С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Самосимметричный цикл в системе двух диффузионно связанных уравнений Хатчинсона, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 2, 24–74

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8941

УДК 517.926

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Самосимметричный цикл в системе двух диффузионно связанных уравнений Хатчинсона

Рассматривается так называемая билокальная модель для уравнения Хатчинсона. Эта модель представляет собой систему двух одинаковых нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, связанных посредством линейных диффузионных слагаемых. Исследуются вопросы о существовании, асимптотике и устойчивости в упомянутой системе специального периодического решения, координаты которого переходят друг в друга при некотором фазовом сдвиге.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: уравнение Хатчинсона, билокальная модель, самосимметричный цикл, асимптотика, устойчивость.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8941

§ 1. Постановка задачи и описание результатов

Основы теории релаксационных колебаний в системах обыкновенных дифференциальных уравнений заложены в работе [1]. Последующее развитие этой теории отражено в монографии [2], а достаточно законченный характер она приняла в [3]. Далее, в монографии [4] некоторые идеи и методы из [2], [3] были распространены на ряд дифференциальных уравнений вольтерровского типа с запаздыванием, возникающих при моделировании различных экологических процессов. Что же касается излагаемых ниже результатов, то их можно рассматривать как продолжение начатых в [4] исследований.

Приступим к описанию объекта дальнейшего анализа. В связи с этим обратимся к базовому экологическому уравнению

$$\dot{N} = \lambda[1 - N(t-1)]N, \tag{1.1}$$

где $N(t) \geqslant 0$ – плотность численности популяции млекопитающих в текущий момент времени, $\lambda = \mathrm{const} > 0$ – мальтузианский коэффициент линейного роста. Это уравнение было предложено в 1948 г. американским биологом Дж. Э. Хатчинсоном (см. [5]) и позднее получило его имя.

Как известно (см. [6]–[8]), при всех $\lambda > \pi/2$ уравнение (1.1) имеет медленно осциллирующий цикл $N_*(t,\lambda) > 0$, $N_*(t,\pi/2) \equiv 1$, $N_*(0,\lambda) \equiv 1$, периода $T_*(\lambda)$, $T_*(\pi/2) = 4$ (медленная осцилляция означает, что расстояние между любыми соседними нулями функции $N_*(t,\lambda) - 1$ больше единицы). Этот цикл рождается из состояния равновесия $N \equiv 1$ при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ в результате бифуркации Андронова–Хопфа, а при последующем увеличении λ довольно быстро приобретает релаксационную форму (на рис. 1 показан график $N_*(t,\lambda)$ при $\lambda = 2.5$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-10055-мк).

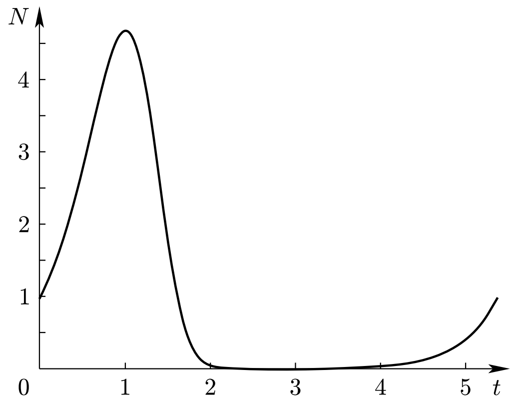

Рис. 1

В случае же $\lambda \gg 1$ справедливы следующие асимптотические равенства (см. [4], [9]):

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T_*} N_*(t,\lambda) = \exp(\lambda-1) + (2e)^{-1} + O(\exp(-\lambda)), \tag{1.2}$$

$$\min_{0\leqslant t\leqslant T_*} N_*(t,\lambda) = \exp\left[-\exp\lambda + 2\lambda - 1 + \frac{1+(1+\lambda)\ln\lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^2}\right)\right], \tag{1.3}$$

$$T_*(\lambda) = \frac{1+\exp\lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}\right). \tag{1.4}$$

Добавим еще, что, как показывают численные эксперименты, цикл $N_*(t,\lambda)$ является экспоненциально орбитально устойчивым (в метрике фазового пространства $C[-1,0]$) при всех $\lambda > \pi/2$. Однако строго доказать этот факт удается лишь при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ и $\lambda \gg 1$.

Формулы (1.2)–(1.4) свидетельствуют о том, что при больших λ закон изменения плотности популяции $N_*(t,\lambda)$ биологически нереализуем. Действительно, излишне большой период колебаний и излишне глубокий минимум фактически означают, что после первого же всплеска численности произойдет полное вымирание вида и следующий всплеск просто не наступит. В связи с этим возникает необходимость в подходящей модификации уравнения (1.1), улучшающей биологические характеристики его релаксационного цикла. Одна из таких модификаций рассматривается в настоящей статье и заключается в учете диффузионного фактора.

Уравнение (1.1) описывает динамику изменения плотности популяции, обитающей в однородном ареале, когда пищевая база регулярно восстанавливается до некоторого фиксированного уровня, а миграционный фактор столь велик, что пространственные возмущения гаснут. При этих биологических посылках рассмотрим два локальных ареала с плотностями численности N_1 и N_2 соответственно. Считаем, что указанные ареалы соединены узким проходом.

В результате для N_1, N_2 приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= d(N_2 - N_1) + \lambda[1 - N_1(t-1)]N_1,\\ \dot{N}_2 &= d(N_1 - N_2) + \lambda[1 - N_2(t-1)]N_2,\end{aligned} \tag{1.5}$$

где параметр $d > 0$ характеризует глубину связи между ареалами. Следуя установившейся традиции, систему (1.5) будем называть *билокальной моделью для уравнения Хатчинсона* или просто *билокальной моделью.*

Система (1.5) допускает, очевидно, так называемый однородный цикл

$$(N_1, N_2) = \bigl(N_*(t,\lambda), N_*(t,\lambda)\bigr), \tag{1.6}$$

где $N_*(t,\lambda)$ – периодическое решение уравнения (1.1). В статье [10] установлено существование при всех $\lambda \gg 1$ такого критического значения $d = d_*(\lambda)$, $d_*(\lambda) \sim 0.5\lambda\ln\lambda \cdot \exp(-\lambda)$, $\lambda \to +\infty$, что цикл (1.6) билокальной модели (1.5) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при $d - d_*(\lambda) > 0$ (< 0). Более того, согласно приведенным в [11] результатам численного анализа при фиксированных достаточно больших λ система (1.5) имеет по параметру d следующую динамику.

Оказывается, что при $d > d_*(\lambda)$ однородный цикл (1.6) – единственный аттрактор этой системы. Далее, при уменьшении параметра d и при прохождении его через значение $d = d_*(\lambda)$ от цикла (1.6) ответвляются два устойчивых неоднородных цикла, переходящих друг в друга при замене

$$(N_1, N_2) \to (N_2, N_1). \tag{1.7}$$

При последующем уменьшении d и при прохождении его через некоторое критическое значение $d_{**}(\lambda) = O(\exp(-\lambda))$, $d_{**}(\lambda) < d_*(\lambda)$, упомянутые устойчивые циклы объединяются в один самосимметричный цикл, инвариантный по отношению к замене (1.7). Этот цикл остается устойчивым при всех $0 < d < d_{**}(\lambda)$. Кроме того, в силу симметрии он допускает представление

$$(N_1, N_2) = (N_{**}(t,\lambda), N_{**}(t - h(\lambda),\lambda)), \tag{1.8}$$

где $h = h(\lambda)$ – некоторый фазовый сдвиг, и имеет период $T = 2h$. Что же касается фигурирующей в (1.8) функции $N_{**}(t,\lambda)$, $N_{**}(0,\lambda) \equiv 1$, то она является $2h$-периодическим решением скалярного уравнения

$$\dot{N} = d(N(t-h) - N) + \lambda[1 - N(t-1)]N. \tag{1.9}$$

В настоящей статье устанавливается, что при условиях

$$d = \lambda\exp(-a\lambda), \qquad a = \mathrm{const} > 1, \quad \lambda \gg 1, \tag{1.10}$$

самосимметричный цикл (1.8) билокальной модели (1.5) существует и устойчив. Исследуются также его асимптотические свойства.

В связи с требованиями (1.10) уместно отметить, что случай $d = \lambda\exp(-a\lambda)$, $a = \mathrm{const} < 1$, $\lambda \gg 1$ не представляет интереса, поскольку при указанных значениях коэффициента диффузии единственным аттрактором системы (1.5) является однородный цикл (1.6).

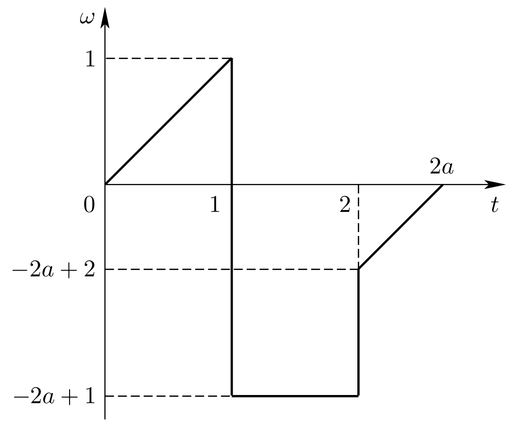

Рис. 2

Для того чтобы сформулировать соответствующий строгий результат, введем некоторые обозначения. А именно, на плоскости (t,ω) рассмотрим кривую

$$\begin{aligned}\Gamma_0 = \{(t,\omega)\colon 0\leqslant t\leqslant 1,\ \omega=t\} &\cup \{(t,\omega)\colon t=1,\ -2a+1\leqslant\omega\leqslant 1\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon 1\leqslant t\leqslant 2,\ \omega=-2a+1\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon t=2,\ -2a+1\leqslant\omega\leqslant -2a+2\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon 2\leqslant t\leqslant 2a,\ \omega=t-2a\}\end{aligned} \tag{1.11}$$

(вид этой кривой представлен на рис. 2). Далее, положим

$$\Gamma(\lambda) = \left\{(t,\omega)\colon 0\leqslant t\leqslant 2h(\lambda),\ \omega=\frac{1}{\lambda}\ln N_{**}(t,\lambda)\right\}, \tag{1.12}$$

где $h(\lambda)$, $N_{**}(t,\lambda)$ – функции из (1.8). Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Найдется такое достаточно большое* $\lambda_0>0$, *что при всех* $\lambda\geqslant\lambda_0$ *и при условиях* (1.10) *система* (1.5) *допускает самосимметричный цикл* (1.8). *При* $\lambda\to+\infty$ *для этого цикла выполняются асимптотические представления*

$$\begin{gathered} h(\lambda)=a-\frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{\ln(a-1)}{\lambda}+O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\right), \qquad H(\Gamma(\lambda),\Gamma_0)=O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right),\\ \max_{0\leqslant t\leqslant 2h} N_{**}(t,\lambda)=O(\exp\lambda), \qquad \min_{0\leqslant t\leqslant 2h} N_{**}(t,\lambda)=O(\lambda\exp(-(2a-1)\lambda)),\end{gathered} \tag{1.13}$$

где Γ_0, $\Gamma(\lambda)$ *– кривые* (1.11), (1.12), $H(*,*)$ *– хаусдорфово расстояние между компактами.*

Теорема 1.2. *Цикл* (1.8), *о котором идет речь в теореме* 1.1, *экспоненциально орбитально устойчив.*

Доказательство теоремы 1.1 связано с отысканием у вспомогательного уравнения (1.9) периодического решения $N=N_{**}(t,\lambda)$, имеющего период $2h$ и обладающего свойствами (1.13). Что же касается устойчивости цикла (1.8), то она устанавливается отдельно посредством асимптотического анализа соответствующей линейной системы в вариациях.

Сопоставляя формулы (1.2)–(1.4) и (1.13), убеждаемся, что самосимметричный цикл (1.8) системы (1.5) обладает значительно лучшими биологическими характеристиками по сравнению с однородным циклом (1.6). Действительно, период цикла (1.8) существенно меньше периода однородного цикла, а минимумы его компонент, наоборот, существенно больше соответствующих минимумов у цикла (1.6). Кроме того, в случае цикла (1.8) среднее значение

$$\mathscr{M} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(N_1(t)+N_2(t))\,dt \tag{1.14}$$

имеет порядок $\lambda^{-1}\exp\lambda$. В случае же цикла (1.6) величина (1.14) равна 1.

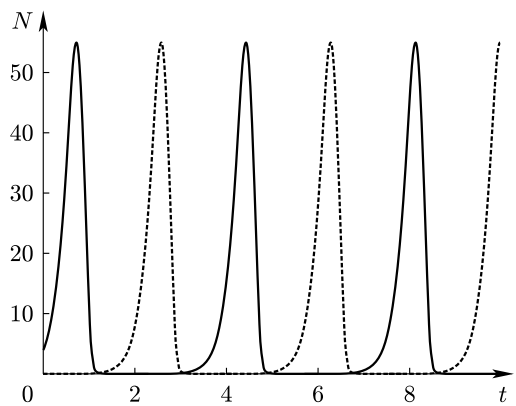

Рис. 3

Приведенные факты позволяют говорить о явлении самоорганизации, наблюдающемся в рамках билокальной модели (1.5). Суть данного явления в том, что биологический вид посредством миграции между двумя локальными ареалами искусственно создает себе неоднородную среду обитания и за счет этого улучшает свои биологические характеристики. Сам же периодический режим (1.8) уместно назвать *режимом самоорганизации*. Наглядное представление о нем дает рис. 3, где на плоскости (t, N) изображены графики его компонент $N_1(t)$, $N_2(t)$ при $\lambda = 5$, $a = 2$ (сплошной линией показан график $N_1(t)$, а штриховой – график $N_2(t)$).

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

2.1. Общая схема исследования. Как уже было отмечено, обоснование теоремы 1.1 связано с анализом вспомогательного уравнения (1.9), а точнее говоря, с отысканием у него непостоянного $2h$-периодического решения. При условиях (1.10) выполним в (1.9) замену $N = \exp(\lambda\omega)$ и положим $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$.

В результате для новой переменной $\omega = \omega(t)$ приходим к уравнению

$$\dot{\omega} = 1 - \exp\frac{\omega(t-1)}{\varepsilon} + \exp\frac{\omega(t-h) - a - \omega}{\varepsilon} - \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right). \tag{2.1}$$

Всюду ниже считаем, что запаздывание h в нем задано равенством

$$h = a - \varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\delta, \tag{2.2}$$

где параметр δ пробегает произвольно фиксированное компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Опишем теперь класс начальных условий для уравнения (2.1). В связи с этим фиксируем постоянные σ_0, α_1, удовлетворяющие требованиям

$$0 < \sigma_0 < \min\left(\frac{a-1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \alpha_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \tag{2.3}$$

и положим $I = [-2h + 1 + \sigma_0,\, -h + 1 + \sigma_0]$. Далее, множество S непрерывных при $t \in I$ функций $\varphi(t)$ определим посредством равенства

$$\begin{gathered} S = \biggl\{\varphi(t)\colon\ -q_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant -q_2 \text{ при } t \in I,\ \varphi(-h+1+\sigma_0) = -h+1+\sigma_0, \\ |\varphi(t) - t| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \text{ при } t \in \left[-h+1+\alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon},\ -h+1+\sigma_0\right]\biggr\}, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $q_1 > q_2 > 0$ – некоторые универсальные (не зависящие от t, ε, φ, δ) постоянные, выбором которых распорядимся в дальнейшем. Ниже нас будет интересовать решение $\omega = \omega_\varphi(t, \varepsilon, \delta)$, $t \geqslant -h + 1 + \sigma_0$, уравнения (2.1), (2.2) с произвольным начальным условием $\varphi(t) \in S$ при $t \in I$.

Для каждой функции $\varphi(t) \in S$ обозначим через $t = T_\varphi(\varepsilon, \delta)$ второй положительный корень уравнения

$$\omega_\varphi(t - h + 1 + \sigma_0, \varepsilon, \delta) = -h + 1 + \sigma_0 \tag{2.5}$$

(если он существует) и зададим оператор Π, действующий из S в пространство $C(I)$ непрерывных по $t \in I$ функций по правилу

$$\Pi(\varphi) = \omega_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta), \qquad t \in I. \tag{2.6}$$

Как будет показано в дальнейшем, при подходящем выборе параметров q_1, q_2 оператор (2.6) определен на множестве (2.4) и, более того, выполняются соотношения $\Pi(S) \subset S$, $T_\varphi(\varepsilon, \delta) > h$ для любого $\varphi \in S$. Далее, поскольку множество S замкнуто, ограничено и выпукло, а оператор Π в силу неравенства $T_\varphi > h$ компактен, то согласно принципу Шаудера он имеет в S хотя бы одну неподвижную точку $\varphi = \widetilde{\varphi}(t, \varepsilon, \delta)$. Ясно также, что решение $\widetilde{\omega}(t, \varepsilon, \delta) = \omega_\varphi|_{\varphi=\widetilde{\varphi}}$ уравнения (2.1) является периодическим с периодом $\widetilde{T}(\varepsilon, \delta) = T_\varphi|_{\varphi=\widetilde{\varphi}}$. Что же касается имеющегося в запасе параметра δ из (2.2), то он определяется из уравнения

$$\widetilde{T}(\varepsilon, \delta) = 2\left(a - \varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\delta\right). \tag{2.7}$$

Как оказывается, уравнение (2.7) допускает решение $\delta = \widetilde{\delta}(\varepsilon)$, ограниченное по ε и такое, что $\lim \widetilde{\delta}(\varepsilon) = -\ln(a-1)$, $\varepsilon \to 0$. Подставляя его в (2.2), убеждаемся, что у вспомогательного уравнения (2.1) существует интересующее нас $2h$-периодическое решение $\omega(t,\varepsilon) = \widetilde{\omega}(t,\varepsilon,\delta)|_{\delta=\widetilde{\delta}(\varepsilon)}$.

2.2. Асимптотическое интегрирование вспомогательного скалярного уравнения. Для того чтобы реализовать описанную в п. 2.1 программу действий, необходимо знать равномерную по $\varphi \in S$, $\delta \in \Omega$ асимптотику при $\varepsilon \to 0$ решения $\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)$ на различных промежутках изменения t. Соответствующие построения разбиваются на 11 этапов.

Этап 1 связан с рассмотрением отрезка

$$-h + 1 + \sigma_0 \leqslant t \leqslant 1 - \sigma_0. \tag{2.8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *На отрезке* (2.8) *при* $\varepsilon \to 0$ *выполняется равномерное по* t, δ, φ *асимптотическое представление*

$$\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) = t + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr). \tag{2.9}$$

Здесь и в дальнейшем буквой q обозначаются некоторые универсальные (не зависящие от t, ε, δ, φ) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

Доказательство леммы 2.1. Обоснование леммы проводится методом шагов с использованием априорных оценок

$$\begin{gathered}\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) \leqslant -M_1, \qquad \omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) - a - \omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) \leqslant -M_2,\\ M_1, M_2 = \mathrm{const} > 0.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь и далее символом const будем обозначать различные не зависящие от t, ε, δ, φ положительные константы.

Суть метода шагов состоит в том, что отрезок (2.8) разбивается на промежутки длины не более 1 и на текущем отрезке сначала в предположениях (2.10) выводится равенство (2.9), а затем с его помощью устанавливаются и сами оценки (2.10).

На *шаге* 1 в силу вытекающего из (2.3) неравенства $-h + 2 + \sigma_0 < 1 - \sigma_0$ рассмотрению подлежит отрезок

$$-h + 1 + \sigma_0 \leqslant t \leqslant -h + 2 + \sigma_0, \tag{2.11}$$

на котором $\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) = \varphi(t-1)$, $\omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) = \varphi(t-h)$, а решение $\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)$ определяется из задачи Коши

$$\begin{gathered}\dot{\omega} = 1 - \exp\frac{\varphi(t-1)}{\varepsilon} + \exp\frac{\varphi(t-h) - a - \omega}{\varepsilon} - \exp\biggl(-\frac{a}{\varepsilon}\biggr),\\ \omega|_{t=-h+1+\sigma_0} = -h + 1 + \sigma_0.\end{gathered} \tag{2.12}$$

В данном случае в силу (2.4) первое неравенство из (2.10) справедливо с константой $M_1 = q_2$, а выполнения второго будем требовать. Далее, учитывая (2.10) в (2.12), приходим к выводу, что интересующая нас задача Коши записывается в виде

$$\dot{\omega} = 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \qquad \omega|_{t=-h+1+\sigma_0} = -h + 1 + \sigma_0. \tag{2.13}$$

А отсюда нужное асимптотическое представление (2.9) на отрезке (2.11) вытекает автоматически.

