А. В. Гришин, О мере включения в относительно свободных алгебрах с тождеством лиевой нильпотентности степени 3 и 4, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 2, 75–86

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9034

УДК 517.538

А. В. Гришин

О мере включения в относительно свободных алгебрах с тождеством лиевой нильпотентности степени 3 и 4

В работе используется понятие градуированного подпространства полилинейной части относительно свободной алгебры, а также меры включения такого подпространства. Рассматриваются также и другие асимптотические характеристики. Для относительно свободных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 3 и 4 вычисляется мера включения для многих подпространств. В частности, для центра и для T-пространства, порожденного коммутатором, она равна $1/2$.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: тождество лиевой нильпотентности, соотношения Фробениуса, градуированное подпространство, мера включения, порядок роста.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9034

§ 1. Введение

Известно, что размерностные функции, возникающие при изучении относительно свободных алгебр, несут весьма существенную информацию о комбинаторике этих алгебр (см. [1]–[8]). Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения размерностных функций, связанных с относительно свободными алгебрами с тождеством лиевой нильпотентности степени 3 и 4. В основном изучается такое новое понятие, как мера включения. Во многих случаях (например, для центров) ее удается вычислить.

В § 2 вводятся основные определения и обозначения, рассматриваются основные численные характеристики, применяемые при исследовании асимптотики в относительно свободных алгебрах.

В § 3 дается полное описание центра (см. [9]) относительно свободной алгебры с тождеством лиевой нильпотентности степени 3 (алгебры Грассмана).

В § 4 приводится аналогичный результат для степени 4 (см. [10]).

В § 5, который является по существу центральным, вычисляются меры включения всех основных градуированных подпространств в указанных алгебрах.

В § 6 приводятся открытые вопросы, которые, как представляется, имеют большой интерес.

§ 2. Основные определения и обозначения. Численные характеристики

Пусть $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ – относительно свободная счетнопорожденная алгебра некоторого многообразия ассоциативных алгебр, k – бесконечное поле характеристики $\neq 2, 3$. Тогда *полилинейная часть* $M(F)$ алгебры F, которая по определению распадается в прямую сумму своих подпространств F_n, состоящих из линейных комбинаций полилинейных многочленов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$: $M(F) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$.

Полилинейная часть любого T-пространства U алгебры F, т.е. пространство $M(F) \cap U$, также распадается в прямую сумму: $M(U) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n = U \cap F_n$.

В первую очередь нас будут интересовать следующие T-пространства: $C_1 = ([x_1, x_2])^T$ – T-идеал, порожденный коммутатором (*коммутант*), $C_m = C_1^m$; $D_1 = \{[x_1, x_2]\}^T$ – T-пространство, порожденное коммутатором, $D_m = D_1^m$. $Z(F)$ – центр алгебры F.

Всюду ниже $F^{(l)}$ – относительно свободная алгебра с тождеством лиевой нильпотентности $[x_1, \dots, x_l] = 0$, где $[x_1, \dots, x_l]$ – длинный коммутатор. Если $l_1 < l_2$, то $T^{(l_1)}$ – T-идеал в алгебре $F^{(l_2)}$, порожденный многочленом $[x_1, \dots, x_{l_1}]$, где $[x_1, \dots, x_{l_1}]$ – коммутатор длины l_1.

Приведем здесь некоторые из численных характеристик, имеющих важное значение.

I. Порядок роста размерностных функций. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ – две натуральнозначные функции натурального аргумента. Скажем, что функция $f(n)$ *мажорирует функцию* $g(n)$, если существует такое $\gamma > 0$, что $g(n) < \gamma f(n)$ для всех n. Будем записывать это как $g(n) \prec f(n)$. Если $f(n) \prec g(n)$ и $g(n) \prec f(n)$, т.е. $f(n)/g(n) < \gamma_1$ и $g(n)/f(n) < \gamma_2$ для некоторых положительных γ_1 и γ_2 и для всех n, то будем записывать это как $f(n) \asymp g(n)$ и говорить, что функции $f(n)$ и $g(n)$ *одного порядка роста*. Например, два натуральнозначных многочлена от натуральной переменной n, имеющих одинаковую степень, имеют один порядок роста.

В [3] показано, что для алгебр $F^{(3)}$ и $F^{(4)}$ функция $\dim F_n$ имеет порядок роста 2^n, для $F^{(5)}$ и $F^{(6)}$ он равен $2^n n^2$ (см. [7]), а для $F^{(7)}$ это $2^n n^4$ (см. [8]). В общем случае имеется гипотеза, что для алгебры $F^{(2r+3)}$ порядок роста $\dim F_n$ равен $2^n n^{2r}$.

II. Главная часть размерностной функции. В ситуациях, рассматриваемых ниже, размерностные функции имеют вид $\gamma 2^n n^s + f(n)$, где $\gamma > 0$, а $f(n)$ – некоторая функция, для которой $\lim_{n\to\infty} f(n)/(2^n n^s) = 0$. Первое слагаемое и будем называть *главной частью*.

