1-n/p}},$$

которое противоречит тому, что $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$ при $n \to \infty$.

Из доказанного вытекает, что для любой точки $x_0 \in \Omega$ и любого $r > 0$ такого, что $B(x_0, r) \Subset \Omega$, существует $\rho(r) \in (0, r)$ такое, что $\varphi^{-1}(B(\varphi(x_0), \rho(r))) \subset B(x_0, r)$. Всегда можно считать, что $B(\varphi(x_0), \rho(r))) \Subset D'$. Так как $\varphi\colon \Omega \to \varphi(\Omega)$ – инъективное отображение, имеем $B(\varphi(x_0), \rho(r)) \subset \varphi(B(x_0, r))$. Следовательно, $\varphi(x_0)$ – внутренняя точка образа $\varphi(B(x_0, r))$, и поэтому $\varphi(\Omega)$ – открытое множество, а $\varphi\colon \Omega \to \varphi(\Omega)$ – гомеоморфизм.

Далее на множестве Ω получим неравенство, обратное к (5.9).

Поскольку оператор $\varphi^*\colon L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ изоморфен, то для любой липшицевой функции g с компактным носителем в D существует функция $f \in L^1_p(D') \cap C(D')$ такая, что $g|_\Omega = f \circ \varphi|_\Omega$ поточечно и

$$\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant C' \|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\|.$$

Другими словами, выполнено условие $2'$) леммы 14. Значит,

$$d(x_0,x_1)\leqslant c'd'(\varphi(x_0),\varphi(x_1)) \tag{5.11}$$

при условии, что

$$B(\varphi(x_0),d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1)))\Subset D',\qquad x_0,x_1\in\Omega. \tag{5.12}$$

Из неравенств (5.9) и (5.11) получаем, что для точек $x_0,x_1\in\Omega$, удовлетворяющих одновременно условиям (5.10) и (5.12), выполнено неравенство

$$\frac{1}{c'}d(x_0,x_1)\leqslant d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1))\leqslant cd(x_0,x_1). \tag{5.13}$$

Заметим, что левая часть (5.13) справедлива при условии

$$d(x_0,x_1)<c^{-1}d'(\varphi(x_0),\partial D'),\quad \text{где}\ \ \varphi(x_0)\in D',$$

так как в этом случае $d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1))\leqslant cd(x_0,x_1)<d'(\varphi(x_0),\partial D')$, и поэтому

$$B(\varphi(x_0),d'(\varphi(x_0),\varphi(x_1)))\Subset D'.$$

Из неравенства (5.13) выводим, что отображение $\varphi\colon\Omega\to\varphi(\Omega)$ локально билипшицево в смысле определения 5.

Шаг 3. Докажем, что $|D\setminus\Omega|=0$, а липшицево отображение $\varphi\colon D\to\overline{D'}$ принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D,\mathbb{M}')$.

Действительно, рассмотрим произвольную непрерывную функцию $g\in L^1_p(D)$, равную 1 на некотором шаре $B(x,r)\subset D$, центр которого принадлежит дополнению $D\setminus\Omega$. Найдется непрерывная функция $f\in L^1_p(D')$ такая, что $g(x)=f\circ\varphi(x)$ для всех $x\in D$ за исключением некоторого множества $\Sigma\subset D$ нулевой меры. Заметим, что в точках $x\in D\setminus\Omega$ композиция $f\circ\varphi$ не определена, так как $\varphi(x)\in\partial D'$, а в точках $x\in\Omega$ равенство $g(x)=f\circ\varphi(x)$ выполняется поточечно. Следовательно, множество Σ содержит совокупность точек, для которых в принципе нельзя говорить о равенстве $g(x)=f\circ\varphi(x)$: таковой совокупностью является пересечение $B(x,r)\cap D\setminus\Omega$. Другими словами, предположение $|B(x,r)\cap D\setminus\Omega|>0$ противоречит определению оператора композиции. Следовательно, $|B(x,r)\cap D\setminus\Omega|=0$, а так как шар $B(x,r)\subset D$, $x\in D\setminus\Omega$, произволен, имеем $|D\setminus\Omega|=0$.

Отсюда и из локальной липшицевости отображения $\varphi\colon D\to\overline{D'}$ (локальной билипшицевости отображения $\varphi\colon\Omega\to\varphi(\Omega)$) получаем $\varphi\in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D,\mathbb{M}')$.

Кроме того, отображение $\varphi\colon D\to\overline{D'}$ обладает как $\mathscr{N}$-свойством Лузина, так и $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина (см. лемму 9).

Шаг 4. На этом шаге мы докажем следующее утверждение.

Лемма 15. *Пусть $D\subset\mathbb{M}$, $D'\subset\mathbb{M}'$ – области в римановых многообразиях одной и той же топологической размерности и отображение $\varphi\colon D\to D'$ принадлежит классу IL^1_p, $p\in(n,\infty)$. Если $u\in\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D')\cap L^1_p(D')$ и $\|u\mid L^1_p(D')\|\leqslant 1$, то*

$$|\nabla(u\circ\varphi)|(x)\leqslant K|J(x,\varphi)|^{1/p} \tag{5.14}$$

п.в. в D, где K – некоторая постоянная, не зависящая от x и u.

Здесь $J(x,\varphi)$ – определитель дифференциала (якобиан), существование которого доказано на предыдущем шаге.

Доказательство леммы 15. Фиксируем точку $y_0\in D'$ и шар $B(y_0,2r)\Subset D'$. Рассмотрим липшицеву функцию-срезку $\eta\in \operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(D')$ такую, что $\eta|_{B(0,r)}=1$, $\eta|_{\mathbb{M}'\setminus B(0,2r)}=0$ и $|\nabla\eta(y)|=1/r$ для почти всех $y\in B(0,2r)\setminus B(0,r)$.

Поскольку φ^* является ограниченным оператором, то, в частности, верно неравенство $\|\varphi^*(u-u(y_0))\mid L^1_p(D)\|\leqslant\|\varphi^*\|\cdot\|(u-u(y_0))\mid L^1_p(D')\|$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))}|\nabla(u\circ\varphi)|^p(x)\,d\omega &\leqslant \|\varphi^*\|^p\int\limits_{B(y_0,2r)}|\nabla((u-u(y_0))\eta)|^p\,d\nu\\ &\leqslant c_0\|\varphi^*\|^p\int\limits_{B(y_0,2r)}|\nabla u|^p\eta^p(y)\,d\nu + c_0\|\varphi^*\|^p\int\limits_{B(y_0,2r)}|\nabla\eta|^p|u-u(y_0)|^p\,d\nu\\ &\leqslant c_0\|\varphi^*\|^p(|B(y_0,2r)|+(c_1r^{-p}c_2r^p|B(y_0,2r)|))=C\|\varphi^*\|^p\cdot|B(y_0,2r)|.\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к оценке

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(0,r))}|\nabla(u\circ\varphi)|^p(x)\,d\omega\leqslant C\|\varphi^*\|^p\cdot|B(y_0,2r)|. \tag{5.15}$$

Используя предложение 2, соотношение (5.15) и $\mathscr{N}$-свойство Лузина отображения φ, получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))}|\nabla(u\circ\varphi)|^p(x)\,d\omega &= \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))}\frac{|\nabla(u\circ\varphi)|^p(x)|J(x,\varphi)|}{|J(x,\varphi)|}\,d\omega\\ &=\int\limits_{B(y_0,r)}\biggl(\frac{|\nabla(u\circ\varphi)|^p(x)}{|J(x,\varphi)|}\biggr)_{\varphi(x)=y}d\nu\leqslant C\|\varphi^*\|^p\cdot|B(y_0,2r)|,\end{aligned} \tag{5.16}$$

так как $J(x,\varphi)\neq 0$ п.в. в D. Дифференцируя (5.16), по теореме Лебега 3 получаем

$$\frac{|\nabla(u\circ\varphi)|^p(x)}{|J(x,\varphi)|}\bigg|_{\varphi(x)=y}\leqslant C\varkappa\|\varphi^*\|^p$$

для почти всех $y\in D'$, поскольку

$$\lim_{r\to 0}\frac{|B(y,2r)|}{|B(y,r)|}\leqslant\varkappa,$$

где $\varkappa$ не зависит от точки $y\in D'$. Отсюда получаем (5.14):

$$|\nabla(u\circ\varphi)|(x)\leqslant K|J(x,\varphi)|^{1/p}\quad\text{для почти всех}\ \ x\in D,$$

так как отображение φ инъективно вне множества $D\setminus\Omega$ нулевой меры и в силу леммы 9 обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина. Здесь $K=(C\varkappa)^{1/p}$ не зависит от точки $x\in D$ и функции u.

