С. Е. Пастухова, Д. А. Якубович, О галёркинских приближениях в задаче Дирихле с $p(x)$-лапласианом, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 1, 155–174

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9019

УДК 517.956.25+517.956.8

С. Е. Пастухова, Д. А. Якубович

О галёркинских приближениях в задаче Дирихле с $p(x)$-лапласианом

Изучается задача Дирихле с $p(\,\cdot\,)$-лапласианом в ограниченной области, где $p(\,\cdot\,)$ – измеримая функция, отделенная от 1 и ∞. Строится система галёркинских приближений для так называемого H-решения или любого другого вариационного решения. Доказываются оценки в энергетических нормах для погрешности этих приближений.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: галёркинские приближения, уравнения с переменным порядком нелинейности, оценка погрешности приближения.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9019

§ 1. Введение

В последнее время активно изучаются нелинейные уравнения с $p(x)$-лапласианом. Это связано, в частности, с их приложениями к нелинейным композитам, электрореологическим и термореологическим жидкостям или модели термистора. В прикладных задачах возникает необходимость использовать приближенные методы решения. Естественно возникают вопросы о сходимости применяемого метода и о быстроте его сходимости. В качестве приближенных решений часто берут галёркинские приближения, они получаются методом Бубнова–Галёркина. За более чем вековую историю своего существования метод Бубнова–Галёркина успешно применялся к самым разнообразным дифференциальным уравнениям и краевым задачам. Нас интересует этот метод применительно к задаче Дирихле с $p(x)$-лапласианом. Наша цель – доказать сходимость галёркинских приближений к точному решению задачи и оценить скорость сходимости.

Предлагаемый здесь результат примыкает к теории предельного перехода в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях с нестандартными условиями коэрцитивности и роста. Этой теории много внимания уделял в последние десятилетия В. В. Жиков (см., например, [1]–[3]). Ему же принадлежит постановка рассматриваемой задачи.

Итак, рассмотрим задачу Дирихле

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)=f \quad \text{в} \ \ \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{1.1}$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ – ограниченная липшицева область, показатель $p(x)$ есть измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$1<\alpha\leqslant p(x)\leqslant\beta<\infty, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (задание № 1.3270.2017/4.6).

выражение $|\nabla u|^{p-2}$ определено как

$$|\nabla u|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_d}\right)^2\right]^{(p-2)/2}.$$

В простейшем случае, когда показатель p постоянный и, более того, $p \equiv 2$, имеем в (1.1) линейное уравнение с классическим оператором Лапласа. Вместо него при $p = \mathrm{const} \neq 2$ возникает так называемый p-лапласиан, действующий уже как нелинейный оператор (постоянного порядка нелинейности), $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Предполагая, что показатель переменный, $p = p(x)$, получаем уравнение (1.1) переменного порядка нелинейности с $p(\,\cdot\,)$-лапласианом, $\Delta_{p(\cdot)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$.

В работе [4] задача Дирихле (1.1) рассматривалась с p-лапласианом для произвольного $p > 1$. В этом случае задача имеет вид

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.3}$$

и ставится в классическом пространстве Соболева $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ (состоящем из функций, суммируемых по области Ω вместе со своим обобщенным градиентом в степени p и имеющих нулевой след на границе $\partial\Omega$) с правой частью f – непрерывным функционалом на X, т.е. $f \in X' = W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$. Норму в X можно определить как $\|u\|_X = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

Под решением задачи (1.3) понимается функция $u \in X$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \langle f, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in X, \tag{1.4}$$

где через $\langle f, \varphi\rangle$ обозначается действие функционала $f \in X'$ на функцию $\varphi \in X$.

Заметим, что (1.4) является уравнением Эйлера–Лагранжа вариационной задачи на отыскание

$$\min_{u\in X} \mathscr{F}(u), \qquad \mathscr{F}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \langle f, u\rangle, \tag{1.5}$$

где $\mathscr{F}(u)$ – функционал энергии.

Существование решения задачи (1.3), притом единственного, хорошо известно и может быть получено либо с помощью вариационного подхода, либо методом монотонности.

Полагая $\varphi = u$ в (1.4), выводим энергетическое равенство и энергетическую оценку

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx = \langle f, u\rangle \leqslant \|f\|_{X'}\|u\|_X,$$

т.е.

$$\|u\|_X^p \leqslant \|f\|_{X'}\|u\|_X,$$

откуда получаем

$$\|u\|_X \leqslant \|f\|_{X'}^{1/(p-1)}, \qquad \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leqslant \|f\|_{X'}^{p'}. \tag{1.6}$$

Перейдем к галёркинским приближениям для решения задачи (1.3). Пусть $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \cdots$ есть расширяющаяся последовательность конечномерных подпространств пространства X таких, что объединение $\bigcup_n X_n$ плотно в X.

Галёркинские приближения u_n, $n \in \mathbb{N}$, определяются как решения следующих вариационных задач в конечномерных пространствах:

$$u_n \in X_n, \qquad \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in X_n. \tag{1.7}$$

Эта задача единственным образом разрешима, как и задача (1.3) (или (1.4)). Для решений u_n справедливы оценки типа (1.6).

В [4] доказан следующий результат о сходимости галёркинских приближений.

Теорема 1 (см. [4; теорема 1.1]). *Пусть u – решение задачи (1.3) и u_n – его галёркинские приближения на X_n (т.е. u_n – решение задачи (1.7)). Тогда*

$$\|u - u_n\|_X \leqslant \begin{cases} \operatorname{dist}(u, X_n), & p = 2, \\ C_1 \|f\|_{X'}^{(p-2)/(p(p-1))} (\operatorname{dist}(u, X_n))^{2/p}, & p > 2, \\ C_2 \|f\|_{X'}^{(2-p)/(2(p-1))} (\operatorname{dist}(u, X_n))^{p/2}, & 1 < p < 2, \end{cases} \tag{1.8}$$

где константы C_1, C_2 зависят только от p.

Видим, что в оценку (1.8) показатель p входит по-разному при $p > 2$ и $1 < p < 2$, значение $p = 2$ является водоразделом. При $p = 2$ оценка особенно проста и нестрогое неравенство реализуется здесь как равенство. Уравнение (1.3) называют *вырожденным* при $p > 2$ и *сингулярным* при $1 < p < 2$, что отражает поведение участвующего в уравнении множителя $|\nabla u|^{p-2}$ в окрестности множества, где $\nabla u = 0$.

Наша цель – получить аналог оценки (1.8) для задачи Дирихле (1.1) с $p(x)$-лапласианом, когда об уравнении можно говорить либо как о вырожденном, либо как о сингулярном, иными словами, когда выполнено одно из двух условий:

(i) $2 \leqslant \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty$;

(ii) $1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta \leqslant 2$.

Задача в этом случае ставится в пространстве Соболева–Орлича с переменным показателем $p(x)$. Это аналог пространства Соболева $W_0^{1,p}(\Omega)$, задействованного в (1.4). Сходимость метода Бубнова–Галёркина изучается в нормах пространства Орлича или в терминах соответствующих модуляров. Для удобства чтения все необходимые сведения о пространствах переменного порядка собраны в § 2 (более полную информацию об этих пространствах можно найти в давней статье [5] и недавно вышедшей монографии [6]). В § 3 даны алгебраические соотношения, на которых основан вывод оценок погрешности приближений. Точная постановка задачи Дирихле приведена в § 4. Отметим особого рода неединственность этой задачи, связанную с тем, что, вообще говоря, не единственным образом определено соболевское пространство с переменным показателем $p = p(x)$. Это обстоятельство часто называют *эффектом*

Лаврентьева. Галёркинские приближения строятся с учетом эффекта Лаврентьева. Сходимость приближений изучается в § 5 и § 6. Наш основной результат сформулирован в § 6 в теореме 3. В § 6 также обсуждаются возможные обобщения полученного результата.