III. Мера включения градуированных подпространств. Пусть $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_i \oplus \cdots$ – бесконечная прямая сумма конечномерных векторных пространств, причем $\dim V_{i+1} > \dim V_i > 0$, $i = 1, \dots, n, \dots$. Любое однородное подпространство в V, имеющее вид $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_i \oplus \cdots$, где $0 \neq U_i \subset V_i$, назовем *градуированным*. Пусть $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_i \oplus \cdots$ – другое градуированное подпространство и $W_i \subset U_i$. Назовем *мерой включения* W *в* U предел (если он существует)

$$\mu(W, U) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim W_n}{\dim U_n}.$$

Ясно, что, зная меру включения, можно по асимптотическим характеристикам одного из подпространств указать аналогичные характеристики другого.

Пусть $V = M(F)$ – полилинейная часть относительно свободной счетнопорожденной ассоциативной алгебры $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$ некоторого многообразия над бесконечным полем k характеристики $\neq 2, 3$, т.е. $V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n – подпространство в F полилинейных многочленов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим градуированные подпространства $M(C_m) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(C_1^m \cap F_n)$, $M(D_m) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}([F,F]^m \cap F_n)$ и $M(Z(F)) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} Z_n$, где $C_1 = ([x_1,x_2])^T$ – T-идеал, порожденный коммутатором $[x_1,x_2]$, $C_m = C_1^m$, $D_1 = [F,F] = \{[x_1,x_2]\}^T$ – T-пространство, порожденное коммутатором $[x_1,x_2]$, $D_m = D_1^m$, $Z(F)$ – центр алгебры F, а $Z_n = Z(F) \cap F_n$.

В §3 и §4 будет дано полное описание центра $Z(F^{(l)})$ при $l = 3$ и $l = 4$ с помощью $[F^{(l)}, F^{(l)}]$ и $[F^{(l)}, F^{(l)}]^2$. В [11], [12] начато исследование центра алгебры $F^{(l)}$ при $l \geqslant 5$.

Как уже отмечалось, в §5 вычислены меры включения центров и таких важных подпространств в $F^{(3)}$ и $F^{(4)}$, как C_m и D_m.

В следующих двух параграфах дается несколько расширенное изложение результатов работ [9], [10], в которых описываются центры (добавляется нулевая характеристика). При этом алгебра $F^{(l)}$ предполагается для удобства вложенной в алгебру с 1, $\langle 1, F^{(l)}\rangle = k\langle 1, x_1, \dots, x_i, \dots\rangle$, а все T-пространства – унитарно замкнутыми.

§3. Описание центра алгебры $F^{(3)}$

Начнем со случая, когда k – поле характеристики $p > 0$ (случай нулевой характеристики несколько отличается).

Итак, пусть $\langle 1, F^{(3)}\rangle$ – унитарная относительно свободная счетнопорожденная ассоциативная алгебра над бесконечным полем k характеристики $p > 0$, соответствующая тождеству Грассмана $[[x_1,x_2],x_3] = 0$, и пусть W_p – T-пространство, порожденное всеми *p-словами* (одночленами, содержащими каждую свою переменную с кратностью p). В [13], [14] исследуется W_p как T-пространство и как подалгебра в $F^{(3)}$. Из развития результатов и методов этих работ вытекает

Теорема 1. *W_p – центр алгебры $\langle 1, F^{(3)}\rangle$.*

Доказательство. То, что W_p лежит в центре, доказано в [13], [14]. Для доказательства обратного включения будем использовать следующие факты (см. [13], [14]).

В $F^{(3)}$ имеют место тождества

$$[x_1,x_2][x_1,x_3] = [x_1,x_2][x_3,x_4] + [x_1,x_3][x_2,x_4] = 0,$$
$$[x_1^n, x_2] - n x_1^{n-1}[x_1,x_2] = [x_1x_2, x_3] - [x_1,x_3]x_2 - [x_2,x_3]x_1 = 0. \tag{3.1}$$

В $F^{(3)}$ имеется базис, состоящий из многочленов вида

$$x_{i_1}^{m_{i_1}-1} x_{i_2}^{m_{i_2}-1} \cdots x_{i_{2r-1}}^{m_{i_{2r-1}}-1} x_{i_{2r}}^{m_{i_{2r}}-1} [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots [x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}] x_{j_1}^{n_{j_1}} \cdots x_{j_s}^{n_{j_s}}, \tag{3.2}$$

где $i_1 < \dots < i_{2r}$, $j_1 < \dots < j_s$, $m_{i_\alpha}, n_{j_\beta}$ – натуральные числа и $\{i_\alpha\} \cap \{j_\beta\} = \varnothing$, причем может отсутствовать как *коммутаторная часть* (т.е. $r = 0$), так и *чисто степенная часть* (т.е. $s = 0$). При $r = s = 0$ выражение (3.2) по определению равно 1.