Проверим теперь выполнение второго неравенства из (2.10). В соответствии с (2.4) и асимптотической формулой (2.9) (которая при рассматриваемых t уже установлена) имеем

$$\varphi(t-h) - a - \omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) < -a - \omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) = -a - t + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right).$$

А поскольку на промежутке (2.11) функция $-a - t$ отрицательна, то второе неравенство (2.10) справедливо с любой константой M_2 из интервала $(0, 1+\sigma_0)$.

На последующих шагах в силу оценок $\varphi(t-h) < 0$, $-a-t < 0$, $t-1 < 0$ все приведенные выше рассуждения повторяются практически дословно. А именно, на текущем шаге сначала при условиях (2.10) из задачи Коши вида (2.13) выводим асимптотическое представление (2.9), а затем убеждаемся, что оценки (2.10) действительно выполняются с константами $M_1 \in (0, \sigma_0)$ и $M_2 \in (0, 1+\sigma_0)$.

Лемма доказана.

Этап 2 связан с рассмотрением отрезка

$$1 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant 1 + \alpha_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.14}$$

где α_1 – постоянная из (2.3). В этом случае согласно условиям, наложенным на константу σ_0 (см. (2.3)), выполняются включения

$$t - 1 \in \left[-\sigma_0, \alpha_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right] \subset [-h+1+\sigma_0, 1-\sigma_0],$$
$$t - h \in \left[-h+1-\sigma_0, -h+1+\alpha_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right] \subset I.$$

А отсюда и из (2.4), (2.9) вытекает, что

$$\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) = t - 1 + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \qquad \omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) = \varphi(t-h). \tag{2.15}$$

Что же касается самой функции $\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)$, то для нее на отрезке (2.14) справедлива следующая

Лемма 2.2. *При $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in [1-\sigma_0, 1+\alpha_1\varepsilon\ln(1/\varepsilon)]$, $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$ имеет место асимптотическое представление*

$$\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) = 1 + \varepsilon(\tau - \exp\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \tag{2.16}$$

Доказательство. Как и в случае леммы 2.1, обоснование формулы (2.16) проведем сначала при априорном предположении

$$\varphi(t-h)-a-\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)\leqslant -M,\qquad M=\text{const}>0, \tag{2.17}$$

а затем проверим и само условие (2.17).

Учтем в правой части уравнения (2.1) соотношения (2.15), (2.17) и выполним в нем замену времени $\tau=(t-1)/\varepsilon$. В результате приходим к задаче Коши вида

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\varepsilon(1-\exp\tau)+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$
$$\omega|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon}=\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)|_{t=1-\sigma_0}=1-\sigma_0+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$

из которой в свою очередь требуемое асимптотическое представление (2.16) вытекает очевидным образом. Кроме того, из (2.16) следует, что

$$\begin{gathered}\varphi(t-h)-a-\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)<-a-\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)\\ =-a-1-\varepsilon(\tau-\exp\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon}+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\leqslant -M,\\ M=\text{const}\in(0,a+1-\sigma_0).\end{gathered}$$

Лемма доказана.

На *этапе* 3 рассмотрим значения t из отрезка

$$t=1+\varepsilon\Bigl(s+\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr),\qquad -(1-\alpha_1)\ln\frac{1}{\varepsilon}\leqslant s\leqslant \ln(2a)-\varepsilon^{\alpha_2}, \tag{2.18}$$

где $\alpha_2=\text{const}\in(0,1)$, а s – новая независимая переменная. В данной ситуации в силу (2.4), (2.9) имеем

$$\begin{gathered}\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta)=\varepsilon\Bigl(s+\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\\ \omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta)=-a+1+\varepsilon\Bigl(s+2\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)-\varepsilon\delta+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Bigr)\biggr).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Эта информация позволяет установить следующее утверждение.

Лемма 2.3. *На отрезке* (2.18) *при* $\varepsilon\to0$ *справедливо равномерное по* t, δ, φ *асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned}\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)=\biggl(1-\exp s+\varepsilon\Bigl(s+\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\Big|_{s=(t-1)/\varepsilon-\ln(1/\varepsilon)}&\\ +O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr).&\end{aligned} \tag{2.20}$$

Доказательство. Как обычно, подставим в правую часть уравнения (2.1) соотношения (2.19), а затем перейдем в нем к переменной s (см. (2.18)). В результате для отыскания интересующего нас решения получаем задачу Коши вида

$$\frac{d\omega}{ds} = \varepsilon - \exp s + \frac{1}{\varepsilon}\exp\biggl\{\frac{-2a + 1 + \varepsilon(s-\delta) + O(\exp(-1/\sqrt{\varepsilon}))}{\varepsilon} - \frac{\omega}{\varepsilon}\biggr\} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \tag{2.21}$$

$$\omega|_{s=-(1-\alpha_1)\ln(1/\varepsilon)} = 1 + \alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon^{1-\alpha_1} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr). \tag{2.22}$$

Анализ задачи (2.21), (2.22) не вызывает затруднений. Действительно, полагая в ней

$$\omega = 1 - \exp s + \varepsilon\Bigl(s + \ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr) + \Delta, \tag{2.23}$$

для остатка Δ приходим к задаче Коши

$$\frac{d\Delta}{ds} = \exp\biggl\{\frac{\exp s - 2a}{\varepsilon} - \delta + O\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\exp\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Bigr)\biggr) - \frac{\Delta}{\varepsilon}\biggr\} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$

$$\Delta|_{s=-(1-\alpha_1)\ln(1/\varepsilon)} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).$$

А отсюда, опираясь на очевидное неравенство

$$\frac{\exp s - 2a}{\varepsilon} \leqslant \frac{2a(\exp(-\varepsilon^{\alpha_2}) - 1)}{\varepsilon} \sim -\frac{2a}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}, \qquad \varepsilon \to 0,$$

заключаем, что

$$|\Delta| \leqslant \exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr), \qquad q = \mathrm{const} \in (0, 2a). \tag{2.24}$$

И наконец, объединяя соотношения (2.23), (2.24), получаем требуемое асимптотическое представление (2.20).

Лемма доказана.

Этап 4 состоит в рассмотрении отрезка времени

$$t = 1 + \varepsilon\Bigl(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ln(2a) + \varepsilon\theta\Bigr), \qquad -\varepsilon^{-(1-\alpha_2)} \leqslant \theta \leqslant \varepsilon^{-\alpha_3}, \tag{2.25}$$

где $\alpha_3 = \mathrm{const} \in (0,1)$, θ – новая независимая переменная. Снова опираясь на формулы (2.4), (2.9), заключаем, что в данном случае

$$\begin{aligned}
\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) &= \varepsilon\Bigl(\ln(2a) + \varepsilon\theta + \ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\\
\omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) &= -a + 1 + \varepsilon\Bigl(\ln(2a) + \varepsilon\theta + 2\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)\\
&\quad - \varepsilon\delta + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Bigr)\biggr).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Далее, выполним в уравнении (2.1) замену времени (2.25), подставим в его правую часть соотношения (2.26) и положим

$$\omega = -2a + 1 + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon v. \tag{2.27}$$

В результате для отыскания функции $v = v_\varphi(\theta, \varepsilon, \delta)$, где

$$v_\varphi(\theta, \varepsilon, \delta) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, \delta) + 2a - 1 - \varepsilon \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\bigg|_{t=1+\varepsilon(\ln(1/\varepsilon)+\ln(2a)+\varepsilon\theta)}, \tag{2.28}$$

приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\theta} = \varepsilon - 2a\exp(\varepsilon\theta) + 2a\exp\Big[\varepsilon\theta - v - \delta + O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\exp\Big(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)\Big)\Big] \\ + O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Согласно формулам (2.20), (2.27) его следует дополнить начальным условием

$$v|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}} = 2a\frac{1-\exp(-\varepsilon^{\alpha_2})}{\varepsilon} + \ln(2a) - \varepsilon^{\alpha_2} + O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Big)\Big). \tag{2.30}$$

Для анализа задачи Коши (2.29), (2.30) нам потребуются функции

$$\begin{gathered}v_0(\theta, \delta) = -2a\theta + \ln v_*(\theta, \delta), \qquad v_*(\theta, \delta) = \exp(2a\theta - \delta) + 2a, \\ v_1(\theta, \delta) = \frac{1}{v_*(\theta, \delta)}\Big(\frac{1}{2a}\exp(2a\theta - \delta) + 2a\theta - 2a^2\theta^2\Big).\end{gathered} \tag{2.31}$$

Кроме того, всюду ниже считаем, что постоянная α_2 из (2.25) принадлежит промежутку $(1/2, 1)$.

Лемма 2.4. *При $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\theta \in [-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}, \varepsilon^{-\alpha_3}]$, $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$ для функции (2.28) имеет место асимптотическое представление*

$$v_\varphi(\theta, \varepsilon, \delta) = v_0(\theta, \delta) + \varepsilon v_1(\theta, \delta) + O\Big(\frac{\varepsilon^{2\alpha_2 - 1}}{v_*(\theta, \delta)}\Big) + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}). \tag{2.32}$$

Доказательство. Опираясь на явный вид (2.31) функций $v_0(\theta, \delta)$, $v_1(\theta, \delta)$, нетрудно убедиться, что отрезок ряда $v = v_0(\theta, \delta) + \varepsilon v_1(\theta, \delta)$ удовлетворяет уравнению (2.29) с точностью до $O(\varepsilon^2\theta^2) + O(\varepsilon^2(|\theta| + |v_1(\theta, \delta)|)^2)\exp(-v_0(\theta, \delta))$ по невязке, а начальному условию (2.30) – с точностью до $O(\varepsilon^{2\alpha_2 - 1})$. Далее, в силу условий, наложенных на α_2, α_3, эти остатки асимптотически малы. Поэтому малым будет и остаток $\Delta = v_\varphi(\theta, \varepsilon, \delta) - v_0(\theta, \delta) - \varepsilon v_1(\theta, \delta)$. Точнее говоря, главный порядок этого остатка определяется из линейной задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{d\Delta}{d\theta} = -\frac{v_*'(\theta, \delta)}{v_*(\theta, \delta)}\Delta + O(\varepsilon^2\theta^2) + O\Big(\varepsilon^2(|\theta| + |v_1|)^2\frac{v_*'}{v_*}\Big), \\ \Delta|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}} = O(\varepsilon^{2\alpha_2 - 1});\end{gathered} \tag{2.33}$$

знаком $'$ обозначим дифференцирование по θ. В свою очередь, из (2.33) выводим оценку

$$|\Delta| \leqslant M_1\varepsilon^{2\alpha_2-1}\frac{v_*(-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)},\delta)}{v_*(\theta,\delta)} + \frac{M_2\varepsilon^2}{v_*(\theta,\delta)}\int_{-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}}^{\theta} v_*(\sigma,\delta)\sigma^2\,d\sigma \\ + \frac{M_3\varepsilon^2}{v_*(\theta,\delta)}\int_{-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}}^{\theta} v_*'(\sigma,\delta)(|\sigma|+|v_1(\sigma,\delta)|)^2\,d\sigma,$$

где $v_*(\theta,\delta)$ – функция из (2.31), $M_1, M_2, M_3 = \mathrm{const} > 0$. А отсюда и из явных формул (2.31) для функций $v_0(\theta,\delta)$, $v_1(\theta,\delta)$ вытекает, что

$$|\Delta| \leqslant M_4\frac{\varepsilon^{2\alpha_2-1}}{v_*(\theta,\delta)} + M_5\varepsilon^{2-2\alpha_3}, \qquad M_4, M_5 = \mathrm{const} > 0.$$

Лемма доказана.

На *этапе* 5 рассмотрению подлежат значения t из промежутка

$$t = 1+\varepsilon\biggl(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln(2a)+\sigma\biggr), \qquad \overline{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \overline{\overline{\sigma}}, \tag{2.34}$$

где

$$\overline{\sigma} = \varepsilon^{1-\alpha_3}, \qquad \overline{\overline{\sigma}} = \frac{1-\sigma_0}{\varepsilon} - \ln\frac{1}{\varepsilon} - \ln(2a). \tag{2.35}$$

В этом случае

$$t-1 \in \biggl[\varepsilon\biggl(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln(2a)+\varepsilon^{1-\alpha_3}\biggr),\, 1-\sigma_0\biggr] \subset [-h+1+\sigma_0,\, 1-\sigma_0], \\ t-h \in \biggl[-h+1+\alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon},\, 1-\sigma_0\biggr]$$

и в силу (2.4), (2.9) имеем

$$\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) = \varepsilon\biggl(\ln(2a)+\sigma+\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr) + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr), \\ \omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) = -a+1+\varepsilon\biggl(\ln(2a)+\sigma+2\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr) \\ -\varepsilon\delta + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)\biggr). \tag{2.36}$$

Далее, выполним в уравнении (2.1) замену (2.27), перейдем в нем к новому времени σ (см. (2.34), (2.35)) и подставим в его правую часть формулы (2.36). В результате для функции

$$v_\varphi(\sigma,\varepsilon,\delta) = \frac{\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)+2a-1-\varepsilon\ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\bigg|_{t=1+\varepsilon(\ln(1/\varepsilon)+\ln(2a)+\sigma)} \tag{2.37}$$

приходим к аналогичной (2.29), (2.30) задаче Коши

$$\varepsilon\frac{dv}{d\sigma} = \varepsilon - 2a\exp\sigma + 2a\exp\biggl[\sigma - v - \delta + O\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\exp\biggl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)\biggr)\biggr] \\ + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr)\exp\sigma, \tag{2.38}$$

$$v|_{\sigma=\overline{\sigma}} = \overline{v}_\varphi(\varepsilon,\delta), \qquad \overline{v}_\varphi(\varepsilon,\delta) = v_\varphi(\theta,\varepsilon,\delta)|_{\theta=\varepsilon^{-\alpha_3}}. \tag{2.39}$$

Заметим, что после отбрасывания в (2.38) экспоненциально малых слагаемых (т.е. слагаемых порядка $O(\exp(-q/\varepsilon^{\alpha_*}))$, $q,\alpha_* = \mathrm{const} > 0$) решение $v = \widetilde{v}_\varphi(\sigma,\varepsilon,\delta)$ упрощенной задачи

$$\varepsilon\,\frac{dv}{d\sigma} = \varepsilon - 2a\exp\sigma + 2a\exp(\sigma - v - \delta), \qquad v|_{\sigma=\overline{\sigma}} = \overline{v}_\varphi(\varepsilon,\delta) \tag{2.40}$$

выписывается в явном виде посредством формул

$$\begin{gathered}\widetilde{v}_\varphi(\sigma,\varepsilon,\delta) = \ln z,\\ z = \exp\biggl\{\sigma - \overline{\sigma} - \frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma - \exp\overline{\sigma}) + \overline{v}_\varphi(\varepsilon,\delta)\biggr\}\\ + \exp\biggl\{\sigma - \delta - \frac{2a}{\varepsilon}\exp\sigma\biggr\}\int_{\overline{\sigma}}^{\sigma}\frac{2a}{\varepsilon}\exp\biggl(\frac{2a}{\varepsilon}\exp s\biggr)ds.\end{gathered} \tag{2.41}$$

Далее, учтем в (2.41) вытекающее из (2.31), (2.32) асимптотическое представление

$$\overline{v}_\varphi(\varepsilon,\delta) = -\delta + \frac{\varepsilon}{2a} + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}), \qquad \varepsilon\to 0,$$

для начального условия (2.39) и соотношение

$$\begin{aligned}&\exp\biggl\{\sigma - \frac{2a}{\varepsilon}\exp\sigma\biggr\}\int_{\overline{\sigma}}^{\sigma}\frac{2a}{\varepsilon}\exp\biggl(\frac{2a}{\varepsilon}\exp s\biggr)ds\\ &\quad= 1 - \exp\biggl\{\sigma - \overline{\sigma} - \frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma - \exp\overline{\sigma})\biggr\}\\ &\qquad+ \frac{\varepsilon\exp(-\sigma)}{2a}\biggl(1 - \exp\biggl\{2\sigma - 2\overline{\sigma} - \frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma - \exp\overline{\sigma})\biggr\}\biggr) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

В результате убеждаемся, что равномерно по δ, φ, σ

$$\widetilde{v}_\varphi(\sigma,\varepsilon,\delta) = -\delta + \varepsilon\frac{\exp(-\sigma)}{2a} + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}), \qquad \varepsilon\to 0. \tag{2.42}$$

Покажем теперь, что асимптотическая формула (2.42) сохраняется для решения задачи Коши (2.38), (2.39) с учетом отброшенных ранее экспоненциально малых слагаемых. Для этого подставим в (2.38), (2.39) $v = \widetilde{v}_\varphi(\sigma,\varepsilon,\delta) + \Delta$, где $\widetilde{v}_\varphi(\sigma,\varepsilon,\delta)$ – функция (2.41). Нетрудно заметить, что главный порядок малости остатка Δ определяется из линейной задачи Коши

$$\varepsilon\,\frac{d\Delta}{d\sigma} = -2a\exp\sigma\,\Delta + O\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\exp\biggl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)\biggr)\exp\sigma, \qquad \Delta|_{\sigma=\overline{\sigma}} = 0. \tag{2.43}$$

В свою очередь, из (2.43) получим

$$\begin{aligned}|\Delta| &\leqslant \frac{M}{\varepsilon^2}\exp\biggl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)\int_{\overline{\sigma}}^{\sigma}\exp\biggl\{s - \frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma - \exp s)\biggr\}ds\\ &= \frac{M}{2a\varepsilon}\exp\biggl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr)\biggl(1 - \exp\biggl\{-\frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma - \exp\overline{\sigma})\biggr\}\biggr) \leqslant \frac{M}{2a\varepsilon}\exp\biggl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr),\end{aligned}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$.

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.5. *При $\varepsilon \to 0$ для функции (2.37) выполняется равномерное по $\sigma \in [\overline{\sigma}, \overline{\overline{\sigma}}]$, $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$ асимптотическое равенство*

$$v_\varphi(\sigma, \varepsilon, \delta) = -\delta + \varepsilon \frac{\exp(-\sigma)}{2a} + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}). \tag{2.44}$$

Этап 6 связан с рассмотрением отрезка времени

$$2 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant 2 + \alpha_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.45}$$

где α_1 – константа из (2.3), (2.4). При указанных t согласно условиям (2.3) на параметр σ_0 выполняются включения

$$t - 1 \in \left[1 - \sigma_0, 1 + \alpha_1 \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right], \qquad t - h \in [-h + 1 + \sigma_0, 1 - \sigma_0],$$

а значит, в силу (2.9), (2.16)

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(t-1, \varepsilon, \delta) &= 1 + \varepsilon(\tau - \exp\tau) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \\ \omega_\varphi(t-h, \varepsilon, \delta) &= 2 - a + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon(\tau - \delta) + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.46}$$

где $\tau = (t-2)/\varepsilon$.