Ввиду значимости задач с $p(x)$-лапласианом для разнообразных приложений наблюдается повышенный интерес к приближенным методам их решения. В довольно свежей работе [7] даны ссылки на имеющуюся литературу по этой тематике. До недавнего времени в основном изучалась только сходимость приближенных решений, полученных по методу конечных элементов, притом без оценки скорости сходимости. В [7] доказаны интересные результаты о сходимости такого рода приближенных решений, но уже с оценкой скорости сходимости в так называемых квазинормах. Оценка имеет степенной характер по h, где h – основной геометрический параметр, характеризующий в методе конечных элементов разбиение области, $h \to 0$. Более точно, в предположении, что показатель $p(x)$ гёльдеров, т.е. $p \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, в [7] установлена следующая оценка сходимости приближенного решения u_h к точному решению u:

$$\|F(\,\cdot\,, \nabla u) - F(\,\cdot\,, \nabla u_h)\|_2 \leqslant h^\alpha \mathrm{const}(\|F(\,\cdot\,, \nabla u)\|_{1,2}), \tag{1.9}$$

где $F(\,\cdot\,, \xi) = |\xi|^{(p(\cdot)-2)/2}\xi$, а $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_{1,2}$ – нормы в пространствах $L^2(\Omega)$ и $W^{1,2}(\Omega)$ соответственно. Видим, что оценка типа (1.9) предполагает повышенную регулярность решения исходной задачи. Последний факт представляет собой известный результат в классической теории с постоянным показателем p и гладкой областью, но не для случая переменного показателя нелинейности и полиэдральной области, типичной для метода конечных элементов. При выводе оценки (1.9) используются предварительно установленные в [7] тонкие результаты из интерполяционной теории в пространствах Лебега с переменным показателем.

Рассматривая общую схему галёркинских приближений, а также $p(x)$-лапласиан с измеримым показателем $p(x)$, мы избегаем вопросов интерполяции и даем оценку точности приближенного решения u_n, найденного в конечномерном пространстве X_n, через расстояние $\mathrm{dist}(u, X_n)$ решения u до X_n. Как будет выражаться через h мажоранта в этой оценке при реализации галёркинских приближений методом конечных элементов, предстоит выяснить в последующих работах. По-видимому, потребуется дополнительная регулярность показателя $p(x)$. Первоначально нам было важно убедиться в том, что близость точного и приближенного решений можно изучать не только в квазинормах, как в (1.9), но и в обычных энергетических нормах, естественно связанных с задачей (1.1).

Оценки (1.8) и (1.9) относятся к априорным, в них мажоранта зависит от точного решения u. Эти оценки характеризуют асимптотическое поведение всего семейства конечномерных приближений, скажем $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, при условии $n \to \infty$, что определяет неограниченный рост размерности приближенной задачи.

Есть другого типа оценки, называемые апостериорными. В них оценивается сверху в некоторой норме (например, энергетической) отклонение какого-то конкретного приближения v от точного решения u, причем мажоранта определяется только самим приближением v, но не решением u. Более точно, это оценки вида

$$\|v-u\| \leqslant \mathscr{M}(v),$$

где функционал $\mathscr{M}(\,\cdot\,)$ таков, что $\mathscr{M}(v)=0$, если $v=u$, и $\mathscr{M}(v)\to 0$, если $\|v-u\|\to 0$. В [8] апостериорные оценки доказаны для широкого класса нелинейных вариационных задач, к которому относится, в частности, и задача минимизации (1.5) с постоянным показателем $p\geqslant 2$. Естественно ожидать аналогичные результаты и для рассматриваемых здесь вариационных задач с переменным показателем нелинейности $p(x)$, но это требует проверки.

§ 2. Пространства переменного порядка

2.1. Пространства Орлича с отделенным от 1 и ∞ показателем. Предположим, что показатель p принадлежит $L^\infty(\Omega)$ и удовлетворяет условию (1.2).

Определим пространство Лебега–Орлича $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ как класс измеримых вектор-функций $v\colon \Omega\to\mathbb{R}^m$ $(m\in\mathbb{N})$ таких, что

$$\varrho_p(v):=\int_\Omega |v(x)|^{p(x)}\,dx<\infty,$$

и наделим его нормой Люксембурга

$$\|v\|_{p(\cdot)}=\inf\{\lambda>0,\ \varrho_p(\lambda^{-1}v)\leqslant 1\}. \tag{2.1}$$

Получим рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Сопряженным будет пространство

$$(L^{p(\cdot)}(\Omega))'=L^{p'(\cdot)}(\Omega),$$

где $p'(x)=p(x)/(p(x)-1)$ – сопряженный по Гёльдеру показатель. Очевидно, что

$$1<\beta'\leqslant p'(x)\leqslant \alpha'<\infty.$$

Для модулара $\varrho_p(v)$ и нормы $\|v\|_{p(\cdot)}$ справедливо двустороннее неравенство

$$\|v\|^\alpha_{p(\cdot)}-1\leqslant \varrho_p(v)\leqslant \|v\|^\beta_{p(\cdot)}+1. \tag{2.2}$$

Кроме того, выполнено свойство единичного шара

$$\|v\|_{p(\cdot)}\leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \varrho_p(v)\leqslant 1. \tag{2.3}$$

Оценку (2.2) можно уточнить:

$$\|v\|^\beta_{p(\cdot)}\leqslant \varrho_p(v)\leqslant \|v\|^\alpha_{p(\cdot)}, \tag{2.4}$$

если $\|v\|_{p(\cdot)}\leqslant 1$ (то же, что $\varrho_p(v)\leqslant 1$, по свойству (2.3)). Следовательно, эквивалентны сходимость по норме и модулярная сходимость:

$$\|v_n-v\|_{p(\cdot)}\to 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \varrho_p(v_n-v)\to 0.$$

Неравенства (2.2) и (2.4) представляют собой частные случаи общей оценки

$$\min(\|v\|^\alpha_{p(\cdot)},\|v\|^\beta_{p(\cdot)})\leqslant \varrho_p(v)\leqslant \max(\|v\|^\alpha_{p(\cdot)},\|v\|^\beta_{p(\cdot)}). \tag{2.5}$$

Неравенство Гёльдера в пространствах Лебега–Орлича имеет вид

$$\int_\Omega |u\cdot v|\,dx \leqslant 2\|u\|_{p(\cdot)}\|v\|_{p'(\cdot)}. \tag{2.6}$$

Здесь константу 2 в правой части можно заменить более точной константой $c_p = 1/\alpha + 1/\beta'$.

Введем пространства Соболева–Орлича

$$W = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega),\ \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx < \infty\right\} \tag{2.7}$$

с нормой

$$\|u\|_W = \|\nabla u\|_{p(\cdot)}. \tag{2.8}$$

В отличие от классических пространств Соболева с постоянным показателем пространства Соболева–Орлича имеют важную особенность: множество $C_0^\infty(\Omega)$ не обязательно плотно в W. Пусть $H = H_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ есть замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в W. Тогда, вообще говоря,

$$H \neq W.$$

Назовем показатель $p(x)$ *регулярным*, если множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в W, т.е. $H = W$.

