С. Г. Мерзляков, Интерполяция и абсолютно сходящиеся ряды в пространствах Фреше, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 1, 113–154

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8902

УДК 517.982.3+517.53

**С. Г. Мерзляков**

# Интерполяция и абсолютно сходящиеся ряды в пространствах Фреше

Обобщается теорема Эйдельгейта, относящаяся к интерполяционной задаче для последовательности линейных непрерывных функционалов в пространстве Фреше. Найден критерий разрешимости интерполяционной задачи в виде абсолютно сходящегося ряда, элементы которого лежат в заданном множестве. Для одного частного случая приведено конструктивное построение решения системы уравнений для последовательности функционалов. Далее эти результаты применены для пространств голоморфных функций.

Библиография: 15 названий.

**Ключевые слова:** пространство Фреше, абсолютно сходящиеся ряды, интерполяция, линейные непрерывные функционалы, пространства голоморфных функций, ряды экспонент.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8902

## § 1. Введение

Пусть $F$ – пространство Фреше над полем комплексных чисел, через $F^*$ будем обозначать пространство линейных непрерывных функционалов на этом пространстве.

В 1936 г. М. Эйдельгейт нашел точные условия на последовательность функционалов

$$\{S_j \in F^* \colon j \in \mathbb{N}\}, \tag{1.1}$$

при которых система уравнений

$$\langle S_j, \eta\rangle = b_j, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

имеет решение $\eta \in F$ для любых чисел $b_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $L$ линейную оболочку системы функционалов (1.1).

Результат, о котором идет речь, состоит в следующем.

Теорема Эйдельгейта. *Система уравнений (1.2) имеет решение $\eta \in F$ для любых чисел $b_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда последовательность функционалов (1.1) линейно независима и для любой непрерывной на пространстве $F$ полунормы подпространство элементов пространства $L$, ограниченных по ней, конечномерно.*

Систему функционалов, удовлетворяющую условиям теоремы, будем называть *последовательностью Эйдельгейта*.

Доказательство этого утверждения было получено с помощью теории двойственности (см. [1], [2], [3; с. 323]).

В настоящей статье мы докажем более общий вариант теоремы Эйдельгейта без использования вышеупомянутой теории, а также приведем конструктивное построение решения системы (1.2) для одного частного случая последовательности функционалов (1.1).

Далее эти результаты применяются для пространств голоморфных функций.

## § 2. Абсолютно сходящиеся ряды

Пусть множество $X$ является подмножеством пространства $F$. Будем говорить, что функционал $S \in F^*$ *ограничен* по непрерывной на пространстве $F$ полунорме $p$ на множестве $X$, если найдется число $c > 0$, для которого выполнено соотношение

$$|\langle S, \xi \rangle| \leqslant cp(\xi), \qquad \xi \in X.$$

Через $L(X)$ будем обозначать линейную оболочку множества $X$ в пространстве $F$.

Говорят, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n, \qquad \eta_n \in F,$$

*сходится абсолютно* в пространстве $F$, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(\eta_n) < \infty$$

для любой непрерывной полунормы $p$ на пространстве $F$.

Назовем множество $X \subset F$ *достаточным* для системы функционалов (1.1), если для любой последовательности чисел $b_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, найдется абсолютно сходящийся в пространстве $F$ ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n, \qquad a_n \in \mathbb{C}, \quad \xi_n \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

сумма $\eta$ которого удовлетворяет равенствам (1.2).

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Множество $X \subset F$ достаточно для системы функционалов (1.1) тогда и только тогда, когда эти функционалы линейно независимы на пространстве $L(X)$ и для любой непрерывной на пространстве $F$ полунормы подпространство элементов пространства $L$, ограниченных по ней на множестве $X$, конечномерно.*

Доказательство. Предположим, что система (1.1) линейно зависима на пространстве $L(X)$, поэтому найдутся числа $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, k$, $\alpha_k \neq 0$, для которых имеет место равенство

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_j S_j, \xi \right\rangle = 0, \qquad \xi \in L(X).$$

Но в таком случае система (1.2) не может быть разрешима для векторов, представляющихся суммой ряда (2.1) и последовательности чисел $b_j = \delta_{k,j}$, $j \in \mathbb{N}$, где $\delta$ – символ Кронекера.

