Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. М. Кесельман, Изопериметрическое неравенство на конформно-параболических многообразиях, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 1, 3–36

DOI: https://doi.org/10.4213/sm6379

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
`http://www.mathnet.ru/rus/agreement`

Параметры загрузки:
IP: 178.186.63.117
4 июня 2022 г., 18:32:28

УДК 517.54+514.774

В. М. Кесельман

Изопериметрическое неравенство на конформно-параболических многообразиях

Для некомпактных римановых многообразий без края получено доказательство гипотезы о том, что на любом римановом многообразии конформно-параболического типа конформной заменой метрики можно привести изопериметрическую функцию (отвечающую за изопериметрическое неравенство) к тому же виду, какой она имеет в евклидовом пространстве соответствующей размерности.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: риманово многообразие, конформный тип многообразия, конформные метрики, конформная емкость, изопериметрическая функция.

Введение

В настоящей работе изложено доказательство результата, анонсированного в кратком сообщении [1].

Всюду ниже M – произвольное n-мерное ($n \geqslant 2$) некомпактное риманово многообразие без края, наделенное римановой метрикой g. Все рассматриваемые далее области в M предполагаются имеющими кусочно гладкую границу (если она не пуста).

Под *изопериметрическим неравенством* на римановом многообразии $M = (M, g)$, как обычно, понимается соотношение вида

$$\mathscr{P}(V(D)) \leqslant S(\partial D) \qquad (*)$$

между *объемом* $V(D)$ произвольной предкомпактной области $D \subset M$ и *площадью* $S(\partial D)$ ее границы ∂D, где $\mathscr{P} = \mathscr{P}(x)$, $x > 0$, – некоторая вещественная функция, называемая *изопериметрической функцией* многообразия M в метрике g. (Естественно, объем V и площадь S определяются как n-мерная и $(n-1)$-мерная меры Хаусдорфа соответствующих множеств в метрике g.)

Разумеется, интересна лишь нетривиальная (т.е. отличная от нуля) изопериметрическая функция, если таковая существует. В этом случае имеется и нетривиальная *максимальная изопериметрическая функция*

$$\mathscr{P}_{\max}(x) := \inf_{V(D)=x} \{S(\partial D)\}, \qquad x \in (0, V(M)),$$

называемая также *изопериметрическим профилем* многообразия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00073а).

© В. М. Кесельман, 2009

Например, максимальная изопериметрическая функция евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ имеет (с точностью до постоянного множителя c) вид $\mathscr{P}(x) = c \cdot x^{(n-1)/n}$, а для пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ она линейна: $\mathscr{P}(x) = c \cdot x$.

При изменении метрики многообразия его изопериметрическая функция, вообще говоря, меняется. Мы рассматриваем конформные замены метрики многообразия, получаемые умножением его исходной метрики на некоторую всюду положительную гладкую функцию. На физическом языке это отвечает калибровочному преобразованию, связанному с произволом в выборе местных масштабов.

Нас интересует вопрос о приведении максимальной изопериметрической функции многообразия к простейшему виду в классе метрик, конформно-эквивалентных его исходной метрике.

Подобно пространствам Евклида и Лобачевского произвольные некомпактные римановы многообразия можно конформно-инвариантно (т.е. инвариантно относительно конформных замен метрики) разделить на два класса в соответствии с тем, какова конформная емкость абсолюта многообразия. (Определение емкости будет дано ниже.)

Если эта емкость нулевая (как у пространства Евклида $\mathbb{R}^n$), многообразие относится к конформно-параболическому типу; если эта емкость положительна (как в случае пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$), многообразие относится к конформно-гиперболическому типу.

В работе [2] была высказана следующая гипотеза.

Максимальная изопериметрическая функция любого некомпактного риманова многообразия посредством конформной замены метрики приводится (с точностью до постоянного множителя) к тому же виду, какой она имеет в пространстве Евклида или в пространстве Лобачевского в соответствии с конформным типом данного многообразия.

Для многообразий конформно-гиперболического типа гипотеза была доказана в работе [2] при дополнительном условии отграниченности от нуля объема рассматриваемых областей. Затем в работе [3] от этого ограничения удалось освободиться. Тем самым, для гиперболического случая гипотеза доказана полностью.

В настоящей работе доказана теорема, которая дает подтверждение гипотезы для конформно-параболических многообразий без края, но пока при том же, что и выше, дополнительном условии. Возможно, что и в рассматриваемом случае это условие окажется излишним.

§ 1. Формулировка и идея доказательства основной теоремы

1.1. Определения и формулировка теоремы.

1.1.1. *Необходимые определения.*

Конформный тип риманова многообразия. Напомним некоторые определения. Пусть $M = (M, g)$ – некомпактное n-мерное риманово многообразие. Пусть $G \subset M$ – произвольная область, а $K \subset G$ – невырожденный континуум (т.е. отличный от точки связный компакт). Упорядоченная пара (K, G) образует конденсатор на многообразии M.

Конформной емкостью конденсатора (K,G) называется величина

$$\operatorname{cap}(K,G) := \inf_f \int_G |\nabla f|^n \, dv,$$

где нижняя грань берется по всем локально липшицевым и финитным в G функциям f, для которых $f \equiv 1$ на K.

Здесь через $|\nabla f|$ и dv обозначены соответственно норма градиента функции f и элемент объема многообразия M относительно метрики g.

Известно, что *величина* $\operatorname{cap}(K,M)$ *всегда положительна или всегда равна нулю независимо от выбора невырожденного континуума* K.

Таким образом, факт обращения или необращения в нуль емкости $\operatorname{cap}(K,M)$ определяется только геометрией многообразия M на “бесконечности”. (Под окрестностью “бесконечности” понимается, как обычно, внешность произвольного компакта в M.)

В этом смысле говорят о положительной или нулевой конформной емкости абсолюта многообразия. Например, для пространства Лобачевского конформная емкость его абсолюта положительна, а для евклидова пространства она равна нулю.

Будем говорить, что многообразие M является *конформно-параболическим* (или что оно имеет *конформно-параболический тип*), если $\operatorname{cap}(K,M) = 0$ для любого (или хотя бы одного) невырожденного континуума $K \subset M$; в противном случае будем называть M многообразием *конформно-гиперболическим* (или многообразием *конформно-гиперболического типа*).

Класс конформных метрик многообразия. Риманова метрика $\widetilde{g}$ на M называется *конформно-эквивалентной* или, короче, *конформной* метрике g, если $\widetilde{g} = \lambda^2 g$, где $\lambda > 0$ – некоторая гладкая функция на M.

Поскольку величина $\operatorname{cap}(K,G)$, как легко видеть, не меняется при конформных заменах исходной метрики многообразия, то конформный тип многообразия является инвариантом в классе конформных римановых метрик на нем.

В противоположность этому геометрические характеристики такие, как объем, площадь, изопериметрическая функция и т.п., конечно, меняются при конформном изменении метрики многообразия. В связи с этим условимся при переходе от исходной метрики g к конформной ей метрике $\widetilde{g}$ обозначения одноименных геометрических величин наделять тильдой. Например, объем области $D \subset M$ и площадь ее границы ∂D относительно метрики $\widetilde{g}$ будем обозначать через $\widetilde{V}(D)$ и $\widetilde{S}(\partial D)$ соответственно.

1.1.2. *Формулировка теоремы.* Напомним, что n-мерное риманово многообразие $M = (M,g)$ предполагается некомпактным и без края.

Теорема. *Предположим, что многообразие M является конформно-параболическим. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ справедливы следующие утверждения.*

1) *Существует конформная исходной метрике полная риманова метрика $\widetilde{g}$ на M, в которой объем многообразия M бесконечный и выполняется изопериметрическое неравенство евклидова вида*

$$\widetilde{V}(D) \leqslant C\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial D) \tag{1}$$

(с некоторой постоянной $C > 0$) для всех предкомпактных областей $D \subset M$, объем $\widetilde{V}(D)$ которых больше ε.

2) *При этом неравенство (1) является асимптотически точным в том смысле, что неравенство*

$$C\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial D) < (1+\varepsilon)\widetilde{V}(D) \tag{2}$$

с той же, что и в (1), постоянной $C = C(\varepsilon)$ выполняется для всех областей D некоторого исчерпания многообразия M.

Под исчерпанием многообразия M понимается, как обычно, непрерывное семейство $\{D(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, областей $D(t) \subset M$ таких, что $D(t_1) \Subset D(t_2)$ при любых $t_1 < t_2$, причем $\bigcup_t D(t) = M$.

В отношении максимальной изопериметрической функции многообразия теорему можно переформулировать следующим образом.

Если многообразие (M, g) имеет конформно-параболический тип, то для любого числа $\varepsilon > 0$ в классе римановых метрик на M, конформно-эквивалентных метрике g, найдется полная метрика $\widetilde{g}$, в которой $\widetilde{V}(M) = +\infty$ и максимальная изопериметрическая функция $\widetilde{\mathscr{P}}_{\max}$ многообразия M удовлетворяет неравенству

$$c \cdot x^{(n-1)/n} \leqslant \widetilde{\mathscr{P}}_{\max}(x) < (1+\varepsilon)c \cdot x^{(n-1)/n}$$

при всех значениях $x \in (\varepsilon, +\infty)$.

Доказательство сформулированной теоремы, которым мы располагаем, многоступенчато и на некоторых этапах сопряжено с преодолением технических трудностей, требующих кропотливых выкладок и оценок. Однако общую схему можно изложить просто. Она состоит в следующем.

Этап 1. На многообразии M выделяется подмногообразие H с краем, имеющее облик трубки (полосы), идущей вдоль некоторой геодезической, уходящей на бесконечность. На подмногообразии H производится такая конформная замена метрики g, что в новой метрике $\widetilde{g}_H$ на H будет выполнено асимптотически точное изопериметрическое неравенство евклидова вида.

Этап 2. Построенная в H метрика $\widetilde{g}_H$ специальным образом продолжается на все многообразие M так, что в новой метрике $\widetilde{g}$, конформной исходной метрике многообразия M, на M выполняется асимптотически точное изопериметрическое неравенство евклидова вида.

Отметим, что в этом изложении конформная параболичность многообразия M будет использована только на этапе распространения метрики с H на все многообразие M.

В последующей реализации этой схемы содержание этапа 1 составляет утверждение, названное нами основной леммой. Точная формулировка леммы приводится в п. 1.2.

Этап 2 доказательства теоремы состоит в выводе теоремы из основной леммы. Этот вывод рассматривается в п. 1.3.

1.2. Формулировка основной леммы. По существу формулировка основной леммы совпадает с формулировкой теоремы по отношению к некоторому подмногообразию H многообразия M и метрике $\widetilde{g}_H$ на H, конформной исходной метрике g.

Однако поскольку многообразие H имеет непустой край ∂H, в изопериметрическом неравенстве, которое будет действовать на многообразии H, границу области $D \subset H$ естественно понимать как *относительную в H границу области D*, т.е. как $\partial_H D := \overline{\partial D \setminus \partial H}$.

Кроме того, для возможности требуемого продолжения метрики $\widetilde{g}_H$ с H на все многообразие M (см. схему доказательства теоремы) многообразие $(H, \widetilde{g}_H)$ должно обладать определенными дополнительными свойствами. Для того чтобы сформулировать эти свойства, сделаем некоторые отступления.

Начнем с простого замечания: без ограничения общности проводимых рассмотрений исходное многообразие (M, g) можно считать полным относительно метрики g, поскольку этого всегда можно достичь конформной заменой исходной метрики (см., например, [4]).

Далее, известно (см., например, [5; добавление, § 1, лемма 1]), что на полном некомпактном многообразии (M, g) из любой его точки p можно выпустить *геодезический луч* γ, т.е. геодезическую бесконечной g-длины, идущую из p в "бесконечность" и такую, что любая ее компактная связная часть является кратчайшей между своими точками.

Основная лемма. *Возьмем какой-либо геодезический луч γ на многообразии (M, g) с вершиной в точке p. Пусть $U \subset M$ – произвольная открытая окрестность луча γ.*

Рассмотрим исчерпание многообразия M, состоящее из открытых g-шаров $B_p(t)$ радиусов t с центром в точке p.

Тогда для любого числа $\epsilon > 0$ существуют n-мерное некомпактное замкнутое в M подмногообразие $H \subset U$ и конформная метрике g риманова метрика $\widetilde{g}_H$ на H, в которой многообразие H имеет бесконечный объем и обладает следующими основными свойствами:

1) *на многообразии $(H, \widetilde{g}_H)$ выполняется относительное изопериметрическое неравенство евклидова вида*
$$\widetilde{V}(D) \leqslant C_H \widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial_H D) \tag{3}$$
(с некоторой постоянной $C_H = C_H(\epsilon) > 0$) для всех предкомпактных областей $D \subset H$ таких, что $\widetilde{V}(D) > \epsilon$;

2) *при этом неравенство (3) является асимптотически точным в том смысле, что неравенство*
$$C_H \widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial_H D) < (1 + \epsilon)\widetilde{V}(D) \tag{4}$$
(с той же, что и в (3), постоянной C_H) выполняется для всех областей D, пробегающих некоторое исчерпание многообразия H;

а также дополнительными свойствами:

1′) *метрика $\widetilde{g}_H$ на H является полной, причем такой, что $\widetilde{g}_H / g \geqslant \delta^2$ всюду на H для некоторого числа $\delta > 0$;*

2′) *исчерпание $\{G(t)\}$ многообразия H, удовлетворяющее основному свойству 2), можно построить таким, что порождаемое им исчерпание $\{G(t) \cap \partial H\}$ края ∂H будет совпадать с исчерпанием $\{B_p(t) \cap \partial H\}$ края ∂H посредством g-шаров $B_p(t)$.*

Поясним, что совпадение двух исчерпаний мы понимаем как совпадение классов множеств, составляющих эти исчерпания.