Пример (А. В. Жиков; см. [9], [10]). Пусть $d = 2$, $\Omega = \{|x| < 1\}$ – единичный круг,

$$p(x) = \begin{cases} \beta, & x_1x_2 > 0, \\ \alpha, & x_1x_2 < 0, \end{cases} \qquad 1 < \alpha < 2 < \beta. \tag{2.9}$$

Тогда $H \neq W$. Следуя В. В. Жикову, предъявим функцию $\psi_0 \in W \setminus H$. Пусть координатные оси разбивают единичный круг на секторы Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, занумерованные, как квадранты плоскости, и пусть ρ, θ – полярные координаты на плоскости. Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1, \\ \sin\theta, & x \in \Omega_2, \\ 0, & x \in \Omega_3, \\ \cos\theta, & x \in \Omega_4. \end{cases}$$

Тогда искомой функцией будет $\psi_0(x) = (1-\rho^2)\psi(x)$.

Важно знать, когда показатель $p(x)$ регулярен. Доказано (см. [11]–[13], а также [10], [6]), что если p обладает свойством логарифмической гёльдеровости, т.е. для некоторой константы $k > 0$

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{k}{\ln(1/|x-y|)}, \qquad x, y \in \Omega, \quad |x-y| \leqslant \frac{1}{4},$$

то показатель p регулярен. Показатель останется регулярным, если приведенный здесь логарифмический модуль непрерывности несколько ухудшить (см. [14]).

2.2. Пространства Лебега с неограниченным показателем. Теперь будем рассматривать в качестве показателей пространства Лебега измеримые функции $p\colon \Omega \to [1,\infty]$. В этом случае $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ состоит из всех измеримых функций $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ таких, что

$$\varrho_p(\lambda v) := \max\biggl[\int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |\lambda v(x)|^{p(x)}\,dx,\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega_\infty} |\lambda v(x)|\biggr] < \infty$$

для некоторого $\lambda > 0$, где $\Omega_\infty = \{x \in \Omega\colon p(x) = \infty\}$. Норма на этом пространстве определена формулой (2.1), как при условии (1.2).

При таких показателях p в неравенство Гёльдера (2.6) надо внести изменения. Определим для заданного $p\colon \Omega \to [1,\infty]$ сопряженный показатель как

$$p'(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } p(x) = 1, \\ 1, & \text{если } p(x) = \infty, \\ \dfrac{p(x)}{p(x)-1} & \text{для других } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_\Omega |u\cdot v|\,dx \leqslant 4\|u\|_{p(\cdot)}\|v\|_{p'(\cdot)} \tag{2.10}$$

и константу в правой части можно уточнить, как это было сделано для неравенства (2.6).

Другие из упомянутых выше свойств пространства $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ претерпевают изменения. Например, вместо свойства единичного шара (2.3) и неравенства (2.4) наблюдается свойство: если $\|v\|_{p(\cdot)} \leqslant 1$, то $\varrho_p(v) \leqslant \|v\|_{p(\cdot)}$. Однако соотношения (2.2)–(2.4) остаются в силе в случае любого ограниченного показателя $p{=}p(x)$, в том числе с нижней границей α в (1.2), равной 1.

Следующая лемма будет полезна в дальнейшем.

Лемма 1 (см. [15]). *Пусть показатель $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ таков, что для почти всех $x \in \Omega$ $1 \leqslant \gamma(x)p(x) \leqslant \infty$. Пусть $f \neq 0$ и $f \in L^{\gamma p(\cdot)}(\Omega)$. Тогда*

$$\begin{aligned} \bigl\||f|^\gamma\bigr\|_{p(\cdot)} &\leqslant \|f\|^{\gamma_1}_{\gamma p(\cdot)}, \quad \text{если } \ \|f\|_{\gamma p(\cdot)} \leqslant 1, \\ \bigl\||f|^\gamma\bigr\|_{p(\cdot)} &\leqslant \|f\|^{\gamma_2}_{\gamma p(\cdot)}, \quad \text{если } \ \|f\|_{\gamma p(\cdot)} \geqslant 1, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\gamma_1 = \operatorname{ess\,inf}_\Omega \gamma(x)$, $\gamma_2 = \operatorname{ess\,sup}_\Omega \gamma(x)$. В частности, если $\gamma = \mathrm{const}$, то $\bigl\||f|^\gamma\bigr\|_{p(\cdot)} \leqslant \|f\|^\gamma_{\gamma p(\cdot)}$.

§ 3. О сильной монотонности функции потока

При доказательстве оценок близости галёркинских приближний к точному решению существенную роль играет свойство сильной монотонности векторной функции

$$l\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad l(a) = |a|^{p-2}a, \tag{3.1}$$

называемой *потоком*, где показатель p больше 1. Это свойство монотонности уточняется в следующей лемме.

Лемма 2. *При $1 < p < 2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \big||b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\big|^{p'} &\leqslant C_1\big(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\big) \cdot (b-a), \\ |b-a|^2 &\leqslant C_2\big(|b|^{2-p} + |a|^{2-p}\big)\big(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\big) \cdot (b-a). \end{aligned} \tag{3.2}$$

При $p > 2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \big||b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\big|^2 &\leqslant C_3\big(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}\big)\big(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\big) \cdot (b-a), \\ C_5|b-a|^p \leqslant C_4|b-a|^2\big(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\big) &\leqslant \big(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a\big) \cdot (b-a). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Константы C_1–C_5 могут зависеть лишь от p.

Неравенства вида (3.2), (3.3), в точности такие или подобные им, повсеместно используются при изучении уравнений с p-лапласианом. Часто они приводятся без доказательства и ссылок на доказательство их в других источниках. В связи с этим дадим необходимые ссылки и некоторые доказательства.

Второе неравенство из (3.3) с константами $C_4 = 1/2$ и $C_5 = 2^{2-p}$ особенно хорошо известно и доказано, например, в [16]. Первое неравенство из (3.3) доказано в [17] в рамках более общего утверждения, касающегося анизотропной векторной функции $l_A(a) = |a|^{p-2}Aa$, где A – симметрическая положительно определенная матрица, подчиненная условию типа Кордеса. Покажем, как из неравенств (3.3) по соображениям двойственности вывести соотношения (3.2).

Обозначим

$$y = |a|^{p-2}a. \tag{3.4}$$

Простые вычисления показывают, что

$$a = |y|^{p'-2}y. \tag{3.5}$$

Изучим определенную на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ форму из леммы 2

$$D(b,a) \equiv (|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a) \cdot (b-a) = (l(b) - l(a)) \cdot (b-a); \tag{3.6}$$

в ее записи учтено обозначение (3.1). Форма однородна степени p по переменным a и b. Ее можно переписать в новых переменных $y = |a|^{p-2}a$ и $z = |b|^{p-2}b$, в результате чего имеем

$$\begin{aligned} D(b,a) &\overset{(3.6)}{=} (l(b) - l(a)) \cdot (b-a) \overset{(3.5)}{=} (z-y) \cdot (|z|^{p'-2}z - |y|^{p'-2}y) \\ &= (l^*(z) - l^*(y)) \cdot (z-y) = D^*(z,y), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где мы ввели обозначение

$$l^*(y) = |y|^{p'-2}y \tag{3.8}$$

и новую форму $D^*(z,y)$, определенную на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, однородную степени p' по y и z.