Сделаем в уравнении (2.1) замену (2.27), перейдем к новому времени τ и учтем соотношения (2.46). В результате для функции

$$v_\varphi(\tau, \varepsilon, \delta) = \frac{\omega_\varphi(t, \varepsilon, \delta) + 2a - 1 - \varepsilon \ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\bigg|_{t=2+\varepsilon\tau}, \qquad \overline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\overline{\tau}}, \tag{2.47}$$

где $\overline{\tau} = -\sigma_0/\varepsilon$, $\overline{\overline{\tau}} = \alpha_1 \ln(1/\varepsilon)$, получаем уравнение вида

$$\begin{aligned} \mu \frac{dv}{d\tau} = \mu - \exp&\left\{\tau - \exp\tau + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)\right\} \\ &+ \exp\left\{\tau - \delta - v + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)\right\} - \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right)\mu, \end{aligned} \tag{2.48}$$

в котором $\mu = \exp(-1/\varepsilon)$. Согласно предыдущему этапу его следует дополнить начальным условием

$$v|_{\tau=\overline{\tau}} = \overline{v}_\varphi(\varepsilon, \delta), \qquad \overline{v}_\varphi(\varepsilon, \delta) = v_\varphi(\sigma, \varepsilon, \delta)|_{\sigma=\overline{\overline{\sigma}}}, \tag{2.49}$$

где в силу (2.44)

$$\overline{v}_\varphi(\varepsilon, \delta) = -\delta + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.50}$$

Как и выше, обозначим через $\widetilde{v}_\varphi(\tau, \varepsilon, \delta)$ решение задачи Коши для упрощенного уравнения

$$\mu \frac{dv}{d\tau} = \mu - \exp(\tau - \exp\tau) + \exp(\tau - \delta - v) \tag{2.51}$$

с начальным условием (2.49). Нетрудно видеть, что функция $\widetilde{v}_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta)$ задается аналогичными (2.41) явными формулами

$$\widetilde{v}_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta)=\ln z, \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}z=\exp\Big\{\tau-\overline{\tau}-\frac{1}{\mu}(\exp(-\exp\overline{\tau})-\exp(-\exp\tau))+\overline{v}_\varphi(\varepsilon,\delta)\Big\}\\ +\frac{1}{\mu}\exp\Big\{\tau+\frac{1}{\mu}\exp(-\exp\tau)-\delta\Big\}\int_{\overline{\tau}}^{\tau}\exp\Big(-\frac{1}{\mu}\exp(-\exp s)\Big)ds.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Далее, объединяя соотношения (2.50), (2.52), (2.53) с формулой

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}\exp\Big\{\tau+\frac{1}{\mu}\exp(-\exp\tau)-\delta\Big\}\int_{\overline{\tau}}^{\tau}\exp\Big(-\frac{1}{\mu}\exp(-\exp s)\Big)ds\\ &\quad=\exp(-\delta+\exp\tau)\\ &\qquad\times\Big[1-\exp\Big\{\tau-\overline{\tau}+\exp\overline{\tau}-\exp\tau-\frac{1}{\mu}(\exp(-\exp\overline{\tau})-\exp(-\exp\tau))\Big\}\Big]\\ &\quad+O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big),\end{aligned}$$

после несложных преобразований приходим к выводу, что равномерно по δ,φ,τ

$$\widetilde{v}_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta)=-\delta+\exp\tau+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}),\qquad \varepsilon\to 0. \tag{2.54}$$

Как и на предыдущем этапе, убедимся, что решение (2.47) исходной задачи Коши (2.48), (2.49) обладает аналогичной (2.54) асимптотикой. Для этого положим в (2.48), (2.49) $v=\widetilde{v}_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta)+\Delta$. В результате для Δ в первом приближении получаем задачу Коши

$$\begin{aligned}\mu\frac{d\Delta}{d\tau}=-\exp(\tau-\exp\tau)\Delta+\exp(\tau-\exp\tau)O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big)\\ -\exp\Big(-\frac{a+1}{\varepsilon}\Big),\qquad \Delta|_{\tau=\overline{\tau}}=0.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Далее, из (2.55) получаем

$$\begin{aligned}|\Delta|\leqslant\frac{M}{\mu}\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\int_{\overline{\tau}}^{\tau}\exp\Big\{-\frac{1}{\mu}(\exp(-\exp s)-\exp(-\exp\tau))\Big\}\exp(s-\exp s)\,ds\\ +\exp\Big(-\frac{a}{\varepsilon}\Big)\int_{\overline{\tau}}^{\tau}\exp\Big\{-\frac{1}{\mu}(\exp(-\exp s)-\exp(-\exp\tau))\Big\}ds,\end{aligned} \tag{2.56}$$

где $M=\mathrm{const}>0$. Остается заметить, что первый интеграл из (2.56) вычисляется явно и оценивается сверху величиной $M\exp(-q/\varepsilon)$, а второй не превосходит $(\overline{\overline{\tau}}-\overline{\tau})\exp(-a/\varepsilon)$. Тем самым, он также экспоненциально мал.

Объединяя соотношения (2.54), (2.56), приходим к очередному утверждению.

Лемма 2.6. *При $\varepsilon\to 0$ функция (2.47) допускает равномерное по $\tau\in[\overline{\tau},\overline{\overline{\tau}}]$, $\delta\in\Omega$, $\varphi\in S$ асимптотическое представление*

$$v_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta)=-\delta+\exp\tau+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}). \tag{2.57}$$

На *этапе* 7 обратимся к значениям t из отрезка

$$t = 2 + \varepsilon\biggl(s + \ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr), \qquad -(1-\alpha_1)\ln\frac{1}{\varepsilon} \leqslant s \leqslant -\varepsilon^{\alpha_4}, \tag{2.58}$$

где $\alpha_4 = \mathrm{const} \in (0,1)$. В этом случае в силу (2.9), (2.20)

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) &= 1 - \exp s + \varepsilon\biggl(s + \ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr) + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\biggr)\biggr), \\ \omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) &= 2 - a + \varepsilon\biggl(s + 2\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr) - \varepsilon\delta + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Что же касается функции

$$u_\varphi(s,\varepsilon,\delta) = \biggl[\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) + 2a - 1 - \varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr]\bigg|_{t=2+\varepsilon(s+\ln(1/\varepsilon))}, \tag{2.60}$$

то она согласно (2.1), (2.58), (2.59) удовлетворяет на отрезке $\overline{s} \leqslant s \leqslant \overline{\overline{s}}$, где $\overline{s} = -(1-\alpha_1)\ln(1/\varepsilon)$, $\overline{\overline{s}} = -\varepsilon^{\alpha_4}$, уравнению вида

$$\begin{aligned} \mu\,\frac{du}{ds} = \varepsilon\mu - \exp\biggl(s - \frac{\exp s}{\varepsilon} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\biggr)\biggr)\biggr) \\ + \exp\biggl(s - \delta - \frac{u}{\varepsilon} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr)\biggr) - \exp\biggl(-\frac{a}{\varepsilon}\biggr)\varepsilon\mu, \end{aligned} \tag{2.61}$$

в котором по-прежнему $\mu = \exp(-1/\varepsilon)$. В соответствии с предыдущим этапом дополним уравнение (2.61) начальным условием

$$u|_{s=\overline{s}} = \overline{u}_\varphi(\varepsilon,\delta), \qquad \overline{u}_\varphi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon v_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta)|_{\tau=\overline{\overline{\tau}}}, \tag{2.62}$$

допускающим в силу (2.57) асимптотику

$$\overline{u}_\varphi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon^{1-\alpha_1} - \varepsilon\delta + O(\varepsilon^{3-2\alpha_3}), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.63}$$

Как и на двух предыдущих этапах, рассмотрим сначала аналогичное (2.51) упрощенное уравнение

$$\mu\,\frac{du}{ds} = \varepsilon\mu - \exp\biggl(s - \frac{\exp s}{\varepsilon}\biggr) + \exp\biggl(s - \delta - \frac{u}{\varepsilon}\biggr) \tag{2.64}$$

и обозначим через $u = \widetilde{u}_\varphi(s,\varepsilon,\delta)$ решение задачи Коши (2.62), (2.64). Несложный подсчет показывает, что для него справедливы формулы

$$\widetilde{u}_\varphi(s,\varepsilon,\delta) = \varepsilon\ln z, \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned} z = \exp\biggl\{s - \overline{s} - \frac{1}{\mu}\biggl(\exp\biggl(-\frac{\exp\overline{s}}{\varepsilon}\biggr) - \exp\biggl(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\biggr)\biggr) + \frac{\overline{u}_\varphi(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon}\biggr\} \\ + \frac{1}{\varepsilon\mu}\exp\biggl(s - \delta + \frac{1}{\mu}\exp\biggl(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\biggr)\biggr)\int_{\overline{s}}^{s}\exp\biggl(-\frac{1}{\mu}\exp\biggl(-\frac{\exp\sigma}{\varepsilon}\biggr)\biggr)d\sigma. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Далее, учитывая в (2.65), (2.66) асимптотическое равенство (2.63) и формулу

$$\frac{1}{\varepsilon\mu}\exp\biggl(s-\delta+\frac{1}{\mu}\exp\Bigl(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\int_{\overline{s}}^{s}\exp\biggl(-\frac{1}{\mu}\exp\Bigl(-\frac{\exp\sigma}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\,d\sigma$$
$$=\exp\Bigl(\frac{\exp s}{\varepsilon}-\delta\Bigr)\biggl[1-\exp\biggl\{s-\overline{s}+\frac{\exp\overline{s}}{\varepsilon}-\frac{\exp s}{\varepsilon}-\frac{1}{\mu}\biggl(\exp\Bigl(-\frac{\exp\overline{s}}{\varepsilon}\Bigr)$$
$$-\exp\Bigl(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\biggr\}+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_4}}\Bigr)\biggr)\biggr],\qquad \varepsilon\to 0,$$

приходим к выводу, что равномерно по $s\in[\overline{s},\overline{\overline{s}}]$, $\delta\in\Omega$, $\varphi\in S$

$$\widetilde{u}_{\varphi}(s,\varepsilon,\delta)=\exp s-\varepsilon\delta+O(\varepsilon^{3-2\alpha_3}),\qquad \varepsilon\to 0. \tag{2.67}$$

При переходе от упрощенной задачи Коши (2.62), (2.64) к исходной задаче (2.61), (2.62) формула (2.67) сохраняется. Обосновывается этот факт по той же схеме, что и на двух предыдущих этапах. Поэтому, опуская вполне понятные выкладки, приведем сразу итоговый результат.

Лемма 2.7. *При $\varepsilon\to 0$ для функции (2.60) справедливо равномерное по s из отрезка $[\overline{s},\overline{\overline{s}}]$, $\delta\in\Omega$, $\varphi\in S$ асимптотическое равенство*

$$u_{\varphi}(s,\varepsilon,\delta)=\exp s-\varepsilon\delta+O(\varepsilon^{3-2\alpha_3}). \tag{2.68}$$

На *этапе* 8 имеем дело с отрезком времени

$$t=2+\varepsilon\Bigl(\varepsilon\theta+\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr),\qquad \overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}, \tag{2.69}$$

где $\overline{\theta}=-\varepsilon^{-(1-\alpha_4)}$, $\overline{\overline{\theta}}=\varepsilon^{-\alpha_5}$. Здесь $\alpha_5=\mathrm{const}\in(0,1)$, а α_4 – постоянная, фигурирующая в (2.58). Всюду ниже считаем, что $\alpha_4\in(1/2,1)$. Заметим также, что при указанных t справедливы аналогичные (2.59) асимптотические представления

$$\begin{aligned}\omega_{\varphi}(t-1,\varepsilon,\delta)&=1-\exp(\varepsilon\theta)+\varepsilon\Bigl(\varepsilon\theta+\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr),\\ \omega_{\varphi}(t-h,\varepsilon,\delta)&=2-a+\varepsilon\Bigl(\varepsilon\theta+2\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)-\varepsilon\delta+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\end{aligned} \tag{2.70}$$

Последовательность дальнейших действий стандартна: сначала переходим в уравнении (2.1) к новому времени θ (см. (2.69)), затем подставляем в его правую часть формулы (2.70) и выполняем замену

$$\omega=-2a+2+\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon w. \tag{2.71}$$

В результате для отыскания функции

$$w_{\varphi}(\theta,\varepsilon,\delta)=\frac{\omega_{\varphi}(t,\varepsilon,\delta)+2a-2-\varepsilon\ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\bigg|_{t=2+\varepsilon(\varepsilon\theta+\ln(1/\varepsilon))} \tag{2.72}$$

приходим к задаче Коши вида

$$\frac{dw}{d\theta} = \varepsilon - \exp\left[\varepsilon\theta - \frac{\exp(\varepsilon\theta)-1}{\varepsilon} + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\right)\right)\right] \\ + \exp\left[\varepsilon\theta - w - \delta + O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)\right] - \varepsilon\exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right), \tag{2.73}$$

$$w|_{\theta=\overline{\theta}} = \overline{w}_\varphi(\varepsilon,\delta), \qquad \overline{w}_\varphi(\varepsilon,\delta) = \frac{u_\varphi(s,\varepsilon,\delta)-1}{\varepsilon}\bigg|_{s=\overline{\overline{s}}}. \tag{2.74}$$

При анализе задачи (2.73), (2.74) нам потребуются функции

$$w_0(\theta,\delta) = \exp(-\theta) - \delta + \ln\psi(\theta), \tag{2.75}$$

$$w_1(\theta,\delta) = \frac{1}{\psi(\theta)}\int_{-\infty}^{\theta}\psi(s)\left(1 - \left(s - \frac{s^2}{2}\right)\exp(-s) + \frac{s\exp(-\exp(-s))}{\psi(s)}\right)ds, \tag{2.76}$$

где

$$\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta}\exp(-\exp(-\sigma))\,d\sigma,$$

а также информация об их поведении при $\theta \to \pm\infty$. Для получения этой информации обратимся сначала к равенствам

$$\begin{gathered} \psi(\theta) = (1 + O(\exp\theta))\exp(\theta - \exp(-\theta)), \qquad \theta \to -\infty, \\ \psi(\theta) = \theta + c_* + O(\exp(-\theta)), \qquad \theta \to +\infty, \end{gathered} \tag{2.77}$$

где

$$c_* = \int_{-\infty}^{0}\exp(-\exp(-\sigma))\,d\sigma + \int_{0}^{+\infty}(\exp(-\exp(-\sigma)) - 1)\,d\sigma. \tag{2.78}$$

Учитывая затем соотношения (2.77), (2.78) в формулах (2.75), (2.76), убеждаемся, что

$$\begin{gathered} w_0(\theta,\delta) = \theta - \delta + O(\exp\theta), \qquad \theta \to -\infty, \\ w_0(\theta,\delta) = -\delta + \ln\theta + \frac{c_*}{\theta} + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right), \qquad \theta \to +\infty, \end{gathered} \tag{2.79}$$

$$\begin{gathered} w_1(\theta,\delta) = \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^2\exp\theta), \qquad \theta \to -\infty, \\ w_1(\theta,\delta) = \theta + O\left(\frac{1}{\theta}\right), \qquad \theta \to +\infty. \end{gathered} \tag{2.80}$$

Причины, по которым мы ввели в рассмотрение функции (2.75), (2.76), состоят в следующем. Во-первых, опираясь на вытекающее из (2.68), (2.74) представление

$$\overline{w}_\varphi(\varepsilon,\delta) = -\delta - \varepsilon^{\alpha_4-1} + \frac{\varepsilon^{2\alpha_4-1}}{2} + O(\varepsilon^{3\alpha_4-1}) + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}), \qquad \varepsilon \to 0,$$

и асимптотические свойства (2.79), (2.80), приходим к выводу, что отрезок ряда $w = w_0(\theta,\delta) + \varepsilon w_1(\theta,\delta)$ удовлетворяет начальному условию (2.74) с точностью до $O(\varepsilon^{3\alpha_4-1})+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})$. Во-вторых, при подстановке указанного выражения в уравнение (2.73) и последующем переносе всех слагаемых из левой части в правую получается невязка $f_\varphi(\theta,\varepsilon,\delta)$ вида

$$f_\varphi(\theta,\varepsilon,\delta)=O(\varepsilon^2(|\theta|^3+1)\exp(-\theta))+O\biggl(\varepsilon^2\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}(\theta-w_1(\theta,\delta))^2\biggr). \tag{2.81}$$

А отсюда для остатка $\Delta=w_\varphi(\theta,\varepsilon,\delta)-w_0(\theta,\delta)-\varepsilon w_1(\theta,\delta)$ в первом приближении получаем задачу Коши

$$\frac{d\Delta}{d\theta}=-\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}\Delta+f_\varphi(\theta,\varepsilon,\delta),\qquad \Delta|_{\theta=\overline{\theta}}=O(\varepsilon^{3\alpha_4-1})+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}). \tag{2.82}$$

Анализ получившейся задачи стандартен. Сначала из (2.81), (2.82) выводим предварительную оценку

$$\begin{aligned}|\Delta|\leqslant M_1\frac{\psi(\overline{\theta})}{\psi(\theta)}(\varepsilon^{3\alpha_4-1}+\varepsilon^{2-2\alpha_3})+\frac{M_2\varepsilon^2}{\psi(\theta)}\int_{\overline{\theta}}^{\theta}\psi(s)(|s|^3+1)\exp(-s)\,ds\\ +\frac{M_3\varepsilon^2}{\psi(\theta)}\int_{\overline{\theta}}^{\theta}\psi'(s)(|s|+|w_1(s,\delta)|)^2\,ds,\qquad M_1,M_2,M_3=\mathrm{const}>0.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Далее, разобьем отрезок $\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}$ на три части: $I_1=[\overline{\theta},-N]$, $I_2=[-N,N]$, $I_3=[N,\overline{\overline{\theta}}]$, где N – достаточно большая положительная константа, и воспользуемся свойствами (2.77)–(2.80). В результате убеждаемся, что

$$\frac{\varepsilon^2}{\psi(\theta)}\int_{\overline{\theta}}^{\theta}\psi(s)(|s|^3+1)\exp(-s)\,ds=\begin{cases}O(\varepsilon^2|\theta|^3) & \text{при } \theta\in I_1,\\ O(\varepsilon^2) & \text{при } \theta\in I_2,\\ O\Bigl(\dfrac{\varepsilon^2}{\theta}\Bigr) & \text{при } \theta\in I_3,\end{cases} \tag{2.84}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\psi(\theta)}\int_{\overline{\theta}}^{\theta}\psi'(s)(|s|+|w_1(s,\delta)|)^2\,ds=\begin{cases}O(\varepsilon^2\theta^4) & \text{при } \theta\in I_1,\\ O(\varepsilon^2) & \text{при } \theta\in I_2,\\ O(\varepsilon^2\theta^2) & \text{при } \theta\in I_3.\end{cases} \tag{2.85}$$

Добавим еще, что в силу требования $\alpha_4>1/2$ правые части в (2.84), (2.85) асимптотически малы.

Суммируя предпринятые построения, приходим к выводу, что справедлива следующая

Лемма 2.8. *При $\varepsilon\to 0$ для функции (2.72) имеет место равномерное по θ, δ, φ асимптотическое представление*

$$w_\varphi(\theta,\delta,\varepsilon)=w_0(\theta,\delta)+\varepsilon w_1(\theta,\delta)+\Delta \tag{2.86}$$

с остатком Δ, обладающим свойствами (2.83)–(2.85).

На *этапе* 9 рассмотрим значения t из отрезка

$$t=2+\varepsilon\Bigl(s+\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr),\qquad s_1\leqslant s\leqslant s_2, \tag{2.87}$$

где $s_1 = \varepsilon^{1-\alpha_5}$, $s_2 = (h-1-\sigma_0)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)$, а константу α_5 по техническим причинам будем считать принадлежащей интервалу $(0, 1/2)$. В свою очередь отрезок (2.87) разобьем на два промежутка, соответствующих значениям s из отрезков $s_1 \leqslant s \leqslant \widetilde{s}$ и $\widetilde{s} \leqslant s \leqslant s_2$, где $\widetilde{s} = \min(1, h-1-\sigma_0)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)$.