1.3. Вывод теоремы из основной леммы. Доказательству основной леммы посвящены § 2 и § 3. Однако сначала завершим на ее основе доказательство самой теоремы.

Как было отмечено при описании схемы доказательства теоремы, именно на завершающем его этапе важно, что исходное многообразие (M, g) имеет конформно-параболический тип. Точнее, мы будем использовать следующее свойство таких многообразий.

1.3.1. *Одно свойство конформной параболичности.* Для произвольной точки $p \in M$ обозначим через $B_p(t)$ открытый g-шар радиуса t с центром p и назовем функции $V(B_p(t))$ и $S(\partial B_p(t))$ соответственно *функциями объема и площади многообразия* M в метрике g. Отметим, что $V'(B_p(t)) = S(\partial B_p(t))$ для почти всех $t > 0$.

Теперь сформулируем нужное нам свойство конформно-параболических многообразий.

Пусть многообразие M имеет конформно-параболический тип.

Тогда любая непрерывная положительная функция $s(t)$, $t \in (0, +\infty)$, может служить при всех достаточно больших значениях t функцией площади многообразия M относительно некоторой полной метрики на M, конформной исходной метрике многообразия.

Кроме того (как следствие), произвольная гладкая без критических точек положительная и возрастающая на $(0, +\infty)$ функция $v(t)$ может служить при всех достаточно больших t функцией объема многообразия M в некоторой полной метрике, конформной исходной метрике многообразия.

Это свойство конформной параболичности многообразия восходит к критерию конформного типа, приведенному в [6]. Впервые оно было получено в [7], а затем независимо в [4], правда, в несколько иной, но эквивалентной форме.

1.3.2. *Завершение доказательства теоремы.* Зададим произвольно число $\varepsilon > 0$ и обозначим через ϵ некоторое зависящее от ε (и существенно меньшее его) положительное число, выбор которого будет описан ниже.

Ясно, что при доказательстве теоремы исходную метрику g можно заменить на любую конформную ей метрику.

Поскольку многообразие M имеет конформно-параболический тип, то на основании приведенного свойства конформной параболичности можно считать, что исходная метрика g является полной, а объем $V(M)$ многообразия (M, g) и его функция площади $S(\partial B_p(t))$ для некоторой точки $p \in M$ удовлетворяют условиям

$$V(M) < \epsilon; \qquad S(\partial B_p(t)) = O(1) \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{5}$$

Рассмотрим многообразие $(H, \widetilde{g}_H)$, удовлетворяющее утверждению основной леммы, стало быть, обладающее всеми указанными там основными и дополнительными свойствами. Метрика $\widetilde{g}_H$ на H, будучи конформной метрике g на H, имеет вид $\widetilde{g}_H = \lambda_H^2 g|_H$ для некоторой гладкой положительной в H функции λ_H.

Искомую метрику $\widetilde{g}$ на M построим как продолжение метрики $\widetilde{g}_H$ в виде $\widetilde{g} = \lambda^2 g$ для некоторой положительной в M функции λ. С этой целью, опираясь на дополнительное свойство 1′), продолжим функцию λ_H до гладкой функции λ

на M такой, что

$$\lambda \geqslant \delta \quad \text{всюду в } M, \qquad \lambda = \lambda_H \quad \text{на } H. \tag{6}$$

При этом функцию λ построим столь близкой к единичной функции на $M \setminus H$, чтобы наряду с условиями (5) теперь уже в метрике $\widetilde{g} = \lambda^2 g$ также выполнялись условия

$$\widetilde{V}(M \setminus H) < \epsilon; \qquad \widetilde{S}(\partial B_p(t) \setminus H) = O(1) \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{7}$$

Убедимся, что так построенная метрика $\widetilde{g}$, будучи конформной исходной метрике g, является искомой, т.е. удовлетворяет (для заданного числа ε) утверждениям 1) и 2) теоремы.

Прежде всего, полнота метрики $\widetilde{g}$ следует из полноты метрики g с учетом неравенства в (6).

Проверим справедливость изопериметрического неравенства (1) для произвольной предкомпактной области $D \subset M$, объем которой в метрике $\widetilde{g}$ больше чем ε.

Сравним этот объем с $\widetilde{g}$-объемом множества $D \cap H$. Так как $\widetilde{V}(D) = \widetilde{V}(D \setminus H) + \widetilde{V}(D \cap H)$, а $\widetilde{V}(D \setminus H) < \epsilon$ в силу (7), то $\widetilde{V}(D \cap H) > \varepsilon - \epsilon$ и

$$\widetilde{V}(D) = \widetilde{V}(D \cap H)\left(\frac{\widetilde{V}(D \setminus H)}{\widetilde{V}(D \cap H)} + 1\right) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \epsilon}\widetilde{V}(D \cap H). \tag{8}$$

Если $\epsilon < \varepsilon/2$, то $\widetilde{V}(D \cap H) > \epsilon$. В этом случае к объему $\widetilde{V}(D \cap H)$ можно применить изопериметрическое неравенство (3) основного свойства 1), в силу которого из (8) получаем искомое неравенство (1):

$$\widetilde{V}(D) < C\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial D), \quad \text{где } C := \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \epsilon}\, C_H,\ \epsilon < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{9}$$

(При этом мы учли еще, что $\partial_H(D \cap H) \subset \partial D$.) Значит, метрика $\widetilde{g}$ удовлетворяет утверждению 1) теоремы.

Докажем для метрики $\widetilde{g}$ справедливость утверждения 2) теоремы. Искомое исчерпание многообразия M построим с помощью исчерпания $\{G(t)\}$ многообразия H, фигурирующего в свойстве 2) основной леммы, причем воспользуемся дополнительным свойством $2')$ этого исчерпания.

Совпадение исчерпаний $\{G(t) \cap \partial H\}$ и $\{B_p(t) \cap \partial H\}$ означает, что

$$G(t) \cap \partial H = B_p(\tau(t)) \cap \partial H$$

для некоторой возрастающей функции $\tau(t)$ (определенной при всех достаточно больших $t > 0$). Тогда множества

$$D(t) := G(t) \cup (B_p(\tau(t)) \setminus H)$$

суть области в M и семейство $\{D(t)\}$ является исчерпанием многообразия M.

Поскольку $\partial D(t) = (\partial_H G(t)) \cup (\partial B_p(\tau(t)) \setminus H)$, то на основании второго условия в (7) функции $\widetilde{g}$-площади $\widetilde{S}(\partial D(t))$ и $\widetilde{S}(\partial_H G(t))$, неограниченно возрастающие в силу неравенства (8), эквивалентны при $t \to +\infty$. Следовательно,

$$\widetilde{S}(\partial D(t)) \leqslant (1 + \epsilon)\widetilde{S}(\partial_H G(t))$$

для всех достаточно больших значений $t > 0$.

Отсюда, применяя к правой части неравенство (4) для $D = G(t)$ и переходя от C_H к постоянной C, определенной в (9), получаем

$$C\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial D(t)) \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \epsilon}(1+\epsilon)^{(2n-1)/(n-1)}\widetilde{V}(D(t)).$$

Тогда, если число $\epsilon > 0$ достаточно мало (при фиксированном ε), из последнего неравенства следует искомое неравенство (2):

$$C\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial D(t)) \leqslant (1+\varepsilon)\widetilde{V}(D(t)).$$

Значит, метрика $\widetilde{g}$ удовлетворяет и утверждению 2) теоремы.

Таким образом, теорема доказана в предположении справедливости основной леммы, к доказательству которой мы теперь переходим.

§ 2. Доказательство основной леммы

2.1. Идея редукции к евклидову пространству $\mathbb{R}^n$. Опишем в общих словах подход к построению многообразия $(H, \widetilde{g}_H)$, удовлетворяющего утверждениям основной леммы.

Возьмем какой-либо геодезический луч γ на многообразии (M, g) и отобразим его изометрично на стандартный луч в $\mathbb{R}^n$, исходящий из начала координат. Полученное отображение, вообще говоря, не продолжается как изометрия ни в какую окрестность луча γ на многообразии M. Однако если окрестность взять достаточно малой, быстро сужающейся к лучу γ по мере его ухода на бесконечность, то такую окрестность уже можно будет почти изометрично погрузить в $\mathbb{R}^n$ с сохранением ранее построенного изометрического отображения γ в пространство $\mathbb{R}^n$.

Формальное доказательство этого вполне очевидного утверждения будет дано в п. 3.3.

Приняв сказанное к сведению, заключаем, что достаточно построить нужное подмногообразие сначала в евклидовом пространстве, например, в виде такой трубчатой окрестности стандартного луча в $\mathbb{R}^n$ (которая достаточно быстро сужается по мере ухода в бесконечность) вместе с подходящей конформно-евклидовой метрикой на этом подмногообразии, относительно которой будет выполнено асимптотически точное изопериметрическое неравенство евклидова вида.

Тогда в качестве искомого подмногообразия $H \subset M$ можно будет взять прообраз этой трубчатой окрестности вместе с метрикой $\widetilde{g}_H$ на H, индуцированной построенной конформно-евклидовой метрикой.

Действительно, все метрические соотношения при почти изометрическом отображении почти сохранятся и, что важно, нужные нам соотношения сохранятся также при согласованных (одновременных и одинаковых) переходах к конформно-эквивалентным метрикам в трубчатой окрестности и на ее прообразе $H \subset M$.

Таким образом, с помощью указанной редукции, строгое обоснование которой будет дано в п. 2.4, доказательство основной леммы сводится к случаю, когда вместо исходного многообразия (M, g) выступает евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Доказательство основной леммы в евклидовом случае излагается в пп. 2.2, 2.3. Сначала (в п. 2.2) для произвольного риманова многообразия (H, g) приводится конструкция конформной g метрики $\widetilde{g}_H$ на H вместе с рядом определенных условий, при выполнении которых многообразие $(H, \widetilde{g}_H)$ обладает основными свойствами, указанными в основной лемме. Затем (в п. 2.3) эта общая конструкция метрики $\widetilde{g}_H$ реализуется на конкретном многообразии H, имеющем вид трубчатой окрестности стандартного луча в $\mathbb{R}^n$, сколь угодно сильно сужающейся на бесконечности. Тогда построенное многообразие $(H, \widetilde{g}_H)$ и будет удовлетворять всем утверждениям основной леммы в евклидовом случае.

2.2. Конструкция и свойства искомой метрики.

2.2.1. *Вспомогательные понятия.* Приведем сначала определения известных понятий, с помощью которых будет построена нужная нам метрика $\widetilde{g}_H$.

Изопериметрическое неравенство евклидова вида на компактном многообразии. Изопериметрическое неравенство евклидова вида, как хорошо известно, выполняется на любом m-мерном ($m \geqslant 2$) компактном римановом многообразии (K, g) с кусочно гладким краем ∂K (возможно, пустым). При этом в силу конечности объема многообразия K необходимо ограничение на объем рассматриваемых в неравенстве множеств (которые для простоты предполагаем *регулярными* в K, т.е. представляющими собой m-мерные подмногообразия в K с кусочно гладкими краями). Справедливо следующее утверждение.

Существует положительная постоянная $I(K)$ такая, что для любого регулярного в K множества $F \subset K$, удовлетворяющего условию $V(F) \leqslant V(K)/2$, выполняется неравенство

$$V(F) \leqslant I(K)\, S^{m/(m-1)}(\partial_K F), \tag{10}$$

где V и S обозначают соответственно объем и площадь, т.е. m-мерный и $(m-1)$-мерный объемы множеств в метрике g на K.

Здесь через $\partial_K F$ обозначена относительная в K граница множества F, т.е. $\partial_K F := \partial F \setminus \partial K$, где ∂F – край многообразия F.

Постоянная $I(K)$ в неравенстве (10) называется обычно *изопериметрической постоянной* многообразия K.

Ясно, что для выполнимости изопериметрического неравенства на (K, g) метрику g можно считать лишь непрерывной. В дальнейшем мы будем применять изопериметрическое неравенство в случае кусочно гладкой метрики g, т.е. для кусочно гладких многообразий (K, g).

Понятие n-субгармонической функции. Пусть H – произвольное n-мерное ($n \geqslant 2$) риманово многообразие с кусочно гладким краем ∂H (возможно, пустым).

Функция $h \in C^2(H \setminus \partial H) \cap C^1(H)$ называется *n-субгармонической в H*, если она удовлетворяет неравенству

$$\Delta_n h := \operatorname{div}(|\nabla h|^{n-2} \nabla h) \geqslant 0 \quad \text{всюду в } H \setminus \partial H, \tag{11}$$

а в случае непустого края ∂H – также неравенству

$$\langle \nabla h, \tau \rangle \leqslant 0 \quad \text{почти всюду на } \partial H, \tag{12}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – скалярное произведение в метрике многообразия H, τ – единичный вектор внешней по отношению к H нормали к краю ∂H.

Для определения *n-гармонической в H* функции знаки неравенств в (11), (12) нужно заменить на знак равенства.

Отметим, что при $n = 2$ оператор Δ_n совпадает с оператором Лапласа–Бельтрами, а определения 2-субгармонической и 2-гармонической функций совпадают соответственно с определениями субгармонической и гармонической функций.

Если неравенства или уравнения (11), (12) понимать в обобщенном смысле, то понятия n-субгармонической или n-гармонической функций можно определять и для функций более широкого класса, чем рассмотренный выше, например для кусочно гладких функций, которые мы будем использовать.

Уточним, что функцию $h \in C(H)$ будем называть *кусочно гладкой в H*, если существует разбиение многообразия H, состоящее из n-мерных многообразий H_i, для каждого из которых $h \in C^1(\overline{H_i})$.