Пусть $1 < p < 2$ и, значит, $p' > 2$. Тогда справедлив аналог первого неравенства из (3.3) для формы $D^*(z,y)$, а именно

$$\big||z|^{p'-2}z - |y|^{p'-2}y\big|^2 \leqslant c_0 D^*(z,y)(|y|^{p'-2} + |z|^{p'-2}).$$

Перепишем это неравенство в переменных a и b. По формуле обращения (см. (3.5)) $a=|y|^{p'-2}y$ и $b=|z|^{p'-2}y$, а в силу (3.4) $|y|^{p'-2}=|a|^{(p-1)(p'-2)}=|a|^{2-p}$ и $|z|^{p'-2}=|b|^{2-p}$, так как $(p-1)(p'-2)=(p-1)(2-p)/(p-1)=2-p$. Кроме того, в силу (3.7) имеем равенство $D^*(z,y)=D(b,a)$. Окончательно получаем

$$|b-a|^2\leqslant c_0D(b,a)(|b|^{2-p}+|a|^{2-p}),$$

что совпадает со вторым неравенством из (3.2).

Вывод первого неравенства из (3.2) еще проще. Если $1<p<2$ и, значит, $p'>2$, то справедлив аналог второго неравенства из (3.3) для формы $D^*(z,y)$

$$|z-y|^{p'}\leqslant c_1D^*(z,y),$$

который в переменных a и b выглядит как

$$||b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a|^{p'}\leqslant c_1D(b,a),$$

что и требуется.

В заключение этого параграфа отметим, что из монотонности функции (3.1) следует неотрицательность формы (3.7), а именно $D(a,b)\geqslant 0$. Это свойство далее будет учитываться без какого-либо пояснения.

§ 4. Постановка задачи Дирихле

4.1. Вариационные и слабые решения. Ранее были определены самое широкое и самое узкое пространства Соболева с переменным показателем p, а именно $W=W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ и $H=H_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. Если $\operatorname{codim}_W H>1$, то возможно промежуточное пространство V, $H\subset V\subset W$. Неединственность соболевского пространства ведет к неединственности вариационной постановки для задачи (1.1).

Определение. Пусть V – промежуточное подпространство в W, $H\subseteq V\subseteq W$, и пусть $f\in V'$. Тогда функция $u\in V$ называется *V-решением* или *вариационным решением* задачи (1.1), если

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx=\langle f,\varphi\rangle \tag{4.1}$$

для любой $\varphi\in V$.

В случае $V=H$ или $V=W$ говорят об H- или W-решении соответственно.

Наряду с вариационными решениями рассматривают слабые решения задачи (1.1). *Слабым решением* является функция $u\in W$, удовлетворяющая уравнению в смысле распределений на Ω, что означает выполнение интегрального тождества (4.1) на пробных функциях $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Всякое вариационное решение является слабым, но не наоборот.

Существование единственного W-решения и единственного H-решения (а также любого другого V-решения) для задачи (1.1) доказано в [10; § 2]. Для этого применяется вариационный подход. Заметим, что решение в смысле определения является минимизантом на V для функционала энергии

$$\mathscr{F}(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}\,dx - \langle f, u\rangle, \qquad f \in V',$$

который при постоянном p тот же, что в (1.5).

Рассмотрим ситуацию, когда пространство H имеет коразмерность 1 в W и потому кроме W- и H-решений не может быть иных вариационных решений. Резонно поставить вопрос: существуют ли решения другого типа, а именно слабые решения, отличные от этих двух вариационных? Утвердительный ответ дан в теореме 1.4 из [10]. А именно, в рамках приведенного в п. 2.1 примера, когда размерность d равна 2, область $\Omega = \{|x| < 1\}$ – единичный круг и показатель p задан формулой (2.9), пространство H имеет коразмерность 1 в W и для подходящих функций $f \in C_0^\infty(\Omega)$ из правой части (1.1) наблюдаются следующие факты:

W-решение разрывно в точке $x = 0$;

H-решение гёльдерово в $\overline{\Omega}$;

существует континуум различных слабых решений.

4.2. Существование H-решения и оценки ограниченности. Нас интересуют только вариационные решения задачи (1.1). Далее в качестве примера вариационного решения будет рассматриваться H-решение

$$u \in H, \qquad \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle \quad \forall\,\varphi \in H. \tag{4.2}$$

Теорема 2. *При условии (1.2) для любой $f \in H'$ существует единственное H-решение задачи (4.2). Для него и соответствующего ему потока $\xi = |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u$ верны оценки*

$$\|u\|_H \leqslant \max(c_0^{1/(\alpha-1)}, c_0^{1/(\beta-1)}), \tag{4.3}$$

$$\min(\|\xi\|_{p'(\cdot)}^{\beta'}, \|\xi\|_{p'(\cdot)}^{\alpha'}) \leqslant \max(c_0^{\alpha'}, c_0^{\beta'}), \tag{4.4}$$

где

$$c_0 = \|f\|_{H'}. \tag{4.5}$$

Доказательство. После сделанных выше ссылок на работу [10] нам осталось доказать лишь оценки (4.3), (4.4). Они являются аналогами оценок (1.6), легко полученных ранее для задачи (1.1) с p-лапласианом.

Как и в случае $p = \mathrm{const}$, на первом шаге подставим в (4.2) в качестве пробной функции решение $\varphi = u$, что возможно для вариационного решения. Это дает

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u\,dx = \langle f, u\rangle \leqslant \|f\|_{H'}\|u\|_H,$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx \leqslant \|f\|_{H'}\|u\|_H \tag{4.6}$$

и в силу неравенства (2.2)

$$\min(\|u\|_H^\alpha, \|u\|_H^\beta) \leqslant \|f\|_{H'}\|u\|_H.$$

Отсюда получаем

$$\min(\|u\|_H^{\alpha-1}, \|u\|_H^{\beta-1}) \leqslant \|f\|_{H'} \overset{(4.5)}{=} c_0,$$

что дает (4.3).

Используя (4.3), выводим из (4.6) следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx \leqslant \|f\|_{H'}\|u\|_H &\leqslant \|f\|_{H'}\max(c_0^{1/(\alpha-1)}, c_0^{1/(\beta-1)})\\ &\overset{(4.5)}{=} c_0\max(c_0^{1/(\alpha-1)}, c_0^{1/(\beta-1)}) = \max(c_0^{\alpha'}, c_0^{\beta'}).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Получен аналог второй оценки из (1.6), доказанной в § 1 для уравнения с p-лапласианом.

Докажем оценку (4.4). Согласно соотношению типа (2.2) для сопряженного показателя $p'(x)$ имеем

$$\min(\|\xi\|_{p'(\cdot)}^{\beta'}, \|\xi\|_{p'(\cdot)}^{\alpha'}) \leqslant \int_\Omega |\xi|^{p'}\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'}\,dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx,$$

откуда в силу (4.7) следует (4.4).