Пусть f – произвольный полиоднородный многочлен из центра (в силу бесконечности основного поля можно предполагать полиоднородность). Согласно [2], если f – сумма коммутаторов, то f лежит в W_p. В самом деле, рассмотрим многочлен $x_1^{p-1}x_2^{p-1}[x_1,x_2]$. После подстановки $x_i \mapsto x_i + 1$ и линеаризации получаем $[x_1, x_2]$. Если все переменные, входящие в f, имеют кратность, делящуюся на p, то f также лежит в W_p (см. [13], [14]). Если нет, то пусть y – переменная с наибольшим номером, входящая в f с кратностью m, не делящейся на p (эта переменная обозначена для удобства другой буквой). Тогда любой элемент (3.2), участвующий в разложении многочлена f, как следует из тождеств (3.1), имеет вид gy^m или $[y^m, x_i]g$, где многочлен g не содержит y. Отсюда следует, что $f = f_1 + f_2 y^m$, где f_1 – сумма коммутаторов, а f_2 не содержит переменную y. В самом деле, согласно (3.1)

$$[y^m, x_i]g = [y^m g, x_i] - [g, x_i]y^m. \tag{3.3}$$

Суммируя элементы (3.3), входящие в запись элементов (3.2) из разложения многочлена f, получаем требуемое представление f. Покажем теперь, что если f – элемент из центра, то $f_2 = 0$. Предположим, что $f_2 \neq 0$. Тогда если z – переменная с номером, большим всех номеров переменных, входящих в f, то

$$[f, z] = [f_2 y^m, z] = [f_2, z]y^m + f_2[y^m, z] \neq 0,$$

так как в силу независимости системы (3.2) второе слагаемое не равно нулю и не зависит от первого. Это противоречит центральности f. Следовательно, $f = f_1$ лежит в W_p и теорема доказана.

В [13]–[15] дается описание коммутативной алгебры W_p и структуры ее T-пространств. Так, при $p > 2$ алгебра $W_p = \mathbb{D}_p \oplus \mathbb{CD}_p$ – прямая сумма T-пространств, первое из которых порождено x_1^p, а второе имеет бесконечную неприводимую систему порождающих вида (3.2) при $r \geqslant 1$, $s = 1$, $m_{i_\alpha} = n_{j_1} = p$. При этом $\mathbb{D}_p = k[x_1^p, \dots, x_i^p, \dots]$ – алгебра коммутативных многочленов, а $\mathbb{CD}_p$ – радикал алгебры W_p, являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса p. Их описание основывается на следующих свойствах алгебры $F^{(l)}$ (см. [13]–[15]).

Соотношения Фробениуса. Если $p^s \geqslant l$ и $p > 2$, то в алгебре $F^{(l)}$ справедливы соотношения:

1) $[x_1^{p^s}, x_2] = 0$;
2) $(x_1 + x_2)^{p^s} = x_1^{p^s} + x_2^{p^s}$;
3) $(x_1 x_2)^{p^s} = x_1^{p^s} x_2^{p^s}$.

Пусть теперь k – поле нулевой характеристики.

Теорема 2. *Имеет место равенство $Z(F^{(3)}) = \{[x_1, x_2]\}^T$.*

Доказательство. Базис в алгебре $\langle 1, F^{(3)} \rangle$ по-прежнему состоит из многочленов вида (3.2). Пусть f – произвольный полиоднородный многочлен из центра. Если во всех слагаемых при разложении его по базису отсутствует степенная часть, т.е. все элементы линейной комбинации являются в силу (3.1) произведениями многочленов вида $[x_i^{m_i}, x_j^{m_j}]$, то многочлен f, очевидно, лежит в $\{[x_1, x_2]\}^T$. Пусть теперь хотя бы один элемент из разложения f по базису имеет вид gy^m, где y – переменная с наибольшим номером, присутствующая в этом разложении чисто степенным образом, обозначенная для удобства другой буквой (многочлен g не содержит y). Тогда, как и выше, имеет место представление $f = f_1 + f_2 y^m$, где f_1 – сумма коммутаторов, а f_2 не содержит переменную y. Далее, по аналогии с теоремой 1 предположение об отличии от нуля многочлена f_2 приводит к противоречию. Следовательно, f – сумма коммутаторов и теорема 2 доказана.

Следствие 1. *В поле любой характеристики*

$$Z(F^{(3)}) \cap M(F^{(3)}) = \{[x_1, x_2]\}^T \cap M(F^{(3)}).$$

Предложение 1. *Пространство D_m является линейной оболочкой множества многочленов вида $c_1 \cdots c_{m-1}[u, v]$, где c_i – короткие коммутаторы, а u и v – некоторые одночлены.*

Доказательство. По определению D_m – линейная оболочка множества многочленов вида

$$[u_1, v_1] \cdots [u_{m-1}, v_{m-1}][u_m, v_m] = \big[[u_1, v_1] \cdots [u_{m-1}, v_{m-1}]u_m, v_m\big].$$

Учитывая, что каждый коммутатор $[u_i, v_i]$ можно представить в виде суммы выражений cu, где c – короткий коммутатор, получаем искомое представление.