Понятие n-субгармонического потенциала. Оставаясь в обозначениях предыдущего пункта, введем следующее определение.

Функцию h назовем *n-субгармоническим потенциалом на H*, если она является кусочно гладкой n-субгармонической в H, достигает в H минимума и для любого числа $t < \sup_H h$ множество

$$E_h(t) := \{x \in H : h(x) = t\}$$

является компактным.

При этом значение t функции h будем называть *h-регулярным*, если во всех точках множества $E_h(t)$, за исключением, возможно, множества $(n-1)$-меры нуль, градиент функции h существует и отличен от нуля.

В случае h-регулярного значения t множество $E_h(t)$ состоит из конечного числа связных $(n-1)$-мерных компактных многообразий, являющихся, вообще говоря, кусочно гладкими многообразиями.

Риманова метрика g многообразия M индуцирует стандартным образом риманову метрику и на $E_h(t)$, превращая $E_h(t)$ в $(n-1)$-мерное риманово многообразие, которое будем обозначать через $(E_h(t), g)$.

Для любого h-регулярного значения t определим величину

$$S_h(t) := \int_{E_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, ds, \tag{13}$$

которую назовем *потоком* потенциала h.

Произвольную область $D \subset H$ будем называть *h-регулярной*, если во всех точках относительной границы $\partial_H D$, за исключением, возможно, множества $(n-1)$-меры нуль, градиент ∇h функции h существует.

2.2.2. *Построение и свойства искомой метрики.* Рассмотрим произвольное n-мерное ($n \geqslant 2$) риманово многообразие (H, g) с кусочно гладким краем ∂H (возможно, пустым).

Пусть h есть n-субгармонический потенциал на H, почти все значения которого регулярны. Положим $t_0 = \min_H h$.

Зададим произвольно число $\delta > 0$. Определим на многообразии H конформную его исходной метрике g новую метрику g_h по формуле

$$g_h := (e^{\delta h}|\nabla h|)^2 g. \tag{14}$$

Правильнее называть g_h *псевдометрикой*, поскольку она, вообще говоря, не везде определена или может допускать вырождение (там, где градиент ∇h не определен или обращается в нуль).

Предложение 1 (об изопериметрическом неравенстве). *Пусть $S_h(t_0) > 0$ и при $n \geqslant 3$ выполняются следующие условия*:

а) *для каждого h-регулярного значения t множество $E_h(t)$ связно, причем существует число $I < +\infty$, которое может служить изопериметрической постоянной $(n-1)$-мерного многообразия $(E_h(t), g)$ для любого h-регулярного значения t*;

б) *существует число $Q < +\infty$ такое, что для любого h-регулярного значения t справедливо соотношение $\max_{E_h(t)} |\nabla h| \leqslant Q \min_{E_h(t)} |\nabla h|$.*

Тогда в метрике (14) для любой предкомпактной h-регулярной области $D \subset H$ выполняется изопериметрическое неравенство (3).

Если при этом δ достаточно мало, то в (3) в качестве C_H может выступать постоянная, сколь угодно близкая к значению $\frac{1}{\delta n} S_h^{1/(1-n)}(t_0)$.

Здесь под величиной $S_h(t_0)$ потока (13) в случае, если t_0 не является h-регулярным значением, понимаем предел $\lim S_h(t)$ при $t \to t_0 + 0$.

Предложение 2 (об асимптотической точности изопериметрического неравенства). *Пусть $\sup_H h = +\infty$. Предположим, что существует число $S < +\infty$ такое, что*

$$S_h(t) \leqslant S \tag{15}$$

для всех h-регулярных значений t.

Тогда в метрике (14) многообразие H является полным, имеет бесконечный объем и для любого числа $\epsilon > 0$ выполняется неравенство (4), где D пробегает исчерпание многообразия H, состоящее из множеств

$$B_h(r) := \{x \in H : e^h(x) < r\} \tag{16}$$

при всех достаточно больших h-регулярных значениях r.

При этом в неравенстве (4) в качестве C_H можно взять величину

$$\frac{1+\epsilon}{\delta n} S_h^{1/(1-n)}(\tau)$$

для некоторого h-регулярного значения τ.

Доказательства предложений 1 и 2 приведены в п. 3.1, а в п. 2.3 мы рассмотрим применение этих предложений для конкретного построенного подмногообразия H в $\mathbb{R}^n$.

2.3. Доказательство основной леммы в евклидовом пространстве. В данном пункте мы проведем доказательство основной леммы, точная формулировка которой дана в п. 1.2, для случая, когда в качестве исходного многообразия M выступает евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

2.3.1. *Трубчатая окрестность и потенциал.* Доказательство основной леммы в указанном случае опирается на результаты предыдущего параграфа, точнее, на предложения 1 и 2, возможность применения которых обеспечивает следующая

Лемма 1 (о трубчатой окрестности и потенциале). *Пусть l – стандартный евклидов луч в $\mathbb{R}^n$, и пусть U – его произвольная окрестность.*

Тогда существуют некомпактная замкнутая область $H \subset U$ и кусочно гладкая в H функция h, являющаяся n-субгармоническим потенциалом на H, которые обладают следующими свойствами:

1) (свойство симметричности) *область H и функция h сферически симметричны относительно луча l, точнее, поперечные сечения области H, ортогональные лучу l, представляют собой $(n-1)$-мерные шары с центрами в точках луча l, а значения функции h в любой точке такого поперечного сечения зависят (при фиксированном сечении) только от расстояния точки до центра этого сечения*;
2) (аналитические свойства) *область H и функция h удовлетворяют всем условиям предложений 1 и 2*;
3) (свойство невырожденности) *во всех точках дифференцируемости функции h имеет место неравенство $|\nabla h| \geqslant c$ для некоторого числа $c > 0$.*

В п. 3.2 мы приведем конструктивное доказательство этой леммы, хотя, вполне возможно, справедливость всех ее утверждений вытекает из общих результатов теории уравнений с частными производными в евклидовом пространстве (но, к сожалению, мы не нашли соответствующих обоснований в полном объеме).

2.3.2. *Завершение доказательства основной леммы в евклидовом пространстве.* Теперь с помощью леммы 1 (о трубчатой окрестности и потенциале), опираясь на предложения 1 и 2, докажем основную лемму в евклидовом случае, а именно, построим (для произвольно заданного числа $\epsilon > 0$) многообразие $(H, \widetilde{g}_H)$, удовлетворяющее всем утверждениям основной леммы в случае $M = \mathbb{R}^n$.

В соответствии с условиями основной леммы возьмем произвольную окрестность U евклидова луча l и рассмотрим область $H \subset U$ вместе с функцией h, указанные в лемме 1. Определим для некоторого числа $\delta > 0$ (выбор которого уточним ниже) с помощью функции h метрику (14) на H, конформную (евклидовой) метрике g по определению.

Тогда в силу приведенных в лемме 1 аналитических свойств на основании предложений 1 и 2 многообразие (H, g_h) обладает основными свойствами 1) и 2) основной леммы, но, вообще говоря, не в полном объеме, а при следующих ограничениях:

прежде всего, области D, фигурирующие в неравенствах (3) и (4), должны быть h-регулярными;

кроме того, постоянные C_H в этих неравенствах, вообще говоря, различны: в неравенстве (3) можно взять $C_H = \frac{1+\epsilon}{\delta n} S_h^{1/(1-n)}(t_0)$ при достаточно малом δ в определении метрики (14), а в неравенстве (4) взять $C_H = \frac{1+\epsilon}{\delta n} S_h^{1/(1-n)}(\tau_0)$ при некотором значении $\tau_0 > t_0$.

Однако если вместо h рассмотреть функцию $\widetilde{h} := \max\{h, \tau_0\}$, которая, как и h, является n-субгармоническим потенциалом в H, то при такой замене все условия предложений 1 и 2, очевидно, сохранятся (причем $\min_H \widetilde{h} = \tau_0$) и, следовательно, теперь уже неравенства (3) и (4) будут выполняться с одной и той же постоянной $C_H = \frac{1+\epsilon}{\delta n} S_h^{1/(1-n)}(\tau_0)$.

При этом чтобы избежать вырождения метрики вида (14) с функцией $\widetilde{h}$ вместо h, следует перейти от всего многообразия H к его подмногообразию $\widetilde{H}$, на котором $h \geqslant \tau_0$ и, значит, $\widetilde{h} = h$. Тем самым, свойства 1) и 2) основной леммы (с общей в них постоянной) будут справедливы для многообразия $\widetilde{H}$ с метрикой (14), но, напомним, только для h-регулярных областей $D \subset \widetilde{H}$.

Правда, g_h является, строго говоря, не метрикой, а псевдометрикой, так как определена лишь в точках дифференцируемости функции h. Однако в силу кусочной гладкости функции h и ее свойства невырожденности (из условия леммы 1) множитель $\lambda = e^{\delta\, h}|\nabla h|$ в определении (14) можно заменить на гладкую положительную функцию $\widetilde{\lambda}$ такую, что $\widetilde{\lambda} < \lambda < (1+\varepsilon)\widetilde{\lambda}$ в точках дифференцируемости функции h (для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$).

Тогда легко видеть, что неравенства (3) и (4) относительно новой гладкой метрики $\widetilde{g}_{\widetilde{H}} := \widetilde{\lambda}^2 g$ останутся справедливыми с постоянной $C_{\widetilde{H}} = (1+\varepsilon)^n C_H$. При этом выбор числа ε зависит от заданного числа ϵ.

Теперь освободимся от ограничения h-регулярности областей D, аппроксимируя произвольную область h-регулярными областями и совершая предельный переход в неравенствах (3) и (4), справедливых для таких областей относительно указанной гладкой метрики $\widetilde{g}_{\widetilde{H}}$.

В результате доказано, что построенное многообразие $(\widetilde{H}, \widetilde{g}_{\widetilde{H}})$ обладает основными свойствами 1) и 2) основной леммы. Что касается дополнительных свойств $1')$ и $2')$ основной леммы, то они обеспечены свойствами симметричности и невырожденности, указанными в лемме 1.

Действительно, свойство $1')$ для метрики (14) вытекает из оценки $|\nabla h| \geqslant c$. Ясно, что при проведенной выше регуляризации метрики (14) свойство $1')$ сохранится и для новой гладкой метрики $\widetilde{g}_{\widetilde{H}}$. Наконец, свойство $2')$ для исчерпания (16) является очевидным следствием симметричности относительно луча l как функции h, так и области H. При проведенной регуляризации метрики (14) для этого исчерпания выполняется неравенство (4) и в новой метрике $\widetilde{g}_{\widetilde{H}}$.

Таким образом, основная лемма для случая $M = \mathbb{R}^n$ доказана.

Замечание. Подчеркнем, что в случае $M = \mathbb{R}^n$ многообразие H, удовлетворяющее утверждениям основной леммы, было построено сферически симметричным относительно луча l.

2.4. Доказательство леммы в общем случае. Для доказательства основной леммы в общем случае достаточно обосновать описанную в п. 2.1 редукцию к $\mathbb{R}^n$. В основе указанной редукции лежит геометрическое утверждение о существовании для произвольного геодезического луча на M такой его окрестности, которая квазиизометрично отображается в $\mathbb{R}^n$.

2.4.1. *Лемма о квазиизометрическом отображении.* Напомним, что гладкое отображение $\varphi\colon M_1 \to M_2$ римановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2) называется *Q-квазиизометрическим*, где $Q \geqslant 1$ (в частности, *изометрическим* при

$Q = 1$), если отображение φ – диффеоморфизм, и в любой точке $x \in M_1$ для его дифференциала $d\varphi_x\colon T_xM_1 \to T_{\varphi(x)}M_2$ имеют место неравенства

$$\forall\, v \in T_xM_1 \qquad Q^{-1}|v|_1 \leqslant |d\varphi_x(v)|_2 \leqslant Q|v|_1,$$

где $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ – нормы в T_xM_1 и $T_{\varphi(x)}M_2$ соответственно.

При этом сами многообразия (M_1, g_1) и (M_2, g_2) называются *Q-квазиизометричными* или просто *квазиизометричными* друг другу.

Лемма 2 (о квазиизометрическом отображении). *Рассмотрим на многообразии (M, g) произвольный геодезический луч γ с вершиной в точке p. Обозначим через r_p функцию g-расстояния на M до точки p.*

Возьмем также произвольный луч l евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

1) *Тогда для любого числа $Q > 1$ существует окрестность $U \subset M$ луча γ, которая Q-квазиизометрична некоторой окрестности луча l.*
2) *Соответствующее Q-квазиизометрическое отображение окрестности U можно построить таким, что при этом отображении образы всех множеств $r_p^{-1}(t) \cap U$ $(t > 0)$ будут лежать в $(n-1)$-мерных евклидовых плоскостях, ортогональных лучу l.*

Доказательство этой леммы имеет чисто геометрический характер, и чтобы не прерывать изложение доказательства теоремы, будет приведено в конце статьи (см. п. 3.3).

2.4.2. *Завершение доказательства основной леммы.* Теперь с помощью леммы 2 докажем основную лемму для произвольного рассматриваемого многообразия (M, g), исходя из установленной в п. 2.3 ее справедливости в евклидовом случае.

Итак, обращаясь к условию основной леммы для многообразия (M, g) (см. п. 1.2), рассмотрим геодезический луч γ на (M, g) с вершиной в точке p и его произвольную открытую окрестность U. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ (обозначение ϵ будет использовано ниже для случая $\mathbb{R}^n$).

На основании леммы о квазиизометрическом отображении можно считать, что существует Q-квазиизометрическое отображение φ окрестности U на некоторую окрестность $U_e \subset \mathbb{R}^n$ евклидова луча l, где выбор числа $Q = Q(\varepsilon) > 1$ будет указан ниже.