Наряду с (4.3) и (4.4) приведем более грубые оценки, но которые легко читаются, а именно

$$\|u\|_H \leqslant (\|f\|_{H'}+1)^{1/(\alpha-1)}, \qquad \|\xi\|_{p'(\cdot)} \leqslant 2(\|f\|_{H'}+1)^{\alpha'/\beta'}. \tag{4.8}$$

Например, второе неравенство из (4.8) получается следующим образом:

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{p'(\cdot)}^{\beta'} &\leqslant \int_\Omega |\xi|^{p'}\,dx + 1 = \int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{p'}\,dx + 1 \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + 1\\ &\overset{(4.7)}{\leqslant} (\|f\|_{H'}+1)^{\alpha'} + 1 \leqslant 2(\|f\|_{H'}+1)^{\alpha'}.\end{aligned}$$

§ 5. Галёркинские приближения

5.1. Система Галёркина. Пусть $H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots$ – расширяющаяся последовательность конечномерных подпространств из H, объединение которых $\bigcup_n H_n$ плотно в H. Галёркинское приближение u_n, $n \in \mathbb{N}$, определяется как решение конечномерной задачи

$$u_n \in H_n, \qquad \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,dx = \langle f, \varphi\rangle \quad \forall\,\varphi \in H_n. \tag{5.1}$$

В предположениях теоремы 2 задача (5.1) однозначно разрешима по тем же соображениям, что и задача (4.2), и справедливы оценки типа (4.3), (4.4) и (4.8) для решения u_n и потока $\xi_n = |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n$. Например,

$$\|u_n\|_H \leqslant (\|f\|_{H'}+1)^{1/(\alpha-1)}, \tag{5.2}$$

$$\|\xi_n\|_{p'(\cdot)} \leqslant 2(\|f\|_{H'}+1)^{\alpha'/\beta'}. \tag{5.3}$$

5.2. Критерий точности приближений. Пусть u – решение (4.2) и $\operatorname{dist}(u, H_n)$ – расстояние от u до H_n. Найдется элемент $w_n \in H_n$ такой, что

$$\operatorname{dist}(u, H_n) = \|u - w_n\|_H. \tag{5.4}$$

По выбору множеств H_n величина (5.4) стремится к нулю при $n \to \infty$. Найдем меру близости между решениями u и u_n задач (4.2), (5.1), подчиненную величине (5.4).

Из интегральных тождеств для u и u_n (см. (4.2) и (5.1)) имеем

$$\int_\Omega l(\nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in H,$$
$$\int_\Omega l(\nabla u_n) \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in H_n,$$

если использовать обозначение (3.1) для потоков. Отсюда следует

$$\int_\Omega (l(\nabla u) - l(\nabla u_n)) \cdot (\nabla u - \nabla u_n) \, dx = \int_\Omega (l(\nabla u) - l(\nabla u_n)) \cdot \nabla u \, dx \tag{5.5}$$

и, кроме того,

$$0 = \int_\Omega (l(\nabla u) - l(\nabla u_n)) \cdot \nabla w_n \, dx,$$

где w_n – элемент из (5.4). Вычитанием получаем

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (l(\nabla u) - l(\nabla u_n)) \cdot (\nabla u - \nabla u_n) \, dx \\ &\qquad = \int_\Omega (l(\nabla u) - l(\nabla u_n)) \cdot (\nabla u - \nabla w_n) \, dx, \end{aligned} \tag{5.6}$$

что в обозначении (3.6) можно переписать в виде

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n) \, dx = \int_\Omega (l(\nabla u) - l(\nabla u_n)) \cdot (\nabla u - \nabla w_n) \, dx. \tag{5.7}$$

Оценивая по неравенству Гёльдера (2.6) правую часть (5.7), в силу выбора элемента w_n имеем

$$\begin{aligned} \int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n) \, dx &\leqslant 2\|l(\nabla u) - l(\nabla u_n)\|_{p'(\cdot)} \|\nabla u - \nabla w_n\|_{p(\cdot)} \\ &= 2\|\xi - \xi_n\|_{p'(\cdot)} \operatorname{dist}(u, H_n), \end{aligned} \tag{5.8}$$

где для краткости записи мы перешли к обозначениям $\xi = l(\nabla u)$ и $\xi_n = l(\nabla u_n)$.

В силу оценок (4.8) и (5.3) для потоков ξ и ξ_n получаем

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n) \, dx \leqslant 8(\|f\|_{H'} + 1)^{\alpha'/\beta'} \operatorname{dist}(u, H_n), \tag{5.9}$$

или, коротко,

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n) \, dx \leqslant C \operatorname{dist}(u, H_n), \qquad C = \operatorname{const}(\alpha, \beta, \|f\|_{H'}). \tag{5.10}$$

Видим, что левая часть в (5.10) подчинена величине $\operatorname{dist}(u, H_n)$, а потому стремится к нулю при $n \to \infty$ и может служить мерой близости аппроксимаций u_n к точному решению u.

В последующем изложении часто галёркинские приближения u_n берутся с достаточно большим номером n, $n > n_0$, таким, что выполнено условие

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\, dx \leqslant 1. \tag{5.11}$$

5.3. Усиленный критерий точности. Оценку малости (5.10) можно усилить, предполагая, что рассматриваемое уравнение относится к одному из двух типов: к вырожденному, т.е. $p(x) \geqslant 2$, или к сингулярному, т.е. $p(x) \leqslant 2$. Оценка (5.10) универсальна и годится для уравнения переменного порядка смешанного типа, когда показатель $p = p(x)$ произволен и удовлетворяет неравенству (1.2) с нижней и верхней границами α и β, лежащими по разные стороны от значения 2, т.е. $\alpha < 2 < \beta$.

Лемма 3. *Имеют место оценки*

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\, dx \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^2, \tag{5.12}$$

если $2 \leqslant \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty$, *и*

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\, dx \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^\alpha, \tag{5.13}$$

если $1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta \leqslant 2$. *Постоянная* C *зависит от* $\|f\|_{H'}$, α, β. *Оценка* (5.13) *справедлива при достаточно больших* n, *при которых выполнено приведенное ниже условие малости* (5.14).

Доказательство. Оценим правую часть (5.7), не огрубляя ее, как в (5.8), (5.9), а используя первые соотношения из (3.2) или из (3.3).

Пусть $2 \leqslant \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty$. Тогда в силу первого неравенства из (3.3) на Ω выполнено поточечное неравенство

$$|l(\nabla u) - l(\nabla u_n)| \leqslant CD^{1/2}(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2})^{1/2}, \qquad D = D(\nabla u, \nabla u_n),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\int_\Omega D\, dx &\leqslant \int_\Omega |l(\nabla u) - l(\nabla u_n)|\, |\nabla u - \nabla w_n|\, dx \\ &\leqslant C \int_\Omega D^{1/2}\bigl(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2}\bigr)^{1/2} |\nabla u - \nabla w_n|\, dx \\ &\leqslant C\biggl(\int_\Omega D\, dx\biggr)^{1/2} \biggl(\int_\Omega \bigl(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2}\bigr)|\nabla u - \nabla w_n|^2\, dx\biggr)^{1/2},\end{aligned}$$

где мы воспользовались обычным неравенством Гёльдера. Отсюда получаем

$$\int_\Omega D\, dx \leqslant C \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2})|\nabla u - \nabla w_n|^2\, dx.$$

Здесь и всюду далее C обозначает константу общего вида, значение которой может меняться от строки к строке. При необходимости можно указать, от чего эта константа зависит.