§ 4. Описание центра алгебры $F^{(4)}$

Рассмотрим, как и выше, относительно свободную *лиево нильпотентную* алгебру $F^{(l)} = \Phi/T^{(l)}$, где Φ – абсолютно свободная ассоциативная алгебра, а $T^{(l)} = ([x_1, \dots, x_l])^T$ – ее T-идеал, порожденный длинным коммутатором $[x_1, \dots, x_l]$. При $l = 3$ мы получаем относительно свободную алгебру Грассмана, T-пространства и центр которой достаточно хорошо изучены (см. [9], [13]–[15]). Как уже отмечалось в [16], строение T-пространств в $T^{(3)}/T^{(4)}$ заметно отличается от $T^{(2)}/T^{(3)}$. Однако центр алгебры $F^{(4)}$ имеет достаточно хорошее описание (правда, несколько более сложное, чем центр алгебры $F^{(3)}$).

Для простоты переменные алгебры Φ и их образы в алгебре $F^{(l)}$ будем обозначать одними и теми же буквами. Напомним некоторые факты, которые используются при изучении алгебры $F^{(l)}$ (см. [3], [13]–[15]).

I. Соотношения Фробениуса (см. § 3).

II. Лемма Латышева: $T^{(r)}T^{(s)} \subset T^{(r+s-2)}$.

III. Лемма Воличенко: *если характеристика поля k больше 3 или равна нулю и $l \geqslant 4$, то $T^{(l-2)}T^{(3)} \subset T^{(l)}$, в частности, $T^{(3)}T^{(2)} \subset T^{(4)}$.*

IV. $T^{(l-1)} \underbrace{T^{(2)} \cdots T^{(2)}}_{n} \not\subset T^{(l)}$ *при нечетном l и любом n.*

Замечание 1. Из леммы Воличенко следует, что $T^{(3)}$ лежит в центре алгебры $F^{(4)}$.

Замечание 2. Для изучения алгебры $F^{(l)}$ при $l \geqslant 5$ нужно обобщение леммы Воличенко, так называемая “теорема о произведении” (см. [11]): *если $m_1 \geqslant 3$ нечетно, а m_2 любое, то $T^{(m_1)}T^{(m_2)} \subset T^{(m_1+m_2-1)}$.*

Замечание 3. Отметим, что соотношения Фробениуса зависят от двух переменных и, следовательно, имеют место также и в относительно свободной альтернативной лиево нильпотентной алгебре.

Пусть $\operatorname{char} k = 0$. Базис F по модулю $T^{(3)}$ имеет вид

$$c_1 \cdots c_m x_{j_1}^{s_1} \cdots x_{j_n}^{s_n}, \tag{4.1}$$

где $c_1 = [x_{i_1}, x_{i_2}]x_{i_1}^{r_1}x_{i_2}^{r_2}$, $c_2 = [x_{i_3}, x_{i_4}]x_{i_3}^{r_3}x_{i_4}^{r_4}$, …, причем x_{j_α} – попарно различные переменные, не входящие в $c_1, \dots, c_m$, и $j_1 < \dots < j_n$, $m, n \geqslant 0$. (По существу, система (4.1) – это система многочленов (3.2), записанных с помощью многочленов c_i.) Если f – полиоднородный многочлен ненулевой степени, лежащий в центре, то он является линейной комбинацией выражений (4.1), в которых $m \geqslant 2$. В самом деле, если $n \geqslant 1$, то m не может быть нулевым, так как буква не лежит в центре. Если $m = 1$, то положив все переменные, кроме переменных из c_1, равными 1, получаем, что после очевидной линеаризации $[x_{i_1}, x_{i_2}]$ лежит в центре. Чего не может быть. Случай $n = 0$ разбирается аналогично.

Итак, f – линейная комбинация выражений (4.1) с $m \geqslant 2$. Пусть y – переменная из f с наибольшим номером. Тогда y либо стоит на последнем месте, либо входит в один из c_α. Пусть, например, в c_2. Согласно очевидному соотношению

$$[y^m, x_i]g = [y^m g, x_i] + [x_i, g]y^m$$

получаем что $f = f_1 + f_2 y^m$, где f_1 лежит в $D_2 = D_1^2$, где $D_1 = \{[x_1, x_2]\}^T$ – T-пространство, порожденное коммутатором $[x_1, x_2]$, а f_2 не содержит y. Покажем, что $f_2 = 0$. В самом деле, если $f_2 \neq 0$, то для любой переменной z, не входящей в f, имеем

$$[f, z] = [f_2 y^m, z] = [f_2, z]y^m + f_2[y^m, z] \neq 0,$$

так как в силу независимости системы (4.1) второе слагаемое не равно нулю и не зависит от первого. Следовательно,

$$Z(F^{(4)}) = T^{(3)} + D_2.$$

В случае $\operatorname{char} k = p > 3$ рассуждения совершенно аналогичны. Только к D_2 добавляются p-е степени и появляется T-пространство W_p, порожденное всеми p-словами, т.е. $W_p = \mathbb{D}_p \oplus \mathbb{C}\mathbb{D}_p$. Другими словами, $Z(F^{(4)}) = T^{(3)} + \mathbb{C}\mathbb{D}_p^2 + \mathbb{D}_p$.