Обратимся сначала к отрезку $s_1 \leqslant s \leqslant \widetilde{s}$. В этом случае в силу включений

$$t-1 \in \Big[1+\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon^{2-\alpha_5}, 2\Big], \qquad t-h \in \Big[-h+2+\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon^{2-\alpha_5}, 1-\sigma_0\Big]$$

для функции $\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta)$ справедливы следующие группы формул: (2.20), (2.28); (2.32), (2.37); (2.44), (2.47); (2.57). Из упомянутых формул вытекает, что

$$\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) \leqslant -M\varepsilon^{1-\alpha_5}, \qquad M = \mathrm{const} > 0. \tag{2.88}$$

Что же касается функции $\omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta)$, то для нее согласно равенству (2.9) имеем

$$\omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) = 2-a+\varepsilon\Big(s+2\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big)-\varepsilon\delta+O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{2.89}$$

Принимая во внимание перечисленные факты, перейдем в уравнении (2.1) к новому времени s в соответствии с формулой (2.87), затем учтем в его правой части соотношения (2.88), (2.89) и сделаем аналогичную (2.71) замену

$$\omega = -2a+2+2\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon x.$$

В результате для функции

$$x_\varphi(s,\varepsilon,\delta) = \frac{\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)+2a-2-2\varepsilon\ln(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\bigg|_{t=2+\varepsilon(s+\ln(1/\varepsilon))} \tag{2.90}$$

приходим к задаче Коши вида

$$\frac{dx}{ds} = 1+\exp\Big[s-\delta-x+O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big]+O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Big)\Big), \tag{2.91}$$

$$x|_{s=s_1} = \overline{x}_\varphi(\varepsilon,\delta), \qquad \overline{x}_\varphi(\varepsilon,\delta) = w_\varphi(\theta,\varepsilon,\delta)\big|_{\theta=\overline{\overline{\theta}}} - \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.92}$$

где $w_\varphi(\theta,\varepsilon,\delta)$ – функция (2.72) из предыдущего этапа.

Как обычно, обратимся сначала к решению $x = \widetilde{x}_\varphi(s,\varepsilon,\delta)$ упрощенной задачи

$$\frac{dx}{ds} = 1+\exp(s-\delta-x), \qquad x|_{s=s_1} = \overline{x}_\varphi(\varepsilon,\delta),$$

которое задается равенством

$$\widetilde{x}_\varphi(s,\varepsilon,\delta) = \ln\big[\exp(s-s_1+\overline{x}_\varphi(\varepsilon,\delta))+(s-s_1)\exp(s-\delta)\big]. \tag{2.93}$$

Далее, нетрудно видеть, что в силу (2.79), (2.80), (2.83)–(2.86) и требования $\alpha_5 < 1/2$ для начального условия $\overline{x}_\varphi(\varepsilon,\delta)$ из (2.92) справедливо асимптотическое представление

$$\overline{x}_\varphi(\varepsilon,\delta) = -\delta-(1-\alpha_5)\ln\frac{1}{\varepsilon}+c_*\varepsilon^{\alpha_5}+\varepsilon^{1-\alpha_5}+O(\varepsilon^{2\alpha_5}), \qquad \varepsilon\to 0.$$

Подставляя его в (2.93), приходим к выводу, что

$$\widetilde{x}_\varphi(s,\varepsilon,\delta) = s - \delta + \ln(s + c_\varphi(\varepsilon,\delta)), \tag{2.94}$$

где равномерно по $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$

$$c_\varphi(\varepsilon,\delta) = \exp(\delta - s_1 + \overline{x}_\varphi(\varepsilon,\delta)) - s_1 = \varepsilon c_* + O(\varepsilon^{1+\alpha_5}), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Переход от $\widetilde{x}_\varphi(s,\varepsilon,\delta)$ к $x_\varphi(s,\varepsilon,\delta)$ связан с анализом уравнения для остатка $\Delta = x_\varphi(s,\varepsilon,\delta) - \widetilde{x}_\varphi(s,\varepsilon,\delta)$. Из (2.91) следует, что в первом приближении это уравнение записывается в виде

$$\frac{d\Delta}{ds} = -\frac{1}{s}\Delta + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr).$$

Дополняя его начальным условием $\Delta|_{s=s_1} = 0$ и опираясь на явную формулу для решения соответствующей задачи Коши, убеждаемся, что Δ имеет порядок $O(\exp(-q/\varepsilon^{\alpha_5}))$. Тем самым, аналогичная (2.94) формула справедлива и для функции $x_\varphi(s,\varepsilon,\delta)$. Точнее говоря, равномерно по s, δ, φ

$$x_\varphi(s,\varepsilon,\delta) = s - \delta + \ln(s + c_\varphi(\varepsilon,\delta)) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.95}$$

Для распространения равенства (2.95) на оставшийся отрезок $\widetilde{s} \leqslant s \leqslant s_2$ воспользуемся методом шагов. В связи с этим обратим внимание на то, что при указанных значениях s формула (2.89) сохраняется, а вместо (2.88) мы a priori предполагаем выполнение оценки вида

$$\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) \leqslant -M, \qquad M = \mathrm{const} > 0. \tag{2.96}$$

Далее, разобьем промежуток времени $\min(3, h+1-\sigma_0) \leqslant t \leqslant h+1-\sigma_0$ (отвечающий значениям $s \in [\widetilde{s}, s_2]$) на части длины не более 1 и будем последовательно рассматривать получившиеся отрезки. Точнее говоря, на текущем шаге сначала, опираясь на соотношения (2.89), (2.96) и повторяя практически дословно приведенные чуть выше рассуждения, устанавливаем требуемое равенство (2.95), а затем убеждаемся, что оценка (2.96) действительно выполняется с любой константой $M \in (0, a+\sigma_0)$.

Объединяя построения, проделанные в рамках этапа 9, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.9. *Для функции* (2.90) *справедливо равномерное по* $s \in [s_1, s_2]$, $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$ *асимптотическое представление* (2.95).

Этап 10 соответствует отрезку времени

$$h + 1 - \sigma_0 \leqslant t \leqslant h + 1 + \alpha_1 \varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.97}$$

где α_1 – константа из (2.3). В случае (2.97) в силу формулы (2.16) имеем

$$\omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) = 1 + \varepsilon(\tau - \exp\tau)|_{\tau=(t-h-1)/\varepsilon} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \tag{2.98}$$

а функция $\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta)$ согласно формулам (2.37), (2.44), (2.47), (2.57), (2.60), (2.68), (2.72), (2.83)–(2.86), (2.90), (2.95) допускает оценку вида

$$\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) \leqslant -M, \qquad M = \mathrm{const} \in (0,a). \tag{2.99}$$

Принимая во внимание соотношения (2.98), (2.99) и выполняя в уравнении (2.1) замены $\omega = -a+1+\varepsilon y$, $\tau = (t-h-1)/\varepsilon$, для функции

$$y_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta) = \frac{\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)+a-1}{\varepsilon}\bigg|_{t=h+1+\varepsilon\tau} \tag{2.100}$$

на отрезке $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\tau_1 = -\sigma_0/\varepsilon$, $\tau_2 = \alpha_1 \ln(1/\varepsilon)$, приходим к задаче Коши вида

$$\begin{gathered} \frac{dy}{d\tau} = 1 + \exp\biggl[\tau - \exp\tau - y + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\biggr] + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \\ y|_{\tau=\tau_1} = \overline{y}_\varphi(\varepsilon,\delta), \qquad \overline{y}_\varphi(\varepsilon,\delta) = -\frac{a-1}{\varepsilon} + 2\ln\frac{1}{\varepsilon} + x_\varphi(s,\varepsilon,\delta)|_{s=s_2}, \end{gathered} \tag{2.101}$$

где $x_\varphi(s,\varepsilon,\delta)$ – функция (2.90). Кроме того, помимо (2.101) рассмотрим упрощенную задачу Коши

$$\frac{dy}{d\tau} = 1 + \exp(\tau - \exp\tau - y), \qquad y|_{\tau=\tau_1} = \overline{y}_\varphi(\varepsilon,\delta). \tag{2.102}$$

Несложный подсчет показывает, что для ее решения $y = \widetilde{y}_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta)$ справедлива явная формула

$$\widetilde{y}_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta) = \tau + \ln\biggl[\frac{d_\varphi(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon} - \int_\tau^{+\infty} \exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr], \tag{2.103}$$

где

$$d_\varphi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon\int_{\tau_1}^{+\infty} \exp(-\exp\sigma)\,d\sigma + \varepsilon\exp(\overline{y}_\varphi(\varepsilon,\delta) - \tau_1). \tag{2.104}$$

Для выявления асимптотики функции (2.104) заметим сначала, что в силу (2.95) начальное условие $\overline{y}_\varphi(\varepsilon,\delta)$ из (2.101) допускает при $\varepsilon \to 0$ асимптотическое представление

$$\overline{y}_\varphi(\varepsilon,\delta) = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon} + \ln(s_2 + c_\varphi(\varepsilon,\delta)) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr). \tag{2.105}$$

Далее, подставляя соотношение (2.105) в (2.104) и опираясь на асимптотическое равенство

$$\int_\tau^{+\infty} \exp(-\exp\sigma)\,d\sigma = -\tau + c_* + O(\exp\tau), \qquad \tau \to -\infty,$$

где c_* – константа (2.78), приходим к выводу, что

$$d_\varphi(\varepsilon,\delta) = h - 1 - \varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon(c_\varphi(\varepsilon,\delta) + c_*) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.106}$$

И наконец, следует добавить, что при обратном переходе от задачи (2.102) к (2.101) формула (2.103) сохраняется с точностью до экспоненциально малых слагаемых. Опуская стандартное обоснование этого факта, приведем сразу итоговый результат.

ЛЕММА 2.10. *При $\varepsilon \to 0$ для функции (2.100) выполняется равномерное по $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$ асимптотическое равенство*

$$y_\varphi(\tau,\varepsilon,\delta) = \tau + \ln\biggl[\frac{d_\varphi(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon} - \int_\tau^{+\infty} \exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr] + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr). \tag{2.107}$$

Этап 11, являющийся последним, связан с отрезком времени

$$h + 1 + \alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} \leqslant t \leqslant 2a + 1 - \sigma_0. \tag{2.108}$$

Как и на этапе 1, при априорных предположениях

$$\omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) - a - \omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) \leqslant -M_1\varepsilon^{1-\alpha_1}, \qquad \omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) \leqslant -M_2, \tag{2.109}$$

где $M_1, M_2 = \mathrm{const} > 0$, α_1 – постоянная из (2.3), воспользуемся методом шагов. Для этого разобьем отрезок (2.108) на части длины не более единицы и будем последовательно рассматривать получившиеся промежутки.

На первом шаге, т.е. при

$$h + 1 + \alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} \leqslant t \leqslant h + 2 + \alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.110}$$

в силу (2.100), (2.106), (2.107), (2.109) имеем дело с задачей Коши вида

$$\begin{aligned} \dot\omega &= 1 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr)\biggr),\\ \omega|_{t=h+1+\alpha_1\varepsilon\ln(1/\varepsilon)} &= -a + 1 + \alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\\ &\qquad + \varepsilon\ln\frac{d_\varphi(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr)\biggr). \end{aligned} \tag{2.111}$$

Из (2.111) в свою очередь следует, что на отрезке (2.110) справедливо равномерное по t, δ, φ асимптотическое представление

$$\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) = t - a - h + \varepsilon\ln\frac{d_\varphi(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.112}$$

На последующих шагах рассуждения аналогичны: в силу оценок (2.109) мы по-прежнему имеем дело с уравнением вида $\dot\omega = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon^{\alpha_1}))$. Дополняя его начальным условием в левом конце отрезка, известным из предыдущего шага, получаем асимптотическое представление (2.112) на текущем шаге.

Итак, при условиях (2.109) равенство (2.112) распространяется на весь отрезок (2.108). Убедимся теперь в справедливости самих условий (2.109). Для этого объединим формулу (2.112) с уже полученными ранее асимптотическими представлениями для $\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)$ (начиная с этапа 3). В результате имеем

$$\omega_\varphi(t-h,\varepsilon,\delta) \leqslant 1 - M\varepsilon^{1-\alpha_1}, \qquad M = \mathrm{const} \in (0,1),$$
$$\omega_\varphi(t-1,\varepsilon,\delta) \leqslant t - 1 - 2a + O\biggl(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr), \qquad \omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta) = t - 2a + O\biggl(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr).$$

А отсюда вытекает, что требуемые неравенства (2.109) действительно выполняются с произвольными константами $M_1 \in (0,1)$, $M_2 \in (0,\sigma_0)$.

Итогом последнего этапа является следующая

Лемма 2.11. *При* $\varepsilon \to 0$ *на отрезке* (2.108) *решение* $\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)$ *допускает равномерное по* t, δ, φ *асимптотическое представление* (2.112).

Отдельно остановимся на геометрической интерпретации всех 11 этапов построения асимптотики функции $\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)$. Для этого нам потребуется корень $t = T_\varphi(\varepsilon,\delta)$ уравнения (2.5), о котором говорилось в п. 2.1. Из лемм 2.1–2.11 вытекает, что упомянутый корень принадлежит отрезку (2.108). В силу представления (2.112) и очевидной формулы

$$\dot{\omega}_\varphi = 1 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr)\biggr), \qquad h + 1 + \alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} \leqslant t \leqslant 2a + 1 - \sigma_0,$$

он является простым и при $\varepsilon \to 0$ обладает равномерной по $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$ асимптотикой

$$T_\varphi(\varepsilon,\delta) = a + h - \varepsilon\ln\frac{d_\varphi(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr)\biggr). \tag{2.113}$$

В свою очередь наличие корня (2.113) позволяет ввести в рассмотрение на плоскости (t,ω) кривую

$$\Gamma_\varphi(\varepsilon,\delta) = \{(t,\omega)\colon 0 \leqslant t \leqslant T_\varphi(\varepsilon,\delta),\ \omega = \omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)\}. \tag{2.114}$$

Геометрический смысл лемм 2.1–2.11 состоит в том, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$

$$H(\Gamma_\varphi(\varepsilon,\delta),\Gamma_0) = O\biggl(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr), \tag{2.115}$$

где, напомним, Γ_0 – кривая (1.11), H – хаусдорфово расстояние. Действительно, выше близость между кривыми (2.114) и (1.11) последовательно установлена на 11 различных участках и из полученных на этих участках асимптотических представлений для $\Gamma_\varphi(\varepsilon,\delta)$ требуемое равенство (2.115) вытекает автоматически.

2.3. Завершение доказательства теоремы 1.1. Приступим к реализации описанной в п. 2.1 схемы. Для этого обратимся к оператору (2.6). Из наших построений следует, что он корректно определен на множестве (2.4). Покажем теперь, что при подходящем выборе констант q_1, q_2 в (2.4) справедливо включение $\Pi(S) \subset S$.

Действительно, опираясь на асимптотические представления (2.106), (2.113) и на результаты лемм 2.5–2.11, нетрудно видеть, что условие

$$-q_1 \leqslant \omega_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta) \leqslant -q_2, \qquad t \in I,$$

заведомо выполняется с любыми фиксированными константами $q_1 > 2a - 1$, $q_2 \in (0, a - 1 - \sigma_0)$. Далее, из формул (2.100), (2.106), (2.107), (2.112), (2.113) следует, что при $t \in [-h + 1 + \alpha_1\varepsilon\ln(1/\varepsilon), -h + 1 + \sigma_0]$ равномерно по $\delta \in \Omega$, $\varphi \in S$

$$\omega_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta) = t + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0.$$

А поскольку $\alpha_1 > 1/2$ (см. (2.3)), то справедливо и требуемое в (2.4) неравенство
$$|\omega_\varphi(t+T_\varphi(\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)-t| \leqslant \exp\biggl(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr), \qquad t\in\biggl[-h+1+\alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon},-h+1+\sigma_0\biggr].$$

Итак, будем считать, что константы q_1, q_2 в (2.4) выбраны описанным выше образом. Тогда автоматически $\Pi(S)\subset S$. Кроме того, в силу вытекающего из (2.106), (2.113) неравенства $T_\varphi(\varepsilon,\delta)>h$ оператор Π является компактным. Тем самым, согласно принципу Шаудера он имеет в S хотя бы одну неподвижную точку $\varphi=\widetilde{\varphi}(t,\varepsilon,\delta)$. Как уже было отмечено в п. 2.1, соответствующее решение $\widetilde{\omega}(t,\varepsilon,\delta)=\omega_\varphi|_{\varphi=\widetilde{\varphi}}$ уравнения (2.1) оказывается периодическим с периодом $\widetilde{T}(\varepsilon,\delta)=T_\varphi|_{\varphi=\widetilde{\varphi}}$.

Далее, обратимся к уравнению (2.7) для отыскания свободного параметра $\delta\in\Omega$. Будем считать, что компакт Ω представляет собой некоторый отрезок, имеющий значение $\delta=-\ln(a-1)$ своей внутренней точкой. Тогда, опираясь на асимптотические представления (2.106), (2.113) и на формулу для $c_\varphi(\varepsilon,\delta)$ из (2.94), заключаем, что упомянутое уравнение допускает решение $\delta=\widetilde{\delta}(\varepsilon)$ с асимптотикой
$$\widetilde{\delta}(\varepsilon)=-\ln(a-1)+O\biggl(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\biggr), \qquad \varepsilon\to 0. \tag{2.116}$$

Проделанные в данном пункте построения вместе с содержащимся в п. 2.2 асимптотическим анализом позволяют разобраться с нашей главной проблемой – обоснованием теоремы 1.1. Для этого введем в рассмотрение функцию
$$\omega(t,\varepsilon)=\widetilde{\omega}(t,\varepsilon,\delta)|_{\delta=\widetilde{\delta}(\varepsilon)}, \tag{2.117}$$
которая по построению является периодической с периодом
$$T(\varepsilon)=2h(\varepsilon), \qquad h(\varepsilon)=a-\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\widetilde{\delta}(\varepsilon). \tag{2.118}$$
Далее, обозначим через $t=t_0(\varepsilon)$ корень уравнения $\omega(t,\varepsilon)=0$, асимптотически близкий к нулю. Из представления (2.9) и формулы $\dot{\omega}_\varphi=1+O(\exp(-q/\varepsilon))$, справедливой на отрезке (2.8), вытекает, что этот корень является простым и допускает асимптотику
$$t_0(\varepsilon)=O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \qquad \varepsilon\to 0. \tag{2.119}$$
Полагая затем
$$N_{**}(t,\lambda)=\exp\frac{\omega(t+t_0(\varepsilon),\varepsilon)}{\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=1/\lambda}, \qquad h(\lambda)=h(\varepsilon)|_{\varepsilon=1/\lambda}, \tag{2.120}$$
получаем искомый самосимметричный цикл (1.8) системы (1.5), (1.10).

В заключение отметим, что для функций (2.120) справедливы асимптотические представления (1.13). Действительно, нужная асимптотическая формула для $h(\lambda)$ очевидным образом следует из (2.116), (2.118), (2.120), а асимптотическая формула для $H(\Gamma(\lambda),\Gamma_0)$ – следствие соотношений (2.115), (2.119). Что же касается формул для $\max N_{**}(t,\lambda)$ и $\min N_{**}(t,\lambda)$, то они вытекают из (2.120) и из общего характера поведения решения $\omega_\varphi(t,\varepsilon,\delta)$ при $\varepsilon\to 0$ (см. леммы 2.1–2.11).