Продолжим оценку последнего интеграла. По неравенству Гёльдера (2.10) с показателями $p(x)/2$ и $p(x)/(p(x)-2)$ имеем

$$\int_\Omega D\,dx \leqslant C\||\nabla u|^{p-2}+|\nabla u_n|^{p-2}\|_{p/(p-2)}\||\nabla u-\nabla w_n|^2\|_{p/2},$$

где использованы сокращенные обозначения $\|\cdot\|_{p/(p-2)}$ и $\|\cdot\|_{p/2}$ для норм Люксембурга в $L^{p(\cdot)/(p(\cdot)-2)}(\Omega)$ и $L^{p(\cdot)/2}(\Omega)$ соответственно. По лемме 1 имеем

$$\||\nabla u-\nabla w_n|^2\|_{p/2} \leqslant \|\nabla u-\nabla w_n\|_p^2,$$

где в правой части стоит $\|u-w_n\|_H^2=(\operatorname{dist}(u,H_n))^2$, если учесть определение нормы в H и выбор элемента w_n.

Кроме того, по неравенству треугольника имеем

$$\||\nabla u|^{p-2}+|\nabla u_n|^{p-2}\|_{p/(p-2)} \leqslant \||\nabla u|^{p-2}\|_{p/(p-2)}+\||\nabla u_n|^{p-2}\|_{p/(p-2)}.$$

Слагаемые последней суммы оценим снова по лемме 1, что дает

$$\||\nabla u|^{p-2}\|_{p/(p-2)} \leqslant \|\nabla u\|_{p(\cdot)}^{\sigma}, \qquad \||\nabla u_n|^{p-2}\|_{p/(p-2)} \leqslant \|\nabla u_n\|_{p(\cdot)}^{\sigma_n},$$

где показатели σ и σ_n принимают значения 0 или $\beta-2$ в зависимости от величины нормы $\|\nabla u\|_{p(\cdot)}$ или $\|\nabla u_n\|_{p(\cdot)}$ соответственно.

Осталось воспользоваться оценками ограниченности (4.8) и (5.2) для u и u_n, чтобы из приведенных выше оценок вывести (5.12).

Теперь пусть $2\leqslant\alpha\leqslant p(x)\leqslant\beta<\infty$. Тогда в силу первого неравенства из (3.2) на Ω выполнено поточечное неравенство

$$|l(\nabla u)-l(\nabla u_n)|^{p'} \leqslant C_1D(\nabla u,\nabla u_n).$$

Поэтому

$$\int_\Omega |l(\nabla u)-l(\nabla u_n)|^{p'}\,dx \leqslant C_1\int_\Omega D(\nabla u,\nabla u_n)\,dx,$$

и, оценивая правую часть, в силу (5.9) получаем

$$\int_\Omega |l(\nabla u)-l(\nabla u_n)|^{p'}\,dx \leqslant 8C_1(\|f\|_{H'}+1)^{\alpha'/\beta'}\operatorname{dist}(u,H_n).$$

Следовательно, для достаточно больших n, $n>n_0$, таких, что

$$\operatorname{dist}(u,H_n) \leqslant \left(8C_1(\|f\|_{H'}+1)^{\alpha'/\beta'}\right)^{-1}=\operatorname{const}(\alpha,\beta,\|f\|_{H'}), \tag{5.14}$$

выполнено условие

$$\int_\Omega |l(\nabla u)-l(\nabla u_n)|^{p'}\,dx \leqslant 1,$$

которое позволяет в силу соотношения типа (2.4) записать неравенство

$$\|l(\nabla u)-l(\nabla u_n)\|_{p'(\cdot)}^{\alpha'} \leqslant \int_\Omega |l(\nabla u)-l(\nabla u_n)|^{p'}\,dx \leqslant C_1\int_\Omega D(\nabla u,\nabla u_n)\,dx, \tag{5.15}$$

так как $p'(x) \leqslant \alpha'$. Отсюда (см. (5.8)) получаем

$$\begin{aligned}\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\,dx &\leqslant \int_\Omega |l(\nabla u) - l(\nabla u_n)|\,|\nabla u - \nabla w_n|\,dx \\ &\leqslant 2\|l(\nabla u) - l(\nabla u_n)\|_{p'(\cdot)}\|\nabla u - \nabla w_n\|_{p(\cdot)} \\ &\leqslant C\biggl(\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\,dx\biggr)^{1/\alpha'}\|u - w_n\|_H\end{aligned}$$

и, значит,

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\,dx \leqslant C\|u - w_n\|_H^\alpha,$$

что эквивалентно (5.13).

§ 6. Оценка погрешности приближения

6.1. Основной результат. Следующая теорема обобщает результат (1.8) на случай переменного показателя $p = p(x)$, когда в (1.1) имеем вырожденное или сингулярное уравнение. При этом, в отличие от (1.8), здесь прослеживается близость галёркинского приближения к точному решению задачи (1.1) не только в отношении градиентов, но и в отношении потоков.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2; u, u_n – решения задач (4.2), (5.1), $\xi = |\nabla u|^{p(\cdot)-2}\nabla u$, $\xi_n = |\nabla u_n|^{p(\cdot)-2}\nabla u_n$ – соответствующие потоки. Тогда*:

(i) *если $2 \leqslant \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta < \infty$, то*

$$\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_n|^p\,dx \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^2, \qquad \int_\Omega |\xi - \xi_n|^{p'}\,dx \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^{\beta'}; \tag{6.1}$$

(ii) *если $1 < \alpha \leqslant p(x) \leqslant \beta \leqslant 2$, то*

$$\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_n|^p\,dx \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^{\alpha\frac{\alpha}{2}}, \qquad \int_\Omega |\xi - \xi_n|^{p'}\,dx \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^{\alpha}. \tag{6.2}$$

Здесь всюду постоянная C зависит от $\|f\|_{H'}$, α, β. Вторая оценка из (6.1) и оценки (6.2) установлены при достаточно больших n, $n > N$, где N зависит от α, β, $\|f\|_{H'}$ и системы подпространств $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Прежде чем доказывать теорему, сделаем несколько замечаний по поводу формулировки и обобщений.

1) Используя соотношения из § 2, можно переписать оценки (6.1) и (6.2) в терминах норм Люксембурга.

2) Как только показатель нелинейности p станет постоянным, оценка (1.8) будет следовать из (6.1), (6.2), если уточнить зависимость константы C в правой части оценки от нормы $\|f\|_{H'}$.

3) Оценки погрешности приближений типов (6.1) и (6.2) в ситуации, когда уравнение с $p(\,\cdot\,)$-лапласианом не укладывается ни в один из случаев (i), (ii), рассмотренных в теореме 3, изучены авторами в отдельной работе [18]. Тогда оценка погрешности галёркинских приближений оказывается более грубой.

Кроме того, в [18] результат обобщен на случай анизотропного $p(\,\cdot\,)$-лапласиана. Анизотропия создается измеримой положительно определенной матрицей $A = A(x)$, которая стоит под знаком дивергенции в $p(\,\cdot\,)$-лапласиане. Тогда вместо уравнения (1.1) имеем $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}A(x)\nabla u) = f$. Это уже не вариационное уравнение. Монотонность его будет обеспечена при дополнительных условиях на показатель $p(x)$ и матрицу $A(x)$. Наши методы позволяют перенести результаты теоремы 3 на случай монотонного уравнения с анизотропным $p(\,\cdot\,)$-лапласианом.

Кроме того, в недавно вышедшей работе [19] изучена непрерывность в сильной топологии функции потока $v \to l(v) = |v|^{p(\cdot)-2}v$, действующей из пространства Лебега–Орлича $L^{p(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ в сопряженное пространство $L^{p'(\cdot)}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. При этом установлены оценки сходимости $\|l(v_n) - l(v)\|_{p'(\cdot)} \to 0$ по порядку малости $\|v_n - v\|_{p(\cdot)} \to 0$. Таким образом, с общих позиций можно вывести из оценок сходимости градиентов ∇u_n галёркинских приближений оценки сходимости потоков ξ_n (см. (6.1) и (6.2)). Ситуация $\alpha < 2 < \beta$, которую нельзя отнести к случаям (i), (ii) из теоремы 3, также разобрана в [19].