Для некоторого числа $\epsilon = \epsilon(\varepsilon) > 0$ (выбор которого также будет уточнен ниже) в силу п. 2.3.2 *существует многообразие $H_e \subset U_e$ с римановой на нем метрикой $\widetilde{g}_e = \lambda_e^2 g_e$ (g_e – евклидова метрика, $\lambda_e > 0$ – гладкая на H_e функция), являющееся искомым для основной леммы по отношению к пространству $\mathbb{R}^n$ и лучу l.*

При этом многообразие H_e можно считать сферически симметричным относительно луча l (см. замечание в конце п. 2.3.2).

Положим $H = \varphi^{-1}(H_e)$ и определим на H риманову метрику $\widetilde{g}_H = \lambda^2\, g$, где $\lambda = \lambda_e \circ \varphi$ (по определению конформную метрике g).

Проверим, что многообразие $(H, \widetilde{g}_H)$, которое по построению лежит в окрестности U, является искомым для основной леммы уже по отношению к (M, g) и лучу γ.

Для проверки основных свойств 1) и 2) на многообразии $(H, \widetilde{g}_H)$ обратимся к соответствующим неравенствам вида (3) и (4), которые справедливы для многообразия $(H_e, \widetilde{g}_e)$ с некоторой постоянной $C_e = C_e(\epsilon)$. Тогда в силу Q-квазиизометричности отображения $\varphi\colon H \to H_e$ неравенство (3) выполняется на $(H, \widetilde{g}_H)$ с постоянной $C_H = Q^{2n} C_e$ для любой предкомпактной области $D \subset H$ такой, что $\widetilde{V}(D) > Q^n \epsilon$. Поэтому при выборе $\epsilon < Q^{-n}\varepsilon$ (для заданного числа ε) основное свойство 1) для многообразия $(H, \widetilde{g}_H)$ справедливо.

Рассмотрим теперь на многообразии $(H_e, \widetilde{g}_e)$ неравенство вида (4) (естественно, с постоянными C_e и ϵ) для некоторого исчерпания $\{G(t)\}$ многообразия H_e. Тогда в силу Q-квазиизометричности отображения φ для областей D, пробегающих соответствующее исчерпание $\{\varphi^{-1}(G(t))\}$ многообразия $(H, \widetilde{g}_H)$, будет выполняться неравенство

$$Q^{-n} C_e \widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial_H D) < (1+\epsilon) Q^n \widetilde{V}(D).$$

Переходя здесь к постоянной $C_H = Q^{2n} C_e$, полученной выше для неравенства (3) на многообразии $(H, \widetilde{g}_H)$, видим, что искомое неравенство (4) для этого многообразия будет выполняться при условии

$$Q^{4n}(1+\epsilon) < 1+\varepsilon, \quad \text{где } \epsilon < Q^{-n}\varepsilon.$$

Такое условие, очевидно, достижимо (для фиксированного ε), если взять Q достаточно близким к 1, а $\epsilon < \varepsilon/2$.

Итак, основные свойства для многообразия $(H, \widetilde{g}_H)$ справедливы.

Что касается дополнительных свойств этого многообразия, то свойство 1′) непосредственно следует из определения метрики $\widetilde{g}_H$ как индуцированной метрикой g_e и соответствующего свойства 1′) для метрики g_e.

Наконец, проверим справедливость дополнительного свойства 2′), обратившись к исчерпанию $\{\varphi^{-1}(G(t))\}$, для которого, как только что показано, справедливо основное свойством 2) на многообразии $(H, \widetilde{g}_H)$.

Поскольку по построению квазиизометрия φ удовлетворяет утверждению 2) леммы о квазиизометрическом отображении, то сечения края ∂H_e множествами $\varphi(B_p(t))$ совпадают с сечениями этого края плоскостями, ортогональными лучу l.

В свою очередь в силу того, что многообразие H_e сферически симметрично относительно луча l с вершиной в точке $O = \varphi(p)$, указанные сечения совпадают с сечениями края ∂H_e евклидовыми шарами $B_e(r)$ радиусов r с центром в точке O. Следовательно, исчерпание $\{\varphi(B_p(t)) \cap \partial H_e\}$ совпадает с исчерпанием $\{B_e(r) \cap \partial H_e\}$. Но последнее исчерпание совпадает с исчерпанием $\{G(t) \cap \partial H_e\}$ согласно начальному предположению о справедливости дополнительного свойства 2′) для исчерпания $\{G(t)\}$ многообразия H_e. Значит, $\{\varphi(B_p(t)) \cap \partial H_e\} = \{G(t) \cap \partial H_e\}$. Отсюда и вытекает справедливость свойства 2′) для рассматриваемого исчерпания $\{\varphi^{-1}(G(t))\}$ многообразия $(H, \widetilde{g}_H)$. Основная лемма полностью доказана.

§ 3. Доказательства вспомогательных утверждений

В § 2, чтобы не прерывать изложение доказательства основной леммы, мы позволили себе опустить доказательства ряда вспомогательных утверждений. Теперь мы приведем все опущенные выше доказательства.

3.1. Утверждения из п. 2.2. Сначала приведем некоторые дополнительные свойства рассматриваемых в этом пункте понятий.

Евклидово изопериметрическое неравенство на компактных многообразиях в классической форме представляется неравенством (10), в котором предполагается, что $V(F) \leqslant V(K)/2$. Однако, исходя из (10), легко получить изопериметрическое неравенство евклидова вида при более общем ограничении на объем $V(F)$, чем указанное выше, а именно, при условии, когда этот объем не превышает любой определенной части (возможно, даже сколь угодно близкой к единице) всего объема многообразия K.

Приведем обобщенное изопериметрическое неравенство.

Возъмем произвольное число $\mu \in [1/2, 1)$. Тогда для любого регулярного в K множества $F \subset K$, подчинененного условию $V(F) \leqslant \mu V(K)$, справедливо неравенство

$$V(F) \leqslant \frac{\mu}{1-\mu} I(K) S^{m/(m-1)}(\partial_K F), \tag{17}$$

где $I(K)$ – изопериметрическая постоянная многообразия K.

Действительно, можно считать, что $V(F) > V(K)/2$. Тогда неравенство (10) справедливо с заменой F на $K \setminus F$. Поскольку из условия $V(F) \leqslant \mu V(K)$ следует, что

$$V(F) \leqslant \frac{\mu}{1-\mu} V(K \setminus F),$$

то, применяя к $V(K \setminus F)$ неравенство (10), получаем неравенство (17).

Замечание. Отметим, что в случае, когда K представляет собой замкнутый шар евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, известно наилучшее значение изопериметрической постоянной $I(K)$, и это значение зависит только от размерности m, т.е. не зависит от радиуса шара (см., например, [8]).

Понятие n-субгармонической функции достаточно широкого класса гладкости можно определить, как было сказано в п. 2.2.1, с помощью неравенств (11), (12), понимаемых в обобщенном смысле.

Для кусочно гладких функций (которые главным образом нами и рассматриваются) выполнение указанных неравенств в обобщенном смысле можно представить в виде одного интегрального условия, понимаемого в обычном смысле. В результате приходим к следующему определению n-субгармоничности.

Кусочно гладкая в H функция h является *n-субгармонической в H*, если для любой предкомпактной h-регулярной области $D \subset H$ выполняется неравенство

$$\int_{\partial_H D} |\nabla h|^{n-2} \langle \nabla h, \tau \rangle \, ds \geqslant 0, \tag{18}$$

где τ – единичный вектор внешней нормали к ∂D, а ds – элемент площади границы ∂D. Здесь $\partial_H D := \overline{\partial D \setminus \partial H}$.

Напомним, что под *h-регулярной* областью $D \subset H$ понимается такая область, для которой во всех точках относительной границы $\partial_H D$, за исключением, возможно, множества $(n-1)$-меры нуль, существует градиент ∇h функции h.

Для определения *n-гармонической в H* кусочно гладкой функции h нужно знак неравенства в (18) заменить на знак равенства.

Как известно, для функций $h \in C^2(H \setminus \partial H) \cap C^1(H)$ приведенное определение n-субгармоничности (так же, как и n-гармоничности) эквивалентно выполнимости всюду в H неравенств (11), (12) (или соответствующих им равенств).

Отметим локальный характер понятия n-субгармоничности (соответственно n-гармоничности): *если функция h является n-субгармонической (n-гармонической) в окрестности каждой точки из H, за исключением, возможно, точек множества $(n-1)$-меры нуль, то h является n-субгармонической (n-гармонической) в H.*

В дальнейшем нам потребуется следующий хорошо известный факт: *если функции u и v являются n-субгармоническими в H, то функция $w = \max\{u, v\}$ также является n-субгармонической в H.*

Указанные свойства легко вывести непосредственно из приведенного определения n-субгармонической функции.

Важным для нас является также следующее свойство монотонности потока n-субгармонического потенциала.

Пусть h есть n-субгармонический потенциал на H. Тогда функция $S_h(t)$, определенная в (13), является неубывающей на множестве h-регулярных значений.

В самом деле, для произвольных h-регулярных значений t_1 и t_2, $t_1 < t_2$, рассмотрим множество

$$D := \{x \in H : t_1 < h(x) < t_2\}.$$

Ясно, что $\partial_H D = E_h(t_1) \cup E_h(t_2)$ и согласно (13)

$$\int_{E_h(t_i)} |\nabla h|^{n-2} \langle \nabla h, \tau \rangle \, ds = (-1)^i S_h(t_i), \qquad i = 1, 2\,.$$

Тогда неравенство (18) для такого множества D равносильно неравенству $S_h(t_2) - S_h(t_1) \geqslant 0$, что и доказывает данное свойство.

Теперь перейдем к доказательству предложений 1 и 2.

Доказательство предложения 1. Пусть $D \subset H$ – произвольная предкомпактная h-регулярная область. Предварительно докажем следующее неравенство:

$$\widetilde{S}(D \cap E_h(t)) \leqslant \widetilde{S}(\partial_H D) \tag{19}$$

для любого h-регулярного значения t.

С этой целью, пользуясь условием n-субгармоничности функции h, применим неравенство (18) к подобласти $G \subset D$, всюду на которой $h > t$. Поскольку ее граница $\partial_H G$ состоит из частей $\overline{D} \cap E_h(t)$ и $\partial_H D \cap \overline{G}$, то неравенство (18) для области G можно записать в виде

$$\int_{D \cap E_h(t)} |\nabla h|^{n-1} \, ds \leqslant \int_{\partial_H D \cap G} |\nabla h|^{n-2} \langle \nabla h, \tau \rangle \, ds.$$

Отсюда после умножения обеих частей последнего неравенства на $e^{(n-1)\,\delta t}$ с учетом определения (14) метрики g_h приходим к (19).

Переходя к доказательству искомого изопериметрического неравенства (3) для области D, представим ее g_h-объем $\widetilde{V}(D)$ с помощью формулы Кронрода–Федерера (см., например, [8; гл. 3, § 2.4]) в виде

$$\widetilde{V}(D)=\int_{t_0}^{+\infty}e^{n\delta t}\,dt\int_{D\cap E_h(t)}|\nabla h|^{n-1}\,ds \tag{20}$$

и займемся оценкой правой части этой формулы.

Зададим произвольно число $\mu\in[1/2,1)$. Обозначим через T_μ множество всех h-регулярных значений τ, удовлетворяющих условию

$$\widetilde{S}(D\cap E_h(\tau))\geqslant\mu\widetilde{S}(E_h(\tau)), \tag{21}$$

и в случае $T_\mu\neq\varnothing$ положим $t_\mu:=\sup\{t\in T_\mu\}$.

Прежде всего заметим, что для любого h-регулярного значения τ

$$\int_{t_0}^{\tau}e^{n\delta t}\,dt\int_{D\cap E_h(t)}|\nabla h|^{n-1}\,ds\leqslant\frac{1}{\delta n}\,e^{n\delta\tau}S_h(\tau) \tag{22}$$

в силу приведенного выше свойства монотонности потока $S_h(t)$.

Возьмем теперь любое значение $\tau\in T_\mu$. Поскольку

$$e^{n\delta\tau}S_h(\tau)=\frac{\widetilde{S}^{n/(n-1)}(E_h(\tau))}{S_h^{1/(n-1)}(\tau)}\,,$$

то согласно условию (21)

$$e^{n\delta\tau}S_h(\tau)\leqslant\frac{\mu^{n/(1-n)}\widetilde{S}^{n/(n-1)}(D\cap E_h(\tau))}{S_h^{1/(n-1)}(\tau)}\,.$$

Отсюда, используя неравенство (19) и оценку $S_h(\tau)\geqslant S_h(t_0)$ (в силу монотонности потока $S_h(t)$), получаем

$$e^{n\delta\tau}S_h(\tau)\leqslant\bigl(\mu^{n/(1-n)}S_h^{1/(1-n)}(t_0)\bigr)\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial_H D).$$

Применяя теперь последнее неравенство к неравенству (22), рассматриваемому для значений $\tau\in T_\mu$ при $\tau\to t_\mu$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_\mu}e^{n\delta t}\,dt\int_{D\cap E_h(t)}|\nabla h|^{n-1}\,ds\leqslant\biggl(\frac{1}{\delta n}\,\mu^{n/(1-n)}S_h^{1/(1-n)}(t_0)\biggr)\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial_H D), \tag{23}$$

что будет составлять первую часть оценки интеграла в формуле (20).

Остальную часть этого интеграла представим в виде

$$\int_{t_\mu}^{+\infty}e^{n\delta t}\,dt\int_{D\cap E_h(t)}|\nabla h|^{n-1}\,ds=\int_{t_\mu}^{+\infty}\widetilde{S}(D\cap E_h(t))e^{\delta t}\,dt \tag{24}$$

и будем оценивать для случаев $n=2$ и $n\geqslant 3$.