Итак, имеет место

Теорема 3. *Если* $\operatorname{char} k = 0$, *то* $Z(F^{(4)}) = T^{(3)} + D_2$, *если* $\operatorname{char} k = p > 3$, *то* $Z(F^{(4)}) = T^{(3)} + \mathbb{C}\mathbb{D}_p^2 + \mathbb{D}_p$.

Это означает, что для любой из рассматриваемых характеристик поля k каждый полилинейный многочлен из $Z(F^{(4)})$ является линейной комбинацией многочленов вида $c[u, v]$ и многочленов из $T^{(3)}$, где c – короткий коммутатор от переменных x_i, u и v – некоторые одночлены.

§ 5. Вычисление меры включения в $M(F^{(l)})$ для основных градуированных подпространств при $l = 3, 4$

В § 2 были введены три основных подпространства алгебры F: C_m, D_m и $Z(F)$. С ними естественным образом связаны градуированные подпространства в $M(F)$. Найдем их меры включения.

Пусть $C_1 = ([x_1, x_2])^T$ – T-идеал, порожденный коротким коммутатором (*коммутант алгебры* F) и $C_m = C_1^m$ (*m-кратный коммутант*). Тогда $M(F) \cap C_m = \bigoplus_{n=1}^\infty C_{m,n}$, где $C_{m,n} = F_n \cap C_m$. Следовательно, $M(F) \cap C_m$ – градуированное подпространство в $M(F)$. Положим $C_0 = F$.

Пусть $F = F^{(3)}$. Как следует из [13], [14], полилинейная часть пространства C_m состоит из линейных комбинаций выражений вида (являющихся базисом алгебры $M(F)$)

$$b = c_1 \cdots c_{m'} \cdot u,$$

где $m' \geqslant m$, c_i – короткие коммутаторы (которых нет в случае $m' = 0$), а u – *упорядоченный одночлен*, т.е. выражение вида $u = x_{i_1} \cdots x_{i_s}$, где $i_1 < \cdots < i_s$, или $u = x_{i_1}$, или $u = 1$.

Ясно, что $\dim F_n = 2^{n-1}$, а $\dim C_{m,n} = 2^{n-1} - f(n)$, где $f(n)$ – некоторый многочлен от n, определяемый по m и выражающийся через числа сочетаний. Следовательно, функции $\dim F_n$ и $\dim C_{m,n}$ при любом m имеют одну и ту-же главную часть, а значит, один и тот же порядок роста. Таким образом, $\mu\bigl(M(F) \cap C_m, M(F)\bigr) = 1$.

Лемма 1. *Справедливо равенство* $\dim C_{m,n-1}x_n = \dim C_{m,n-1} = 2^{n-2} + g(n)$, *где* $\lim_{n\to\infty} g(n)/2^{n-2} = 0$, *и, следовательно,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim C_{m,n-1}x_n}{\dim F_n} = \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство прямо вытекает из того факта, что в алгебре $F^{(3)}$ элемент x_n не является делителем нуля.

Пусть теперь $D_1 = [F,F] = \{[x_1,x_2]\}^T$ – T-пространство в $F^{(3)}$, порожденное коммутатором $[x_1,x_2]$, $D_m = D_1^m$ и $D_{m,n} = F_n \cap D_m$. Тогда $M(F) \cap D_m = \bigoplus_{n=1}^{\infty} D_{m,n}$ – градуированное подпространство в $M(F) \cap C_m$.

Как следует из свойств алгебры $F^{(3)}$ (см. § 3), полилинейная часть пространства D_m состоит из линейных комбинаций выражений

$$c_1 \cdots c_{m-1}[u,v],$$

где c_i – короткие коммутаторы, а u и v – некоторые одночлены от переменных x_i.

Лемма 2. *Имеет место равенство* $C_{m,n-1}x_n \cap D_{m,n} = 0$.

Доказательство. Пусть имеется нетривиальная линейная комбинация базисных элементов b_i из $C_{m,n-1}$: $d = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_s b_s \neq 0$. Положим $d' = dx_n$. Тогда если $d' = \alpha_1 b_1 x_n + \cdots + \alpha_s b_s x_n \neq 0$ и ненулевой элемент d' из $C_{m,n-1}x_n$ лежит в $D_{m,n}$, то, очевидно, $[d', x_{n+1}] = \alpha_1[b_1 x_n, x_{n+1}] + \cdots + \alpha_s[b_s x_n, x_{n+1}] \neq 0$.