Теорема 1.1 полностью доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

3.1. Общая схема исследования. Для анализа свойств устойчивости цикла (1.8) выполним в системе (1.5) при условиях (1.10) замены

$$N_1 = \exp(\lambda\omega_1), \quad N_2 = \exp(\lambda\omega_2), \qquad \lambda = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В результате приходим к системе вида

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= 1 - \exp\frac{\omega_1(t-1)}{\varepsilon} + \exp\frac{\omega_2 - a - \omega_1}{\varepsilon} - \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right),\\ \dot{\omega}_2 &= 1 - \exp\frac{\omega_2(t-1)}{\varepsilon} + \exp\frac{\omega_1 - a - \omega_2}{\varepsilon} - \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}\right).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Заметим, далее, что в рамках системы (3.1) самосимметричному циклу (1.8) соответствует периодическое решение

$$(\omega_1, \omega_2) = (\omega(t,\varepsilon), \omega(t-h,\varepsilon)), \tag{3.2}$$

где $\omega(t,\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ – функции из (2.117), (2.118) соответственно. В свою очередь за устойчивость цикла (3.2) отвечают мультипликаторы линейной системы в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{g}_1 &= -a(t,\varepsilon)g_1(t-1) + b(t,\varepsilon)(g_2 - g_1),\\ \dot{g}_2 &= -a(t-h,\varepsilon)g_2(t-1) + b(t-h,\varepsilon)(g_1 - g_2)\end{aligned} \tag{3.3}$$

с коэффициентами

$$a(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\exp\frac{\omega(t-1,\varepsilon)}{\varepsilon}, \qquad b(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\exp\frac{\omega(t-h,\varepsilon) - a - \omega(t,\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{3.4}$$

Поясним смысл термина “мультипликатор” применительно к системе (3.3). В связи с этим рассмотрим банахово пространство E непрерывных по $t \in [-1, 0]$ вектор-функций $g_0(t) = (g_{1,0}(t), g_{2,0}(t))$ с нормой

$$\|g_0\|_E = \max_{j=1,2}\max_{-1\leqslant t\leqslant 0}|g_{j,0}(t)|. \tag{3.5}$$

Далее, *оператором монодромии* системы (3.3) назовем ограниченный линейный оператор $V(\varepsilon)\colon E \to E$, действующий на произвольную функцию $g_0(t) \in E$ по правилу

$$V(\varepsilon)g_0 = g(t+2h,\varepsilon), \qquad -1 \leqslant t \leqslant 0, \tag{3.6}$$

где $g(t,\varepsilon) = (g_1(t,\varepsilon), g_2(t,\varepsilon))$ – решение системы (3.3) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2h$ с начальной функцией $g_0(t)$, $t \in [-1, 0]$. Отметим, что в силу очевидного неравенства $2h > 1$ оператор (3.6) является компактным. Что же касается *мультипликаторов системы* (3.3), то таковыми по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора $V(\varepsilon)$. Занумеруем их в порядке убывания модулей и обозначим через $\nu_s(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{N}$.

Обратим внимание на то, что система (3.1) представляет собой частный случай кольцевой системы однонаправленно связанных уравнений, а цикл (3.2) –

это периодический режим типа бегущей волны. Для таких периодических решений в работах [12]–[14] разработан специальный метод анализа свойств устойчивости, суть которого излагается ниже.

Наряду с (3.3) рассмотрим вспомогательное скалярное линейное уравнение

$$\dot{g} = -a(t,\varepsilon)g(t-1) + b(t,\varepsilon)(\varkappa g(t-h) - g), \tag{3.7}$$

где h – фазовый сдвиг из (3.2), $g(t)$ – комплекснозначная функция, $\varkappa \in \mathbb{C}$ – произвольный параметр. Как и в случае системы (3.3), обозначим через $\nu_s(\varkappa,\varepsilon)$, $s \in \mathbb{N}$, мультипликаторы этого уравнения, занумерованные в порядке убывания модулей. Отметим, что для скалярного уравнения (3.7) мультипликаторы определяются как собственные значения аналогичного (3.6) оператора монодромии $W(\varkappa,\varepsilon)\colon C(I) \to C(I)$, где I – отрезок из (2.4), $C(I)$ – пространство непрерывных по $t \in I$ комплекснозначных функций. Норму в $C(I)$ зададим обычным образом, т.е. аналогичным (3.5) равенством. Что же касается оператора $W(\varkappa,\varepsilon)$, то для него справедлива формула

$$W(\varkappa,\varepsilon)g_0 = g(t+2h,\varkappa,\varepsilon), \qquad t \in I, \tag{3.8}$$

где $g_0(t)$ – произвольный элемент пространства $C(I)$, $g(t,\varkappa,\varepsilon)$ – решение уравнения (3.7) с начальной функцией $g_0(t)$, $t \in I$.

Остановимся на вопросе о связи между мультипликаторами системы (3.3) и уравнения (3.7). Имеет место следующее утверждение (см. [12]–[14]).

Лемма 3.1. *Каждый мультипликатор $\nu \neq 0$ системы (3.3) допускает представление*

$$\nu = \varkappa^2, \tag{3.9}$$

где $\varkappa$ – корень одного из уравнений

$$\nu_s(\varkappa,\varepsilon) = \varkappa^2, \qquad s \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

И обратно, если при некотором $s = s_0$ уравнение (3.10) имеет ненулевой корень $\varkappa = \varkappa_0$, то у исходной системы (3.3) существует мультипликатор $\nu = \varkappa_0^2$.

В следующих двух пунктах мы проведем асимптотическое вычисление мультипликаторов $\nu_s(\varkappa,\varepsilon)$ и проанализируем уравнения (3.10). На этом пути будут получены соотношения вида

$$\begin{gathered} \nu_1(\varepsilon) \equiv 1, \qquad |\nu_2(\varepsilon)| \leqslant M\varepsilon^2, \qquad \sup_{s\geqslant 3}|\nu_s(\varepsilon)| \leqslant \exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\biggr), \\ M, q, \alpha = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \tag{3.11}$$

означающие, что цикл (1.8) экспоненциально орбитально устойчив (в метрике фазового пространства E).

3.2. Анализ вспомогательного линейного уравнения. Ведем в рассмотрение множество начальных функций

$$B = \{g_0(t) \in C(I)\colon g_0(-h+1+\sigma_0) = 0,\ \|g_0\| \leqslant 2\}, \tag{3.12}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $C(I)$. Далее, обозначим через $g_1(t,g_0,\varkappa,\varepsilon)$ решение уравнения (3.7) с произвольным начальным условием $g_0(t)$ из множества (3.12), а через $g_2(t,\varkappa,\varepsilon)$ – решение этого уравнения с начальной функцией $g_2\equiv 1$, $t\in I$. Из (3.7) следует, что на отрезке $t\in[-h+1+\sigma_0,h+1+\sigma_0]$ длины $2h$ зависимость упомянутых функций от $\varkappa$ квадратичная, т.е.

$$\begin{aligned} g_1(t,g_0,\varkappa,\varepsilon)&=g_{1,1}(t,g_0,\varepsilon)+\varkappa g_{1,2}(t,g_0,\varepsilon)+\varkappa^2 g_{1,3}(t,g_0,\varepsilon),\\ g_2(t,\varkappa,\varepsilon)&=g_{2,1}(t,\varepsilon)+\varkappa g_{2,2}(t,\varepsilon)+\varkappa^2 g_{2,3}(t,\varepsilon). \end{aligned}\tag{3.13}$$

Кроме того, $g_{1,3}(t,g_0,\varepsilon)\equiv g_{2,3}(t,\varepsilon)\equiv 0$ при $t\in[-h+1+\sigma_0,1+\sigma_0]$.

Ниже устанавливаются асимптотические свойства функций $g_{1,j}(t,g_0,\varepsilon)$, $g_{2,j}(t,\varepsilon)$, $j=1,2,3$, при $\varepsilon\to 0$, равномерные по $t\in[-h+1+\sigma_0,h+1+\sigma_0]$ и по начальным условиям $g_0\in B$. Соответствующие построения разобьем на те же самые 11 этапов, что и в п. 2.2.

На *этапе* 1 в силу соотношений (2.10) имеем

$$a(t,\varepsilon)=O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\quad b(t,\varepsilon)=O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\qquad \varepsilon\to 0.\tag{3.14}$$

Далее, опираясь на формулы (3.14) и интегрируя уравнение (3.7) методом шагов (см. аналогичное место в доказательстве леммы 2.1), убеждаемся, что на отрезке (2.8) при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t, g_0

$$g_1(t,g_0,\varkappa,\varepsilon)=O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\tag{3.15}$$

$$g_2(t,\varkappa,\varepsilon)=1+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\tag{3.16}$$

Приведенные равенства нуждаются в некотором пояснении. Первая из этих формул означает, что порядки $O(\exp(-q/\varepsilon))$ равномерно по t, g_0 имеют фигурирующие в (3.13) компоненты $g_{1,j}(t,g_0,\varepsilon)$, $j=1,2$. Аналогичное справедливо и в случае (3.16): $g_{2,1}(t,\varepsilon)=1+O(\exp(-q/\varepsilon))$, $g_{2,2}(t,\varepsilon)=O(\exp(-q/\varepsilon))$. Более того, указанная форма записи для краткости будет использоваться и в последующем.

На *этапе* 2 согласно (2.15), (2.17) коэффициенты (3.4) приобретают вид

$$a(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\exp\tau+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\quad b(t,\varepsilon)=O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\qquad \varepsilon\to 0,\tag{3.17}$$

где $\tau=(t-1)/\varepsilon$. Объединяя формулы (3.17) с (3.15), (3.16) и интегрируя две задачи Коши для уравнения (3.7) с начальными условиями, отвечающими случаям g_1 и g_2, приходим к выводу, что при $\varepsilon\to 0$ равенство (3.15) остается в силе равномерно по t из отрезка (2.14) и по $g_0\in B$. Что же касается функции g_2, то для нее на этапе 2 получается равномерное по t асимптотическое представление

$$g_2(t,\varkappa,\varepsilon)=(1-\exp\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon}+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\\ \varepsilon\to 0.\tag{3.18}$$

На *этапе* 3 в силу формул (2.19), (2.20) при $\varepsilon \to 0$ справедливы представления

$$a(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\exp s + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \qquad b(t,\varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr), \tag{3.19}$$

где s – переменная из (2.18). Кроме того, из предыдущих построений следует, что для $g_1(t-1, g_0, \varkappa, \varepsilon)$, $g_2(t-1,\varkappa,\varepsilon)$ при рассматриваемых t выполняются равенства (3.15), (3.16). Тем самым, после перехода в (3.7) к новому времени s для g_1 получаем задачу Коши вида

$$\frac{dg_1}{ds} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr)g_1 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr),$$
$$g_1|_{s=-(1-\alpha_1)\ln(1/\varepsilon)} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$

а для g_2 – задачу Коши

$$\frac{dg_2}{ds} = -\frac{1}{\varepsilon}\exp s + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr)g_2 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr),$$
$$g_2|_{s=-(1-\alpha_1)\ln(1/\varepsilon)} = 1 - \varepsilon^{-\alpha_1} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).$$

Несложный анализ этих задач приводит к выводу, что при $\varepsilon \to 0$ имеют место равномерные по t из отрезка (2.18) и по $g_0 \in B$ асимптотические представления

$$g_1(t, g_0, \varkappa, \varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr), \tag{3.20}$$

$$g_2(t,\varkappa,\varepsilon) = \Bigl(1 - \frac{\exp s}{\varepsilon}\Bigr)\Big|_{s=(t-1)/\varepsilon - \ln(1/\varepsilon)} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr)$$
$$+ \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr). \tag{3.21}$$

На *этапе* 4 в соответствии с формулами (2.26), (2.28), (2.32) коэффициенты (3.4) при $\varepsilon \to 0$ допускают представления

$$a(t,\varepsilon) = \frac{2a}{\varepsilon^2}\exp(\varepsilon\theta) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$
$$b(t,\varepsilon) = \frac{2a}{\varepsilon^2}\exp\biggl\{\varepsilon\theta - \delta - v_0(\theta,\delta) - \varepsilon v_1(\theta,\delta) \tag{3.22}$$
$$+ O\biggl(\frac{\varepsilon^{2\alpha_2-1}}{v_*(\theta,\delta)}\biggr) + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\biggr\},$$

где $v_0(\theta,\delta), v_1(\theta,\delta), v_*(\theta,\delta)$ – функции (2.31), $\delta = \widetilde{\delta}(\varepsilon)$ – функция (2.116), θ – переменная из (2.25). А отсюда и из (3.15), (3.20) следует, что после перехода в (3.7) к новому времени θ для g_1 в первом приближении имеем дело с задачей Коши вида

$$\frac{dg_1}{d\theta} = \frac{v_*'(\theta,\delta)}{v_*(\theta,\delta)}(\varkappa g_0(\theta,\varepsilon) - g_1) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),$$
$$g_1|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr), \tag{3.23}$$

где $g_0(\theta,\varepsilon)=g_0(t-h)|_{t=1+\varepsilon(\ln(2a)+\varepsilon\theta+\ln(1/\varepsilon))}$, знак $'$ – дифференцирование по θ. В свою очередь из (3.23) для $g_{1,1}$, $g_{1,2}$ получаются две линейные неоднородные задачи Коши, решения которых выписываются в явном виде. Анализ соответствующих формул приводит к выводу, что на отрезке (2.25) при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t, g_0

$$g_1=O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr)+\varkappa O(1). \tag{3.24}$$

Действительно, формула $g_{1,1}=O(\exp(-q/\varepsilon))$ вытекает из (3.23) очевидным образом, а равенство $g_{1,2}=O(1)$ – следствие оценки

$$|g_{1,2}|\leqslant\frac{M_1\exp(-q/\varepsilon^{1-\alpha_2})}{v_*(\theta,\delta)}+\frac{M_2\max_{-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}\leqslant\theta\leqslant\varepsilon^{-\alpha_3}}|g_0(\theta,\varepsilon)|}{v_*(\theta,\delta)}$$
$$\times\,(v_*(\theta,\delta)-v_*(-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)},\delta))+M_3\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr), \tag{3.25}$$

где $M_1,M_2,M_3=\mathrm{const}>0$, и того факта, что $\max|g_0(\theta,\varepsilon)|\leqslant 2$ (см. (3.12)).

В случае функции g_2 ситуация несколько сложнее. Объединяя соотношения (3.16), (3.21), (3.22), для нее после отбрасывания экспоненциально малых добавок приходим к задаче Коши

$$\frac{dg_2}{d\theta}=-2a\exp(\varepsilon\theta)+2a\exp\biggl\{\varepsilon\theta-\delta-v_0(\theta,\delta)-\varepsilon v_1(\theta,\delta)$$
$$+O\biggl(\frac{\varepsilon^{2\alpha_2-1}}{v_*(\theta,\delta)}\biggr)+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\biggr\}(\varkappa-g_2), \tag{3.26}$$
$$g_2|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}}=1-\frac{2a}{\varepsilon}\exp(-\varepsilon^{\alpha_2}).$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$g_2=\frac{1}{\varepsilon}v_0'(\theta,\delta)+v_1'(\theta,\delta)+(\varkappa-1)\biggl(1-\frac{2a}{v_*(\theta,\delta)}\biggr)+\frac{\Delta_{2,1}}{\varepsilon}+\varkappa\Delta_{2,2}, \tag{3.27}$$

где v_0,v_1,v_* – функции (2.31), знак $'$ – дифференцирование по θ, а остатки $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$ подлежат определению.

Обратимся сначала к функции $\Delta_{2,1}$. Из (3.26) в первом приближении для нее получаем задачу Коши

$$\frac{d\Delta_{2,1}}{d\theta}=-\frac{v_*'(\theta,\delta)}{v_*(\theta,\delta)}\Delta_{2,1}+O(\varepsilon^2\theta)+O\biggl(\varepsilon^2(|\theta|+|v_1|)^2\frac{v_*'}{v_*^2}\biggr)$$
$$+\frac{v_*'}{v_*^2}\biggl(O\biggl(\frac{\varepsilon^{2\alpha_2-1}}{v_*}\biggr)+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\biggr)+O\biggl(\varepsilon^2(|\theta|+|v_1|)|\widetilde{v}|\frac{v_*'}{v_*}\biggr), \tag{3.28}$$
$$\Delta_{2,1}|_{\theta=-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)}}=O(\varepsilon^{2\alpha_2}), \tag{3.29}$$

где $\widetilde{v}=v_1'(\theta,\delta)-1+2a/v_*(\theta,\delta)$. Далее, выписывая решение этой задачи в явном виде, убеждаемся, что равномерно по θ из отрезка $[-\varepsilon^{-(1-\alpha_2)},\varepsilon^{-\alpha_3}]$

$$\Delta_{2,1}=O\biggl(\frac{\varepsilon^{2\alpha_2-1}}{v_*(\theta,\delta)}\biggr)+O\biggl(\frac{\ln v_*(\theta,\delta)}{v_*(\theta,\delta)}\varepsilon^{2-2\alpha_3}\biggr)+O(\varepsilon^{2-\alpha_3}),\qquad\varepsilon\to 0. \tag{3.30}$$

В случае остатка $\Delta_{2,2}$ способ действий прежний. Из (3.26) для него получается аналогичная (3.28), (3.29) задача Коши, анализ которой при дополнительном предположении $\alpha_3 < 1/2$ приводит к равномерному по θ асимптотическому представлению

$$\Delta_{2,2} = O\biggl(\frac{\varepsilon^{2\alpha_2-1}}{v_*(\theta,\delta)}\biggr) + O\biggl(\varepsilon\frac{\ln^2 v_*(\theta,\delta)}{v_*(\theta,\delta)}\biggr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3.31}$$

На *этапе* 5 в силу равенств (2.36), (2.37), (2.44) коэффициенты (3.4) принимают при $\varepsilon \to 0$ вид

$$\begin{aligned} a(t,\varepsilon) &= \frac{2a}{\varepsilon^2}\exp\biggl[\sigma + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr)\biggr],\\ b(t,\varepsilon) &= \frac{2a}{\varepsilon^2}\exp\biggl[\sigma - \varepsilon\frac{\exp(-\sigma)}{2a} + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\biggr], \end{aligned} \tag{3.32}$$

где σ – переменная из (2.34), меняющаяся на отрезке $[\overline{\sigma}, \overline{\overline{\sigma}}]$ (см. (2.35)). При указанных значениях t согласно формулам (3.15), (3.16) имеем

$$\begin{aligned} g_1(t-1, g_0, \varkappa, \varepsilon) &= O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr),\\ g_2(t-1, \varkappa, \varepsilon) &= 1 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr), \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$g_1(t-h, g_0, \varkappa, \varepsilon) = \begin{cases} g_0(t-h) & \text{при } t \in \Sigma_1,\\ O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr) + \varkappa O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr) & \text{при } t \in \Sigma_2, \end{cases} \tag{3.34}$$

$$g_2(t-h, \varkappa, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \Sigma_1,\\ 1 + O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr) + \varkappa O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr) & \text{при } t \in \Sigma_2, \end{cases} \tag{3.35}$$

где $\Sigma_1 = [1 + \varepsilon(\ln(2a) + \varepsilon^{1-\alpha_3} + \ln(1/\varepsilon)), 1 + \sigma_0]$, $\Sigma_2 = [1 + \sigma_0, 2 - \sigma_0]$.

Обратимся сначала к функции g_1. Из соотношений (3.24), (3.32)–(3.34) следует, что ее главная асимптотика определяется из задачи Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{dg_1}{d\sigma} = 2a\biggl(O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr)\biggr)\exp\sigma - 2a\exp\sigma g_1\\ + 2a\exp\sigma \begin{cases} \varkappa g_0\Bigl(-h + 1 + \varepsilon\Bigl(\ln(2a) + \sigma + \ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr) & \text{при } t \in \Sigma_1,\\ \varkappa O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr) + \varkappa^2 O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\Bigr) & \text{при } t \in \Sigma_2, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$g_1|_{\sigma=\overline{\sigma}} = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr) + \varkappa O(1). \tag{3.37}$$

Последующие действия стандартны: выписываем решение задачи (3.36), (3.37) в явном виде и для анализа получившейся формулы используем неравенство

$$\max_{\overline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\overline{\sigma}}}\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\overline{\sigma}}^{\sigma}\exp\left[-\frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma-\exp s)\right]f(s)\exp s\,ds\right|\leqslant\frac{1}{2a}\max_{\overline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\overline{\sigma}}}|f(\sigma)| \\ \forall\, f(\sigma)\in C[\overline{\sigma},\overline{\overline{\sigma}}]. \tag{3.38}$$

В результате убеждаемся, что при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t, g_0

$$\begin{aligned} g_1 &= O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right) \\ &\quad+\varkappa\begin{cases} O(1) & \text{при } t\in\Sigma_1,\\ O(1)\exp\left(-\dfrac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma-\exp\widetilde{\sigma})\right)+O\left(\exp\left(-\dfrac{q}{\varepsilon}\right)\right) & \text{при } t\in\Sigma_2\end{cases} \\ &\quad+\varkappa^2\begin{cases} 0 & \text{при } t\in\Sigma_1,\\ O\left(\exp\left(-\dfrac{q}{\varepsilon}\right)\right) & \text{при } t\in\Sigma_2,\end{cases}\end{aligned} \tag{3.39}$$

где $\widetilde{\sigma}=\sigma_0/\varepsilon-\ln(1/\varepsilon)-\ln(2a)$.