Подставляя в неравенство (5.14) липшицевы функции u такие, что $|\nabla u|(y)=1$, и учитывая соотношение $K|J(x,\varphi)|^{1/p}\geqslant|\nabla(u\circ\varphi)|(x)=|D\varphi^T(x)\nabla u(\varphi(x))|$, получаем оценку нормы оператора

$$|D\varphi|^p(x)\leqslant K_1|J(x,\varphi)|\quad\text{п.в. на}\ \ D. \tag{5.17}$$

Аналогично, для обратного отображения $\psi = \varphi^{-1}\colon \varphi(\Omega) \to D$ получаем

$$|D\psi|^p(y) \leqslant K_2|J(y,\psi)| \quad \text{п.в. на} \ \ \varphi(\Omega). \tag{5.18}$$

Из неравенства (5.18) при $p \in (n,\infty)$ получаем

$$K_2 \geqslant \frac{|D\psi(y)|^p}{|J(y,\psi)|} = \left(\frac{|D\psi(y)|^n}{|J(y,\psi)|}\right)^{p/n} \frac{1}{|J(y,\psi)|^{1-p/n}} \geqslant |J(y,\psi)|^{p/n-1}. \tag{5.19}$$

Следовательно, $|J(y,\psi)| \leqslant \alpha^{-1}$ и, значит, $\alpha \leqslant |J(x,\varphi)|$ для почти всех $x \in D$. Проводя аналогичные рассуждения, из неравенства (5.17) при $p \in (n,\infty)$ получаем $|J(x,\varphi)| \leqslant \alpha_1$ и, следовательно, $|D\varphi|(x) \leqslant M$.

Окончательно имеем

$$|D\varphi|(x) \leqslant M, \qquad 0 < \alpha \leqslant |J(x,\varphi)| \tag{5.20}$$

для почти всех $x \in D$.

Более того, из последних неравенств для любого $q \in (n-1,n)$ получаем

$$|D\varphi|^q(x) \leqslant K_3|J(x,\varphi)| \quad \text{для почти всех} \ \ x \in D. \tag{5.21}$$

Лемма 15 доказана.

Шаг 5. На предыдущих этапах мы построили непрерывное отображение $\varphi\colon D \to \overline{D'}$, которое квазиизометрично по определению 6 на открытом множестве $\Omega \subset D$ таком, что $|D \setminus \Omega| = 0$. На этом шаге мы докажем, что отображение $\varphi\colon D \to \overline{D'}$ открыто, инъективно и квазиизометрично.

Докажем открытость отображения $\varphi\colon D \to \overline{D'}$. Фиксируем точку $x \in D \setminus \Omega$ и полагаем $z = \varphi(x)$. Из (5.20) и (5.21) вытекает (см. детали ниже – в доказательстве леммы 23), что отображение $\varphi\colon D \to \mathbb{M}'$ принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ и индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*\colon W^1_q(\mathbb{M}') \to W^1_q(D)$. Отсюда получаем, что прообраз $\varphi^{-1}(z)$ имеет $(1,q)$-емкость нуль и, следовательно, $\mathscr{H}^1$-меру Хаусдорфа нуль (см. детали в [35], [16], [39]). Отсюда стандартным образом (см. [39]) выводим, что для некоторого шара $B(x,r) \Subset D$ имеем $\varphi(x) \notin \varphi(S(x,r))$.

Пусть $\varphi(x)$ принадлежит некоторой компоненте дополнения $\mathbb{M}' \setminus \varphi(S(x,r))$. Тогда найдутся точки $y \in B(x,r) \cap \Omega$, для которых образ $\varphi(y)$ принадлежит той же компоненте связности и φ дифференцируемо в точках y, причем дифференциал не вырожден. Более того, прообраз точки $\varphi(y)$ единствен. Тогда степень отображения φ в точке $\varphi(y)$ не равна нулю. Отсюда получаем, что образ $\varphi(B(x,r))$ – окрестность точки $\varphi(x)$. Таким образом, φ – открытое отображение.

Из открытости отображения $\varphi\colon D \to \mathbb{M}'$ выводим его инъективность. Действительно, если $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ для точек $x_1 \in S = D \setminus \Omega$ и $x_2 \in D$, то пересечение образов $\varphi(B(x_1,\rho))$ и $\varphi(B(x_2,\rho))$ непересекающихся шаров $B(x_1,\rho)$, $B(x_2,\rho) \subset D$ открыто, а образ $\varphi(S)$ имеет меру нуль. Поэтому найдутся точки $y_1 \in B(x_1,\rho) \cap \Omega$ и $y_2 \in B(x_2,\rho) \cap \Omega$ такие, что $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$. Последнее противоречит инъективности отображения φ на множестве Ω. Следовательно, $\varphi(D)$ – открытое множество, а отображение $\varphi\colon D \to \varphi(D)$ – гомеоморфизм.

Более того, в соответствии с определением 6 отображение $\varphi\colon D \to \varphi(D)$ – квазиизометрический гомеоморфизм.

Теорема 4 полностью доказана.

5.2. Случай $p \leqslant n$.

Лемма 16. *Пусть* $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ *– римановы многообразия топологической размерности* $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ *– области в* $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ *соответственно, а отображение* $\varphi\colon D \to D'$ *принадлежит классу* IL^1_p, $p \in [1, n]$. *Тогда из области определения отображения* φ *можно удалить множество нулевой меры так, чтобы на новой области определения* $\operatorname{Dom}_3 \varphi$ *выполнялось следующее свойство: для любых двух шаров* $B_1, B_2 \subset D$ *таких, что* $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \varnothing$, *пересечение образов имеет нулевую меру, т.е.*

$$|\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi)| = 0.$$

Доказательство. Разобьем доказательство леммы на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть $\{z_l\}$ – счетное всюду плотное множество в $\operatorname{Dom}\varphi$, $l \in \mathbb{N}$, и $\{\overline{B}_{ml} = \overline{B}(z_l, 1/m)\} \Subset D$ – набор замкнутых шаров (здесь $m \in \mathbb{N}$). Возьмем два произвольных непересекающихся шара $\overline{B}_{ml}$ и $\overline{B}_{ks}$ из этого набора и локально липшицеву функцию $f \in L^1_p(D)$, удовлетворяющую условиям

$$f_{mlks}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \overline{B}_{ml}, \\ 1, & \text{если } x \in \overline{B}_{ks}. \end{cases} \tag{5.22}$$

По лемме 11 найдется функция $g_{mlks} \in L^1_p(D')$ такая, что равенство $\varphi^* g_{mlks}(x) = f_{mlks}(x)$ справедливо всюду в D за исключением некоторого множества Σ_{mlks} нулевой меры. Объединение $\Sigma = \bigcup \Sigma_{mlks}$ по всем возможным индексам m, l, k и s имеет нулевую меру. Удалим Σ из области определения отображения φ. Суженную таким образом область определения обозначим символом $\operatorname{Dom}_0 \varphi$. Заметим, что равенство $\varphi^* g_{mlks}(x) = f_{mlks}(x)$ справедливо для всех точек $x \in \operatorname{Dom}_0 \varphi$, где m, l, k, s – все возможные индексы.

Шаг 2. По лемме 13 из $\operatorname{Dom}_0 \varphi$ – области определения отображения φ – можно удалить множество нулевой меры и получить суженную область $\operatorname{Dom}_1 \varphi \subset \operatorname{Dom}_0 \varphi \subset D$, обладающую следующими свойствами:

$$|D \setminus \operatorname{Dom}_1 \varphi| = 0, \qquad \operatorname{Dom}_1 \varphi = \bigcup_k T_k,$$

где T_k – возрастающая последовательность компактов из замечания 10.

Шаг 3. Обозначим пересечение $\overline{B}_{ml} \cap \operatorname{Dom}_1 \varphi$ символом F_{ml}. Заметим, что F_{ml} являются борелевскими множествами положительной меры. Рассмотрим всевозможные пары множеств $F_{m_i l_i}, F_{m_j l_j} \subset \operatorname{Dom}_1 \varphi$ (для краткости будем обозначать их F_i и F_j) такие, что:

a) замкнутые шары $\overline{B}_{m_i l_i}$ и $\overline{B}_{m_j l_j}$ не пересекаются;

b) $|\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j)| > 0$ (т.е. пересечение образов имеет положительную меру).

Заметим, что множества $\varphi(F_i)$ и $\varphi(F_j)$ борелевские, а потому измеримые.

Обозначим $E_{ij} = \varphi^{-1}(\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j))$. Рассмотрим два основных случая:

1) оба множества, $E_{ij} \cap F_i$ и $E_{ij} \cap F_j$, имеют положительную меру;

2) хотя бы одно из множеств, $E_{ij} \cap F_i$ или $E_{ij} \cap F_j$, имеет нулевую меру.

Покажем, что случай 1) противоречит свойствам, которыми обладает отображение φ. В силу включений $F_i \subset \overline{B}_{m_il_i}$ и $F_j \subset \overline{B}_{m_jl_j}$ имеем следующее (используемые ниже функции определены в (5.22)):

c) с одной стороны, $g_{m_il_im_jl_j}(y) = 0$ во всех точках $y \in \varphi(F_i)$, поскольку $g_{m_il_im_jl_j}(\varphi(x)) = f_{m_il_im_jl_j}(x)$ для всех $x \in F_i$, а $f_{m_il_im_jl_j}(x) = 0$, когда $x \in F_i$;

d) с другой стороны, $g_{m_il_im_jl_j}(y) = 1$ во всех точках $y \in \varphi(F_j)$, поскольку $g_{m_il_im_jl_j}(\varphi(x)) = f_{m_il_im_jl_j}(x)$ для всех $x \in F_j$, а $f_{m_il_im_jl_j}(x) = 1$, когда $x \in F_j$.

Таким образом, случай 1) невозможен, так как по условию пересечение $\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j)$ имеет положительную меру.

Поэтому для множеств $F_i, F_j \subset \operatorname{Dom}_1 \varphi$ или выполнено $|\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j)| = 0$, что противоречит b), или имеет место случай 2).

Перейдем к случаю 2). Обозначим $E_0 = \bigcup (E_{ij} \cap F_j)$, где объединение ведется по индексам i, j, для которых $|E_{ij} \cap F_j| = 0$. Имеем $|E_0| = 0$.