Допустим теперь, что для некоторой непрерывной на пространстве $F$ полунормы $p$ найдется счетная линейно независимая на пространстве $L(X)$ система функционалов

$$\sum_{j=1}^{s_n} \alpha_{n,j} S_j, \qquad s_n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n,j} \in \mathbb{C}, \quad n, j \in \mathbb{N},$$

пространства $L$, ограниченных по этой полунорме на множестве $L(X)$. Ясно, что эта система будет и просто линейно независимой. Приведя матрицу коэффициентов к треугольному виду и отбрасывая часть строк, построим последовательность элементов пространства $L$ вида

$$R_n = \sum_{j=k_n}^{r_n} \beta_{n,j} S_j,$$

где $k_n, r_n \in \mathbb{N}$, $k_n \leqslant r_n < k_{n+1}$, $\beta_{n,j} \in \mathbb{C}$, $\beta_{n,k_n} = 1$, $n, j \in \mathbb{N}$ и $|\langle R_s, \xi\rangle| \leqslant d_s p(\xi)$, $d_s > 0$, $\xi \in X$, $s \in \mathbb{N}$.

Пусть $b_{k_n} = nd_n$ и $b_j = 0$ для $j \neq k_n$, $n \in \mathbb{N}$. Как легко видеть, если найдется последовательность чисел $a_n \in \mathbb{C}$ и векторов $\xi_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, для которых ряд (2.1) абсолютно сходится к вектору $\eta \in F$, удовлетворяющему системе уравнений (1.2), то

$$sd_s = \langle R_s, \eta\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle R_s, \xi_n\rangle,$$

поэтому

$$sd_s \leqslant d_s \sum_{n=1}^{\infty} p(a_n \xi_n),$$

но это равенство не может выполняться для всех чисел $s \in \mathbb{N}$.

Обратно, предположим, что система (1.1) линейно независима на пространстве $L(X)$ и для некоторой возрастающей последовательности полунорм $p_j$, $j \in \mathbb{N}$, определяющей топологию пространства $F$, подпространство $L_j$ функционалов пространства $L$, ограниченных по полунорме $p_j$ на множестве $X$, имеет размерность $m_j \in \mathbb{N}$, $m_j < m_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$.

Пусть последовательности линейных функционалов $T_n \in L$ и положительных чисел $c_k$, $n, k \in \mathbb{N}$, таковы, что система $T_1, T_2, \ldots, T_{m_j}$ является базисом в пространстве $L_j$, $j \in \mathbb{N}$, и выполнены неравенства $|\langle T_n, \xi\rangle| \leqslant c_k p_k(\xi)$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m_k$, $\xi \in X$. Ясно, что любая нетривиальная линейная комбинация системы векторов $T_{m_j+1}, T_{m_j+2}, \ldots, T_{m_{j+1}}$ будет неограниченой по полунорме $p_j$ на множестве $X$, $j \in \mathbb{N}$.

Найдутся числа $\alpha_{n,j} \in \mathbb{C}$ и $s_n \in \mathbb{N}$, $n, j \in \mathbb{N}$, для которых $\alpha_{n,j} = 0$, $j > s_n$ и

$$T_n = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{n,j} S_j,$$

а так как любой линейный непрерывный фунционал на пространстве $F$ ограничен по некоторой полунорме, то для некоторых чисел $\beta_{n,j} \in \mathbb{C}$ и $r_n \in \mathbb{N}$, $n, j \in \mathbb{N}$, выполнены равенства $\beta_{n,j} = 0$ для $j > r_n$ и

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{n,j} T_j. \tag{2.2}$$

Таким образом,

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{n,j} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{j,l} S_l = \sum_{l=1}^{\infty} S_l \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{n,j} \alpha_{j,l}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

поэтому из линейной независимости системы (1.1) получим равенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{n,j} \alpha_{j,l} = \delta_{n,l}, \qquad n, l \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Для фиксированного числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение

$$A_n \colon L(X) \to \mathbb{C}^{m_n}, \qquad A_n \zeta = (\langle T_1, \zeta \rangle, \dots, \langle T_{m_n}, \zeta \rangle), \quad \zeta \in L(X).$$