В случае функции g_2 согласно (3.32), (3.33), (3.35) рассмотрению подлежит уравнение

$$\varepsilon\,\frac{dg_2}{d\sigma}=-2a\exp\sigma+2a(\varkappa-g_2)\exp\left[\sigma-\frac{\varepsilon\exp(-\sigma)}{2a}+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\right], \tag{3.40}$$

в котором, естественно, отброшены экспоненциально малые добавки. В соответствии с предыдущим этапом (см. (3.27), (3.30), (3.31)) его следует дополнить начальным условием

$$g_2|_{\sigma=\overline{\sigma}}=\varkappa-1+O(\varepsilon^{1-\alpha_3})+\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_3}}\right)\right). \tag{3.41}$$

Решение задачи (3.40), (3.41) будем искать в виде

$$g_2=\varkappa-1+\Delta_{2,1}+\varkappa\Delta_{2,2}+\varkappa^2\Delta_{2,3}, \tag{3.42}$$

где, как и в случае (3.27), остатки $\Delta_{2,j}$, $j=1,2,3$, подлежат определению. Далее, нетрудно видеть, что для $\Delta_{2,1}$ в первом приближении получается задача Коши

$$\varepsilon\,\frac{d\Delta_{2,1}}{d\sigma}=-2a\exp\sigma\,\Delta_{2,1}+[O(\varepsilon)\exp(-\sigma)+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})]\exp\sigma, \\ \Delta_{2,1}|_{\sigma=\overline{\sigma}}=O(\varepsilon^{1-\alpha_3}).$$

А отсюда, опираясь на оценку (3.38) и условие $\alpha_3<1/2$, заключаем, что

$$\Delta_{2,1}=O(\varepsilon^{1-\alpha_3})\exp\left(-\frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma-\exp\overline{\sigma})\right)+O(\varepsilon),\qquad\varepsilon\to 0. \tag{3.43}$$

Анализ остатков $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{2,3}$ из (3.42) аналогичен уже разобранному случаю $\Delta_{2,1}$ (единственное отличие состоит в том, что теперь следует учесть отброшенные ранее экспоненциально малые добавки). Поэтому ограничимся итоговыми формулами

$$\begin{gathered}\Delta_{2,2} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_3}}\Bigr)\biggr)\exp\Bigl(-\frac{2a}{\varepsilon}(\exp\sigma - \exp\overline{\sigma})\Bigr) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\\ \Delta_{2,3} = \begin{cases}0 & \text{при } t \in \Sigma_1,\\ O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) & \text{при } t \in \Sigma_2.\end{cases}\end{gathered} \tag{3.44}$$

На *этапе* 6, т.е. при значениях t из отрезка (2.45), согласно равенствам (2.46), (2.47), (2.57) при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\begin{aligned} a(t,\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon\mu}\exp\biggl[\tau - \exp\tau + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\biggr],\\ b(t,\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon\mu}\exp\Bigl[\tau - \exp\tau + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\Bigr],\end{aligned} \tag{3.45}$$

где $\tau = (t-2)/\varepsilon$, $\mu = \exp(-1/\varepsilon)$. Кроме того, в силу (3.15), (3.16), (3.18) при $\varepsilon \to 0$ справедливы представления

$$\begin{aligned} g_1(t-1, g_0, \varkappa, \varepsilon) &= O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\\ g_2(t-1, \varkappa, \varepsilon) &= (1-\exp\tau)|_{\tau=(t-2)/\varepsilon}\\ &\qquad + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} g_1(t-h, g_0, \varkappa, \varepsilon) &= O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\\ g_2(t-h, \varkappa, \varepsilon) &= 1 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Из приведенных соотношений (3.45)–(3.47) следует, что для отыскания главной асимптотики функции g_1 мы должны рассмотреть уравнение

$$\begin{aligned}\mu\frac{dg_1}{d\tau} &= \biggl(O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\biggr)\exp(\tau - \exp\tau)\\ &\quad + \biggl(\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) - g_1\biggr)\exp(\tau - \exp\tau)\end{aligned} \tag{3.48}$$

на отрезке $\overline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\overline{\tau}}$, где $\overline{\tau}, \overline{\overline{\tau}}$ – величины из (2.47). В силу предыдущего этапа (см. (3.39)) уравнение (3.48) необходимо дополнить начальным условием

$$g_1|_{\tau=\overline{\tau}} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr). \tag{3.49}$$

Исследование задачи Коши (3.48), (3.49) базируется на оценке

$$\max_{\overline{\tau}\leqslant\tau\leqslant\overline{\overline{\tau}}}\left|\frac{1}{\mu}\int_{\overline{\tau}}^{\tau}\exp\left[\frac{1}{\mu}(\exp(-\exp\tau)-\exp(-\exp s))\right]f(s)\exp(s-\exp s)\,ds\right| \leqslant \max_{\overline{\tau}\leqslant\tau\leqslant\overline{\overline{\tau}}}|f(\tau)| \quad \forall\, f(\tau)\in C[\overline{\tau},\overline{\overline{\tau}}]. \tag{3.50}$$

Выписывая явно решение этой задачи и опираясь на оценку (3.50), убеждаемся, что при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t, g_0

$$g_1 = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr). \tag{3.51}$$

Для отыскания функции g_2 после отбрасывания экспоненциально малых добавок получаем уравнение

$$\mu\frac{dg_2}{d\tau} = -(1-\exp\tau)\exp(\tau-\exp\tau)+(\varkappa-g_2)\exp(\tau-\exp\tau+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})). \tag{3.52}$$

Из предыдущих соотношений (3.42)–(3.44) следует, что его нужно дополнить начальным условием

$$g_2|_{\tau=\overline{\tau}} = \varkappa-1+O(\varepsilon)+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr). \tag{3.53}$$

Анализ задачи (3.52), (3.53) выполняется по обычной схеме. А именно, полагая в ней

$$g_2 = \varkappa-1+\exp\tau+\Delta_{2,1}+\varkappa\Delta_{2,2}+\varkappa^2\Delta_{2,3}, \tag{3.54}$$

для остатков $\Delta_{2,j}$, $j=1,2,3$, получаем некоторые линейные неоднородные задачи Коши. Исследование упомянутых задач опирается на оценку (3.50) и приводит при $\varepsilon\to 0$ к равномерным по t асимптотическим формулам

$$\begin{gathered}\Delta_{2,1} = O(\varepsilon)\exp\left[\frac{1}{\mu}(\exp(-\exp\tau)-\exp(-\exp\overline{\tau}))\right]+(1+\exp\tau)O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}),\\ \Delta_{2,2} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \qquad \Delta_{2,3} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\end{gathered} \tag{3.55}$$

На *этапе* 7 рассмотрению подлежат значения t из отрезка (2.58). На указанном отрезке в силу (2.59), (2.60), (2.68) коэффициенты (3.4) при $\varepsilon\to 0$ приобретают вид

$$\begin{gathered}a(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2\mu}\exp\left[s-\frac{\exp s}{\varepsilon}+O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr)\right],\\ b(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2\mu}\exp\left[s-\frac{\exp s}{\varepsilon}+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\right],\end{gathered} \tag{3.56}$$

где, как и выше, $\mu=\exp(-1/\varepsilon)$. Что же касается функций g_1, g_2 с запаздывающими аргументами $t-1$ и $t-h$, то для них согласно равенствам (3.15), (3.16), (3.20), (3.21) при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$g_1(t-1,g_0,\varkappa,\varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr), \tag{3.57}$$

$$g_2(t-1,\varkappa,\varepsilon)=\left(1-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right)\bigg|_{s=(t-2)/\varepsilon-\ln(1/\varepsilon)} \\ +O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\right)\right)+\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\right)\right), \tag{3.58}$$

$$g_1(t-h,g_0,\varkappa,\varepsilon)=O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)+\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \tag{3.59}$$

$$g_2(t-h,\varkappa,\varepsilon)=1+O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)+\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \tag{3.60}$$

Начнем с изучения функции g_1. Из равенств (3.56), (3.57), (3.59) следует, что для нее на отрезке $\overline{s}\leqslant s\leqslant\overline{\overline{s}}$ (s – переменная из (2.58)) в первом приближении получается уравнение вида

$$\varepsilon\mu\,\frac{dg_1}{ds}=\left[O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)+\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\right)\right)\right]\exp\left(s-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right) \\ +\left[\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)+\varkappa^2 O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)-g_1\right]\exp\left(s-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right). \tag{3.61}$$

В соответствии с предыдущим этапом (см. (3.51)) это уравнение следует дополнить начальным условием

$$g_1|_{s=\overline{s}}=O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)+\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)+\varkappa^2 O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \tag{3.62}$$

Как и в случае задачи (3.48), (3.49), анализ задачи (3.61), (3.62) базируется на аналогичной (3.50) оценке

$$\max_{\overline{s}\leqslant s\leqslant\overline{\overline{s}}}\left|\frac{1}{\varepsilon\mu}\int_{\overline{s}}^{s}\exp\left[\frac{1}{\mu}\left(\exp\left(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right)-\exp\left(-\frac{\exp\sigma}{\varepsilon}\right)\right)\right]\right. \\ \left.\times f(\sigma)\exp\left(\sigma-\frac{\exp\sigma}{\varepsilon}\right)d\sigma\right|\leqslant\max_{\overline{s}\leqslant s\leqslant\overline{\overline{s}}}|f(s)|\quad\forall\,f(s)\in C[\overline{s},\overline{\overline{s}}]. \tag{3.63}$$

Опираясь на нее, нетрудно показать, что при $\varepsilon\to 0$ справедливо равномерное по t, g_0 асимптотическое представление

$$g_1=O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)+\varkappa O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\right)\right)+\varkappa^2 O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right). \tag{3.64}$$

Обратимся теперь к функции g_2. Учитывая в (3.7) равенства (3.56), (3.58), (3.60) и отбрасывая экспоненциально малые добавки, для нее получаем уравнение

$$\varepsilon\mu\,\frac{dg_2}{ds}=-\left(1-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right)\exp\left(s-\frac{\exp s}{\varepsilon}\right) \\ +(\varkappa-g_2)\exp\left(s-\frac{\exp s}{\varepsilon}+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})\right). \tag{3.65}$$

Что же касается начального условия для этого уравнения, то в силу соотношений (3.54), (3.55) оно имеет вид

$$g_2|_{s=\overline{s}} = \varkappa - 1 + \varepsilon^{-\alpha_1} + O(\varepsilon^{2-\alpha_1-2\alpha_3}) \\ + \varkappa O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big) + \varkappa^2 O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{3.66}$$

Несложный анализ задачи Коши (3.65), (3.66), использующий оценку (3.63), приводит к равномерному по t асимптотическому равенству

$$g_2 = \varkappa - 1 + \frac{\exp s}{\varepsilon} + \Delta_{2,1} + \varkappa\Delta_{2,2} + \varkappa^2\Delta_{2,3}, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{3.67}$$

где

$$\Delta_{2,1} = \Big(1 - \frac{\exp s}{\varepsilon}\Big)O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}) \\ + O(\varepsilon^{2-\alpha_1-2\alpha_3})\exp\Big[\frac{1}{\mu}\Big(\exp\Big(-\frac{\exp s}{\varepsilon}\Big) - \exp\Big(-\frac{\exp\overline{s}}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big], \tag{3.68}$$

$$\Delta_{2,2} = O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Big)\Big), \qquad \Delta_{2,3} = O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{3.69}$$

На *этапе* 8 рассмотрим отрезок времени (2.69). При указанных t в силу (2.70), (2.72), (2.83)–(2.86) коэффициенты (3.4) при $\varepsilon \to 0$ записываются в виде

$$\begin{gathered} a(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\exp\Big[\varepsilon\theta - \frac{\exp(\varepsilon\theta) - 1}{\varepsilon} + O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Big)\Big)\Big], \\ b(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\exp\big(\varepsilon\theta - \delta - w_0(\theta,\delta) - \varepsilon w_1(\theta,\delta) + \widetilde{\Delta}\big), \end{gathered} \tag{3.70}$$

где $w_0(\theta,\delta)$, $w_1(\theta,\delta)$ – функции (2.75), (2.76), θ – переменная из (2.69), $\delta = \widetilde{\delta}(\varepsilon)$ (см. (2.116)), а $\widetilde{\Delta}$ – остаток из (2.86) при $\delta = \widetilde{\delta}(\varepsilon)$. Следует также отметить, что для функций g_1, g_2 с запаздывающими аргументами $t-1$ и $t-h$ соответственно здесь сохраняются формулы (3.57)–(3.60), в которых переменная s заменяется на $\varepsilon\theta$.

Как и во всех предыдущих случаях, начнем с анализа функции g_1. Согласно равенствам (3.57), (3.59), (3.70) ее главная асимптотика определяется из уравнения

$$\frac{dg_1}{d\theta} = \Big[O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big) + \varkappa O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Big)\Big)\Big]\exp(-\theta) \\ + \Big[O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big) + \varkappa O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big) - g_1\Big]\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}, \tag{3.71}$$

где $\psi(\theta)$ – функция, фигурирующая в (2.75), (2.76). В соответствии с предыдущим этапом (см. (3.64)) дополним его начальным условием

$$g_1|_{\theta=\overline{\theta}} = O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big) + \varkappa O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Big)\Big) + \varkappa^2 O\Big(\exp\Big(-\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big). \tag{3.72}$$

Далее, выписывая явно решение задачи Коши (3.71), (3.72) и опираясь на вытекающие из (2.77) оценки

$$\begin{gathered}\max_{\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}}\left|\frac{1}{\psi(\theta)}\int_{\overline{\theta}}^{\theta}\psi'(s)f(s)\,ds\right|\leqslant\max_{\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}}|f(\theta)|,\\ \max_{\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}}\left|\frac{1}{\psi(\theta)}\int_{\overline{\theta}}^{\theta}\psi(s)\exp(-s)f(s)\,ds\right|\leqslant M\max_{\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}}|f(\theta)|\\ \forall\, f(\theta)\in C[\overline{\theta},\overline{\overline{\theta}}],\qquad M=\sup_{\theta\in\mathbb{R}}\frac{1}{\psi(\theta)}\int_{-\infty}^{\theta}\psi(s)\exp(-s)\,ds,\end{gathered}\tag{3.73}$$

приходим к выводу, что при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t, g_0

$$g_1=O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr)+\varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\tag{3.74}$$

В случае функции g_2 после отбрасывания экспоненциально малых добавок имеем дело с уравнением

$$\begin{aligned}\frac{dg_2}{d\theta}=&-\Bigl(1-\frac{\exp(\varepsilon\theta)}{\varepsilon}\Bigr)\exp\Bigl[\varepsilon\theta-\frac{\exp(\varepsilon\theta)-1}{\varepsilon}\Bigr]\\ &+(\varkappa-g_2)\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}\exp\bigl(\varepsilon\theta-\varepsilon w_1(\theta,\delta)+\widetilde{\Delta}\bigr),\end{aligned}\tag{3.75}$$

которое в силу (3.67)–(3.69) следует дополнить начальным условием

$$\begin{aligned}g_2|_{\theta=\overline{\theta}}=&\,\varkappa-1+\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon^{\alpha_4-1}+O(\varepsilon^{2\alpha_4-1})+O(\varepsilon^{1-2\alpha_3})\\ &+\varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\Bigr)\biggr)+\varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\end{aligned}\tag{3.76}$$

Решение получившейся задачи Коши (3.75), (3.76) будем искать в виде

$$g_2=\frac{1}{\varepsilon}w_0'(\theta,\delta)+w_1'(\theta,\delta)+\varkappa-1+\frac{1}{\varepsilon}\Delta_{2,1}+\varkappa\Delta_{2,2}+\varkappa^2\Delta_{2,3},\tag{3.77}$$

где знак $'$ – дифференцирование по переменной θ. Что же касается остатков $\Delta_{2,j}$, $j=1,2,3$, то они пока неизвестны (подлежат определению).

Привлекая формулы (2.75)–(2.80), убеждаемся, что в первом приближении остаток $\Delta_{2,1}$ удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta_{2,1}}{d\theta}=&-\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}\Delta_{2,1}+O(\varepsilon^2(|\theta|^3+1)\exp(-\theta))\\ &+O\biggl(\varepsilon^2\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}w_0'(\theta,\delta)(|\theta|+|w_1(\theta,\delta)|)^2\biggr)\\ &+O\biggl(\varepsilon^2\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}(w_1'(\theta,\delta)-1)(|\theta|+|w_1(\theta,\delta)|)\biggr)+O\biggl(\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}w_0'(\theta,\delta)\widetilde{\Delta}\biggr),\end{aligned}\tag{3.78}$$

$$\Delta_{2,1}|_{\theta=\overline{\theta}}=O(\varepsilon^{2\alpha_4})+O(\varepsilon^{2-2\alpha_3}),\tag{3.79}$$

и, следовательно, допускает оценку вида

$$\begin{aligned}|\Delta_{2,1}| \leqslant M_1 \frac{\psi(\overline{\theta})}{\psi(\theta)}(\varepsilon^{2\alpha_4} + \varepsilon^{2-2\alpha_3}) + \frac{M_2\varepsilon^2}{\psi(\theta)} \int_{\overline{\theta}}^{\theta} (|s|^3+1)\psi(s)\exp(-s)\,ds \\ + \frac{M_3\varepsilon^2}{\psi(\theta)} \int_{\overline{\theta}}^{\theta} \psi'(s)|w_0'(s,\delta)|(|s| + |w_1(s,\delta)|)^2\,ds \\ + \frac{M_4\varepsilon^2}{\psi(\theta)} \int_{\overline{\theta}}^{\theta} \psi'(s)|w_1'(s,\delta) - 1|(|s| + |w_1(s,\delta)|)\,ds \\ + \frac{M_5}{\psi(\theta)} \int_{\overline{\theta}}^{\theta} \psi'(s)|w_0'\widetilde{\Delta}|\,ds,\end{aligned} \tag{3.80}$$

где $M_j = \mathrm{const} > 0$, $j = 1, \dots, 5$.

При анализе правой части неравенства (3.80) разобьем отрезок $[\overline{\theta}, \overline{\overline{\theta}}]$ на те же промежутки I_1, I_2, I_3, что и в (2.84), (2.85). Затем воспользуемся асимптотическими представлениями (2.77)–(2.80), а также представлениями, получающимися из них при дифференцировании по θ. В результате убеждаемся, что третье и четвертое слагаемые из правой части интересующего нас неравенства допускают асимптотику

$$\frac{\varepsilon^2}{\psi(\theta)} \int_{\overline{\theta}}^{\theta} \psi'(s)|w_0'(s,\delta)|(|s| + |w_1(s,\delta)|)^2\,ds = \begin{cases} O(\varepsilon^2\theta^4) & \text{при } \theta \in I_1, \\ O(\varepsilon^2) & \text{при } \theta \in I_2, \\ O(\varepsilon^2\theta) & \text{при } \theta \in I_3, \end{cases} \tag{3.81}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\psi(\theta)} \int_{\overline{\theta}}^{\theta} \psi'(s)|w_1'(s,\delta) - 1|(|s| + |w_1(s,\delta)|)\,ds = \begin{cases} O(\varepsilon^2\theta^3) & \text{при } \theta \in I_1, \\ O(\varepsilon^2) & \text{при } \theta \in I_2, \\ O\left(\dfrac{\varepsilon^2 \ln\theta}{\theta}\right) & \text{при } \theta \in I_3. \end{cases} \tag{3.82}$$

Для полного исследования функции $\Delta_{2,1}$ осталось разобраться со вторым и пятым слагаемыми из правой части неравенства (3.80). В связи с этим обратим внимание на то, что для второго слагаемого ранее уже была получена асимптотическая формула (2.84). В случае же пятого слагаемого, опираясь на известную информацию о $\widetilde{\Delta}$ (см. (2.83)–(2.85)), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi(\theta)} \int_{\overline{\theta}}^{\theta} \psi'(s)|w_0'\widetilde{\Delta}|\,ds = \frac{\psi(\overline{\theta})}{\psi(\theta)} \ln\frac{\psi(\theta)}{\psi(\overline{\theta})}(O(\varepsilon^{3\alpha_4 - 1}) + O(\varepsilon^{2-2\alpha_3})) \\ + \begin{cases} O(\varepsilon^2\theta^4) & \text{при } \theta \in I_1, \\ O(\varepsilon^2) & \text{при } \theta \in I_2, \\ O(\varepsilon^2\theta) & \text{при } \theta \in I_3. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.83}$$

Оставшиеся функции $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{2,3}$ из (3.77) определяются из аналогичных (3.78), (3.79) линейных задач Коши с экспоненциально малыми неоднородностями. Анализ этих задач, базирующийся на оценках (3.73), приводит к равномерным по t асимптотическим представлениям

$$\Delta_{2,2} = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\right)\right), \quad \Delta_{2,3} = O\left(\exp\left(-\frac{q}{\varepsilon}\right)\right), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3.84}$$

На *этапе* 9 рассмотрим отрезок времени (2.87), который в свою очередь разбивается на два промежутка, соответствующих значениям переменной s (см. (2.87)) из отрезков $s_1 \leqslant s \leqslant \widetilde{s}$ и $\widetilde{s} \leqslant s \leqslant s_2$.