Если F_i и F_j принадлежат непересекающимся замкнутым шарам, то

$$|\varphi(F_i \setminus E_0) \cap \varphi(F_j \setminus E_0)| = 0. \tag{5.23}$$

Из области определения отображения φ удаляем множество E_0 нулевой меры и областью определения считаем далее множество

$$\operatorname{Dom}_3 \varphi = \operatorname{Dom}_1 \varphi \setminus E_0.$$

Пусть $B_1, B_2 \subset D$ – такие шары, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \varnothing$. Поскольку B_1 и B_2 находятся на положительном расстоянии друг от друга, то можно выбрать наборы $\{F_i\}$ и $\{F_j\}$ такие, что

$$B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi = \bigcup_i F_i \setminus E_0, \qquad B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi = \bigcup_i F_j \setminus E_0.$$

В силу

$$\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) = \bigcup_i \varphi(F_i \setminus E_0), \qquad \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) = \bigcup_j \varphi(F_j \setminus E_0)$$

получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi)| &= \Big|\bigcup_i \varphi(F_i \setminus E_0) \cap \bigcup_j \varphi(F_j \setminus E_0)\Big| \\ &\leqslant \sum_{i,j} |\varphi(F_i \setminus E_0) \cap \varphi(F_j \setminus E_0)|. \end{aligned}$$

Все слагаемые в последней сумме равны нулю в силу (5.23). Следовательно,

$$|\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi)| = 0.$$

Таким образом, лемма 16 доказана.

Фиксируем шар $Q \Subset \mathbb{M}'$. Определим следующую функцию множеств:

$$\Psi_Q \colon B \mapsto |\varphi(B \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap Q|, \tag{5.24}$$

т.е. функция Ψ_Q каждому шару $B \subset D$ сопоставляет меру пересечения образа этого шара с шаром Q. В силу леммы 16 функция Ψ_Q обладает следующим свойством аддитивности: $\Psi_Q(B_1 \cup B_2) = \Psi_Q(B_1) + \Psi_Q(B_2)$ для любых шаров $B_1, B_2 \subset D$ таких, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \varnothing$. Используя это свойство и проводя рассуждения из доказательства теоремы 3 из [28] (см. предложение 5), можно показать, что для почти всех $x \in D$ определена и конечна производная

$$\Psi'_Q(x) = \lim_{r\to 0, B(y,r)\ni x} \frac{\Psi_Q(B(y,r))}{|B(y,r)|} \tag{5.25}$$

и выполнено неравенство

$$\int_U \Psi'_Q(x)\, d\omega \leqslant \Psi_Q(U), \tag{5.26}$$

где U – это конечное объединение шаров, замыкания которых не пересекаются. Обозначим символом Σ_Q множество меры нуль, на котором производная Ψ'_Q либо не определена, либо равна ∞. Тогда во всех точках дополнения $D \setminus \Sigma_Q$ определена конечная производная Ψ'_Q.

Очевидно, существует счетный набор шаров $Q_k \Subset \mathbb{M}'$, объединение которых совпадает с $\mathbb{M}'$. Рассматривая в предыдущем рассуждении Q_k вместо Q, получаем последовательность $\Sigma_{Q_k} \subset D$ множеств нулевой меры. Объединяя Σ_{Q_k}, получаем множество нулевой меры $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Sigma_{Q_k}$. Новой областью определения отображения φ будем считать множество

$$\operatorname{Dom}_4 \varphi = \operatorname{Dom}_3 \varphi \setminus \Sigma.$$

Лемма 17. *На измеримом множестве* $\operatorname{Dom}_4 \varphi$ *измеримое отображение* $\varphi\colon \operatorname{Dom}_4 \varphi \to D'$ *обладает* $\mathscr{N}$*-свойством Лузина*

$$|\varphi(A)| = 0, \quad \textit{если} \quad |A| = 0, \quad \textit{где} \quad A \subset \operatorname{Dom}_4 \varphi = \operatorname{Dom}_3 \varphi \setminus \Sigma. \tag{5.27}$$

Доказательство. Достаточно доказать $|\varphi(A) \cap Q| = 0$ для любого множества нулевой меры $A \subset \operatorname{Dom}_3 \varphi \setminus \Sigma$, где $Q \Subset \mathbb{M}'$ – фиксированный шар.

Пусть $A_k = \{x \in D \setminus \Sigma_Q \colon \Psi'_Q(x) < k\}$, тогда $D \setminus \Sigma_Q = \bigcup_k A_k$. Пусть множество нулевой меры E_k содержится в A_k. Можно считать, что замыкание E_k компактно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \supset E_k$ такое, что $|U_\varepsilon| < \varepsilon$, и замыкание U_ε компактно (компактность замыкания U_ε гарантирует выполнение свойства удвоения римановой меры на метрическом пространстве (U_ε, d), т.е. $|B(x,2r)| \leqslant L|B(x,r)|$ для всех точек $x \in U_\varepsilon$ и всех $r \in (0, r_0)$, где положительные числа L и r_0 не зависят от точки $x \in U_\varepsilon$). С учетом определения множества A_k и (5.25) имеем: для каждого $x \in E_k$ найдется число $r_x > 0$ такое, что $B(x,r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(B(x,r)) \cap Q| < k|B(x,r)|$ для любого числа $0 < r < r_x$. По лемме Витали из семейства шаров $\mathscr{B} = \{B(x,r)\colon x \in \Sigma_k, B(x,r) \subset U_\varepsilon, 0 < r < \min(r_\varepsilon, r_0)\}$ можно выделить счетное подсемейство шаров $\{B_j\}$ такое, что будут выполнены следующие условия[7]: $\overline{B}_i \cap \overline{B}_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $E_k \subset \bigcup_j cB_j$, где c – постоянная, зависящая только от (U_ε, d). Кроме того, $cB(x,r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(cB(x,r)) \cap Q| < k|cB(x,r)|$.

[7] Здесь cB_j для шара $B_j = B(x_j, r_j)$ обозначает шар $B(x_j, cr_j)$.

Тогда

$$|\varphi(E_k)\cap Q|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(cB_j)\cap Q|<k\sum_{j=1}^{\infty}|cB_j|\leqslant L'k\sum_{j=1}^{\infty}|B_j|\leqslant L'k|U_\varepsilon|<L'k\varepsilon,$$

где L' – постоянная, зависящая от постоянной L в условии удвоения. Отсюда получаем $|\varphi(E_k)\cap Q|=0$, так как $\varepsilon>0$ – произвольное число. Для любого множества меры нуль $E\subset D\setminus\Sigma_Q$ имеем также $|\varphi(E)\cap Q|=0$, поскольку $E=\bigcup_k E\cap A_k$, а любое множество $E\cap A_k$ меры нуль можно исчерпать счетным набором множеств нулевой меры, замыкания которых компактны.

Так как шар $Q\Subset\mathbb{M}'$ произволен, отображение $\varphi\colon \operatorname{Dom}_4\varphi\to D'$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина.

Теперь мы можем обобщить утверждение леммы 16.

Лемма 18. *Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n\geqslant 2$, $D\subset\mathbb{M}$, $D'\subset\mathbb{M}'$ – области в $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, а отображение $\varphi\colon D\to D'$ принадлежит классу IL^1_p, $p\in[1,n]$. Тогда для отображения $\varphi\colon\operatorname{Dom}_4\to D'$ выполняется следующее свойство: если $A_1,A_2\subset\operatorname{Dom}_4\varphi$ – два не пересекающихся измеримых множества положительной меры, то $|\varphi(A_1)\cap\varphi(A_2)|=0$.*

Доказательство. Из леммы 16 выводим следующее свойство: если $K_1,K_2\subset D$ – два компакта положительной меры и $K_1\cap K_2=\varnothing$, то

$$|\varphi(K_1\cap\operatorname{Dom}_4\varphi)\cap\varphi(K_2\cap\operatorname{Dom}_4\varphi)|=0.$$

Действительно, пусть $\{B^1_i\}$ и $\{B^2_j\}$ – конечные покрытия компактов K_1 и K_2 такие, что шары первого покрытия находятся на положительном расстоянии от шаров второго покрытия. Тогда

$$\begin{aligned}&|\varphi(K_1\cap\operatorname{Dom}_4\varphi)\cap\varphi(K_2\cap\operatorname{Dom}_4\varphi)|\\&\qquad\leqslant\sum_{i,j}|\varphi(B^1_i\cap\operatorname{Dom}_4\varphi)\cap\varphi(B^2_j\cap\operatorname{Dom}_4\varphi)|=0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $A_1,A_2\subset\operatorname{Dom}_4\varphi$ – два не пересекающихся множества положительной меры. Тогда каждое из этих множеств можно исчерпать компактами: $\bigl|A_1\setminus\bigcup K^1_i\bigr|=0$ и $\bigl|A_2\setminus\bigcup K^2_j\bigr|=0$. В силу того, что отображение φ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, имеем $\bigl|\varphi(A_l\setminus\bigcup K^l_i)\bigr|=0$, $l=1,2$, откуда получаем $|\varphi(A_1)\cap\varphi(A_2)|=0$.

Лемма доказана.

Замечание 11. Отображение, для которого выполнено заключение леммы 18, будем называть п.в. инъективным.

Далее мы покажем, что из образа $\varphi(\operatorname{Dom}_4\varphi)$ можно удалить множество нулевой меры так, что будет определено обратное отображение φ^{-1}.