Образ отображения $A_n$ является подпространством пространства $\mathbb{C}^{m_n}$, и если бы он не совпадал со всем пространством, то нашлись бы числа $h_1, \dots, h_{m_n} \in \mathbb{C}$, не все равные нулю, для которых

$$\sum_{j=1}^{m_n} h_j \langle T_j, \zeta \rangle = 0$$

для всех $\zeta \in L(X)$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m_n} h_j \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{j,l} S_j, \xi \right\rangle = 0, \qquad \zeta \in L(X),$$

и поэтому

$$\sum_{j=1}^{m_n} h_j T_j = \sum_{j=1}^{m_n} h_j \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{j,l} S_j = 0,$$

что противоречит линейной независимости системы $T_1, \dots, T_{m_n}$.

В таком случае найдутся векторы $e_{n,1}, \dots, e_{n,m_n} \in L(X)$, для которых

$$e_{n,l} = \sum_{j=1}^{t_n} a_{n,l,j} \chi_{n,j}, \qquad \sum_{j=1}^{t_n} p_n(a_{n,l,j} \chi_{n,j}) \leqslant N_n, \qquad \langle T_s, e_{n,l} \rangle = \delta_{s,l},$$

$$t_n \in \mathbb{N}, \quad a_{n,l,j} \in \mathbb{C}, \quad \chi_{n,j} \in X, \quad s, l = 1, \dots, m_n, \quad j = 1, \dots, t_n, \quad N_n > 0.$$

Пусть последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

Введем теперь множества

$$V_n = \left\{\zeta \in F\colon \zeta = \sum_{j=1}^{l(\zeta)} \theta_j \chi_j,\ \sum_{j=1}^{l(\zeta)} p_n(\theta_j \chi_j) \leqslant \varepsilon_n,\ \theta_j \in \mathbb{C},\ \chi_j \in X,\ j, l(\zeta) \in \mathbb{N}\right\},$$
$$U_n = \{\zeta \in V_n\colon \langle T_j, \zeta\rangle = 0,\ j = 1, \dots, m_n\}$$

и предположим, что для отображения

$$B\colon F \to \mathbb{C}^{m_{n+1}-m_n}, \qquad B\zeta = (\langle T_{m_n+1}, \zeta\rangle, \dots, \langle T_{m_{n+1}}, \zeta\rangle), \quad \zeta \in F,$$

имеет место неравенство $B(U_n) \neq \mathbb{C}^{m_{n+1}-m_n}$.

В таком случае в силу выпуклости множества $B(U_n)$ найдутся числа $c > 0$ и $h_{m_n+1}, \dots, h_{m_{n+1}} \in \mathbb{C}$, не все равные нулю, такие, что для функционала

$$T = \sum_{j=m_n+1}^{m_{n+1}} h_j T_j$$

будет выполнено неравенство $\operatorname{Re}\langle T, \zeta\rangle \leqslant c$, $\zeta \in U_n$ (см. [4; следствие 11.5.2]). Но множество $U_n$ инвариантно относительно умножения на комплексные числа, по модулю равные 1, поэтому получим

$$|\langle T, \zeta\rangle| \leqslant c, \qquad \zeta \in U_n. \tag{2.4}$$

Положим

$$M_1 = 1 + c_n m_n N_n, \quad M_2 = c_n \sum_{l=1}^{m_n} |\langle T, e_{n,l}\rangle|, \qquad M = c\varepsilon_n^{-1} M_1 + M_2.$$

Функционал $T$ не ограничен по полунорме $p_n$ на множестве $X$, поэтому найдется вектор $\chi \in X$ со свойством

$$|\langle T, \chi\rangle| > M p_n(\chi). \tag{2.5}$$

Равенство $p_n(\chi) = 0$ не может выполняться, иначе в силу ограниченности функционалов $T_1, \dots, T_{m_n}$ по полунорме $p_n$ на множестве $X$ получим $\langle T_j, \chi\rangle = 0$, $j = 1, \dots, m_n$, следовательно, $a\chi \in U_n$ для любого числа $a \in \mathbb{C}$, и из соотношения (2.4) будет вытекать равенство $\langle T, \chi\rangle = 0$, что противоречит неравенству (2.5).