Пусть $n=2$. Прежде всего, в силу неравенства (19) имеем

$$\int_{t_\mu}^{+\infty}\widetilde{S}(D\cap E_h(t))e^{\delta t}\,dt\leqslant\frac{1}{\delta}\,\widetilde{S}(\partial_H D)(e^{\delta t_{\max}}-e^{\delta t_\mu}), \tag{25}$$

где $t_{\max}$ – максимальное значение функции h в области $\overline{D}$.

Поскольку при любом h-регулярном значении $t \in [t_\mu, t_{\max}]$ множество $D \cap E_h(t)$ не совпадает с $E_h(t)$, то оно содержит точки относительной границы $\partial_H D$, не лежащие на краю ∂H. Отсюда легко заключить, что отрезок $[t_\mu, t_{\max}]$ можно разбить на конечное число частей $[t_k, t_{k+1}]$, для каждой из которых существует связная дуга $\gamma_k \subset \partial_H D$, соединяющая некоторые точки $x_k \in E_h(t_k)$ и $x_{k+1} \in E_h(t_{k+1})$.

Заметим, что для любой связной дуги $\gamma \in H$ с концами в точках x, y ее длина $\widetilde{S}(\gamma)$ в метрике (14) (для любого n) удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\delta}|e^{\delta h(x)} - e^{\delta h(y)}| \leqslant \widetilde{S}(\gamma), \tag{26}$$

которое получается в результате следующей очевидной цепочки:

$$\widetilde{S}(\gamma) = \frac{1}{\delta}\int_\gamma |\nabla e^{\delta h}| \geqslant \frac{1}{\delta}\int_0^{\widetilde{S}(\gamma)} |(e^{\delta h})'_l|\, dl \geqslant \frac{1}{\delta}|e^{\delta h(x)} - e^{\delta h(y)}|,$$

где l – натуральный параметр кривой γ в исходной метрике g.

Применяя (26) для каждой из указанных дуг γ_k, получаем

$$\frac{1}{\delta}(e^{\delta t_{\max}} - e^{\delta t_\mu}) = \sum \frac{1}{\delta}(e^{\delta h(x_{k+1})} - e^{\delta h(x_k)}) \leqslant \sum \widetilde{S}(\gamma_k) \leqslant \widetilde{S}(\partial_H D).$$

Тогда, используя последнее неравенство в (25), на основании представления (24) приходим к нужной нам оценке

$$\int_{t_\mu}^{+\infty} e^{2\delta t}\, dt \int_{D\cap E_h(t)} |\nabla h|\, ds \leqslant \widetilde{S}^2(\partial_H D) \quad \text{при } n = 2. \tag{27}$$

Вернемся теперь к оценке интеграла в формуле (24) в случае $n \geqslant 3$. Напомним, что по определению числа t_μ для любого h-регулярного значения $t > t_\mu$ выполняется следующее условие:

$$\widetilde{S}(D \cap E_h(t)) < \mu \widetilde{S}(E_h(t)). \tag{28}$$

Обратимся к изопериметрическому неравенству (10) на компактном многообразии. Покажем, что: *для любого h-регулярного значения t в качестве изопериметрической постоянной $(n-1)$-мерного компактного многообразия $(E_h(t), g_h)$ может выступать число $Q^{n-1}I$, где I – постоянная из условия* а) *предложения* 1.

В самом деле, в силу условия б) предложения 1 для произвольного множества $F \subset E_h(t)$ справедливо неравенство

$$\frac{\min\{\widetilde{S}(F), \widetilde{S}(E_h(t)\setminus F)\}}{\widetilde{L}^{(n-1)/(n-2)}(\partial_{E_h(t)} F)} \leqslant Q^{n-1}\frac{\min\{S(F), S(E_h(t)\setminus F)\}}{L^{(n-1)/(n-2)}(\partial_{E_h(t)} F)},$$

где через L и $\widetilde{L}$ обозначены $(n-2)$-мерные объемы множеств на многообразиях $(E_h(t), g)$ и $(E_h(t), g_h)$ соответственно.

Поскольку по условию а) число I является изопериметрической постоянной многообразия $(E_h(t), g)$, то правая часть последнего неравенства не превышает величины $Q^{n-1}I$. Значит, эта величина действительно является изопериметрической постоянной многообразия $(E_h(t), g_h)$.

Тогда при $t > t_\mu$ можно воспользоваться обобщенным изопериметрическим неравенством (17), на основании которого для множества $D \cap E_h(t)$, подчиненного условию (28), выполняется неравенство

$$\widetilde{S}(D \cap E_h(t)) \leqslant \frac{\mu}{1-\mu}\, Q^{n-1} I \widetilde{L}^{(n-1)/(n-2)}(\partial_{E_h(t)} D \cap E_h(t)).$$

Воспользуемся этим неравенством только для $(n-2)/(n-1)$-й степени величины $\widetilde{S}(D \cap E_h(t))$, а для оценки ее $1/(n-1)$-й степени вновь применим неравенство (19). В результате получим соотношение

$$\widetilde{S}(D \cap E_h(t)) \leqslant C \widetilde{S}^{1/(n-1)}(\partial_H D) \widetilde{L}(\partial_{E_h(t)} D \cap E_h(t)), \tag{29}$$

где для краткости обозначено

$$C := \left(\frac{\mu}{1-\mu}\, Q^{n-1} I\right)^{(n-1)/(n-2)}. \tag{30}$$

Полученное таким образом для каждого h-регулярного значения $t > t_\mu$ неравенство (29) применим к интегралу в (24):

$$\int_{t_\mu}^{+\infty} \widetilde{S}(D \cap E_h(t)) e^{\delta t}\, dt \leqslant C \widetilde{S}^{1/(n-1)}(\partial_H D) \int_{t_\mu}^{+\infty} \widetilde{L}(\partial_{E_h(t)} D \cap E_h(t)) e^{\delta t}\, dt. \tag{31}$$

В свою очередь g_h-площадь границы $\partial_H D$ по формуле Кронрода–Федерера представляется в виде

$$\widetilde{S}(\partial_H D) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{(n-1)\,\delta t}\, dt \int_{\partial_H D \cap E_h(t)} \frac{|\nabla h|^{n-1}}{|\nabla' h|}\, dl,$$

где $|\nabla' h|$ – норма градиента $|\nabla h|$ в метрике многообразия ∂D, индуцированной исходной метрикой g. Но так как $|\nabla' h| \leqslant |\nabla h|$, то

$$\widetilde{S}(\partial_H D) \geqslant \int_{t_\mu}^{+\infty} \widetilde{L}(\partial_{E_h(t)} D \cap E_h(t)) e^{\delta t}\, dt.$$

Применяя это неравенство к правой части (31), на основании представления (24) получаем нужную нам оценку

$$\int_{t_\mu}^{+\infty} e^{n\delta t}\, dt \int_{D \cap E_h(t)} |\nabla h|^{n-1}\, ds \leqslant C \widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial_H D) \tag{32}$$

в рассматриваемом случае $n \geqslant 3$. Но поскольку при $n = 2$ эта оценка по форме совпадает с полученной выше оценкой (27), если считать $C = 1$, то, тем самым, неравенство (32) справедливо при всех $n \geqslant 2$.

Наконец, складывая неравенства (23) и (32) и применяя результат к правой части исходной формулы (20) для $\widetilde{V}(D)$, приходим к искомому изопериметрическому неравенству (3), в котором

$$C_H = \frac{1}{\delta n}\, \mu^{n/(1-n)} S_h^{1/(1-n)}(t_0) + C, \tag{33}$$

величина $S_h(t_0)$ определена в (13), $\mu \in [1/2, 1)$ – любое число, $C = 1$ в случае $n = 2$, а в случае $n \geqslant 3$ значение C указано в (30).

Докажем последнее утверждение предложения 1. Сначала за счет выбора μ сделаем первое слагаемое в (33) (пока без учета множителя δ) сколь угодно близким к величине $\frac{1}{n} S_h^{1/(1-n)}(t_0)$. Затем, уменьшая δ, достигнем того, что число C станет пренебрежимо малым по сравнению с первым слагаемым.

Предложение 1 полностью доказано.

Доказательство предложения 2. Для каждой области (16) ее g_h-объем $\widetilde{V}(B_h(r))$ представляется по формуле (20) в виде

$$\widetilde{V}(B_h(r)) = \int_{t_0}^{t} e^{n\delta\tau} S_h(\tau)\, d\tau, \quad \text{где } r = e^t.$$

Кроме того, поскольку $\partial_H B_h(r) = E_h(t)$, $r = e^t$, то

$$\widetilde{S}(\partial_H B_h(r)) = e^{(n-1)\delta t} S_h(t)\, dt, \quad \text{где } r = e^t.$$

В силу свойства монотонности потока потенциала h и условия (15) существует конечный предел функции $S_h(t)$ при $t \to +\infty$. Тогда по правилу Лопиталя на основании указанных формул получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\widetilde{V}(B_h(r))}{\widetilde{S}^{n/(n-1)}(\partial_H B_h(r))} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\delta n}\, S_h^{1/(1-n)}(t).$$

Отсюда сразу следуют утверждения предложения 2 о выполнимости на исчерпании $\{B_h(r)\}$ неравенства (4) и значении в нем постоянной C_H.

Наконец, из неравенства (26) вытекает, что любая кривая $\gamma \in H$, выходящая на абсолют (т.е. уходящая на бесконечность), имеет в метрике (14) бесконечную длину. Это доказывает полноту многообразия (H, g_h).

Предложение 2 доказано.

3.2. Утверждения из п. 2.3. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с евклидовыми скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ и нормой $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle}$.

Доказательство леммы 1. Оно будет состоять из двух частей: в первой мы проведем построение искомых объектов, а во второй проверим для них выполнимость всех требуемых условий.

Построение трубчатой окрестности и потенциала. Введем в $\mathbb{R}^n$ прямоугольную систему координат так, чтобы луч l служил в качестве неотрицательной полуоси Ox^+ координатной прямой Ox. Произвольную точку пространства $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $(x; \mathbf{y})$, где $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $(x; \mathbf{0}) \in Ox$.

1. *Построение искомой области.* Сферически симметричная относительно луча l область однозначно определяется своей *образующей* (плоской линией, с помощью вращения которой вокруг луча l образована граница области, кроме ее крайнего поперечного сечения).

Поэтому для того чтобы построить искомую область H внутри произвольно выбранной окрестности луча l, достаточно описать построение образующей, лежащей в плоскости между лучом $l = Ox^+$ и графиком произвольной положительной функции f, определенной при $x \geqslant 0$.

При этом, не ограничивая общности, функцию f можно считать гладкой выпуклой вниз и такой, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Искомую образующую мы построим в виде ломаной линии, составленной из некоторых отрезков Y_iY_{i+1} прямых l_i, которые определим по индукции следующим образом.

В качестве прямой l_0 возьмем касательную к графику функции f в какой-либо точке и отметим начальную точку $Y_0 \in l_0$ с координатой 0 на Ox^+. Пусть X_0 – точка пересечения прямой l_0 с Ox^+. Вектор $\overrightarrow{X_0Y_0}$, лежащий на прямой l_0, образует некоторый острый угол α_0 с отрицательной полуосью Ox^- координатной прямой Ox. При этом угол α_0 можно выбрать произвольно малым.

Предположим, что для номера $i \in \mathbb{N}$ уже построена прямая l_i с отмеченной точкой $Y_i \in l_i$, и пусть X_i – точка пересечения прямой l_i с Ox^+. Обозначим через α_i острый угол, образованный вектором $\overrightarrow{X_iY_i}$ с Ox^-.

Ясно, что найдется касательная к графику функции f, образующая с Ox^- угол $\alpha_i/2$. Тогда если точка Y пересечения этой касательной прямой l_i лежит к Ox ближе, чем середина отрезка X_iY_i, то возьмем саму касательную в качестве прямой l_{i+1} и обозначим $Y_{i+1} = Y$. В противном случае в качестве прямой l_{i+1} возьмем прямую, параллельную указанной касательной и проходящую через середину отрезка X_iY_i; сама середина станет в этом случае отмеченной точкой $Y_{i+1} \in l_{i+1}$.

Таким образом, каждый отрезок Y_iY_{i+1} лежит на прямой l_i, которая пересекает Ox в точке X_i под острым углом α_i к полуоси Ox^-, причем

$$\|X_iY_{i+1}\| \leqslant \frac{\|X_iY_i\|}{2}, \qquad \alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i}{2}. \tag{34}$$

Тем самым, будет построена ломаная $Y_0Y_1 \cdots Y_i \cdots$, лежащая между лучом Ox^+ и графиком произвольно заданной положительной функции.

Легко показать, что эта ломаная неограничена. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда каждая прямая l_i начиная с некоторого номера i_0 проходит через середину отрезка $X_{i-1}Y_{i-1}$. Тогда из элементарных геометрических рассмотрений ясно, что

$$\|X_iX_{i+1}\| = \|X_iY_{i+1}\| = \|X_{i-1}X_i\| \cos\alpha_i.$$

Продолжая последнее равенство вплоть до номера i_0, получим

$$\|X_iX_{i+1}\| = \|X_{i_0-1}X_{i_0}\| \cos\alpha_{i_0} \cdots \cos\alpha_i = \|X_{i_0-1}X_{i_0}\| \cos\frac{\alpha_0}{2^{i_0}} \cdots \cos\frac{\alpha_0}{2^i}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{i\to+\infty} \|X_iX_{i+1}\| > 0, \tag{35}$$

следовательно, последовательность точек X_i неограничена.