С другой стороны, любой элемент d' из $D_{m,n}$ централен и, следовательно, $[d', x_{n+1}] = 0$. Из полученного противоречия и следует лемма 2.

Лемма 3. *Имеет место включение* $C_{m,n-1}x_n + D_{m,n} \supset C_{m+1,n}$.

Доказательство. Любой элемент из $C_{m+1,n}$ является линейной комбинацией выражений вида (4.1) с $m' \geqslant m+1$. Будем считать, что переменная x_n содержится либо в u, либо в $c_{m'}$. Тогда любой элемент из C_{m+1} является линейной комбинацией выражений вида $c_1 \cdots c_{m'-1}w$, где w – некоторый одночлен от переменных x_i, $m'-1 \geqslant m$ и переменная x_n содержится в w. Тогда по модулю $D_{m,n}$ такое выражение можно заменить на $c_1 \cdots c_{m'-1}w'x_n$, которое лежит в $C_{m,n-1}x_n$. Отсюда и следует лемма 3.

Лемма 4. *Имеют место включения* $C_{m+1,n} \subset C_{m,n-1}x_n \oplus D_{m,n} \subset C_{m,n}$.

Доказательство. То, что сумма прямая, следует из леммы 2. Остальное очевидно.

Теорема 4. *Имеет место равенство* $\mu\big(M(F)\cap D_m, M(F)\big)=1/2$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dim C_{m+1,n}}{2^{n-1}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\dim(C_{m,n-1}x_n\oplus D_{m,n})}{2^{n-1}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\dim C_{m,n}}{2^{n-1}}.$$

Отсюда

$$1\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{\dim C_{m,n-1}x_n}{2^{n-1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\dim D_{m,n}}{2^{n-1}}\leqslant 1.$$

Согласно лемме 1 имеем $\lim_{n\to\infty}\dim C_{m,n-1}/2^{n-1}=1/2$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\dim D_{m,n}/2^{n-1}=1/2$ и теорема доказана.

Пусть $Z(F)$ – центр алгебры F. Тогда $M(Z(F))=\bigoplus_{n=1}^{\infty}Z_n$, где $Z_n=Z(F)\cap F_n$, – градуированное подпространство в $M(F)$ и можно говорить о мере включения $\mu\big(M(Z(F)),M(F)\big)$.

Следствие 2. *Если* $F=F^{(3)}$, *то* $\mu\big(M(Z(F)),M(F)\big)=1/2$.

Доказательство. Согласно результатам § 3 $M(Z(F))=M(F)\cap D_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.

Перейдем к алгебре $F^{(4)}$. Здесь мы ограничимся случаем, когда k – поле нулевой характеристики, так как для вычисления соответствующих размерностей используются диаграммы Юнга. Весьма вероятно, что многое имеет место и при более широких предположениях. Как уже отмечалось, в [3] найдена размерность пространства $F_n^{(4)}$

$$\dim F_n^{(4)}=2^{n-1}+h(n),$$

где $h(n)=2\binom{n}{3}+2\binom{n}{4}$ – многочлен от n, т.е. $\lim_{n\to\infty}h(n)/2^{n-1}=0$.

Так как $\dim F_n^{(3)}=2^{n-1}$, то в $F_n^{(4)}$ имеем

$$\dim F_n^{(4)}\cap([x_1,x_2,x_3])^T=h(n),\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{h(n)}{2^{n-1}}=0,$$

т.е. мера включения подпространства $\bigoplus_{n=1}^{\infty}F_n^{(4)}\cap([x_1,x_2,x_3])^T$ в $M(F)$ равна нулю.

В алгебре $F^{(4)}$, как и в $F^{(3)}$, можно рассмотреть T-пространство $D_1=\{[x_1,x_2]\}^T$, порожденное коммутатором, и его степени $D_m=D_1^m$, которые, как и выше, дают градуированные подпространства $D_m=\bigoplus_{n=1}^{\infty}D_{m,n}$, где $D_{m,n}=F_n^{(4)}\cap D_m$, пространства $M(F^{(4)})$. В силу сказанного выше, функции $\dim F_n^{(4)}$, $\dim\big(D_{m,n}+F_n^{(4)}\cap([x_1,x_2,x_3])^T\big)$ и $\dim D_{m,n}$ имеют одну и ту же главную часть 2^{n-1}.

С другой стороны, согласно § 4 полилинейная часть центра алгебры $F^{(4)}$ описывается как

$$M(Z)=M(F)\cap D_2+M(F)\cap([x_1,x_2,x_3])^T.$$

Отсюда и из доказанной выше теоремы вытекает

Следствие 3. *Если $F = F^{(4)}$ и k – поле нулевой характеристики, то*

$$\mu\bigl(M(F) \cap D_m, M(F)\bigr) = \mu\bigl(M(Z(F)), M(F)\bigr) = \frac{1}{2}.$$

§ 6. Некоторые открытые вопросы

Изучение асимптотических свойств размерностных функций, связанных с основными подпространствами в относительно свободных алгебрах – весьма интересная комбинаторная задача, на пути решения которой остается много открытых вопросов. Приведем некоторые из них.