Предложение 8. *Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия одной и той же топологической размерности $n\geqslant 2$, $D\subset\mathbb{M}$, $D'\subset\mathbb{M}'$ – области в $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, а отображение $\varphi\colon D\to D'$ принадлежит классу IL^1_p, $p\in[1,n]$. Тогда отображение φ инъективно вне некоторого множества нулевой меры.*

Доказательство. Пусть $\{z_i\}$ – счетное всюду плотное множество в $\mathrm{Dom}_4\,\varphi$. Рассмотрим набор шаров $\{B_{ij} = B(z_i, \rho_j)\}$ с убывающими радиусами ($\rho_j \to 0$ при $j \to \infty$), образующих счетную базу окрестностей многообразия $\mathbb{M}$. Получим счетный набор пересечений $V_{ij} = B_{ij} \cap \mathrm{Dom}_4\,\varphi$. Будем рассматривать только такие наборы индексов i_1, j_1, i_2, j_2, что множества вида $V_{i_1j_1}$ и $V_{i_2j_2}$ не пересекаются ($V_{i_1j_1} \cap V_{i_2j_2} = \varnothing$). Обозначим $F_{kl} = \varphi(V_{i_kj_k}) \cap \varphi(V_{i_lj_l})$. Поскольку отображение φ является п.в. инъективным, имеем $|F_{kl}| = 0$. Положим $\Sigma = \bigcup_{kl} F_{kl}$. Тогда $|\Sigma| = 0$ и $|\varphi^{-1}(\Sigma)| = 0$ (последнее следует из того, что φ в силу леммы 9 обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина).

Положим

$$\mathrm{Dom}_5\,\varphi = \mathrm{Dom}_4\,\varphi \setminus \varphi^{-1}(\Sigma), \qquad \mathrm{Dom}\,\varphi^{-1} = \varphi(\mathrm{Dom}_5\,\varphi).$$

Тогда отображение $\varphi\colon \mathrm{Dom}_5\,\varphi \to \mathrm{Dom}\,\varphi^{-1}$ будет взаимно однозначным. Действительно, предположим, что существуют такие $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}_5\,\varphi$, что $x_1 \neq x_2$, а $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Найдутся два не пересекающихся шара B_{ij} и B_{kl}, содержащие x_1 и x_2 соответственно. С другой стороны, по определению $\mathrm{Dom}_5\,\varphi$ получаем $\varphi(B_{ij} \cap \mathrm{Dom}_5\,\varphi) \cap \varphi(B_{kl} \cap \mathrm{Dom}_5\,\varphi) = \varnothing$, откуда следует, что $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Предложение доказано.

Фиксируем шар $Q \Subset \mathbb{M}'$. Для каждого открытого множества $U \subset D$ определим (аналогично (5.24)) следующую функцию множеств:

$$\Psi_Q\colon U \mapsto |\varphi(U \cap \mathrm{Dom}_5\,\varphi) \cap Q|,$$

т.е. функция Ψ_Q каждому открытому множеству $U \subset D$ сопоставляет меру пересечения образа $\varphi(U \cap \mathrm{Dom}_5\,\varphi)$ с шаром Q. В силу леммы 18 будет выполняться обычное свойство аддитивности: $\Psi_Q(U_1 \cup U_2) = \Psi_Q(U_1) + \Psi_Q(U_2)$ для таких открытых множеств $U_1, U_2 \subset D$, что $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\Psi_Q(U_1 \cup U_2) &= |\varphi(U_1 \cup U_2) \cap Q| = |(\varphi(U_1) \cup \varphi(U_2)) \cap Q| \\ &= |\varphi(U_1) \cap Q| + |\varphi(U_2) \cap Q| - |(\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2)) \cap Q| \\ &= |\varphi(U_1) \cap Q| + |\varphi(U_2) \cap Q| = \Psi_Q(U_1) + \Psi_Q(U_2).\end{aligned}$$

Предложение 9. *Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области в $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ соответственно, а измеримое отображение $\varphi\colon D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p, $p \in [1, n]$. Тогда для любой суммируемой функции $f\colon D' \cap Q \to \mathbb{R}$ верна следующая формула замены переменных:*

$$\int_D f \circ \varphi(x) J_Q(x, \varphi)\, d\omega = \int_{D' \cap Q} f(y)\, d\nu, \tag{5.28}$$

где $J_Q(x, \varphi) = \Psi'_Q(x)$.

Доказательство. В силу доказанного выше отображение $\varphi\colon \mathrm{Dom}_5\,\varphi \to D'$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина и является инъективным.

В первую очередь докажем абсолютную непрерывность функции Ψ_Q (см. ниже соотношение (5.32)).

Для всех $z \in D \setminus \Sigma$, где Σ – множество нулевой меры, на котором производная Ψ'_Q не существует или не конечна и на котором

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{|B(z,\rho)|} \int_{B(z,\rho)} \Psi'_Q(x)\, d\omega \neq \Psi'_Q(z),$$

имеем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\rho_0(z)$ такое, что для всех $\rho < \rho_0(z)$ выполнены одновременно соотношения

$$\Psi'_Q(z) - \varepsilon \leqslant \frac{\Psi_Q(B(z,\rho))}{|B(z,\rho)|} \leqslant \Psi'_Q(z) + \varepsilon, \tag{5.29}$$

$$\Psi'_Q(z) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{|B(z,\rho)|} \int_{B(z,\rho)} \Psi'_Q(x)\, d\omega \leqslant \Psi'_Q(z) + \varepsilon. \tag{5.30}$$

Неравенство (5.29) следует из определения производной функции множеств (предложение 5), а неравенство (5.30) мы получаем из теоремы Лебега (см. теорему 3).

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\Psi_Q(B(z,\rho)) &\leqslant |B(Z,\rho)|\Psi'_Q(z) + \varepsilon|B(z,\rho)| \\ &\leqslant \int_{B(z,\rho)} \Psi'_Q(x)\, d\omega + 2\varepsilon|B(z,\rho)|\end{aligned} \tag{5.31}$$

для всех $z \in D \setminus \Sigma$ и для всех $\rho < \rho_0(z)$.

Возьмем открытое множество $U \subset D$ конечной меры такое, что замыкание U компактно. Пусть $\mathscr{B}$ – покрытие Витали множества $U \setminus \Sigma$ семейством шаров $\{B(z,\rho) \mid z \in U \setminus \Sigma,\ 0 < \rho < \rho_0(z)\}$. Из семейства $\mathscr{B}$ можно выделить последовательность попарно не пересекающихся шаров $\{B_j\}$ такую, что $|U \setminus \bigcup_j B_j| = 0$. Тогда $|U| = |\bigcup_j B_j| = \sum_j |B_j|$. Применяя свойство (5.27) отображения φ, получаем $\Psi_Q(U) = \Psi_Q(\bigcup_j B_j) = \sum_j \Psi_Q(B_j)$.

Для каждого шара из $\{B_j\}$ выполнено неравенство (5.31). Суммируя неравенство (5.31) по шарам из $\{B_j\}$, имеем

$$\Psi_Q(U) = \sum_j \Psi_Q(B_j) \leqslant \int_{\bigcup_j B_j} \Psi'_Q(x)\, d\omega + 2\varepsilon \sum_j |B_j| = \int_U \Psi'_Q(x)\, d\omega + 2\varepsilon|U|.$$

В силу произвольности ε имеем

$$\Psi_Q(U) \leqslant \int_U \Psi'_Q(x)\, d\omega. \tag{5.32}$$

Неравенство (5.32) и обратное к нему неравенство (5.26) обеспечивают равенство

$$\Psi_Q(U) = \int_U \Psi'_Q(x)\, d\omega. \tag{5.33}$$

Обозначим $J_Q(x,\varphi) = \Psi'_Q(x)$. Из равенства (5.33) следует формула замены переменных для характеристической функции измеримого множества $\varphi(U) \cap Q$

$$\int_D \chi_{\varphi(U)} \circ \varphi(x) J_Q(x,\varphi)\, d\omega = \int_U \Psi'_Q(x)\, d\omega = \Psi_Q(U) = \int_{D'\cap Q} \chi_{\varphi(U)}(y)\, d\nu.$$

Далее стандартной процедурой эта формула распространяется на характеристическую функцию произвольного измеримого множества $A \subset D$, затем – на произвольную простую функцию s, определенную на $\mathbb{M}'$:

$$\int_D s \circ \varphi(x) J_Q(x, \varphi)\, d\omega = \int_{D' \cap Q} s(y)\, d\nu. \tag{5.34}$$

Переход от (5.34) к (5.28) стандартен.

Предложение 9 доказано.

Замечание 12. Обозначим $Z = \{x \in D \cap \varphi^{-1}(Q) \colon J_Q(x, \varphi) = 0\}$. В соответствии с формулой замены переменных (5.28) имеем $|\varphi(Z)| = 0$. Поскольку отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина, то и $|Z| = 0$.

Далее мы рассматриваем семейство интегральных кривых Γ некоторого базисного векторного поля V, определенного в некоторой компактной окрестности.