Таким образом, построенная плоская ломаная линия $Y_0Y_1 \cdots Y_i \cdots$ действительно неограничена. Эту ломаную линию как график некоторой монотонно убывающей функции $y = y(x)$, $x \geqslant 0$, и будем считать искомой образующей, а искомая область H, стало быть, имеет вид

$$H := \{(x; \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\| \leqslant y(x), x \in [0, +\infty)\}, \tag{36}$$

где, напомним, через $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма векторов.

Введем обозначения

$$r_i = \|X_i Y_{i+1}\|, \qquad R_i = \|X_i Y_i\|. \tag{37}$$

Отметим, что отрезок $X_{i+1}Y_{i+1}$ по построению образует со сторонами X_iX_{i+1} и X_iY_{i+1} одинаковые углы $\alpha_{i+1} = \alpha_i/2$, т.е. треугольник $\triangle X_iY_{i+1}X_{i+1}$ равнобедренный. Следовательно,

$$r_i = \|X_i X_{i+1}\|, \qquad R_{i+1} = 2r_i \cos\alpha_{i+1} = 2r_i \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right). \tag{38}$$

2. *Вспомогательные функции.* Исходя из проведенного построения ломаной $Y_0Y_1\cdots Y_i\cdots$ как линии в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим в этом пространстве для каждого $i = 0, 1, \ldots$ замкнутый конус с осью вращения Ox, образующей l_i и вершиной в точке $X_i := (x_i; \mathbf{0})$. Обозначим через K_i левую половину этого конуса, точнее,

$$K_i := \{(x; \mathbf{y}) : \|\mathbf{y}\| \leqslant (x_i - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha_i\}.$$

Введем в K_i функцию ρ_i расстояния до вершины X_i, т.е.

$$\rho_i = \rho_i(P) := \|PX_i\|, \qquad P \in K_i,$$

и определим вспомогательную функцию $h_i = h_i(\rho_i)$ вида

$$h_i(\rho_i) := a_i - b_i \ln\frac{\rho_i}{R_i} \tag{39}$$

для любых числовых коэффициентов a_i, b_i.

Непосредственно проверяется, что функция h_i при любых значениях a_i, b_i является n-гармонической в полуконусе K_i функцией, т.е. (см. формулы (11) и (12)) во всех внутренних точках множества K_i

$$\mathrm{div}(\|\nabla h_i\|^{n-2}\nabla h_i) = 0,$$

а в точках границы ∂K_i (за исключением вершины X_i конуса) вектор градиента ∇h_i ортогонален вектору нормали к ∂K_i.

3. *Определение коэффициентов a_i, b_i.* Проведем его по индукции. Положим $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Пусть коэффициенты $a_i > 0$, $b_i > 0$ уже определены. Тогда значение a_{i+1} определим из условия

$$h_i(r_i) = h_{i+1}(R_{i+1}) \tag{40}$$

(где r_i и R_i указаны в (37)), выражающего равенство значений функций h_i и h_{i+1} на той части границы полуконуса K_i, которая получается вращением точки Y_{i+1} вокруг оси Ox.

Согласно определению (39) условие (40) сводится к равенству

$$a_i - b_i \ln\frac{r_i}{R_i} = a_{i+1}, \tag{41}$$

которое и служит определением коэффициента a_{i+1}.

В основе формального определения коэффициента b_{i+1} лежит

Утверждение 1. *Существует единственное число* $\beta_i \in (0,1)$, *при котором уравнение*
$$t+1 = 2\cos\alpha_{i+1}\cdot t^{\beta_i}, \qquad t>0, \tag{42}$$
имеет одно решение $t=\nu_i \in (0,1)$, *причем в этом случае графики обеих частей данного уравнения касаются друг друга.*

Тогда, исходя из известного коэффициента b_i и полагая
$$\beta_i = \frac{b_i}{b_{i+1}}\,,$$
определяем коэффициент b_{i+1}.

Опуская вполне элементарное доказательство этого утверждения, докажем его геометрический смысл: при указанном выборе коэффициента b_{i+1} функции h_i и h_{i+1} принимают на оси Ox одинаковые значения в некоторой единственной точке $P_{i,0}$, причем в ней производные данных функций вдоль оси Ox также совпадают.

Действительно, условие равенства функций h_i и h_{i+1} в произвольной точке $P\in K_i$ согласно (39) и (41) представляется в виде
$$h_i(P)=h_{i+1}(P) \quad\Longleftrightarrow\quad b_{i+1}\ln\frac{\rho_{i+1}(P)}{2r_i\cos\alpha_{i+1}} = b_i\ln\frac{\rho_i(P)}{r_i} \tag{43}$$
(при этом мы использовали также выражение (38) для R_{i+1}).

Поскольку в точках $P\in K_i$ оси Ox, очевидно, $\rho_{i+1}(P)=\rho_i(P)+r_i$, то для таких точек уравнение в (43) записывается в виде
$$\ln\frac{\rho_i(P)+r_i}{2r_i\cos\alpha_{i+1}} = \frac{b_i}{b_{i+1}}\ln\frac{\rho_i(P)}{r_i}\,.$$
Но это уравнение после экспонирования обеих его частей и последующей замены $t=\rho_i(P)/r_i$ переходит в уравнение (42) (если положить в нем $\beta_i=b_i/b_{i+1}$), причем при таком переходе значению ν_i из утверждения 1 соответствует указанная выше точка $P_{i,0}$.

4. *Совпадение значений вспомогательных функций.* Для каждого полуконуса K_i выясним, что представляет собой его подмножество, на котором функции h_i и h_{i+1} совпадают. С этой целью найдем все точки этого подмножества, лежащие на произвольном луче с вершиной X_i, принадлежащем K_i. Обозначим такой луч через $l_{i,\alpha}$, если он образует с полуосью Ox^- угол $\alpha\in[0,\alpha_i]$.

Утверждение 2. *Пусть* $P\in l_{i,\alpha}$. *Тогда* $h_i(P)=h_{i+1}(P)$ *в том и только том случае, когда число* $t=\tau_i(P)$, *где*
$$\tau_i(P) := \frac{\rho_i(P)}{r_i}\,,$$
является решением следующего уравнения:
$$\sqrt{t^2+2\cos\alpha\cdot t+1} = 2\cos\alpha_{i+1}\cdot t^{\beta_i}, \quad \textit{где } \beta_i=\frac{b_i}{b_{i+1}}\,. \tag{44}$$

Доказательство. Если $P \in l_{i,\alpha}$, то длина отрезка $\|PX_{i+1}\| = \rho_{i+1}(P)$ выражается по теореме косинусов через длины отрезков $\|PX_i\| = \rho_i(P)$ и $\|X_iX_{i+1}\| = r_i$, образующих между собой угол $\pi - \alpha$:

$$\rho_{i+1}(P) = \sqrt{\rho_i^2(P) + 2\cos\alpha \cdot \rho_i(P)\, r_i + r_i^2}\,.$$

Подставляя это выражение в правое уравнение в (43), получаем

$$\sqrt{\rho_i^2(P) + 2\cos\alpha \cdot \rho_i(P) r_i + r_i^2} = 2\cos\alpha_{i+1} \cdot r_i \left(\frac{\rho_i(P)}{r_i}\right)^{\beta_i},$$

где $\beta_i = b_i/b_{i+1}$. Сокращая обе части равенства на r_i, приходим к искомому уравнению (44) относительно величины $t = \tau_i(P)$.

Утверждение 3. *При $\alpha = 0$ уравнение (44) совпадает с уравнением (42) (для $\beta_i = b_i/b_{i+1}$) и имеет единственное решение $\nu_i \in (0,1)$.*

При $\alpha \in (0, \alpha_i]$ уравнение (44) имеет два различных решения. Если обозначить эти решения через ν_i^-, ν_i^+, $\nu_i^- < \nu_i^+$, то

$$0 < \nu_i^- < \nu_i < \nu_i^+ \leqslant 1, \tag{45}$$

причем равенство $\nu_i^+ = 1$ имеет место, только если $\alpha = \alpha_i$.

Доказательство. Поскольку график функции левой части уравнения (44) является выпуклым вниз, то при $t \in [0,1]$ он лежит ниже прямой $y = t + 1$, за исключением единственной общей точки при $t = 0$. С другой стороны, эта прямая согласно утверждению 1 касается при $t = \nu_i$ графика функции правой части уравнения (44), являющегося при этом выпуклым вверх. Тогда, сравнивая при $t = 1$ значения левой и правой частей уравнения (44), заключаем, что данное утверждение справедливо.

Теперь на основании утверждений 2 и 3 непосредственно получаем описание подмножества в полуконусе K_i, где значения функций h_i и h_{i+1} совпадают.

На луче $l_{i,0}$ функции h_i и h_{i+1} совпадают в некоторой единственной точке $P_{i,0} \in l_{i,0}$. При этом

$$h_i(P) > h_{i+1}(P) \tag{46}$$

для остальных точек P этого луча.

На любом луче $l_{i,\alpha}$, $\alpha \in (0, \alpha_i]$, существуют две точки $P_{i,\alpha}^-$ и $P_{i,\alpha}^+$, в каждой из которых функции h_i и h_{i+1} равны между собой.

Положение остальных точек $P \in l_{i,\alpha}$ удовлетворяет импликации

$$\rho_i(P) \in (\rho_i(P_{i,\alpha}^-), \rho_i(P_{i,\alpha}^+)) \quad \Longleftrightarrow \quad h_i(P) < h_{i+1}(P), \tag{47}$$

где для определенности предполагается, что $\rho_i(P_{i,\alpha}^-) < \rho_i(P_{i,\alpha}^+)$.

Справедливость неравенств (46) и (47) следует из того, что

$$\lim_{\rho_i(P)\to 0} h_i(P) = +\infty, \qquad \lim_{\rho_i(P)\to +\infty} \frac{h_i(P)}{h_{i+1}(P)} = \frac{b_i}{b_{i+1}} < 1$$

в силу определений (39) функций h_i и h_{i+1}.

Подмножество в K_i, на котором значения функций h_i и h_{i+1} совпадают, состоит из двух множеств

$$\begin{aligned} \Gamma_i^- &:= \{P \in K_i : P = P_{i,\alpha}^-,\ \alpha \in [0, \alpha_i]\}, \\ \Gamma_i^+ &:= \{P \in K_i : P = P_{i,\alpha}^+,\ \alpha \in [0, \alpha_i]\}, \end{aligned} \tag{48}$$

пересекающихся в единственной точке $P_{i,0} = P_{i,0}^+ = P_{i,0}^+$ на луче $l_{i,0}$.

Множества Γ_i^- и Γ_i^+ ограничивают такую область в K_i, на которой $h_i < h_{i+1}$ и всюду вне замыкания которой $h_i > h_{i+1}$.

Ясно, что каждое из этих множеств представляет собой $(n-1)$-мерную поверхность с краем (лежащим на границе полуконуса K_i), гладкую во всех своих точках, за исключением, возможно, точки $P_{i,0} \in l_{i,0}$.

5. *Определение искомой функции.* Для этого нам потребуются только поверхности Γ_i^+ вида (48). На основании утверждений 2 и 3 имеем

$$\forall\, P \in \Gamma_i^+ \quad \rho_i(P) = \nu_i^+ r_i, \qquad \text{если } P \neq P_{i,0} \text{ и } \rho_i(P_{i,0}) = \nu_i r_i, \tag{49}$$

где $r_i = \|X_i Y_{i+1}\| = \rho_i(Y_{i+1})$. Поэтому в силу неравенств (45)

$$\forall\, P \in \Gamma_i^+ \qquad \rho_i(P_{i,0}) \leqslant \rho_i(P) \leqslant \rho_i(Y_{i+1}). \tag{50}$$

Отметим следующее свойство соседних поверхностей Γ_{i-1}^+ и Γ_i^+.

В каждом полуконусе K_i, $i = 1, 2, \dots$, целиком содержатся две поверхности Γ_{i-1}^+ и Γ_i^+, причем они не пересекаются между собой.

Действительно, согласно (50) расстояние от поверхности Γ_i^+ до вершины X_i не больше, чем $\rho_i(Y_{i+1}) = \|X_i Y_{i+1}\|$, но в силу (34) и (38) $\|X_i Y_{i+1}\| \leqslant \|X_{i-1} X_i\|$. Следовательно, поверхность Γ_i^+ не пересекается даже с полуконусом K_{i-1}, в котором целиком лежит поверхность Γ_{i-1}^+.

В силу этого свойства поверхности Γ_{i-1}^+ и Γ_i^+, $i = 1, 2, \dots$, ограничивают в полуконусе K_i некоторую предкомпактную открытую в K_i область G_i.

Ясно, что многообразие H, определенное в (36), является объединением замыканий всех областей G_i при $i = 1, 2, \dots$, а также области, ограниченной поверхностью Γ_0^+ и сечением полуконуса K_0 плоскостью $x = 0$. Обозначим последнюю область через G_0. Тогда определим на H искомую функцию h, полагая

$$h = h_i \quad \text{на } \overline{G}_i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots\,. \tag{51}$$

Прежде всего отметим, что h является непрерывной кусочно гладкой функцией в H (так как области $\overline{G}_i$ и $\overline{G}_{i+1}$ пересекаются между собой по поверхности Γ_i^+, на которой функции h_i и h_{i+1} совпадают).

Проверим, что функция h является n-субгармонической в H.

В самом деле, h является n-гармонической функцией в окрестности всякой внутренней точки из H, не лежащей на поверхностях Γ_i^+ (поскольку согласно п. 2 рассматриваемого доказательства каждая функция h_i является n-гармонической в области G_i). При этом на всей границе области H выполняется неравенство (12), обращающееся в равенство на ее боковой поверхности.