I. Как показано в [13], [14], в относительно свободной алгебре Грассмана $F^{(3)}$ имеется целая система бесконечных цепочек T-пространств, к которым по существу и сводятся все T-пространства алгебры $F^{(3)}$. Естественно задаться вопросом о вычислении меры включения соответствующих градуированных подпространств в пространство $M(F^{(3)})$. Приведем для полноты диаграмму включений этих T-пространств, рассматриваемых над полем характеристики $p > 2$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{C} & = & \mathbb{C}^{(1)} & \supset & \mathbb{C}^{(2)} & \supset & \cdots & \supset & \mathbb{C}^{(m)} & \supset & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\mathbb{CD}_p & = & \mathbb{CD}_p^{(1)} & + & \mathbb{CD}_p^{(2)} & + & \cdots & + & \mathbb{CD}_p^{(m)} & + & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\mathbb{CD}_{p^l} & = & \mathbb{CD}_{p^l}^{(1)} & + & \mathbb{CD}_{p^l}^{(2)} & + & \cdots & + & \mathbb{CD}_{p^l}^{(m)} & + & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\mathbb{C}_{p^l} & = & \mathbb{C}_{p^l}^{(1)} & + & \mathbb{C}_{p^l}^{(2)} & + & \cdots & + & \mathbb{C}_{p^l}^{(m)} & + & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\mathbb{C}_p & = & \mathbb{C}_p^{(1)} & + & \mathbb{C}_p^{(2)} & + & \cdots & + & \mathbb{C}_p^{(m)} & + & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \\
\mathbb{C}_1 & = & \mathbb{C}_1^{(1)} & \supset & \mathbb{C}_1^{(2)} & \supset & \cdots & \supset & \mathbb{C}_1^{(m)} & \supset & \cdots .
\end{array} \tag{6.1}$$

В этой диаграмме T-пространство $\mathbb{CD}_{p^l}^{(m)}$ порождено многочленом (3.2) при $r=m$, $s=1$, $m_{i_\alpha}=n_{j_1}=p^l$, т.е. многочленом

$$x_{i_1}^{p^l-1}x_{i_2}^{p^l-1}\cdots x_{i_{2m-1}}^{p^l-1}x_{i_{2m}}^{p^l-1}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2m-1}},x_{i_{2m}}]x_{j_1}^{p^l},$$

а T-пространство $\mathbb{C}_{p^l}^{(m)}$ порождено этим же многочленом при $r=m$, $s=0$, $m_{i_\alpha}=p^l$ (отсутствует чисто степенная часть), т.е. многочленом

$$x_{i_1}^{p^l-1}x_{i_2}^{p^l-1}\cdots x_{i_{2m-1}}^{p^l-1}x_{i_{2m}}^{p^l-1}[x_{i_1},x_{i_2}]\cdots[x_{i_{2m-1}},x_{i_{2m}}].$$

Самая верхняя и самая нижняя строки представляют собой бесконечные строго убывающие с ростом m цепочки T-идеалов $\mathbb{C}^{(m)}$ и T-пространств $\mathbb{C}_1^{(m)}$ соответственно, порожденных произведением из m коротких коммутаторов $[x_1,x_2]\cdots[x_{2m-1},x_{2m}]$, а все вертикальные цепочки включений строго возрастающие. Кроме того, все ее элементы не зависят (т.е. не исчезают после факторизации) от всех остальных, кроме тех, что находятся выше по столбцу.

II. В силу сказанного выше в асимптотическом плане размерностные функции в алгебрах $F^{(3)}$ и $F^{(4)}$ отличаются несущественно. Однако задача о перенесении приведенных в работе результатов на $F^{(l)}$, где $l\geqslant 5$, пока далека от своего решения.

III. При $l=3$ или 4 главная часть функции $\dim F_n^{(l)}$ имеет вид $\gamma 2^n$, где $\gamma>0$. Для $F^{(5)}$ и $F^{(6)}$ функция $c_n=\dim F_n^{(l)}$ имеет порядок роста $2^n n^2$ (см. [7], [8]), а для $F^{(7)}$ порядок роста $2^n n^4$. Для больших l вопрос открыт, хотя имеются некоторые гипотезы (см. [8]). О мере включения для основных градуированных подпространств при $l\geqslant 5$ известно очень мало.

IV. Кроме относительно свободных лиево нильпотентных алгебр можно рассматривать и другие относительно свободные алгебры и там изучать аналогичные вопросы. Большой интерес, например, представляет алгебра общих матриц

$$\mathrm{GM}_r=k\langle x_1,\dots,x_l,\dots\rangle/\mathrm{TM}_r,$$

где TM_r – T-идеал тождеств алгебры $n\times n$-матриц k_r.