Для вектора

$$w = \chi - \sum_{l=1}^{m_n} \langle T_l, \chi\rangle e_{n,l}$$

имеем

$$w = \chi - \sum_{l=1}^{m_n} \langle T_l, \chi\rangle \sum_{j=1}^{t_n} a_{n,l,j}\chi_{n,j},$$

$$p_n(\chi) + \sum_{l=1}^{m_n}\sum_{j=1}^{t_n} p_n(\langle T_l, \chi\rangle a_{n,l,j}\chi_{n,j}) \leqslant p_n(\chi)(1 + c_n N_n m_n) = p_n(\chi)M_1,$$

$$|\langle T, w\rangle| \geqslant |\langle T, \chi\rangle| - \sum_{l=1}^{m_n} |\langle T_l, \chi\rangle\langle T, e_{n,l}\rangle|$$

$$> M p_n(\chi) - c_n p_n(\chi)\sum_{l=1}^{m_n} |\langle T, e_{n,l}\rangle| = c p_n(\chi)\varepsilon_n^{-1} M_1,$$

поэтому, очевидно,

$$\frac{\varepsilon_n w}{p_n(\chi)M_1} \in U_n, \qquad \frac{|\langle T, \varepsilon_n w\rangle|}{p_n(\chi)M_1} > c,$$

что противоречит соотношению (2.4), и равенство $B(U_n) = \mathbb{C}^{m_{n+1}-m_n}$ доказано.

Положим

$$d_n = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{n,j} b_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Из показанного выше следует, что найдутся последовательности $a_n \in \mathbb{C}$, $\xi_n \in X$, $k_n \in \mathbb{N}$, для которых выполняются условия

$$\left\langle T_j, \sum_{l=1}^{k_n} a_l \xi_l \right\rangle = d_j, \quad j = 1, \ldots, m_n, \qquad \sum_{l=k_n+1}^{k_{n+1}} p_n(a_l\xi_l) \leqslant 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

поэтому ряд (2.1), очевидно, будет сходиться абсолютно в пространстве $F$ к вектору $\eta$, который удовлетворяет системе уравнений $\langle T_j, \eta\rangle = d_j$, $j \in \mathbb{N}$. В таком случае из равенств (2.2), (2.3) и определения последовательности $d_n$, $n \in \mathbb{N}$, вытекает, что вектор $\eta$ дает решение системы уравнений (1.2).

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть множество $X \subset F$ достаточно для системы функционалов (1.1), а функционалы $S_{-k}, S_{-k+1}, \ldots, S_0 \in F^*$, $k \in \mathbb{N}$, таковы, что система функционалов*

$$\{S_{-k+j-1} : j \in \mathbb{N}\} \tag{2.6}$$

*линейно независима на пространстве $L(X)$.*

*Тогда множество $X$ будет достаточным для системы функционалов (2.6).*

Доказательство. Действительно, найдутся число $c > 0$ и непрерывная на пространстве $F$ полунорма $p$, для которых имеют место оценки

$$\langle S_j, \zeta\rangle \leqslant cp(\zeta), \qquad j = -k, -k+1, \ldots, 0, \quad \zeta \in F.$$

В таком случае для функционалов

$$S \in L, \qquad T = \sum_{j=-1}^{k} \alpha_j S_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C},$$

и любой непрерывной на пространстве $F$ полунормы $p_1 \geqslant p$ функционал $S+T$, очевидно, будет ограничен по полунорме $p_1$ на множестве $X$ тогда и только тогда, когда таковым будет функционал $S$, из чего и вытекает искомое.

Следствие 2. *Пусть заданы система функционалов* (1.1), *последовательность чисел* $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n < m_{n+1}$, *возрастающая последовательность полунорм* $p_n$, $n \in \mathbb{N}$, *на пространстве* $F$, *определяющая его топологию, и множество* $X \subset F$ *такие, что для любого числа* $j \in \mathbb{N}$ *функционалы* $S_{m_j}, \dots, S_{m_{j+1}-1}$ *ограничены по полунорме* $p_{j+1}$ *на множестве* $X$, *а произвольная нетривиальная линейная комбинация этих функционалов не ограничена по полунорме* $p_j$ *на множестве* $X$.