Возьмем теперь на любой поверхности Γ_i^+ произвольную отличную от $P_{i,0}$ точку. Тогда достаточно малая окрестность U этой точки, не содержащая $P_{i,0}$, разбивается поверхностью Γ_i^+ на две части U_1 и U_2, одна из которых, скажем U_1, лежит в области G_i, другая часть – в области G_{i+1}. В силу неравенств (47) и определения (51)

$$\forall\, P \in U_1 \quad h(P) = h_i(P) > h_{i+1}(P), \qquad \forall\, P \in U_2 \quad h(P) = h_{i+1}(P) > h_i(P).$$

Значит, $h = \max\{h_i, h_{i+1}\}$ в U.

Следовательно, по свойству n-субгармонических функций (см. п. 3.1) функция h является n-субгармонической в окрестности U.

На основании проведенной проверки h является n-субгармонической функцией локально в H, т.е. в окрестности любой точки из H (за исключением, возможно, дискретного множества точек $P_{i,0}$). Тогда в силу (отмеченного в п. 3.1) свойства локальности понятия n-субгармоничности функция h является n-субгармонической во всем многообразии H.

Итак, функция h, сферически симметричная относительно оси Ox, представляет собой n-субгармонический потенциал на H.

Построение искомых объектов завершено.

Проверка требуемых свойств трубчатой окрестности и потенциала. Прежде всего отметим, что свойством симметричности область H и функция h обладают по построению.

Поскольку проверка аналитических свойств будет связана с обращением к множествам уровня $E_h(t)$ функции h, уточним сначала вид последних в зависимости от значения t.

1. *Множества уровня потенциала.* Прежде всего, из определения (51) ясно, что $\sup_H h = +\infty$, $\min_H h = h(Y_0)$, и все множество значений функции h представляется в виде объединения попарно непересекающихся интервалов $[h(Y_i), h(Y_{i+1}))$, $i = 0, 1, \dots$. (Последовательность точек $Y_i \in H$ была определена при построении многообразия H.)

Поскольку $h(\Gamma_i^+) = h_i(\Gamma_i^+) = h_{i+1}(\Gamma_i^+)$ и в силу неравенств (50)

$$\forall\, P \in \Gamma_i^+ \qquad h_i(Y_{i+1}) \leqslant h_i(P) \leqslant h_i(P_{i,0})$$

(где $P_{i,0}$ – точка на оси Ox, в которой $h_i(P_{i,0}) = h_{i+1}(P_{i,0})$), то

$$h(\Gamma_i^+) = [h(Y_{i+1}), h(P_{i,0})], \qquad h(P_{i,0}) < h(Y_{i+2}). \tag{52}$$

Тогда на основании (52) для любого значения $t \in [h(Y_{i+1}),\, h(P_{i,0})]$ множество уровня $E_h(t)$ состоит из частей множеств уровня $E_{h_i}(t)$ и $E_{h_{i+1}}(t)$ (склеенных по некоторому подмножеству множества Γ_i^+):

$$\forall\, t \in [h(Y_{i+1}), h(P_{i,0})] \qquad E_h(t) = (E_{h_i}(t) \cap \overline{G}_i) \cup (E_{h_{i+1}}(t) \cap \overline{G}_{i+1}). \tag{53}$$

В дополнение к этому, очевидно,

$$\forall\, t \in [h(P_{i,0}), h(Y_{i+2})] \qquad E_h(t) = E_{h_{i+1}}(t). \tag{54}$$

Тем самым, в (53) и (54) указан вид множеств уровня $E_h(t)$ для всех t, принадлежащих любому промежутку $[h(Y_{i+1}),\, h(Y_{i+2}))$.

Перейдем теперь к проверке аналитических свойств, которые состоят в выполнимости для построенной области H и функции h условий а) и б) предложения 1 и условия (15) предложения 2.

2. *Выполнимость условия а) предложения* 1. Хотя это условие имеет смысл только при $n \geqslant 3$, временно будем считать, что $n \geqslant 2$.

Рассмотрим сначала для произвольного номера i множества уровня $E_{h_i}(t)$ функции h_i, определенной в (39). Ясно, что $E_{h_i}(t)$ для любого $t > 0$ представляет собой $(n-1)$-мерную поверхность, которую вырезает полуконус K_i из $(n-1)$-мерной сферы

$$\{(x;\mathbf{y}) : (x-x_i)^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \rho_i^2\}$$

с центром в точке $X_i = (x_i;\mathbf{0})$ и радиуса ρ_i такого, что $h(\rho_i) = t$.

Поскольку граница ∂K_i задается условием $|x - x_i|\mathrm{tg}\alpha_i = \|\mathbf{y}\|$, то на краю поверхности $E_{h_i}(t)$ выполнено $\|\mathbf{y}\| = \rho_i \sin\alpha_i$. Следовательно, $E_{h_i}(t)$ представляется графиком функции $x = x(\mathbf{y})$:

$$x(y) = x_i - \sqrt{\rho_i^2 - \|\mathbf{y}\|^2}\,, \tag{55}$$

рассматриваемой на $(n-1)$-мерном шаре

$$\overline{B_i} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1} : \|\mathbf{y}\| \leqslant \rho_i \sin\alpha_i\}. \tag{56}$$

Обозначим через ds_i^2 и $d\sigma^2$ метрики поверхности $E_{h_i}(t)$ и шара $\overline{B_i}$ соответственно. Тогда $d\sigma^2 = \|d\mathbf{y}\|^2$ и, как легко вычислить из (55),

$$ds_i^2 = \|d\mathbf{y}\|^2 + \frac{\langle \mathbf{y}, d\mathbf{y}\rangle^2}{\rho_i^2 - \|\mathbf{y}\|^2}\,.$$

Отсюда с учетом ограничения $\mathbf{y} \in \overline{B_i}$ приходим к оценке

$$d\sigma^2 \leqslant ds_i^2 \leqslant \cos^{-2}\alpha_i\, d\sigma^2. \tag{57}$$

Обратимся теперь к множествам уровня $E_h(t)$ искомой функции h. Поскольку в силу (53) и (54) для любого значения $t > \min_H h$ множество $E_h(t)$ либо совпадает с множеством уровня функции h_i, либо склеено из частей множеств уровня функций h_i и h_{i+1}, а на каждом из последних имеет место (57), то для метрики ds^2 любой поверхности $E_h(t)$ (при $t \in [h(Y_{i+1}),\, h(Y_{i+2})]$ для некоторого i) справедлива оценка (57) с заменой в ней ds_i^2 на ds^2 (правая часть в (57) не изменится, так как $\cos\alpha_{i+1} > \cos\alpha_i$).

Проведенные до сих пор рассуждения верны при любом $n \geqslant 2$. Обратимся теперь к изопериметрическому неравенству на $(n-1)$-мерных компактных многообразиях, предполагая уже, что $n \geqslant 3$.

Обозначим через I_{n-1} наименьшую изопериметрическую постоянную $(n-1)$-мерного евклидова шара $\overline{B_i}$, которая (как указано в п. 3.1) не зависит от радиуса этого шара, а зависит только от его размерности. Тогда из оценки (57), в которой метрика ds_i^2 заменена метрикой ds^2 поверхности $E_h(t)$, непосредственно вытекает, что для некоторого номера i (а именно такого, при котором $t \in [h(Y_{i+1}), h(Y_{i+2})]$) величина

$$I(t) := \cos^{1-n}\alpha_i \cdot I_{n-1} \tag{58}$$

может служить изопериметрической постоянной многообразия $E_h(t)$.

Отсюда заключаем, что условие а) предложения 1 выполняется с постоянной $I = \cos^{1-n}\alpha_0 \cdot I_{n-1}$ (так как $I(t) \leqslant I$ для всех i).

3. *Выполнимость условия* б) *предложения* 1. Дальнейшие рассмотрения будут справедливы при любом $n \geqslant 2$. Будем исходить из указанного выше вида произвольного множества уровня $E_h(t)$ функции h в зависимости от двух возможных альтернативных случаев (53) и (54).

В случае (54) множество $E_h(t)$ совпадает с множеством уровня $E_{h_i}(t)$ функции h_i (при некотором номере i). Поскольку в силу (39)

$$\nabla h_i = -\frac{b_i}{\rho_i}\,\nabla\rho_i, \qquad \|\nabla h_i\| = \frac{b_i}{\rho_i} \tag{59}$$

всюду на $E_{h_i}(t)$, то в рассматриваемом случае

$$\max_{E_h(t)} \|\nabla h\| = \min_{E_h(t)} \|\nabla h\|. \tag{60}$$

Обратимся к рассмотрению альтернативного случая (53), в котором множество $E_h(t)$ склеено из частей множеств $E_{h_i}(t)$ и $E_{h_{i+1}}(t)$ по некоторому множеству $\Gamma \subset \Gamma_i^+$. На каждой из таких частей норма $\|\nabla h\|$ равна величинам $\|\nabla h_i\|$ или $\|\nabla h_{i+1}\|$, а последние в силу (59) связаны между собой соотношением

$$\|\nabla h_{i+1}\| = \frac{b_{i+1}}{b_i}\,\frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}\|\nabla h_i\|,$$

где в качестве ρ_i и ρ_{i+1} можно взять расстояния от любой точки $P \in \Gamma$ до вершин X_i и X_{i+1} соответственно. Тогда по “неравенству треугольника” $\rho_i < \rho_{i+1} < \rho_i + r_i$ (где, напомним, $r_i = \|X_i X_{i+1}\|$) и из последнего соотношения между нормами $\|\nabla h_i\|$, $\|\nabla h_{i+1}\|$ получаем

$$\frac{\rho_i}{\rho_i + r_i}\|\nabla h_i\| \leqslant \|\nabla h_{i+1}\| \leqslant \frac{b_{i+1}}{b_i}\|\nabla h_i\|.$$

Отсюда в силу оценки $\rho_i \geqslant \rho_i(P_{i,0}) = \nu_i r_i$ (см. (49) и (50)) получаем неравенство

$$\frac{\nu_i}{1+\nu_i}\|\nabla h_i\| \leqslant \|\nabla h_{i+1}\| \leqslant \frac{b_{i+1}}{b_i}\|\nabla h_i\|, \tag{61}$$

где $\nu_i \in (0,1)$ – единственный корень уравнения (42) при $\beta_i = b_i/b_{i+1}$.

На основании утверждения 1 производные обеих частей уравнения (42) в точке $t = \nu_i$ совпадают, т.е. $2\cos\alpha_{i+1} \cdot \nu_i^{\beta_i - 1}\beta_i = 1$. Значит, в силу равенства (42) при $t = \nu_i$ имеют место соотношения

$$\beta_i = \frac{b_i}{b_{i+1}} = \frac{\nu_i}{1+\nu_i}\,. \tag{62}$$

Следовательно, неравенство (61) можно записать в виде

$$\frac{b_i}{b_{i+1}}\|\nabla h_i\| \leqslant \|\nabla h_{i+1}\| \leqslant \frac{b_{i+1}}{b_i}\|\nabla h_i\|. \tag{63}$$

Учитывая, что $\|\nabla h_i\|$ и $\|\nabla h_{i+1}\|$ – единственные два постоянных значения величины $\|\nabla h\|$ на множестве $E_h(t)$ (в рассматриваемом случае (53)), из последнего неравенства получаем оценки

$$\max_{E_h(t)} \|\nabla h\| \leqslant \frac{b_{i+1}}{b_i} \min_{E_h(t)} \|\nabla h\|. \tag{64}$$

Заметим, что отношение b_{i+1}/b_i монотонно убывает при $i \to +\infty$. В самом деле, если $\beta_{i+1} < \beta_i$, то при замене i на $i+1$ в уравнении (42) его правая часть увеличится, и ее график не будет касаться графика левой части этого уравнения, что противоречит утверждению 1. Поэтому величина $\beta_i = b_i/b_{i+1}$ с увеличением i возрастает, и отношение b_{i+1}/b_i монотонно убывает при $i \to +\infty$.

Тогда в силу (64) (с учетом (60)) условие б) предложения 1 выполняется с постоянной $Q = b_1/b_0$.

4. *Выполнимость условия* (15) *предложения* 2. В силу свойства монотонности потока (см. п. 3.1) указанное условие достаточно проверить только для последовательности значений $t_i := h(Y_{i+1})$.

Для любого такого значения множество уровня $E_h(t_i)$ совпадает с множеством $E_{h_i}(t_i)$, которое, как было показано, представляется в виде графика функции (55), заданной в $(n-1)$-мерном шаре (56). Тогда для потока (13) функции h, используя формулы (59) и неравенства (57) между метриками поверхности $E_{h_i}(t_i)$ и шара $\overline{B_i}$, получаем

$$S_h(t_i) \geqslant \left(\frac{b_i}{r_i}\right)^{n-1} V_{n-1}(\overline{B_i}) = v_{n-1}(b_i \sin\alpha_i)^{n-1},$$

$$S_h(t_{i+1}) \leqslant \left(\frac{b_{i+1}}{r_{i+1}\cos\alpha_{i+1}}\right)^{n-1} V_{n-1}(\overline{B_{i+1}}) = v_{n-1}(b_{i+1}\operatorname{tg}\alpha_{i+1})^{n-1}$$

(где $V_{n-1}(\overline{B_i})$ и v_{n-1} – объемы шара $\overline{B_i}$ и единичного шара в $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно).

Отсюда получаем соотношения между значениями $S_h(t_i)$ и $S_h(t_{i+1})$

$$S_h(t_{i+1}) \leqslant \left(\frac{b_{i+1}\operatorname{tg}\alpha_{i+1}}{b_i \sin\alpha_i}\right)^{n-1} S_h(t_i) = (2\beta_i\cos^2\alpha_{i+1})^{1-n} S_h(t_i) \tag{65}$$

(при этом было учтено, что $\alpha_i = 2\alpha_{i+1}$, и потому $\sin\alpha_i = 2\cos^2\alpha_{i+1}\operatorname{tg}\alpha_{i+1}$).