Обозначим символом f_s поток, соответствующий этому полю. Тогда кривую $\gamma \in \Gamma$ можно записать в виде $\gamma(s) = f_s(p)$, где p принадлежит некоторой поверхности S, трансверсальной векторному полю V, а параметр s принадлежит интервалу $I \subset \mathbb{R}$. Семейство Γ снабжено мерой $d\gamma$, которая удовлетворяет неравенству

$$c_0 |B|^{(n-1)/n} \leqslant \int_{\gamma \in \Gamma,\, \gamma \cap B(x,r) \neq \varnothing} d\gamma \leqslant c_1 |B|^{(n-1)/n}$$

для достаточно малых шаров $B = B(x, r) \subset \mathbb{M}$, где константы c_0 и c_1 не зависят от $B(x, r)$. Для семейства, определяемого векторным полем V, мера $d\gamma$ может быть получена как внутреннее произведение $i(V)$ векторного поля V с формой объема $d\omega(x)$. Если $\mathscr{J}_{f_s}$ – якобиан потока f_s, то

$$f_s^* i(V)\, d\omega(x) = \mathscr{J}_{f_s} i(V)\, d\omega(x), \quad \text{или} \quad f_s^*(\mathscr{J}_{f_{-s}} i(V)\, d\omega(x)) = i(V)\, d\omega(x).$$

Касательный вектор к однапараметрическому семейству кривых γ_t, проходящих через точку $p \exp(tV)$, можно идентифицировать с касательным вектором V в точке p. Поток f_s переносит вектор $V = V(p)$ в $(f_s)_* V$. Следовательно, форма $\mathscr{J}_{f_{-s}} i(V)\, d\omega(x)$ определяет меру $d\gamma$ на семействе Γ.

Лемма 19. *Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области в $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, а измеримое отображение $\varphi \colon D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p, $p \in [1, n]$. Тогда на почти всех интегральных кривых базисных векторных полей отображение $\varphi \colon \bigcup_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \to D'$ непрерывно вне некоторого множества нулевой $\mathscr{H}^1$-меры Хаусдорфа.*

Доказательство. Фиксируем базисное векторное поле X_j, определенное на некотором шаре $B \Subset \mathbb{M}$. Предполагается, что на шаре задана некоторая гладкая поверхность $P \subset B$, трансверсальная полю X_j, и, кроме того, из каждой точки $x \in P$ выходит некоторая интегральная линия $\exp(tX_j(x))$ векторного поля X_j, которая с двух сторон (т.е. при некотором положительном t и некотором отрицательным t) выходит на границу ∂B. Предположим противное: найдется семейство $\Gamma = \{\exp(tX_j(x))\colon x \in \Sigma \subset P\}$ интегральных кривых векторного поля X_j положительной меры (т.е. $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа множества Σ положительна) такое, что на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ существует множество $s_\gamma \subset \gamma$ положительной $\mathscr{H}^1$-меры, на котором отображение $\varphi\colon \bigcup_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \to D'$ не является непрерывным.

Обозначим $S = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma$. Покажем, что S измеримо. Действительно, $S = D \setminus A$, где множество

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \biggl\{ x \in \bigcup_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \biggm| \\ d(\varphi(x\exp(tX_j)), \varphi(x)) < \frac{1}{n} \ \text{ при } |t| < \frac{1}{m},\ \exp(tX_j) \in \bigcup_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \biggr\}$$

измеримо, поскольку любое множество в фигурных скобках измеримо. По формуле коплощади $|S| > 0$. Аналогично проверяется, что $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m$, где $S_m = \{x \in s_\gamma \mid \operatorname{osc}_l \varphi(x) > 1/m\}$ – измеримое множество. Здесь $\operatorname{osc}_l \varphi(x)$ – колебание отображения $\varphi\colon \gamma \cap \bigcup_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \to D'$ в точке x. Следовательно, можно выбрать номер m такой, что $|S_m| > 0$. Также найдется номер j такой, что $|S_m \cap \widetilde{T}_j| > 0$. Пусть $x_0 \in S_m \cap \widetilde{T}_j$ – точка плотности 1. Тогда любой шар $B(x_0, r)$ будет содержать подмножество положительной меры из $S_m \cap \widetilde{T}_j$ (обозначим это множество E_r). В силу непрерывности отображения φ на $\widetilde{T}_j$ можно подобрать шар $B(x_0, r_m)$ таким образом, что $\varphi(B(x_0, r_m) \cap S_m \cap \widetilde{T}_j) \subset B(\varphi(x_0), 1/(4m))$.

Фиксируем липшицеву функцию $\eta \in \operatorname{Lip}(D')$ такую, что $\eta(y) = 1$ при $y \in B(\varphi(x_0), 1/(4m))$ и $\eta(y) = 0$ при $y \notin B(\varphi(x_0), 1/(2m))$, $|\nabla\eta|(y) \leqslant 4m$ для почти всех y. Композиция $\eta \circ \varphi$ принадлежит $L^1_p(D)$. Следовательно, функцию $\eta \circ \varphi$ можно изменить на множестве нулевой меры так, чтобы она была абсолютно непрерывной на почти всех линиях (т.е. чтобы она принадлежала классу ACL). Заметим, что при такой модификации отображение $\varphi\colon \bigcup_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \to D'$ не изменяется, поэтому всегда $\varphi^*\eta(x) = \eta \circ \eta(x)$ для всех $x \in \widetilde{T}_j$.

На основании вышесказанного на каждой горизонтальной кривой, пересекающей E_{r_m} по множеству положительной $\mathscr{H}^1$-меры, имеем $\operatorname{osc}_l \eta \circ \varphi(x) = 1$, где $x \in E_{r_m}$. По построению множества E_{r_m} совокупность таких кривых имеет положительную меру. Таким образом, мы пришли к противоречию с абсолютной непрерывностью функции $\eta \circ \varphi$ на почти всех линиях.

Следовательно, на почти всех горизонтальных кривых отображение

$$\varphi\colon \bigcup_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \to D'$$

непрерывно вне некоторого множества нулевой $\mathscr{H}^1$-меры.

Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области в $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, а измеримое отображение $\varphi\colon D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p, $p \in [1, n]$. Если*

$u \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \cap L^1_p(D')$ и $\|u \mid L^1_p(D')\| \leqslant 1$, то

$$|\nabla(u \circ \varphi)|(x) \leqslant K \cdot J_Q^{1/p}(x, \varphi) \tag{5.35}$$

п.в. на $D \cap \varphi^{-1}(Q)$, где K – некоторая постоянная, не зависящая от Q.

Доказательство. Фиксируем точку $y_0 \in D' \cap Q$ и шар $B(y_0, r)$ так, что $B(y_0, 2r) \Subset D' \cap Q$. Рассмотрим липшицеву функцию-срезку $\eta(y)$ такую, что $\xi|_{B(0,r)} = 1$ и $\xi|_{\mathbb{M}\setminus B(0,2r)} = 0$, $|\nabla\eta|(y) \leqslant 1/r$ для почти всех $y \in D'$.

Поскольку φ^* является ограниченным оператором, то, в частности, верно неравенство $\|\varphi^*(u - u(y_0)) \mid L^1_p(D)\| \leqslant \|\varphi^*\| \cdot \|(u - u(y_0)) \mid L^1_p(D')\|$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla(u \circ \varphi)|^p(x)\, d\omega &\leqslant \|\varphi^*\|^p \int_{B(y_0,2r)} |\nabla((u - u(y_0))\eta)|^p\, d\nu \\
&\leqslant c_0\|\varphi^*\|^p \int_{B(y_0,2r)} |\nabla u|^p \eta^p(y)\, d\nu + c_0\|\varphi^*\|^p \int_{B(y_0,2r)} |\nabla\eta|^p |u - u(y_0)|^p\, d\nu \\
&\leqslant c_0\|\varphi^*\|^p(|B(y_0, 2r)| + (c_1 r^{-p} c_2 r^p |B(y_0, 2r)|)) = C\|\varphi^*\|^p \cdot |B(y_0, 2r)|.
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к оценке

$$\int_{\varphi^{-1}(B(0,r))} |\nabla(u \circ \varphi)|^p(x)\, d\omega \leqslant C\|\varphi^*\|^p \cdot |B(y_0, 2r)|. \tag{5.36}$$

Используя соотношения (5.28), (5.36) и замечание 12, получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla(u \circ \varphi)|^p(x)\, d\omega &= \int_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z} \frac{|\nabla(u \circ \varphi)|^p(x) J_Q(x, \varphi)}{J_Q(x, \varphi)}\, d\omega \\
&= \int_{B(y_0,r)\cap Q\setminus\varphi(Z)} \left(\frac{|\nabla(u \circ \varphi)|^p(x)}{J_Q(x, \varphi)}\right)_{\varphi(x)=y} d\nu \leqslant C\|\varphi^*\|^p \cdot |B(y_0, 2r)|.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Дифференцируя (5.37), по теореме Лебега 3 получим

$$\left.\frac{|\nabla(u \circ \varphi)|^p(x)}{J_Q(x, \varphi)}\right|_{\varphi(x)=y} \leqslant C_1\|\varphi^*\|^p$$

для почти всех $y \in D' \cap Q$ (здесь используется свойство удвоения меры). Имеем

$$|\nabla(u \circ \varphi)|(x) \leqslant K J_Q^{1/p}(x, \varphi) \quad \text{для почти всех } x \in D \cap \varphi^{-1}(Q), \tag{5.38}$$

так как отображение φ инъективно вне некоторого множества нулевой меры (предложение 8) и обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина (лемма 9).

Лемма доказана.