Обратимся сначала к случаю $s_1 \leqslant s \leqslant \widetilde{s}$. Из формул (2.88)–(2.90), (2.95) следует, что при указанных t и при $\varepsilon \to 0$ коэффициенты (3.4) приобретают вид

$$a(t,\varepsilon) = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr), \qquad b(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{s+\widetilde{c}(\varepsilon)} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr), \tag{3.85}$$

где $\widetilde{c}(\varepsilon)$ – функционал из (2.94), вычисленный при $\varphi = \omega(t,\varepsilon)$, $\delta = \widetilde{\delta}(\varepsilon)$ (см. (2.116), (2.117)). Далее, при $s_1 \leqslant s \leqslant \widetilde{s}$ функции $g_1(t-h, g_0, \varkappa, \varepsilon)$, $g_2(t-h, \varkappa, \varepsilon)$ допускают представления (3.15), (3.16), а функции $g_1(t-1, g_0, \varkappa, \varepsilon)$, $g_2(t-1, \varkappa, \varepsilon)$ задаются последовательно формулами (3.20), (3.21), (3.24), (3.27), (3.30), (3.31), (3.39), (3.42)–(3.44), (3.51), (3.54), (3.55). Объединяя перечисленные факты с соотношениями (3.74), (3.77), (3.80)–(3.84), для g_1, g_2 получаем следующие две задачи Коши:

$$\begin{aligned}\frac{dg_1}{ds} = -\biggl(\frac{1}{s+\widetilde{c}(\varepsilon)} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr)\biggr)g_1 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr)\\ + \varkappa O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr),\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$g_1|_{s=s_1} = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\biggr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr); \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}\frac{dg_2}{ds} = \frac{\varkappa - g_2}{s+\widetilde{c}(\varepsilon)} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr)g_2 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr)\\ + \varkappa O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr),\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}g_2|_{s=s_1} = \varepsilon^{\alpha_5-1} - c_*\varepsilon^{2\alpha_5-1} + O(\varepsilon^{3\alpha_5-1}) + O(\varepsilon^{1-\alpha_5})\\ + \varkappa\biggl[1 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{1-\alpha_2}}\biggr)\biggr)\biggr] + \varkappa^2 O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr).\end{aligned} \tag{3.89}$$

Несложный анализ задачи (3.86), (3.87) приводит к равномерному по t, g_0 асимптотическому представлению

$$\begin{gathered}g_1 = O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\biggr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr),\\ \varepsilon \to 0, \qquad \alpha = \min(\alpha_5, 1-\alpha_2).\end{gathered} \tag{3.90}$$

При анализе же задачи (3.88), (3.89) будем считать, что $\alpha_5 \in (1/3, 1/2)$ (данное условие гарантирует выполнение неравенств $0 < 3\alpha_5 - 1 < 1 - \alpha_5$). В этом случае из (3.88), (3.89) вытекает, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $s \in [s_1, \widetilde{s}]$

$$\begin{gathered}g_2 = \frac{\widetilde{r}(\varepsilon)}{s+\widetilde{c}(\varepsilon)} + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\biggr)\biggr) + \varkappa\biggl[1 + O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\biggr)\biggr)\biggr] + \varkappa^2 O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon}\biggr)\biggr),\\ \widetilde{r}(\varepsilon) = (s_1 + \widetilde{c}(\varepsilon))\biggl(\frac{1}{\varepsilon}w_0'(\theta,\delta) + w_1'(\theta,\delta) - 1 + \frac{1}{\varepsilon}\Delta_{2,1}\biggr)\bigg|_{\theta=\varepsilon^{-\alpha_5}} = 1 + O(\varepsilon^{2\alpha_5}),\end{gathered} \tag{3.91}$$

где $\Delta_{2,1}$ – функция из (3.77).

На оставшемся отрезке времени, отвечающем значениям $s \in [\widetilde{s}, s_2]$, коэффициент $a(t,\varepsilon)$ в силу оценки (2.96) приобретает порядок $O(\exp(-q/\varepsilon))$, а для $b(t,\varepsilon)$ сохраняется прежняя формула из (3.85). Сохраняются в данном случае и представления (3.15), (3.16) для $g_1(t-h, g_0, \varkappa, \varepsilon)$, $g_2(t-h, \varkappa, \varepsilon)$. Принимая во внимание эти обстоятельства и интегрируя уравнение (3.7) с использованием метода шагов (см. аналогичное место в п. 2.2, относящееся к этапу 9), убеждаемся, что при $s \in [\widetilde{s}, s_2]$ формулы (3.90), (3.91) также справедливы.

На *этапе* 10, т.е. при значениях t из отрезка (2.97), в силу формул (2.98)–(2.100), (2.106), (2.107) при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\begin{gathered} a(t,\varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \\ b(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\exp\tau)\biggl[\frac{\widetilde{d}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\tau}^{+\infty}\exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr]^{-1} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \end{gathered} \tag{3.92}$$

где $\tau = (t-h-1)/\varepsilon$, $\widetilde{d}(\varepsilon)$ – значение функционала (2.104) при $\varphi = \omega(t,\varepsilon)$, $\delta = \widetilde{\delta}(\varepsilon)$ (см. (2.116), (2.117)), а переменная τ меняется на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ (см. п. 2.2). Далее, при рассматриваемых t при $\varepsilon \to 0$ согласно формулам (3.15), (3.18)

$$\begin{gathered} g_1(t-h, g_0, \varkappa, \varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \\ g_2(t-h, \varkappa, \varepsilon) = (1-\exp\tau)|_{\tau=(t-h-1)/\varepsilon} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr). \end{gathered} \tag{3.93}$$

Что же касается функций $g_1(t-1, g_0, \varkappa, \varepsilon)$, $g_2(t-1, \varkappa, \varepsilon)$, то они задаются равенствами, установленными на этапах 5–9 (см. (3.39), (3.42)–(3.44), (3.51), (3.54), (3.55), (3.64), (3.67)–(3.69), (3.74), (3.77), (3.80)–(3.84), (3.90), (3.91)).

Из соотношений (3.90), (3.92), (3.93) и из приведенной выше информации о $g_1(t-1, g_0, \varkappa, \varepsilon)$ следует, что главная асимптотика функции g_1 определяется из задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\tau} = -\exp(-\exp\tau)\biggl[\frac{\widetilde{d}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\tau}^{+\infty}\exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr]^{-1} g_1 \\ + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \end{aligned} \tag{3.94}$$

$$g_1|_{\tau=\tau_1} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr). \tag{3.95}$$

В свою очередь, анализ этой задачи приводит к выводу, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $g_0 \in B$

$$g_1 = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr). \tag{3.96}$$

В случае g_2 после отбрасывания в коэффициенте $b(t,\varepsilon)$ экспоненциально малого слагаемого (см. (3.92)) имеем дело с аналогичной (3.94), (3.95) задачей

Коши

$$\begin{aligned}\frac{dg_2}{d\tau} &= \exp(-\exp\tau)\biggl[\frac{\widetilde{d}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\tau}^{+\infty}\exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr]^{-1}(\varkappa(1-\exp\tau)-g_2)\\ &\qquad + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\\ g_2|_{\tau=\tau_1} &= \frac{\widetilde{r}(\varepsilon)}{s_2+\widetilde{c}(\varepsilon)} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr)\\ &\qquad + \varkappa\biggl[1 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr)\biggr] + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\end{aligned}$$

Далее, выписывая ее решение в явном виде и анализируя полученную формулу, убеждаемся, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\begin{aligned}g_2 &= \widetilde{f}(\varepsilon)\biggl[\frac{\widetilde{d}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\tau}^{+\infty}\exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr]^{-1} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr)\\ &\qquad + \varkappa\biggl\{1 - (1-\exp(-\exp\tau))\biggl[\frac{\widetilde{d}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\tau}^{+\infty}\exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr]^{-1}\\ &\qquad + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr)\biggr\} + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr),\end{aligned} \tag{3.97}$$

где

$$\widetilde{f}(\varepsilon) = \frac{\widetilde{r}(\varepsilon)}{s_2+\widetilde{c}(\varepsilon)}\biggl[\frac{\widetilde{d}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\tau_1}^{+\infty}\exp(-\exp\sigma)\,d\sigma\biggr] = 1 + O(\varepsilon^{2\alpha_5}).$$

На *этапе* 11, являющемся последним, обратимся к промежутку времени

$$h + 1 + \alpha_1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} \leqslant t \leqslant h + 1 + \sigma_0. \tag{3.98}$$

В силу соотношений (2.109) в данном случае

$$a(t,\varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr), \quad b(t,\varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{3.99}$$

где, напомним, α_1 – постоянная из (2.3). Далее, на отрезке (3.98) функции $g_1(t-h, g_0, \varkappa, \varepsilon)$, $g_2(t-h, \varkappa, \varepsilon)$ задаются равенствами из этапов 3–5 (см. (3.20), (3.21), (3.24), (3.27), (3.30), (3.31), (3.39), (3.42)–(3.44)), а функции $g_1(t-1, g_0, \varkappa, \varepsilon)$, $g_2(t-1, \varkappa, \varepsilon)$ – равенствами из этапов 5–9.

Формулы (3.96), (3.97), (3.99) вместе с изложенной выше информацией о функциях g_1, g_2 с запаздывающими аргументами $t-1$ и $t-h$ приводят к следующим двум задачам Коши:

$$\begin{aligned}\dot g_1 &= O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr)g_1 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\\ &\qquad + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr),\\ g_1|_{t=h+1+\alpha_1\varepsilon\ln(1/\varepsilon)} &= O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot g_2 &= O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr)g_2 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr)\\ &\quad + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr),\\ g_2|_{t=h+1+\alpha_1\varepsilon\ln(1/\varepsilon)} &= \frac{\varepsilon\widetilde f(\varepsilon)}{\widetilde d(\varepsilon)} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr)\\ &\quad + \varkappa\biggl[1 - \frac{\varepsilon}{\widetilde d(\varepsilon)} + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr)\biggr] + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr).\end{aligned}$$

Опуская тривиальный анализ этих задач, приведем сразу окончательный результат: при $\varepsilon\to 0$ равномерно по t из отрезка (3.98) и по $g_0\in B$

$$g_1 = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon}\Bigr)\biggr) + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr), \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}g_2 &= \frac{\varepsilon\widetilde f(\varepsilon)}{\widetilde d(\varepsilon)} + \varkappa\Bigl(1 - \frac{\varepsilon}{\widetilde d(\varepsilon)}\Bigr) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_5}}\Bigr)\biggr)\\ &\quad + \varkappa O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr) + \varkappa^2 O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr)\biggr).\end{aligned} \tag{3.101}$$

3.3. Завершение доказательства теоремы 1.2. Прежде всего локализуем значения параметра $\varkappa$, при которых следует рассматривать уравнения (3.10). В связи с этим фиксируем произвольно начальное условие $g_0(t)\in C(I)$, $\|g_0\|\leqslant 1$, и заметим, что оператор (3.8) действует на g_0 по правилу

$$W(\varkappa,\varepsilon)g_0 = g_1(t+2h,\widetilde g_0,\varkappa,\varepsilon) + g_0(-h+1+\sigma_0)g_2(t+2h,\varkappa,\varepsilon), \qquad t\in I, \tag{3.102}$$

где $\widetilde g_0(t) = g_0(t) - g_0(-h+1+\sigma_0)\in B$, а g_1, g_2 – изученные выше решения уравнения (3.7). Из соотношений (3.13), (3.102) в свою очередь вытекает представление

$$W(\varkappa,\varepsilon) = W_0(\varepsilon) + \varkappa W_1(\varepsilon) + \varkappa^2 W_2(\varepsilon), \tag{3.103}$$

где $W_j(\varepsilon)\colon C(I)\to C(I)$, $j=0,1,2$, – ограниченные линейные операторы. Более того, установленные выше асимптотические свойства функций g_1, g_2 гарантируют выполнение оценок вида

$$\begin{gathered}\|W_0(\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)}\leqslant\frac{M_1}{\varepsilon}, \qquad \|W_1(\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)}\leqslant M_2,\\ \|W_2(\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)}\leqslant\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\Bigr),\end{gathered} \tag{3.104}$$

где константы M_1, M_2 больше нуля.

Обратимся теперь к уравнениям (3.10) и покажем, что они не имеют корней в множестве $\{\varkappa\in\mathbb{C}\colon |\varkappa| > M_0/\sqrt{\varepsilon}\}$ при фиксированном достаточно большом значении M_0. Действительно, из (3.103), (3.104) заключаем, что

$$\begin{aligned}\sup_{s\geqslant 1}&|\nu_s(\varkappa,\varepsilon)|\\ &\leqslant \|W_0(\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)}+|\varkappa|\cdot\|W_1(\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)}+|\varkappa|^2\|W_2(\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)}\\ &\leqslant \frac{M_1}{\varepsilon}+|\varkappa|M_2+|\varkappa|^2\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr).\end{aligned}$$

А поскольку при любой константе $M_0>\sqrt{M_1}$ и при всех достаточно малых ε выполняется оценка

$$\frac{M_1}{\varepsilon}+\frac{M_0M_2}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{M_0^2}{\varepsilon}\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha_1}}\biggr)<\frac{M_0^2}{\varepsilon},$$

то заведомо

$$\sup_{s\geqslant 1}|\nu_s(\varkappa,\varepsilon)|<|\varkappa|^2\quad\forall\,\varkappa\in\mathbb{C},\quad |\varkappa|>\frac{M_0}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Тем самым, уравнения (3.10) действительно не имеют решений $\varkappa$, удовлетворяющих неравенству $|\varkappa|>M_0/\sqrt{\varepsilon}$.

Итак, фиксируем постоянную M_0 описанным выше образом и рассмотрим множество

$$\Lambda=\biggl\{\varkappa\in\mathbb{C}\colon\ \exp\biggl(-\frac{\delta_0}{\varepsilon^{\alpha}}\biggr)\leqslant|\varkappa|\leqslant\frac{M_0}{\sqrt{\varepsilon}}\biggr\},\tag{3.105}$$

где $\delta_0=\mathrm{const}>0$, α – постоянная из (3.90). При значениях $\varkappa$ из этого множества нас будет интересовать квадрат оператора $W(\varkappa,\varepsilon)$, задающийся аналогичным (3.102) равенством

$$W^2(\varkappa,\varepsilon)g_0=g_1(t+4h,\widetilde{g}_0,\varkappa,\varepsilon)+g_0(-h+1+\sigma_0)g_2(t+4h,\varkappa,\varepsilon),\qquad t\in I.\tag{3.106}$$

Для анализа данного оператора необходимо знать асимптотическое поведение функций g_1, g_2 на отрезке

$$h+1+\sigma_0\leqslant t\leqslant 3h+1+\sigma_0.\tag{3.107}$$

Нужная информация об этих функциях содержится в следующем утверждении.

Лемма 3.2. *Справедливы оценки*

$$\max_{h+1+\sigma_0\leqslant t\leqslant 3h+1+\sigma_0}|g_1|\leqslant\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\biggr),\qquad \max_{h+1+\sigma_0\leqslant t\leqslant 3h+1+\sigma_0}|g_2|\leqslant\frac{M}{\varepsilon^{3/2}}\tag{3.108}$$

с не зависящими от ε и $g_0\in B$, $\varkappa\in\Lambda$ постоянными $q,M>0$. Кроме того, при $\varepsilon\to 0$ имеет место равномерное по $\varkappa\in\Lambda$ асимптотическое представление

$$g_2(3h+1+\sigma_0,\varkappa,\varepsilon)=[g_2(h+1+\sigma_0,\varkappa,\varepsilon)]^2+O\biggl(\exp\biggl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\biggr)\biggr).\tag{3.109}$$

Доказательство. В силу $2h$-периодичности коэффициентов (3.4) уравнения (3.7) для отыскания g_1 на отрезке (3.107) мы можем вернуться к отрезку $-h+1+\sigma_0 \leqslant t \leqslant h+1+\sigma_0$, но уже с начальным условием

$$g_{0,1} = g_1(t+2h, g_0, \varkappa, \varepsilon), \qquad t \in I. \tag{3.110}$$

Из асимптотических формул для g_1, полученных на этапах 5–11 (см. (3.39), (3.51), (3.64), (3.74), (3.90), (3.96), (3.100)), вытекает, что

$$\begin{gathered} |g_{0,1}| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{при} \ \ t \in I, \\ g_{0,1} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr) \quad \text{при} \ \ -2h+2-\sigma_0 \leqslant t \leqslant -h+1+\sigma_0, \end{gathered} \tag{3.111}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$.

Пусть $g_1(t, g_{0,1}, \varkappa, \varepsilon)$ – решение задачи Коши для уравнения (3.7) с начальным условием (3.110). Повторяя для него все 11 этапов из п. 3.2 и принимая во внимание оценки (3.111), убеждаемся, что равномерно по t из отрезка $[-h+1+\sigma_0, h+1+\sigma_0]$ и по $g_0 \in B$, $\varkappa \in \Lambda$

$$g_1(t, g_{0,1}, \varkappa, \varepsilon) = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3.112}$$

Действительно, на этапах 1–3, 6–11 нужная формула (3.112) справедлива автоматически. Далее, опираясь на второе соотношение из (3.111), последовательно убеждаемся, что правые части в аналогичных (3.25), (3.34), (3.39) формулах экспоненциально малы. Тем самым, равенство (3.112) сохраняется и на этапах 4, 5. Остается заметить, что из представления (3.112) требуемая оценка из (3.108) для g_1 вытекает очевидным образом.

В случае функции g_2 рассуждения аналогичны. А именно, обратимся к решению $g_2(t+2h, \varkappa, \varepsilon)$, $-h+1+\sigma_0 \leqslant t \leqslant h+1+\sigma_0$, уравнения (3.7) с начальной функцией

$$g_{0,2} = g_2(t+2h, \varkappa, \varepsilon), \qquad t \in I. \tag{3.113}$$

Из результатов п. 3.2 следует, что начальное условие (3.113) допускает оценку вида

$$\max_{t \in I, \varkappa \in \Lambda} |g_{0,2}| \leqslant \frac{M}{\varepsilon}, \qquad M = \mathrm{const} > 0. \tag{3.114}$$

Кроме того, в силу (3.101) равномерно по $t \in [-h+1+\alpha_1\varepsilon\ln(1/\varepsilon), -h+1+\sigma_0]$, $\varkappa \in \Lambda$

$$g_{0,2} = g_2(h+1+\sigma_0, \varkappa, \varepsilon) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3.115}$$

Асимптотическое интегрирование задачи Коши для уравнения (3.7) с начальным условием (3.113) состоит из 11 этапов (см. п. 3.2). Учитывая оценку (3.114) и формулу (3.115) и проводя соответствующий анализ, приходим к выводу, что функции $g_2(t+2h, \varkappa, \varepsilon)$ и $g_2(h+1+\sigma_0, \varkappa, \varepsilon) g_2(t, \varkappa, \varepsilon)$ асимптотически эквивалентны. Точнее говоря, при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\varkappa \in \Lambda$,

$t \in [-h+1+\sigma_0, h+1+\sigma_0]$

$$g_2(t+2h,\varkappa,\varepsilon) = g_2(h+1+\sigma_0,\varkappa,\varepsilon)g_2(t,\varkappa,\varepsilon) + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\biggr).$$

А отсюда и из уже известных свойств $g_2(t,\varkappa,\varepsilon)$ вытекают второе неравенство (3.108) и асимптотическое представление (3.109).