Прежде чем идти дальше, выясним характер зависимости отношения $\beta_i = b_i/b_{i+1}$ от α_{i+1} при $i \to +\infty$. Напомним, что β_i вместе с ν_i однозначно определяются из уравнения (42) как функции угла α_{i+1}.

Между собой функции β_i и ν_i связаны соотношением (62) и, как отмечено в конце п. 3, монотонно возрастают при уменьшении α_{i+1}, т.е. при $i \to +\infty$. Более того, нетрудно видеть, что

$$\overline{\beta} := \lim_{i\to+\infty} \beta_i = \frac{1}{2}\,, \qquad \overline{\nu} := \lim_{i\to+\infty} \nu_i = 1. \tag{66}$$

Действительно, если $\overline{\beta} < 1/2$ и (в силу (62)) $\overline{\nu} < 1$, то на отрезке $[\overline{\nu}, 1]$ функциональная последовательность $\{2\cos\alpha_{i+1}\cdot t^{\beta_i}\}$ монотонна и равномерно по t стремится при $i \to +\infty$ к функции $y = 2t^{\overline{\beta}}$, график которой вблизи точки $t = 1$ выше графика левой части уравнения (42), что противоречит утверждению 1. Значит, $\overline{\nu} = 1$ и $\overline{\beta} = 1/2$.

Обозначим $\alpha := \{\alpha_{i+1}\}$, $\beta := \{\beta_i\}$ и $\nu := \{\nu_i\}$. Тогда в силу (62) и (66) величины β и ν как функции от α можно представить в виде

$$\beta = \frac{1-\delta(\alpha)}{2}\,, \qquad \nu = \frac{1-\delta(\alpha)}{1+\delta(\alpha)}\,, \tag{67}$$

где $0 < \delta(\alpha) < 1$ – некоторая бесконечно малая при $\alpha \to 0$.

Для того чтобы определить характер зависимости δ от α, прологарифмируем равенство (42) при $t=\nu_i$ и подставим затем в полученное равенство выражения (67):

$$\ln\frac{2}{1+\delta(\alpha)}=\ln 2+\ln\cos\alpha+\frac{1-\delta(\alpha)}{2}\,\ln\frac{1-\delta(\alpha)}{1+\delta(\alpha)}\,.$$

Отсюда, используя разложения по формуле Тейлора

$$\ln\frac{2}{1+\delta}=\ln 2-\delta+\frac{1}{2}\,\delta^2+o(\delta^2),\qquad \ln\cos\alpha=-\frac{1}{2}\,\alpha^2+o(\alpha^2),$$
$$\frac{1-\delta}{2}\,\ln\frac{1-\delta}{1+\delta}=-(1-\delta)(\delta+o(\delta^2))=-\delta+\delta^2+o(\delta^2)$$

(при $\alpha\to 0$ и $\delta\to 0$), после сокращений получим

$$\delta^2(\alpha)+o(\delta^2(\alpha))=\alpha^2+o(\alpha^2)\quad\text{при } \alpha\to 0.$$

Следовательно, бесконечно малые δ и α эквивалентны.

Теперь в силу (67) имеем нужную нам зависимость β от α

$$\beta=\frac{1-\alpha}{2}+o(\alpha)\quad\text{при } \alpha\to 0. \tag{68}$$

Вернемся к неравенству (65). Поскольку в силу (68)

$$2\beta\cos^2\alpha=(1-\alpha)\cos^2\alpha=1-\alpha+o(\alpha)\quad\text{при } \alpha\to 0,$$

то неравенство (65) можно представить в виде

$$S_h(t_{i+1})\leqslant(1+\alpha_{i+1}+\varepsilon_i\alpha_{i+1})^{n-1}\,S_h(t_i),$$

где $\varepsilon_i\to 0$ при $i\to+\infty$.

Полученное рекуррентное соотношение приводит к неравенству

$$S_h(t_i)\leqslant\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j+\varepsilon_j\alpha_j)^{n-1}\cdot S_h(t_0), \tag{69}$$

где $t_0=\min_H h=h_0(O)$ и $S_h(t_0)=S_{h_0}(O)$.

Поскольку по условию (34) $\alpha_i=2^{-i}\alpha_0$, то

$$C:=\prod_{j=1}^{+\infty}(1+\alpha_j+\varepsilon_j\alpha_j)^{n-1}<+\infty,$$

и неравенство (69) дает оценку потока $S_h(t)<CS_h(t_0)$ при всех значениях $t=t_i$, $t_1<t_2<\dots<t_i\to+\infty$.

Но тогда, как уже было сказано в начале этого пункта, на основании свойства монотонности n-субгармонического потенциала h полученная для $S_h(t)$ оценка распространяется и на все значения $t>t_0$.

Поэтому условие (15) предложения 2 выполняется с $S=CS_h(t_0)$.

5. *Проверка свойства невырожденности.* По построению градиент функции h совпадает с градиентом одной из функций h_i или h_{i+1} для некоторого номера i. Следовательно, из формул (59), полагая в них $\rho_i \leqslant R_i$ и $b_i > 1$, имеем оценку

$$\|\nabla h\| \geqslant \frac{1}{R_{i+1}}\,.$$

Поскольку в силу (38) и (35) последовательность чисел R_{i+1} ограничена сверху, то требуемое условие на функцию h выполняется.

Лемма 1 полностью доказана.

3.3. Утверждения из п. 2.4.

Доказательство леммы 2. Искомое отображение окрестности луча γ построим с помощью конструкции, которая используется при введении так называемых координат Ферми (см., например, [5; § 3.8]).

Пусть

$$N\gamma = \{(x,v) \mid x \in \gamma,\, v \in T_x^{\perp}\}$$

– нормальное расслоение к кривой γ в M, где $T_x^{\perp}$ – ортогональное дополнение в T_xM к касательному пространству $T_x\gamma$ кривой γ в точке x. Нулевое сечение расслоения $N\gamma$, которое можно отождествить с лучом γ, будем обозначать через γ^0 и также называть лучом.

Рассмотрим экспоненциальное отображение $\exp_{N\gamma}\colon N\gamma \to M$, определяемое формулой $\exp_{N\gamma}(x,v) = \exp_x(v)$, где $\exp_x\colon T_xM \to M$ – экспоненциальное отображение в точке x.

В силу локальной диффеоморфности отображения $\exp_{N\gamma}$ на γ^0 найдется окрестность $U_\gamma^0 \subset N\gamma$ всего луча γ^0, которая диффеоморфна при отображении $\exp_{N\gamma}$ некоторой окрестности $U_\gamma \subset M$ луча γ. Перейдем к обратному отображению – диффеоморфизму $\exp_{N\gamma}^{-1}\colon U_\gamma \to U_\gamma^0$.

Поскольку в силу леммы Гаусса (см., например, [5; § 4.4]) экспоненциальное отображение $\exp_{N\gamma}$ изометрично на луче γ^0, то отображение $\exp_{N\gamma}^{-1}$ изометрично на исходном луче γ.

Далее отобразим U_γ^0 диффеоморфно на некоторую окрестность луча в $\mathbb{R}^n$. С этой целью возьмем в начальной точке p произвольный ортонормированный базис пространства $T_p^{\perp}$ и с помощью параллельного переноса этого базиса вдоль луча γ однозначно определим ортонормированный набор векторных полей $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ на γ. Тогда вложение $i\colon U_\gamma^0 \to \mathbb{R}^n$ определим следующим образом:

$$\forall\,(x,v) \in U_\gamma^0 \qquad i(x,v) = (r, v_1,\dots,v_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,$$

где $r = r_p(x)$, а $\{v_i = g(v,e_i)\}$ – координаты вектора $v \in T_x^{\perp}$ в базисе $\{e_i(x)\}$, $i = 1,\dots,n-1$.

Отметим, что отображение i переводит луч γ^0 в евклидов координатный луч $l \in \mathbb{R}^n$, на котором меняется только координата $r \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь суперпозицию $\varphi := i \circ \exp_{N\gamma}^{-1}$ построенных отображений. Поскольку в силу сказанного выше отображение $\exp_{N\gamma}^{-1}$ изометрично на луче γ, а отображение i изометрично на луче γ^0, то отображение φ является изометрией на луче γ и диффеоморфно отображает его окрестность U_γ в некоторую окрестность евклидова луча $l \in \mathbb{R}^n$. Тогда ясно, что окрестность U_γ

луча γ можно сузить до такой его окрестности, на которой отображение φ будет Q-квазиизометрическим с любым наперед заданным числом $Q > 1$.

Тем самым, для отображения φ справедливо первое утверждение леммы. Обращаясь ко второму утверждению леммы, обозначим

$$\Sigma_\gamma(t) := r_p^{-1}(t) \cap U_\gamma, \qquad \Sigma(t) := \varphi(\Sigma_\gamma(t)),$$

а через $\Pi(t)$ обозначим $(n-1)$-мерную плоскость в $\mathbb{R}^n$, ортогональную оси l в точке $(t, 0, \dots, 0) \in l$.

Заметим, что отображение φ окрестности U_γ еще не является, вообще говоря, искомым: множество $\Sigma_\gamma(t)$ может не лежать в плоскости $\Pi(t)$. Для того чтобы подправить нужным образом отображение φ, введем на окрестности $U = \varphi(U_\gamma)$ луча l дополнительное отображение $\pi\colon U \to \mathbb{R}^n$ ортогонального проектирования точек поверхности $\Sigma(t)$ в плоскость $\Pi(t)$. Точнее, для каждой точки $(r, v_1, \dots, v_{n-1}) \in U$ найдем однозначно определенную поверхность $\Sigma(t)$, содержащую эту точку, и положим

$$\pi(r, v_1, \dots, v_{n-1}) = (t, v_1, \dots, v_{n-1}). \tag{70}$$

Построенная при этом в области U функция $t = t(r, v_1, \dots, v_{n-1})$ может быть представлена в виде $t = r_p \circ \varphi^{-1}$.

Как известно, для гладкого многообразия M функция r_p является гладкой в достаточно малой окрестности геодезического луча γ (за исключением точки p), причем всюду в этой окрестности $|\nabla r_p| = 1$. Не ограничивая общности, таковой окрестностью можно считать U_γ.

Поскольку в этом случае функция r_p не имеет в U_γ критических точек, отображение π локально диффеоморфно в U. Более того, можно считать, при необходимости еще более сузив окрестность U_γ, а вместе с ней и окрестность U луча l, что отображение π взаимно однозначно на U и, значит, является диффеоморфизмом. Тогда суперпозиция $\pi \circ \varphi$ является искомым отображением.

Действительно, по построению отображение $\pi \circ \varphi$ удовлетворяет утверждению 2): под его действием образ множества $\Sigma_\gamma(t)$ лежит в плоскости $\Pi(t)$.

Однако теперь нужно проверить, что отображение $\pi \circ \varphi$ удовлетворяет и утверждению 1), т.е. является Q-квазиизометрическим. Для этого с учетом уже установленной выше Q-квазиизометричности отображения φ убедимся, что π – квазиизометрическое отображение.

В самом деле, поскольку отображение $\varphi^{-1}\colon U \to U_\gamma$ является Q-квазиизометрическим, а $|\nabla r_p| = 1$ всюду в U_γ, то для функции $t = r_p \circ \varphi^{-1}$

$$Q^{-1} \leqslant |\nabla t| \leqslant Q \quad \text{всюду в } U.$$

Отсюда на основании определения (70) следует, что отображение π является Q-квазиизометрическим отображением.

Лемма 2 доказана.

Выражаю искренною благодарность В. А. Зоричу за научное общение, которое привело к появлению настоящей работы, а также за ценные замечания и советы, позволившие существенно улучшить текст статьи.

Список литературы

[1] В. М. Кесельман, "Об изопериметрическом неравенстве на конформно-параболических многообразиях", *УМН*, **62**:6 (2007), 177–178; англ. пер.: V. M. Kesel'man, "On the isoperimetric inequality on conformally parabolic manifolds", *Russian Math. Surveys*, **62**:6 (2007), 1210–1211.

[2] В. А. Зорич, В. М. Кесельман, "Изопериметрическое неравенство на многообразиях конформно-гиперболического типа", *Функц. анализ и его прил.*, **35**:2 (2001), 12–23; англ. пер.: V. A. Zorich, V. M. Kesel'man, "The isoperimetric inequality on manifolds of conformally hyperbolic type", *Funct. Anal. Appl.*, **35**:2 (2001), 90–99.

[3] В. М. Кесельман, "Изопериметрическое неравенство на конформно-гиперболических многообразиях", *Матем. сб.*, **194**:4 (2003), 29–48; англ. пер.: V. M. Kesel'man, "Isoperimetric inequality on conformally hyperbolic manifolds", *Sb. Math.*, **194**:4 (2003), 495–513.

[4] В. А. Зорич, В. М. Кесельман, "О конформном типе риманова многообразия", *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 40–55; англ. пер.: V. A. Zorich, V. M. Kesel'man, "On the conformal type of a Riemannian manifold", *Funct. Anal. Appl.*, **30**:2 (1996), 106–117.

[5] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971; пер. с нем.: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes in Math., **55**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1968.

[6] V. A. Zorich, "The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems", *Quasiconformal space mappings*, Lecture Notes in Math., **1508**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 132–148.

[7] R. Grimaldi, P. Pansu, "Sur la croissance du volume dans une classe conforme", *J. Math. Pures Appl.* (9), **71**:1 (1992), 1–19.

[8] Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства*, Наука, Л., 1980; англ. пер.: Yu. D. Burago, V. A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Grundlehren Math. Wiss., **285**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

В. М. Кесельман (V. M. Kesel'man)
Московский государственный индустриальный университет
E-mail: kvlm@online.ru

Поступила в редакцию
09.06.2008 и 22.09.2008