Лемма 21. *Пусть $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ – римановы многообразия топологической размерности $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{M}$, $D' \subset \mathbb{M}'$ – области в $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}'$ соответственно, а измеримое отображение $\varphi\colon D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p, $p \in [1, n]$. Тогда φ аппроксимативно дифференцируемо п.в. вдоль интегральных линий базисных векторных полей.*

Доказательство. Так как утверждение леммы носит локальный характер, можно считать, что D имеет конечную меру.

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и выбираем шар $Q \subset \mathbb{M}$ так, что $Q \supset \varphi(T_k \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi)$.

Пусть $\{z_j\}$ – счетное всюду плотное множество точек в D'. Зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j} : D' \to \mathbb{R}^+$, $d^r_{z_j}(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, $(d_{z_j}(y) = d(z_j, y))$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d^r_{z_j}(x) = d^r_{z_j} \circ \varphi(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, для всех точек $x \in \widetilde{T}_k$. (В этом доказательстве $\widetilde{T}_k$ – совокупность точек плотности 1 множества $T_k \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi$ (см. аналогичное рассуждение в доказательстве теоремы 4).)

Кроме того, каждая такая функция удовлетворяет условиям леммы 20. Поэтому $|\nabla(d^r_{z_j} \circ \varphi)|(x) \leqslant C J_Q^{1/p}(x, \varphi)$ для почти всех $x \in \operatorname{Dom}_5 \varphi \cap \varphi^{-1}(Q)$.

Рассмотрим слоение Γ_j области D, порожденное векторным полем X_j, определенным на некотором шаре $B \Subset \mathbb{M}$, и линию γ из этого слоения.

Для почти всех кривых γ из слоения Γ_j выполнены следующие условия:

1) φ непрерывно на γ вне некоторого множества σ_γ нулевой $\mathscr{H}^1$-меры (лемма 19);
2) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций
$$|\nabla(\varphi^* d^r_{z_j})|(t) \leqslant K J_Q^{1/p}(t, \varphi), \qquad r \in \mathbb{Q}^+, \quad j \in \mathbb{N},$$
п.в. на γ и функция $J_{\varphi,Q}$ интегрируема на γ;
3) для почти всех $x_0 \in \gamma$ существует конечный предел отношения
$$\frac{1}{d(x_0, x)} \int_{[x_0,x]} J_Q^{1/p}(t, \varphi)\, d\sigma$$
при $x \to x_0$ по кривой γ, равный $J_\varphi^{1/p}(x_0, \varphi)$ (здесь $[x_0, x] \subset \gamma$ – отрезок интегральной линии);
4) $\operatorname{Dom}_5 \varphi \cap \gamma$ является множеством полной (одномерной) меры на $\gamma \cap D$;
5) неравенство (5.35) верно для всех функций $\{d^r_{z_j}\}$ одновременно п.в. на γ;
6) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_j$, на которой выполняются все шесть условий.

Пусть $x_0 \in \widetilde{T}_k \cap \gamma$ – точка положительной плотности на кривой γ, точка непрерывности ограничения $\varphi|_\gamma$ и точка, в которой выполняется условие 3). Положим $z = \varphi(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящуюся к $z = \varphi(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности как z_l). Так как отображение φ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $\varphi(B(x_0, \delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma) \subset Q$ и $d^r_{z_l} \circ \varphi(x) \neq 0$ для всех $l \geqslant L$ и всех точек $x \in B(x_0, \delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$.

Далее, интегрируя функцию $C J_Q^{1/p}(x, \varphi)$ (где C не зависит от r, z) по части кривой γ от x_0 до x, где $x \in \widetilde{T}_k \cap B(x_0, \delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$, выводим
$$\begin{aligned} C \int_{[x_0,x]} J_Q^{1/p}(t, \varphi)\, d\sigma &\geqslant \int_{[x_0,x]} \bigl|\nabla\bigl(\varphi^* d^r_{z_j}\bigr)\bigr|(t)\, d\sigma \\ &\geqslant |d^r_{z_l} \circ \varphi(x_0) - d^r_{z_l} \circ \varphi(x)| = |r - d_{z_l}(\varphi(x_0)) - r + d_{z_l}(\varphi(x))| \\ &= |-d_{z_l}(\varphi(x_0)) + d_{z_l}(\varphi(x))| \to d_z(\varphi(x)) = d(\varphi(x_0), \varphi(x)) \quad \text{при } l \to \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \leqslant C\int_{[x_0,x]} J_Q^{1/p}(t,\varphi)\,d\sigma,$$

или

$$\frac{d(\varphi(x_0),\varphi(x))}{d(x_0,x)} \leqslant \frac{C}{d(x_0,x)}\int_{[x_0,x]} J_Q^{1/p}(t,\varphi)\,d\sigma \tag{5.39}$$

для всех $x \in \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$. Переходя к аппроксимативному пределу в неравенстве (5.39), имеем

$$\operatorname{ap}\overline{\lim_{x\to x_0, x\in\gamma}} \frac{d(\varphi(x_0),\varphi(x))}{d(x_0,x)} \leqslant C J_Q^{1/p}(x_0,\varphi) < \infty.$$

Отсюда получаем, что отображение φ аппроксимативно дифференцируемо в точке x_0 вдоль векторного поля X_j.

В силу произвольности выбора базисного векторного поля X_j, интегральной кривой $\gamma \in \Gamma_j$ и точки $z_0 \in \gamma$ отображение φ аппроксимативно дифференцируемо п.в. вдоль интегральных линий базисных векторных полей.

Замечание 13. Из аппроксимативной дифференцируемости отображения φ п.в. вдоль интегральных линий базисных векторных полей вытекает полная аппроксимативная дифференцируемость (см. [25; теорема 3.3]).

Следовательно, справедливо следующее

Предложение 10 (см., например, [31; теорема 3.1.8] и [25; теорема 3.3]). *Пусть $D \subset \mathbb{M}$, а измеримое отображение $\varphi\colon D \to \mathbb{M}'$ таково, что*

$$\operatorname{ap}\overline{\lim_{x\to a}} \frac{d(\varphi(a),\varphi(x))}{d(a,x)} < \infty$$

для всех $a \in D$. Тогда множество D представимо в виде счетного объединения $D = \bigcup_i E_i$ так, что $\varphi \in \operatorname{Lip}(E_i)$.

Замечание 14. Каждое множество E_i из предложения 10 содержится в счетном объединении множеств

$$F_{ki} = \left\{ z\colon d(\varphi(x),\varphi(z)) \geqslant \frac{1}{k} d(x,z),\ x \in E_i \cap B\left(z,\frac{1}{k}\right)\right\},$$

т.е. $E_i \subset \bigcup_k F_{ki}$ (см., например, [24]). Тогда множество D можно представить в виде счетного объединения множеств $D = \bigcup_j D_j$ так, что на каждом D_j отображение φ является билипшицевым. Кроме того, можно считать, что множества D_j состоят из точек плотности 1.

С учетом замечания 14 можно считать, что областью определения отображения φ является множество

$$\operatorname{Dom}_6\varphi = \bigcup_j E_j \cap \operatorname{Dom}_5\varphi$$

и отображение φ билипшицево на $E_j \cap \operatorname{Dom}_5\varphi$.

Обозначим символом $D\varphi$ аппроксимативный дифференциал отображения φ. Заметим, что

$$|J(x,\varphi)| = \lim_{r\to 0}\frac{|\varphi(B(x,r))|}{|B(x,r)|} \quad \text{п.в. в} \quad D.$$

Лемма 22. *Пусть отображение φ принадлежит классу IL^1_p, $p \in [1,n]$, а обратное к нему отображение $\psi = \varphi^{-1}\colon \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi) \to \mathrm{Dom}_6\,\varphi$ сужено на $\varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$ в соответствии с предложением 8. Тогда для почти всех $x \in D$ и для почти всех $y \in \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$:*

1) *при $p \in [1,n)$ верны оценки*

$$|D\varphi|(x) < L, \quad |J(x,\varphi)| > \alpha_1, \qquad |D\psi|(y) < L', \quad |J(y,\psi)| > \alpha; \tag{5.40}$$

2) *при $p = n$ верны оценки*

$$|D\varphi|^n(x) \leqslant L|J(x,\varphi)|, \qquad |D\psi|^n(y) \leqslant L'|J(y,\psi)|;$$

здесь $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$, а $J(y,\psi) = \det D\psi(y)$.

Кроме того, $\varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi) \subset D'$ – множество полной меры и обратное к φ отображение $\psi\colon \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi) \to \mathrm{Dom}_6\,\varphi$ индуцирует по правилу композиции оператор $\psi^*\colon L^1_p(D) \to L^1_p(D')$, обратный к φ^*.

Доказательство. Пусть $g \in L^1_p(D)$. Тогда найдется функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = \varphi^* f$ (лемма 11). С другой стороны, $\varphi^* f(x) = f \circ \varphi(x)$ п.в. на $\mathrm{Dom}_6\,\varphi$ в силу леммы 10. Поэтому имеем $\psi^* \circ \varphi^*(f)(y) = f \circ \varphi \circ \psi(y) = f(y)$ для почти всех $y \in \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$, т.е. $g \circ \psi(y) = f(y)$ для почти всех $y \in \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$.