4) Как будет видно из дальнейшего, участвующий в формулировке теоремы 3 номер N таков, что выполнено условие достаточной малости при $n > N$ величины $\operatorname{dist}(u, H_n)$. Эта малость обеспечивает в свою очередь условия

$$\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\,dx \leqslant 1, \quad \int_\Omega |l(\nabla u) - l(\nabla u_n)|^{p'}\,dx \leqslant 1, \qquad n > N,$$

необходимые для некоторых моментов в нашей технике (см., например, обоснование для неравенства (5.15)).

5) В принципе можно не следить за малостью величины $\operatorname{dist}(u, H_n)$, о которой идет речь выше. Но тогда станут сложнее формулировки утверждений. При сравнении норм и модуларов в пространствах Орлича придется использовать вместо (2.4) соотношения (2.5), что приведет к возникновению минимумов и максимумов в неравенствах (см., например, оценки в теореме 2).

6.2. Доказательство теоремы 3. Необходимо оценить четыре интеграла из (6.1) и (6.2) при выполнении указанных условий на показатель $p(x)$.

Случай (i). В силу второго неравенства из (3.3) на Ω справедливо поточечное неравенство

$$|\nabla u - \nabla u_n|^p \leqslant CD(\nabla u, \nabla u_n).$$

Отсюда получаем

$$I_1 = \int_\Omega |\nabla u - \nabla u_n|^p\,dx \leqslant C\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\,dx$$

и в силу оценки (5.12)

$$I_1 \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^2,$$

что и требуется в первом неравенстве из (6.1).

В силу первого неравенства из (3.3) на Ω справедливы поточечные неравенства

$$|\xi - \xi_n|^2 \leqslant CD(\nabla u, \nabla u_n)(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2}),$$
$$|\xi - \xi_n|^{p'} \leqslant CD^{p'/2}(\nabla u, \nabla u_n)(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2})^{p'/2},$$

откуда следует интегральное неравенство

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\xi-\xi_n|^{p'}\,dx &\leqslant C\int_\Omega D(\nabla u,\nabla u_n)^{p'/2}(|\nabla u|^{p-2}+|\nabla u_n|^{p-2})^{p'/2}\,dx\\ &\leqslant C\|D^{p'/2}(\nabla u,\nabla u_n)\|_{2/p'}\|(|\nabla u|^{p-2}+|\nabla u_n|^{p-2})^{p'/2}\|_{2/(2-p')},\end{aligned}\tag{6.3}$$

где на втором шаге мы применили неравенство Гёльдера (2.10) с сопряженными показателями

$$q(x)=\frac{2}{p'(x)},\qquad q'(x)=\frac{2}{2-p'(x)}$$

(последний может быть неограниченным и принимать бесконечное значение на множестве ненулевой меры). Здесь использованы сокращенные обозначения $\|\cdot\|_{2/p'}$ и $\|\cdot\|_{2/(2-p')}$ для норм Люксембурга в пространствах $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ и $L^{q'(\cdot)}(\Omega)$ соответственно с указанными выше переменными показателями.

По определению модулара (см. п. 2.1)

$$\varrho_{2/p'}(D^{p'/2}(\nabla u,\nabla u_n))=\int_\Omega (D^{p'/2}(\nabla u,\nabla u_n))^{2/p'}\,dx=\int_\Omega D(\nabla u,\nabla u_n)\,dx\leqslant 1,$$

так как $D(\nabla u,\nabla u_n)\geqslant 0$ и предполагается выполненным условие (5.11).

Используя соотношение типа (2.4), получаем

$$\|D^{p'/2}(\nabla u,\nabla u_n)\|_{2/p'}\leqslant\left(\int_\Omega D(\nabla u,\nabla u_n)\,dx\right)^{\beta'/2},$$

так как $2/p'(x)\leqslant 2/\beta'$.

Вторую норму в (6.3) оценим по лемме 1, а именно

$$\|(|\nabla u|^{p-2}+|\nabla u_n|^{p-2})^{p'/2}\|_{2/(2-p')}\leqslant\||\nabla u|^{p-2}+|\nabla u_n|^{p-2})\|^{\sigma}_{p'/(2-p')},\tag{6.4}$$

где σ равно $\beta'/2$ или 1 в зависимости от значения нормы, стоящей в правой части (6.4), так как $\beta'/2\leqslant p'(x)/2\leqslant 1$ на Ω. Поскольку $p'/(2-p')=p/(p-2)$, изменим индекс в обозначении изучаемой нормы: $\|\cdot\|_{p'/(2-p')}=\|\cdot\|_{p/(p-2)}$.

К правой части неравенства (6.4) применим неравенство треугольника и снова лемму 1, взяв пару показателей $\gamma(x)=p(x)-2$ и $p(x)/(p(x)-2)$ (последний может быть неограниченным на Ω), в результате чего получим

$$\begin{aligned}\||\nabla u|^{p-2}+|\nabla u_n|^{p-2}\|_{p/(p-2)} &\leqslant\||\nabla u|^{p-2}\|_{p/(p-2)}+\||\nabla u_n|^{p-2}\|_{p/(p-2)}\\ &\leqslant\|\nabla u\|_p^{\sigma_0}+\|\nabla u_n\|_p^{\sigma_n}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Здесь σ_0 и σ_n принимают значения $\beta-2$ или 0 в зависимости от значений норм, стоящих в правой части (6.5), так как $0\leqslant p(x)-2\leqslant\beta-2$ на Ω.

Из неравенства (6.3), следующих за ним оценок, а также (4.8), (5.2) и (5.12) получаем

$$\int_\Omega|\xi-\xi_n|^{p'}\,dx\leqslant C(\mathrm{dist}(u,H_n))^{\beta'},\qquad C=\mathrm{const}(\alpha,\beta,\|f\|_{H'}),$$

что и требуется в оценке (6.1) для потоков.

Случай (ii). В силу второго неравенства из (3.2) на Ω справедливы поточечные неравенства

$$|\nabla u - \nabla u_n|^2 \leqslant CD(\nabla u, \nabla u_n)(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla u_n|^{2-p}),$$
$$|\nabla u - \nabla u_n|^p \leqslant CD^{p/2}(\nabla u, \nabla u_n)(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla u_n|^{2-p})^{p/2}.$$

Отсюда следует интегральная оценка

$$I_2 = \int_\Omega |\nabla u - \nabla u_n|^p \leqslant C \int_\Omega D^{p/2}(\nabla u, \nabla u_n)(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla u_n|^{2-p})^{p/2}\, dx,$$

из которой по неравенству Гёльдера (2.10) с показателями

$$q(x) = \frac{2}{p(x)}, \qquad q'(x) = \frac{2}{2-p(x)}$$

получаем

$$I_2 \leqslant C\|D^{p/2}(\nabla u, \nabla u_n)\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)}\|(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla u_n|^{2-p})^{p/2}\|_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)}. \tag{6.6}$$

Теперь оценим сверху нормы в (6.6). Поскольку

$$D(\nabla u, \nabla u_n) \geqslant 0, \qquad \int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\, dx \leqslant 1,$$

имеем оценку модулара

$$\varrho_q(D^{p/2}(\nabla u, \nabla u_n)) = \int_\Omega (D^{p/2}(\nabla u, \nabla u_n))^q\, dx = \int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\, dx \leqslant 1, \tag{6.7}$$

которая позволяет сравнивать модулар и соответствующую норму Люксембурга в силу соотношения типа (2.4). А именно

$$\|D^{p/2}(\nabla u, \nabla u_n)\|^{2/\alpha}_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \varrho_q(D^{p/2}(\nabla u, \nabla u_n)) \overset{(6.7)}{=} \int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\, dx, \tag{6.8}$$

так как $q(x) = 2/p(x) \leqslant 2/\alpha$.