Лемма 3.2 доказана.

Подведем некоторый итог.

Из формулы (3.106) следует, что оператор $W^2(\varkappa,\varepsilon)$ допускает представление

$$W^2(\varkappa,\varepsilon) = U_1(\varkappa,\varepsilon) + U_2(\varkappa,\varepsilon), \qquad U_j\colon C(I) \to C(I), \quad j=1,2, \tag{3.116}$$

где в силу первого неравенства из (3.108) равномерно по $\varkappa \in \Lambda$

$$\|U_1(\varkappa,\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)} = O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\biggr), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3.117}$$

Что же касается оператора $U_2(\varkappa,\varepsilon)$, то он задается равенством

$$U_2(\varkappa,\varepsilon)g_0 = g_0(-h+1+\sigma_0)g_2(t+4h,\varkappa,\varepsilon), \qquad t \in I, \tag{3.118}$$

и является конечномерным. Более того, нетрудно видеть, что его спектр состоит из простого собственного значения

$$\nu = g_2(3h+1+\sigma_0,\varkappa,\varepsilon) \tag{3.119}$$

и собственного значения $\nu = 0$ бесконечной кратности.

Для выявления спектральных свойств исходного оператора $W^2(\varkappa,\varepsilon)$ объединим представления (3.116), (3.117) с вытекающей из (3.108), (3.118) оценкой

$$\|U_2(\varkappa,\varepsilon)\|_{C(I)\to C(I)} \leqslant \frac{M}{\varepsilon^{3/2}}.$$

В результате убеждаемся (см. аналогичные построения в [12]–[14]), что при $\varkappa \in \Lambda$ и при подходящем уменьшении постоянной δ_0 из (3.105) этот оператор имеет простое и аналитически зависящее от $\varkappa$ собственное значение $\nu = \nu_*(\varkappa,\varepsilon)$, экспоненциально близкое к значению (3.119). Точнее говоря, из (3.109), (3.119) следует, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $\varkappa \in \Lambda$

$$\begin{gathered}
\nu_*(\varkappa,\varepsilon) = [g_2(h+1+\sigma_0,\varkappa,\varepsilon)]^2 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\biggr), \\
\frac{\partial\nu_*}{\partial\varkappa}(\varkappa,\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varkappa}[g_2(h+1+\sigma_0,\varkappa,\varepsilon)]^2 + O\biggl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\biggr).
\end{gathered} \tag{3.120}$$

Добавим еще, что остальные собственные значения оператора $W^2(\varkappa,\varepsilon)$ находятся в круге вида

$$\biggl\{\nu \in \mathbb{C}\colon |\nu| \leqslant \exp\Bigl(-\frac{\delta_1}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\biggr\}, \tag{3.121}$$

где постоянная $\delta_1 > 0$ фиксирована и достаточно мала (существование такой константы вытекает из проделанного анализа).

Переход от оператора $W^2(\varkappa,\varepsilon)$ к $W(\varkappa,\varepsilon)$ не вызывает затруднений. Из проделанного выше анализа следует, что наибольшее по модулю собственное значение $\nu_1(\varkappa,\varepsilon)$ оператора $W(\varkappa,\varepsilon)$ является простым и в силу (3.101), (3.120) допускает при $\varepsilon\to 0$ равномерные по $\varkappa\in\Lambda$ асимптотические представления

$$\nu_1(\varkappa,\varepsilon)=\sqrt{\nu_*(\varkappa,\varepsilon)}=\frac{\varepsilon\widetilde{f}(\varepsilon)}{\widetilde{d}(\varepsilon)}+\varkappa\Bigl(1-\frac{\varepsilon}{\widetilde{d}(\varepsilon)}\Bigr)+O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\Bigr), \tag{3.122}$$

$$\frac{\partial\nu_1}{\partial\varkappa}(\varkappa,\varepsilon)=1-\frac{\varepsilon}{\widetilde{d}(\varepsilon)}+O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\Bigr). \tag{3.123}$$

Что же касается остальных собственных значений $\nu_s(\varkappa,\varepsilon)$, $s\geqslant 2$, этого оператора, то они лежат в некотором круге вида (3.121).

Подчеркнем, что в (3.122) при взятии квадратного корня необходимо выбрать знак плюс. Связано это с тем, что $\nu_1(1,\varepsilon)\equiv 1$, поскольку при $\varkappa=1$ уравнение (3.7) заведомо имеет единичный мультипликатор (в этом случае оно представляет собой линеаризацию уравнения (2.1) на цикле (2.117)). Указанное обстоятельство позволяет также немного упростить формулу (3.122). Действительно, полагая в ней $\varkappa=1$, имеем

$$\frac{\varepsilon\widetilde{f}(\varepsilon)}{\widetilde{d}(\varepsilon)}+1-\frac{\varepsilon}{\widetilde{d}(\varepsilon)}=1+O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\Bigr),\qquad \varepsilon\to 0. \tag{3.124}$$

Подставляя затем соотношение (3.124) в (3.122), окончательно получаем

$$\nu_1(\varkappa,\varepsilon)=1+(\varkappa-1)\Bigl(1-\frac{\varepsilon}{\widetilde{d}(\varepsilon)}\Bigr)+O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\Bigr),\qquad \varepsilon\to 0. \tag{3.125}$$

Завершающий этап обоснования теоремы 1.2 связан с анализом уравнений (3.10). В силу вытекающего из (2.106) асимптотического представления

$$\widetilde{d}(\varepsilon)=a-1+O\Bigl(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr),\qquad \varepsilon\to 0,$$

и соотношений (3.123), (3.125) первое из этих уравнений имеет в множестве Λ два простых корня: $\varkappa=1$ и

$$\varkappa=\varkappa_0(\varepsilon),\qquad \varkappa_0(\varepsilon)=-\frac{\varepsilon}{a-1}+O\Bigl(\varepsilon^2\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigr),\quad \varepsilon\to 0.$$

А поскольку, как уже отмечалось выше, равномерно по $\varkappa\in\Lambda$

$$\sup_{s\geqslant 2}|\nu_s(\varkappa,\varepsilon)|=O\Bigl(\exp\Bigl(-\frac{q}{\varepsilon^\alpha}\Bigr)\Bigr),\qquad \varepsilon\to 0,$$

то все остальные корни уравнений (3.10) заведомо лежат в круге вида (3.121). Остается воспользоваться равенством (3.9) и убедиться в справедливости для мультипликаторов $\nu_s(\varepsilon)$, $s\geqslant 1$, системы (3.3) соотношений (3.11).

Теорема 1.2 полностью доказана.

§ 4. Заключение

Как мы установили выше, при переходе от уравнения (1.1) к системе (1.5) происходит необходимая регуляризация релаксационных колебаний: сокращается их период и увеличиваются минимумы компонент N_1, N_2 по сравнению с однородным циклом (1.6). Однако существуют и другие способы модификации уравнения (1.1), приводящие к тому же эффекту. Один из них, предложенный в статье [15], состоит в следующем.

Рассмотрим вместо (1.1) уравнение вида

$$\dot{N} = \lambda f\bigl(N(t-1)\bigr)N. \tag{4.1}$$

Здесь, как и выше, параметр λ предполагается большим, а бесконечно дифференцируемая на полуоси $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geqslant 0\}$ функция $f(x)$ обладает свойствами

$$f(0) = 1, \qquad f(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \quad x \to +\infty, \quad a_0 > 0. \tag{4.2}$$

Считаем еще, что фигурирующий в (4.2) асимптотический ряд можно дифференцировать по x любое число раз. Типовым примером такой функции служит $f(x) = (1-x)/(1+cx)$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Как показано в [15], замена уравнения (1.1) на (4.1) приводит к желаемой цели: модифицированное уравнение Хатчинсона (4.1) допускает устойчивый релаксационный цикл $N_*(t,\lambda) > 0$, $N_*(0,\lambda) \equiv 1$, периода $T_*(\lambda)\colon \lim T_*(\lambda) = T_0$ при $\lambda \to \infty$, где $T_0 = 2 + a_0 + 1/a_0$. Что же касается формул (1.2), (1.3), то теперь их аналоги имеют вид

$$\max_t N_*(t,\lambda) = O(\exp\lambda), \quad \min_t N_*(t,\lambda) = O(\exp(-a_0\lambda)), \qquad \lambda \to +\infty.$$

Таким образом, налицо требуемое улучшение биологических характеристик релаксационных автоколебаний уравнения (4.1) по сравнению с уравнением (1.1): меньше период функции $N_*(t,\lambda)$ и больше ее минимум.

Еще один способ модификации уравнения Хатчинсона заключается в переходе от (1.1) к уравнению

$$\dot{N} = \frac{\lambda}{1+a}[1 + a(1-N) - N(t-1)]N, \tag{4.3}$$

где по-прежнему $\lambda \gg 1$, $a = \mathrm{const} \in (0,1)$. Уравнение (4.3) было предложено Ю. С. Колесовым в [4] для моделирования динамики популяции млекопитающих с учетом каннибализма (здесь a – коэффициент каннибализма). Предпринятый в [4] асимптотический анализ показал, что это уравнение имеет устойчивый релаксационный цикл $N_*(t,\lambda) > 0$, $N_*(0,\lambda) \equiv 1$, периода $T_*(\lambda)$, причем справедливы предельные равенства

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_*(\lambda) = 1 + \frac{1}{a}, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \max_{t\in[\delta,1-\delta]} \left| N_*(t,\lambda) - 1 - \frac{1}{a} \right| = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \max_{t\in[1+\delta,1+1/a-\delta]} N_*(t,\lambda) = 0, \qquad \min_t N_*(t,\lambda) = O\biggl(\exp\biggl(-\Bigl(\frac{1}{a} - 1\Bigr)\lambda\biggr)\biggr),$$

где $\delta > 0$ произвольно фиксировано и достаточно мало. Более детальная информация об $N_*(t,\lambda)$ содержится в монографии [16].

Приведенные два варианта модификации уравнения Хатчинсона связаны с кардинальным изменением его структуры. Но, что интересно, эффекта регуляризации релаксационных колебаний можно добиться и более простым способом, возмущая правую часть уравнения (1.1) экспоненциально малой постоянной добавкой. А именно, следуя [17], обратимся к уравнению

$$\dot{N} = \lambda[1 - N(t-1)]N + \lambda\exp(-a\lambda), \tag{4.4}$$

где $\lambda \gg 1$, $a = \mathrm{const} > 0$.

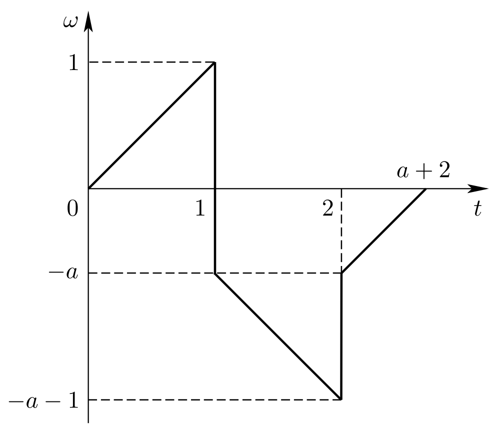

Рис. 4

Для формулировки результата о цикле уравнения (4.4) введем в рассмотрение на плоскости (t,ω) кривую

$$\begin{aligned}\Gamma_0 = \{(t,\omega)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1,\, \omega = t\} &\cup \{(t,\omega)\colon t = 1,\, -a \leqslant \omega \leqslant 1\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon 1 \leqslant t \leqslant 2,\, \omega = 1 - a - t\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon t = 2,\, -a-1 \leqslant \omega \leqslant -a\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon 2 \leqslant t \leqslant 2+a,\, \omega = t - 2 - a\}\end{aligned} \tag{4.5}$$

(ее вид показан на рис. 4).

Развитая в настоящей статье методика позволяет установить следующее утверждение.

Теорема 4.1. *При всех достаточно больших λ уравнение (4.4) допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл $N_*(t,\lambda)$, $N_*(0,\lambda) \equiv 1$, периода $T_*(\lambda)$, причем при $\lambda \to +\infty$*

$$\begin{gathered}H(\Gamma(\lambda),\Gamma_0) = O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\biggr), \qquad T_*(\lambda) = 2 + a + O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\biggr),\\ \max_t N_*(t,\lambda) = O(\exp\lambda), \qquad \min_t N_*(t,\lambda) = O(\exp(-(a+1)\lambda)).\end{gathered} \tag{4.6}$$

Здесь Γ_0 – *кривая* (4.5), *а кривая* $\Gamma(\lambda)$ *задается равенством*

$$\Gamma(\lambda) = \left\{(t,\omega)\colon 0 \leqslant t \leqslant T_*(\lambda),\ \omega = \frac{1}{\lambda}\ln N_*(t,\lambda)\right\}. \tag{4.7}$$

Доказательство существования цикла $N_*(t,\lambda)$, обладающего свойствами (4.6), связано с асимптотическим интегрированием уравнения

$$\dot\omega = 1 - \exp\frac{\omega(t-1)}{\varepsilon} + \exp\left(-\frac{a+\omega}{\varepsilon}\right), \tag{4.8}$$

получающегося из (4.4) при заменах $N = \exp(\lambda\omega)$, $1/\lambda = \varepsilon$. Анализ уравнения (4.8) аналогичен приведенному в § 2 интегрированию уравнения (2.1) и разбивается на 10 этапов. Что же касается свойств устойчивости данного цикла, то они выявляются посредством асимптотического анализа уравнения в вариациях. Этот анализ аналогичен изложенному в п. 3.2 исследованию уравнения (3.7).

Отдельно остановимся на уравнении (1.9) при независимых параметрах d, h. В этом случае оно представляет самостоятельный интерес как содержательный пример уравнения с запаздывающим управлением (см. статью [18] и имеющуюся в ней библиографию). При выполнении условий

$$d = \lambda\exp(-a\lambda), \qquad \lambda \gg 1, \quad a = \mathrm{const} > 1, \quad h = \mathrm{const} > 1 \tag{4.9}$$

развитая в настоящей работе техника асимптотического интегрирования позволяет получить следующий результат.

Теорема 4.2. *Найдется такое достаточно большое* $\lambda_0 > 0$, *что при всех* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *уравнение* (1.9), (4.9) *имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл* $N_*(t,\lambda)$, $N_*(0,\lambda) \equiv 1$, *периода* $T_*(\lambda)$. *При* $\lambda \to +\infty$ *для него выполняются асимптотические представления*

$$H(\Gamma(\lambda),\Gamma_0) = O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right), \qquad T_*(\lambda) = a + h - \frac{\ln\lambda}{\lambda} - \frac{\ln(h-1)}{\lambda} + O\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\right),$$
$$\max_t N_*(t,\lambda) = O(\exp\lambda), \qquad \min_t N_*(t,\lambda) = O(\exp(-(a+h-1)\lambda)).$$

Здесь $\Gamma(\lambda)$ – *кривая вида* (4.7), *а кривая* Γ_0 *задается аналогичным* (1.11) *равенством*

$$\begin{aligned}\Gamma_0 = {}&\{(t,\omega)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \omega = t\} \cup \{(t,\omega)\colon t = 1,\ -h-a+1 \leqslant \omega \leqslant 1\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon 1 \leqslant t \leqslant 2,\ \omega = -h-a+1\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon t = 2,\ -h-a+1 \leqslant \omega \leqslant -h-a+2\}\\ &\cup \{(t,\omega)\colon 2 \leqslant t \leqslant h+a,\ \omega = t-h-a\}.\end{aligned}$$

Вопрос о справедливости аналога теоремы 4.2 в случае, когда в (4.9) нарушается хотя бы одно из требований $h > 1$ или $a > 1$, пока открыт. Ясно лишь, что отказ от этих условий приводит к существенному изменению формы предельной кривой Γ_0.

В заключение отметим, что при условиях (1.10) билокальная модель (1.5) рассматривалась ранее в статьях [17], [19]. В упомянутых работах было установлено существование у нее хотя бы одного периодического решения с близким к $2a$ периодом и с чередующимися по времени всплесками компонент N_1, N_2 (см. рис. 3). Наш результат более конкретен: при условиях (1.10) система (1.5) допускает устойчивый самосимметричный цикл (1.8).

Список литературы

[1] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, "Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным", *Докл. АН СССР*, **102**:5 (1955), 889–891.

[2] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975, 247 с.; англ. пер.: E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **13**, Plenum Press, New York, 1980, x+228 pp.

[3] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995, 336 с.; англ. пер.: E. F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, *Asymptotic methods in singularly perturbed systems*, Monogr. Contemp. Math., Consultants Bureau, New York, 1994, xii+281 pp.

[4] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, "Релаксационные колебания в математических моделях экологии", Тр. МИАН, **199**, Наука, М., 1993, 3–124; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, Yu. S. Kolesov, "Relaxational oscillations in mathematical models of ecology", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **199** (1995), 1–126.

[5] G. E. Hutchinson, "Circular causal systems in ecology", *Teleological mechanisms*, Ann. New York Acad. Sci., **50**, no. 4, New York Acad. Sci., New York, NY, 1948, 221–246.

[6] E. M. Wright, "A non-linear difference-differential equation", *J. Reine Angew. Math.*, **1955**:194 (1955), 66–87.

[7] G. S. Jones, "Asymptotic behavior and periodic solutions of a nonlinear differential-difference equation", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **47**:6 (1961), 879–882.

[8] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984, 423 с.; пер. с англ.: J. Hale, *Theory of functional differential equations*, 2nd ed., Appl. Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, x+365 pp.

[9] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, "Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона", *Матем. сб.*, **202**:6 (2011), 51–82; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, "The theory of relaxation oscillations for Hutchinson's equation", *Sb. Math.*, **202**:6 (2011), 829–858.

[10] А. Ю. Колесов, "Об устойчивости пространственно однородного цикла уравнения Хатчинсона с диффузией", Математические модели в биологии и медицине, **1**, ИМК АН Лит. ССР, Вильнюс, 1985, 93–102.

[11] С. Д. Глызин, Ю. С. Колесов, "Оптимальный способ ведения рыбного хозяйства", Математические модели в биологии и медицине, **3**, ИМК АН Лит. ССР, Вильнюс, 1989, 37–41.

[12] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, "Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 53–96; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, "Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay", *Izv. Math.*, **77**:2 (2013), 271–312.

[13] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, "Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений", *ТМФ*, **175**:1 (2013), 62–83; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, "Periodic

traveling-wave-type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations", *Theoret. and Math. Phys.*, **175**:1 (2013), 499–517.

[14] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, "Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:4 (2014), 73–108; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, "The buffer phenomenon in ring-like chains of unidirectionally connected generators", *Izv. Math.*, **78**:4 (2014), 708–743.

[15] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, "Об одной модификации уравнения Хатчинсона", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:12 (2010), 2099–2112; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, "A modification of Hutchinson's equation", *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:12 (2010), 1990–2002.

[16] Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Многоликий хаос*, Физматлит, М., 2012, 432 с.

[17] С. А. Кащенко, "Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией", *Матем. моделирование*, **2**:9 (1990), 49–69.

[18] С. А. Кащенко, "Динамика логистического уравнения с запаздыванием и запаздывающим управлением", *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:5 (2014), 61–77.

[19] С. А. Кащенко, В. Е. Фролов, "Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций логистического уравнения с запаздыванием и с малой диффузией", *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:1 (2014), 94–114.

Сергей Дмитриевич Глызин
(Sergei D. Glyzin)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru; glyzin.s@gmail.com

Поступила в редакцию
11.03.2017 и 02.04.2018

Андрей Юрьевич Колесов
(Andrei Yu. Kolesov)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru; andkolesov@mail.ru

Николай Христович Розов
(Nikolai Kh. Rozov)
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: fpo.mgu@mail.ru