Для липшицевой функции $f \in L^1_p(D')$ имеем

$$\nabla(\varphi^* f)(x) = (\nabla(f\circ\varphi))(x) = D\varphi^T(x)\nabla f(\varphi(x)).$$

Подставляя в неравенство (5.38) липшицевы функции η такие, что $|\nabla\eta|(y) = 1$, и учитывая соотношение $K|J(x,\varphi)|^{1/p} \geqslant |\nabla(\eta\circ\varphi)|(x) = |D\varphi^T(x)\nabla\eta(\varphi(x))|$, получаем оценку нормы оператора

$$|D\varphi|^p(x) \leqslant K_1|J(x,\varphi)| \quad \text{п.в. на} \quad D. \tag{5.41}$$

Здесь следует заметить, что $|J(x,\varphi)| = J_Q(x,\varphi)$ для почти всех $x \in D \cap \varphi^{-1}(Q)$. Аналогично,

$$|D\psi|^p(y) \leqslant K_2|J(y,\psi)| \quad \text{п.в. на} \quad \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi). \tag{5.42}$$

Из неравенства (5.42) при $p \in [1,n)$ получаем

$$CK_2^p \geqslant \frac{|D\psi(y)|^p}{|J(y,\psi)|} = \left(\frac{|D\psi(y)|^n}{|J(y,\psi)|}\right)^{p/n}\frac{1}{|J(y,\psi)|^{1-p/n}} \geqslant \frac{1}{|J(y,\psi)|^{1-p/n}}.$$

Следовательно, $|J(y,\psi)| > \alpha$ и, значит, $|J(x,\varphi)| < \beta$. Проводя аналогичные рассуждения, из неравенства (5.41) при $p \in [1,n)$ получаем $|J(x,\varphi)| > \alpha_1$ и $|J(y,\psi)| < \beta_1$. Окончательно имеем

$$|D\varphi|(x) < L, \quad |J(x,\varphi)| > \alpha_1, \qquad |D\psi|(y) < L', \quad |J(y,\psi)| > \alpha$$

для почти всех $x \in D$ и для почти всех $y \in \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$.

Покажем, что $|D' \setminus \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)| = 0$. Если это не так, фиксируем точку $z \in D' \setminus \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$ плотности 1 и рассмотрим липшицеву функцию $d_z^r\colon D' \to \mathbb{R}^+$, $d_z^r(y) = (r - d_z(y))^+$, где $d_z(y) = d(z, y)$, а r – положительное число такое, что $B(z, r) \subset D'$. Положим $g = \varphi^*(d_z^r) = d_z^r \circ \varphi$. Имеем

$$
\begin{aligned}
|B(z,r)| = \big\|d_z^r \mid L_p^1(D')\big\|^p \leqslant C\big\|g \mid L_p^1(D)\big\|^p = C\int_{\mathrm{Dom}_6\,\varphi} |\nabla(d_z^r \circ \varphi)|^p(x)\,d\omega \\
\leqslant C\int_{\mathrm{Dom}_6\,\varphi} |\nabla d_z^r|^p(\varphi(x))|D\varphi^T(x)|^p\,d\omega \\
\leqslant CK_1\int_{\mathrm{Dom}_6\,\varphi} |\nabla d_z^r|^p(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,d\omega \\
\leqslant CK_1\int_{\varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)} |\nabla d_z^r|^p(y)\,d\nu = CK_1|B(z,r)\cap\varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)|.
\end{aligned}
$$

Последнее неравенство для r, близких к 0, противоречит тому, что z – точка нулевой плотности для $\varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$.

Таким образом, $\varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi) \subset D'$ – множество полной меры и обратное к φ отображение $\psi\colon \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi) \to \mathrm{Dom}_6\,\varphi$ индуцирует по правилу композиции оператор $\psi^*\colon L_p^1(D) \to L_p^1(D')$, обратный к φ^*.

Лемма 23. *Пусть отображение $\varphi\colon D \to D'$ принадлежит классу IL_p^1, а $p \in [1, n)$. Тогда отображение φ совпадает с локально квазиизометрическим гомеоморфизмом п.в.*

Доказательство. Фиксируем $q > n$. Для липшицевой функции f с компактным носителем в D' имеем

$$
f \circ \varphi \in L_p^1(D), \qquad |\nabla(f\circ\varphi)|(x) \leqslant |\nabla f|(\varphi(x))|D\varphi|(x).
$$

Отсюда с учетом (5.40) и формулы замены переменных (5.28) получаем следующую цепочку неравенств:

$$
\begin{aligned}
\int_D |\nabla f\circ\varphi|^q(x)\,d\omega \leqslant C\int_D |\nabla f|^q(\varphi(x))|D\varphi|^q(x)\,d\omega \leqslant CL^q\int_D |\nabla f|^q(\varphi(x))\,d\omega \\
\leqslant \frac{L^q C}{\alpha}\int_D |\nabla f|^q(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,d\omega = \widetilde{C}\int_{\varphi(D)} |\nabla f|^q(y)\,d\nu.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\|f\circ\varphi \mid L_q^1(D)\| \leqslant C\|f \mid L_q^1(D')\|$ для $q > n$. Следовательно, выполнено условие 2) леммы 14.

Пусть g – липшицева функция в D с компактным носителем. По лемме 11 найдется $f \in L_p^1(D')$ такая, что $g = f\circ\varphi$. Далее, имеем

$$
\nabla g(x) = D\varphi^T(x)\nabla f(\varphi(x))
$$

и, следовательно,

$$
\nabla f(\varphi(x)) = (D\varphi^T)^{-1}(x)\nabla g(x).
$$

Поскольку $|(D\varphi^T)^{-1}| = |(D\varphi)^{-1}| < L$, то $f \in L_q^1(D')$ и

$$
\|f \mid L_q^1(D')\| \leqslant C'\|f\circ\varphi \mid L_q^1(D)\|.
$$

В силу последних неравенств выполнено условие $2'$) из леммы 14 (в котором вместо p надо рассматривать $q > n$).

Кроме того, выполнено условие 1) леммы 14, где в качестве множества T выбираем T_k.

Далее из лемм 14 и 12 выводим, что отображение φ совпадает с локально квазиизометрическим гомеоморфизмом п.в. Отсюда получаем, что $\varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{M}')$; это вместе с неравенствами (5.40) означает, что отображение φ совпадает с некоторым квазиизометрическим гомеоморфизмом п.в.

5.3. Доказательство теоремы 1. Приведем доказательство основного результата настоящей работы.

Доказательство. *Достаточность.* Можно считать, что отображение $\varphi\colon D \to D'$ является квазиизометрией. Квазиизометрия φ обладает $\mathscr{N}$-свойством и $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина и является локально билипшицевым отображением.

Для произвольной функции $f\in L^1_p(D')\cap C^\infty(D')$ композиция $f\circ\varphi$ абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях базисных векторных полей в силу того, что $f\circ\varphi$ – локально липшицева функция. Более того, $\nabla(f\circ\varphi) = D\varphi^T(x)\nabla f(\varphi(x))$ (см., например, [30; с. 263]), где $D\varphi(x) = \{X_i\varphi_j(x)\}$, $i,j = 1,\dots,n$, – дифференциал. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\int_D |\nabla(f\circ\varphi)|^p\,d\omega &= \int_D |D\varphi^T(x)\nabla f(\varphi(x))|^p\,d\omega \\
&\leqslant \int_D |D\varphi^T(x)|^p\,|\nabla f(\varphi(x))|^p\,d\omega \leqslant M^p\int_D |\nabla f|^p(\varphi(x))\,d\omega \\
&= M^p\int_{D'} \frac{|\nabla f|^p(y)}{|J(\varphi^{-1}(y),\varphi)|}\,d\nu \leqslant \frac{M^p}{\alpha}\int_{D'}|\nabla f|^p(y)\,d\nu,
\end{aligned}$$

где во втором и третьем неравенствах мы использовали свойство квазиизометрии (5.1), а во втором равенстве применили формулу замены переменных (5.28). В силу леммы 7 полученное неравенство выполняется для всех функций $f \in L^1_p(D')$, т.е.

$$\bigl\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\bigr\| \leqslant K_1\bigl\|f \mid L^1_p(D')\bigr\|.$$

Отображение $\psi = \varphi^{-1}$ также является квазиизометрией. Тогда для $g \in L^1_p(D)$

$$\|\psi^*(g) \mid L^1_p(D')\| \leqslant K_2\|g \mid L^1_p(D)\|. \tag{5.43}$$

Заметим, что для $f \in L^1_p(D')\cap C^\infty(D')$ верно $\psi^*(f\circ\varphi) = f$. Следовательно, неравенство (5.43) принимает вид $K_2^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant \|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\|$. Таким образом,

$$K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leqslant \|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\| \leqslant K\|f \mid L^1_p(D')\|,$$

где постоянная K зависит только от свойств отображения φ.

Покажем, что образ $\varphi^*\bigl(L^1_p(D')\cap C^\infty(D')\bigr)$ всюду плотен в $L^1_p(D)$. Пусть $g \in L^1_p(D)$. Найдется последовательность $g_n \in L^1_p(D)\cap C^\infty(D)$ такая, что $\|g - g_n \mid L^1_p(D)\| \to 0$. С другой стороны, в силу двусторонней оценки $g_n\circ\varphi^{-1} \in L^1_p(D')$. Следовательно, найдется последовательность $f_{nk} \in L^1_p(D')\cap C^\infty(D')$

такая, что $\|g_n \circ \varphi^{-1} - f_{nk} \mid L^1_p(D')\| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел l_n имеем $\varphi^* f_{nl_n} \in \varphi^*\bigl(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\bigr)$ и $\|g - \varphi^* f_{nl_n} \mid L^1_p(D)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Необходимость. Существование квазиизометрии Φ доказано в теореме 4 (для случая $p > n$) и в лемме 23 (для случая $p < n$). На основании доказанного выше оператор композиции $\Phi^*\colon L^1_p(\Phi(D)) \to L^1_p(D)$ изоморфен. Отсюда получаем изоморфизм $\varphi^{*-1} \circ \Phi^*\colon L^1_p(\Phi(D)) \to L^1_p(D')$ такой, что $\varphi^{*-1} \circ \Phi^*(f)(x) = f(x)$ для всех точек $x \in \Phi(D)) \cap D'$, где $f \in L^1_p(\Phi(D))$ – произвольная функция.