При $r=2$ имеется тождество Холла и результат С. Охитина [17], дающий полное описание центра как T-пространства, порожденного в GM_2 многочленом $[x_1,x_2]^2$ (поле k имеет характеристику нуль). О мере включения полилинейной части центра и других основных градуированных подпространств в случае GM_r практически ничего не известно.

Список литературы

[1] В. Н. Латышев, “К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр”, *УМН*, **27**:4(166) (1972), 213–214.

[2] D. Krakowski, A. Regev, “The polynomial identities of the Grassmann algebra”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **181** (1973), 429–438.

[3] И. Б. Воличенко, *T-идеал, порожденный элементом* $[x_1,x_2,x_3,x_4]$, Препринт № 22, Ин-т матем. АН БССР, Минск, 1978, 13 с.

[4] А. В. Гришин, “Асимптотические свойства свободных конечно-порожденных алгебр некоторых многообразий”, *Алгебра и логика*, **22**:6 (1983), 608–625; англ. пер.: A. V. Grishin, “Asymptotic properties of free finitely generated algebras of certain varieties”, *Algebra and Logic*, **22**:6 (1983), 431–443.

[5] А. В. Гришин, “Показатель роста многообразия алгебр и его приложения”, *Алгебра и логика*, **26**:5 (1987), 536–557; англ. пер.: A. V. Grishin, “The growth exponent of a variety of algebras and its applications”, *Algebra and Logic*, **26**:5 (1987), 318–333.

[6] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, “Codimensions of algebras and growth functions”, *Adv. Math.*, **217**:3 (2008), 1027–1052.

[7] А. В. Гришин, “Об аддитивной структуре и асимптотике коразмерностей c_n алгебры $F^{(5)}$”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:1 (2016), 93–104; англ. пер.: A. V. Grishin, “On the additive structure and asymptotics of codimensions c_n in the algebra $F^{(5)}$”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **233**:5 (2018), 666–674.

[8] А. В. Гришин, “Об асимптотике коразмерностей c_n в алгебре $F^{(7)}$”, *Матем. заметки*, **104**:1 (2018), 25–32; англ. пер.: A. V. Grishin, “Asymptotics of the codimensions c_n in the algebra $F^{(7)}$”, *Math. Notes*, **104**:1 (2018), 22–28.

[9] А. В. Гришин, “О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана”, *УМН*, **65**:4(394) (2010), 191–192; англ. пер.: A. V. Grishin, “On the structure of the centre of a relatively free Grassmann algebra”, *Russian Math. Surveys*, **65**:4 (2010), 781–782.

[10] А. В. Гришин, “О центре относительно свободной лиевски нильпотентной алгебры индекса 4”, *Матем. заметки*, **91**:1 (2012), 147–148; англ. пер.: A. V. Grishin, “On the center of a relatively free Lie-nilpotent algebra of index 4”, *Math. Notes*, **91**:1 (2012), 139–140.

[11] А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев, “О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности”, *Матем. сб.*, **206**:11 (2015), 113–130; англ. пер.: A. V. Grishin, S. V. Pchelintsev, “On centres of relatively free associative algebras with a Lie nilpotency identity”, *Sb. Math.*, **206**:11 (2015), 1610–1627.

[12] А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев, “Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6”, *Матем. сб.*, **207**:12 (2016), 54–72; англ. пер.: A. V. Grishin, S. V. Pchelintsev, “Proper central and core polynomials of relatively free associative algebras with identity of Lie nilpotency of degrees 5 and 6”, *Sb. Math.*, **207**:12 (2016), 1674–1692.

[13] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, “О T-пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана”, *Матем. сб.*, **200**:9 (2009), 41–80; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, “On the multiplicative and T-space structure of the relatively free Grassmann algebra”, *Sb. Math.*, **200**:9 (2009), 1299–1338.

[14] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, “О структуре относительно свободной алгебры Грассмана”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:8 (2009), 3–93; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, “On the structure of a relatively free Grassmann algebra”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **171**:2 (2010), 149–212.

[15] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, А. А. Шокола, “О T-пространствах и соотношениях в относительно свободных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:3 (2010), 135–148; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, A. A. Shokola, “On T-spaces and relations in relatively free, Lie nilpotent, associative algebras”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **177**:6 (2011), 868–877.

[16] А. В. Гришин, “О T-пространствах в относительно свободной двупорождённой лиевски нильпотентной алгебре индекса 4”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:4 (2012), 133–139; англ. пер.: A. V. Grishin, “On T-spaces in a relatively free

two-generated Lie nilpotent associative algebra of index 4”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **191**:5 (2013), 686–690.

[17] С. В. Охитин, “Центральные полиномы алгебры матриц второго порядка”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем.*, *мех.*, 1988, № 4, 61–63; англ. пер.: S. V. Okhitin, “Central polynomials of an algebra of second-order matrices”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **43**:4 (1988), 49–51.

Александр Владимирович Гришин
(Aleksandr V. Grishin)
Московский педагогический государственный университет
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Поступила в редакцию
04.11.2017 и 11.04.2018