Для оценки второй нормы в (6.6) используем лемму 1, взяв показатели $q'(x) = 2/(2-p(x)) \geqslant 2/(2-\alpha)$ и $\gamma(x) = p(x)/2$; первый из них может быть неограниченным. Учтем, что $q'p/2 = p/(2-p)$ на Ω, поэтому

$$\|(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla u_n|^{2-p})^{p/2})\|_{L^{q'(\cdot)}(\Omega)} \leqslant \||\nabla u|^{2-p} + |\nabla u_n|^{2-p}\|^{\sigma}_{L^{p(\cdot)/(2-p(\cdot))}(\Omega)}, \tag{6.9}$$

где σ равен $\alpha/2$ или 1 в зависимости от значений нормы, стоящей в правой части (6.9). Применим неравенство треугольника и снова лемму 1, взяв соответствующую пару показателей, в результате чего получим

$$\begin{aligned}
&\||\nabla u|^{2-p} + |\nabla u_n|^{2-p}\|_{L^{p(\cdot)/(2-p(\cdot))}(\Omega)} \\
&\qquad \leqslant \||\nabla u|^{2-p}\|_{L^{p(\cdot)/(2-p(\cdot))}(\Omega)} + \||\nabla u_n|^{2-p}\|_{L^{p(\cdot)/(2-p(\cdot))}(\Omega)} \\
&\qquad \leqslant \|\nabla u\|^{\sigma_0}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|\nabla u_n\|^{\sigma_n}_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},
\end{aligned} \tag{6.10}$$

где показатели σ_0 и σ_n равны $2-\alpha$ или $2-\beta$ в зависимости от значений нормы, к которой они относятся.

Окончательно из (6.6)–(6.10), (4.8), (5.2) и (5.13) заключаем, что

$$I_2 \leqslant C\biggl(\int_\Omega D_A(\nabla u, \nabla u_n)\,dx\biggr)^{\alpha/2} \leqslant C\operatorname{dist}(u, H_n)^{\alpha\frac{\alpha}{2}},$$
$$C = \operatorname{const}(\alpha, \beta, \|f\|_{H'}),$$

что и требуется в оценке (6.2) для градиентов.

Наконец, запишем соотношения

$$\int_\Omega |\xi - \xi_n|^{p'}\,dx \leqslant C\int_\Omega D(\nabla u, \nabla u_n)\,dx \leqslant C(\operatorname{dist}(u, H_n))^\alpha,$$
$$C = \operatorname{const}(\alpha, \beta, \|f\|_{H'}),$$

где использованы первое поточечное неравенство из (3.2) и неравенство (5.13). Таким образом, доказана последняя из оценок (6.2).

Список литературы

[1] В. В. Жиков, “К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:2 (2009), 19–38; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On the technique for passing to the limit in nonlinear elliptic equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:2 (2009), 96–112.

[2] В. В. Жиков, “Об одном подходе к разрешимости обобщенных уравнений Навье–Стокса”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:3 (2009), 33–53; англ. пер.: V. V. Zhikov, “New approach to the solvability of generalized Navier–Stokes equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:3 (2009), 190–207.

[3] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “Леммы о компенсированной компактности в эллиптических и параболических уравнениях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 110–137; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 104–131.

[4] В. В. Жиков, Д. А. Якубович, “Galerkin approximations in problems with p-Laplacian (in Russian)”, Проблемы матем. анализа, **85**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2016, 95–106; англ. пер.: V. V. Zhikov, D. A. Yakubovich, “Galerkin approximations in problems with p-Laplacian”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **219**:1 (2016), 99–111.

[5] O. Kováčik, J. Rákosník, “On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$”, *Czechoslovak Math. J.*, **41(116)**:4 (1991), 592–618.

[6] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Math., **2017**, Springer, Heidelberg, 2011, x+509 pp.

[7] D. Breit, L. Diening, S. Schwarzacher, “Finite element approximation of the $p(\,\cdot\,)$-Laplacian”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **53**:1 (2015), 551–572.

[8] S. I. Repin, “A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 28, Зап. науч. сем. ПОМИ, **243**, ПОМИ, СПб., 1997, 201–214; *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **99**:1 (2000), 927–935.

[9] В. В. Жиков, “Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 675–710; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:1 (1987), 33–66.

[10] В. В. Жиков, “О вариационных задачах и нелинейных уравнениях с нестандартными условиями роста”, Проблемы матем. анализа, **54**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2011, 23–112; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **173**:5 (2011), 463–570.

[11] V. V. Zhikov, “Lavrentiev phenomenon and homogenization for some variational problems”, *Composite media and homogenization theory*, Proceedings of the 2nd workshop (Trieste, 1993), World Sci., Singapore, 1995, 273–288.

[12] V. V. Zhikov, “On Lavrentiev’s phenomenon”, *Russian J. Math. Phys.*, **3**:2 (1995), 249–269.

[13] В. В. Жиков, “Об эффекте Лаврентьева”, *Докл. РАН*, **345**:1 (1995), 10–14; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On Lavrent’ev’s effect”, *Dokl. Math.*, **52**:3 (1995), 325–329.

[14] В. В. Жиков, “О плотности гладких функций в пространстве Соболева–Орлича”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 35, Зап. науч. сем. ПОМИ, **310**, ПОМИ, СПб., 2004, 67–81; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Density of smooth functions in Sobolev–Orlich spaces”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **132**:3 (2006), 285–294.

[15] D. E. Edmunds, J. Rákosník, “Sobolev embeddings with variable exponent”, *Studia Math.*, **143**:3 (2000), 267–293.

[16] P. Lindqvist, *Notes on the p-Laplace equation*, Rep. Univ. Jyväskylä Dep. Math. Stat., **102**, Jyväskylä, Univ. of Jyväskylä, 2006, ii+80 pp.

[17] M. D. Surnachev, V. V. Zhikov, “On existence and uniqueness classes for the Cauchy problem for parabolic equations of the p-Laplace type”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **12**:4 (2013), 1783–1812.

[18] S. E. Pastukhova, D. A. Yakubovich, “Galerkin approximations in problems with anisotropic $p(\,\cdot\,)$-Laplacian”, *Appl. Anal.* (to appear), Publ. online 2018.

[19] С. Е. Пастухова, “О некоторых следствиях сильной сходимости в пространстве Лебега–Орлича”, Проблемы матем. анализа, **95**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2018, 61–68; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “On consequences of the strong convergence in Lebesgue–Orlich spaces”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **235**:3 (2018), 312–321.

Светлана Евгеньевна Пастухова
(Svetlana E. Pastukhova)
МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва
E-mail: pas-se@yandex.ru

Поступила в редакцию
16.10.2017 и 19.05.2018

Денис Андреевич Якубович
(Denis A. Yakubovich)
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
E-mail: yakubovichfmf@mail.ru