Аналогично доказанному в [22; теорема 3.1] и [24; предложение 6.10] можно получить следующие свойства:

1) $|\Phi(D)\Delta D'| = 0$;

2) для любого шара $B \subset D'$ множество $B \setminus \Phi(D)\Delta D'$ связное.

Докажем, что в этих условиях оператор ограничения $r\colon L^1_p(D') \to L^1_p(\Phi(D) \cap D')$ – изоморфизм. Если это не так, то существует ненулевая функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $f \equiv 0$ на $\Phi(D) \cap D'$. В силу свойств 1) и 2) эта функция – тождественный нуль на D', поскольку $\nabla f = 0$ п.в. в D', а дополнение $D' \setminus \Phi(D)\Delta D'$ – локально связное множество.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] С. Л. Соболев, “О некоторых группах преобразований n-мерного пространства”, *Докл. АН СССР*, **32**:6 (1941), 380–382.

[2] С. К. Водопьянов, “О регулярности отображений, обратных к соболевским”, *Матем. сб.*, **203**:10 (2012), 3–32; англ. пер.: S. K. Vodop’yanov, “Regularity of mappings inverse to Sobolev mappings”, *Sb. Math.*, **203**:10 (2012), 1383–1410.

[3] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, “Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения”, *Сиб. матем. журн.*, **16**:2 (1975), 224–246; англ. пер.: S. K. Vodop’yanov, V. M. Gol’dšteĭn,, “Lattice isomorphisms of the spaces W^1_n and quasiconformal mappings”, *Siberian Math. J.*, **16**:2 (1975), 174–189.

[4] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, т. I: *Общая теория*, ИЛ, М., 1962, 895 с.; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, v. I: *General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London, 1958, xiv+858 pp.

[5] M. Nakai, “Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces”, *Nagoya Math. J.*, **16** (1960), 157–184.

[6] L. G. Lewis, “Quasiconformal mappings and Royden algebras in space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **158**:2 (1971), 481–492.

[7] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, “Функциональные характеристики квазиизометрических отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **17**:4 (1976), 768–773; англ. пер.: S. K. Vodop’yanov, V. M. Gol’dšteĭn, “Functional characteristics of quasiisometric mappings”, *Siberian Math. J.*, **17**:4 (1976), 580–584.

[8] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, “Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений”, *Некоторые вопросы современной теории функций* (Новосибирск, 1976), ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1976, 18–20.

[9] С. К. Водопьянов, “Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **30**:5 (1989), 25–41; англ. пер.:

S. K. Vodop'yanov, "Mappings of homogeneous groups and imbeddings of functional spaces", *Siberian Math. J.*, **30**:5 (1989), 685–698.

[10] В. М. Гольдштейн, А. С. Романов, "Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева", *Сиб. матем. журн.*, **25**:3 (1984), 55–61; англ. пер.: V. M. Gol'dshtein, A. S. Romanov, "Transformations that preserve Sobolev spaces", *Siberian Math. J.*, **25**:3 (1984), 382–388.

[11] А. С. Романов, "О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса", *Функциональный анализ и математическая физика*, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1985, 117–133.

[12] С. К. Водопьянов, "L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах", *Современные проблемы геометрии и анализа*, Тр. Ин-та матем., **14**, Наука, Новосибирск, 1989, 45–89.

[13] S. K. Vodopyanov, "Composition operators on Sobolev spaces", *Complex analysis and dynamical systems* II (Nahariya, 2003), Contemp. Math., **382**, Israel Math. Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 401–415.

[14] С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев, "Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения", *Сиб. матем. журн.*, **55**:5 (2014), 1001–1039; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, N. A. Evseev, "Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and quasi-isometric mappings", *Siberian Math. J.*, **55**:5 (2014), 817–848.

[15] К. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев, "Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений", *Докл. РАН*, **464**:2 (2015), 131–135; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, N. A. Evseev, "Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and metric properties of mappings", *Dokl. Math.*, **92**:2 (2015), 532–536.

[16] К. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев, "Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения", *Сиб. матем. журн.*, **56**:5 (2015), 989–1029; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, N. A. Evseev, "Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and quasiconformal mappings", *Siberian Math. J.*, **56**:5 (2015), 789–821.

[17] В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1986, 404 с.; англ. пер.: V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*, Monogr. Stud. Math., **23**, Pitman, Boston, MA, 1985, xiii+344 pp.

[18] G. Bourdaud, G. Sickel, "Changes of variable in Besov spaces", *Math. Nachr.*, **198** (1999), 19–39.

[19] H. Koch, P. Koskela, E. Saksman, T. Soto, "Bounded compositions on scaling invariant Besov spaces", *J. Funct. Anal.*, **266**:5 (2014), 2765–2788.

[20] P. Koskela, Dachun Yang, Yuan Zhou, "Pointwise characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces and quasiconformal mappings", *Adv. Math.*, **226**:4 (2011), 3579–3621.

[21] С. К. Водопьянов, "О допустимых заменах переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях", *Докл. РАН*, **468**:6 (2016), 609–613; англ. пер.: S. K. Vodopyanov, "On admissible changes of variables for Sobolev functions on (sub)Riemannian manifolds", *Dokl. Math.*, **93**:3 (2016), 318–321.

[22] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, "Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p, квазиконформных и квазиизометрических отображений", *Сиб. матем. журн.*, **18**:1 (1977), 48–68; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dshtein, "Criteria for the removability of sets in spaces of L^1_p quasiconformal and quasiisometric mappings", *Sib. Math. J.*, **18** (1977), 35–50.

[23] С. К. Водопьянов, В. М. Черников, "Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения", *Линейные операторы, согласованные с порядком*, Тр. Ин-та матем.

СО РАН, **29**, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1995, 7–62; англ. пер.: V. M. Chernikov, S. K. Vodop'yanov, "Sobolev spaces and hypoelliptic equations. I", *Siberian Adv. Math.*, **6**:3 (1996), 27–67; II, № 4, 64–96.

[24] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, "Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах", *Сиб. матем. журн.*, **37**:1 (1996), 70–89; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, "Approximately differentiable transformations and change of variables on nilpotent groups", *Siberian Math. J.*, **37**:1 (1996), 62–78.

[25] S. K. Vodop'yanov, "$\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics", *Труды по анализу и геометрии* (Новосибирск, 1999), ИМ СО РАН, Новосибирск, 2000, 603–670.

[26] С. К. Водопьянов, "О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно", *Матем. сб.*, **194**:6 (2003), 67–86; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, "Differentiability of maps of Carnot groups of Sobolev classes", *Sb. Math.*, **194**:6 (2003), 857–877.

[27] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, "Операторы суперпозиции в пространствах Соболева", *Изв. вузов. Матем.*, 2002, № 10, 11–33; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, "Superposition operators in Sobolev spaces", *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), **46**:10 (2002), 9–31.

[28] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, "Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I", *Матем. тр.*, **6**:2 (2003), 14–65; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, "Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I", *Siberian Adv. Math.*, **14**:4 (2004), 78–125.

[29] Ю. Г. Решетняк, "Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве", *Сиб. матем. журн.*, **38**:3 (1997), 657–675; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, "Sobolev-type classes of functions with values in a metric space", *Siberian Math. J.*, **38**:3 (1997), 567–583.

[30] S. K. Vodopyanov, "Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings", *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 249–301.

[31] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987, 760 с.; пер. с англ.: H. Federer, *Geometric measure theory*, Grundlehren Math. Wiss., **153**, Springer-Verlag, New York, 1969, xiv+676 pp.

[32] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1992, viii+268 pp.

[33] P. Hajłasz, "Change of variables formula under the minimal assumptions", *Colloq. Math.*, **64**:1 (1993), 93–101.

[34] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956, 250 с.; пер. с фр.: G. de Rham, *Variétés différentiables. Formes*, *courants*, *formes harmoniques*, Actualités Sci. Ind., **1222**, = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago III, Hermann et Cie, Paris, 1955, vii+196 pp.

[35] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1985, 416 с.; англ. пер.: V. G. Maz'ja, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985, xix+486 pp.

[36] D. V. Isangulova, S. K. Vodopyanov, "Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups", *Eurasian Math. J.*, **1**:3 (2010), 58–96.

[37] E. M. Stein, *Harmonic analysis*: *real-variable methods*, *orthogonality*, *and oscillatory integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, xiv+695 pp.

[38] D. V. Isangulova, S. K. Vodopyanov, "Sharp geometric rigidity of isometries on Heisenberg groups", *Math. Ann.*, **355**:4 (2013), 1301–1329.

[39] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982, 286 с.; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, *Space mappings with bounded distortion*, Transl. Math. Monogr., **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xvi+362 pp.

Сергей Константинович Водопьянов
(Sergei K. Vodop'yanov)
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
г. Новосибирск;
Механико-математический факультет,
Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет
E-mail: vodopis@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
29.12.2016 и 19.07.2018