*Тогда множество* $X \subset F$ *является достаточным для системы функционалов* (1.1).

Доказательство. Пусть $s, k, l \in \mathbb{N}$ и

$$T = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j S_j, \qquad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, k, \quad m_l \leqslant k < m_{l+1}. \tag{2.7}$$

Если $l < s$, то по условию функционал $T$ ограничен по полунорме $p_s$ на множестве $X$, если же $l \geqslant s$ и $\alpha_k \neq 0$, то положим

$$T_1 = \sum_{j=1}^{m_l - 1} \alpha_j S_j, \qquad T_2 = \sum_{j=m_l}^{k} \alpha_j S_j.$$

Функционал $T_1$ ограничен по полунорме $p_l$ на множестве $X$, а функционал $T_2$ не ограничен по этой полунорме на множестве $X$, из чего несложно вывести неограниченность функционала $T$ по полунорме $p_l$ на множестве $X$, и тем более он будет неограничен по полунорме $p_s$ на том же множестве.

Таким образом, функционалы пространства $L$, ограниченные по полунорме $p_s$ на множестве $X$, являются линейной комбинацией системы $S_1, \dots, S_{m_s - 1}$.

Для $s = 1$ из вышеприведенных рассуждений, очевидно, вытекает линейная независимость системы (1.1) на множестве $L(X)$, и все условия теоремы 1 выполнены.

Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть множество* $X \subset F$ *достаточно для системы функционалов* (1.1), *система функционалов*

$$\{R_j \in F^* \colon j \in \mathbb{N}\} \tag{2.8}$$

*линейно независима на множестве* $X$ *и для некоторой непрерывной на пространстве* $F$ *полунормы* $p$ *функционалы* $S_n - R_n$, $n \in \mathbb{N}$, *ограничены по этой полунорме на множестве* $X$.

*Тогда множество* $X$ *будет достаточным для системы* (2.8).

Доказательство. Пусть функционал

$$T = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j R_j, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad \alpha_k \neq 0,$$

ограничен по непрерывной на пространстве $F$ полунорме $q$ на множестве $X$. Положим

$$T_1 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j S_j, \qquad T_2 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (S_j - R_j),$$

так что $T_1 = T + T_2$ и функционал $T_1$, очевидно, ограничен по полунорме $p+q$ на множестве $X$, поэтому этот функционал будет принадлежать конечномерному пространству, зависящему только от полунормы $p+q$. В частности, число $k$ ограничено сверху и функционал $T$ также лежит в конечномерном пространстве, что и требовалось доказать.

Следствие 4. *Пусть возрастающая последовательность полунорм* $p_j$, $j \in \mathbb{N}$, *определяет топологию пространства* $F$, *множество* $X = \{\chi_j \in F\colon j \in \mathbb{N}\}$ *достаточно для системы функционалов* (1.1) *и* $p_1(\chi_j) \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$, *система функционалов* (1.1) *линейно независима на множестве* $Y = \{\zeta_j \in F\colon j \in \mathbb{N}\}$ *и для некоторого числа* $d > 0$ *имеют место неравенства* $p_j(\xi_j - \zeta_j) \leqslant dp_1(\chi_j)$, $j \in \mathbb{N}$.

*Тогда множество* $Y$ *будет достаточным для системы функционалов* (1.1).

Доказательство. Достаточно показать, что если для числа $l \in \mathbb{N}$ функционал

$$T = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j S_j, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C},$$

ограничен по полунорме $p_l$ на множестве $Y$, то он будет ограничен по этой полунорме и на множестве $X$.

Итак, пусть

$$|\langle T, \zeta_n \rangle| \leqslant cp_l(\zeta_n), \qquad c > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и числа $c_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m > l$, таковы, что

$$|\langle T, \chi \rangle| \leqslant c_1 p_m(\chi), \qquad \chi \in F,$$

поэтому имеем

$$\begin{aligned} |\langle T, \chi_n \rangle| &= |\langle T, \zeta_n \rangle + \langle T, \chi_n - \zeta_n \rangle| \leqslant cp_l(\zeta_n) + c_1 p_m(\chi_n - \zeta_n) \\ &\leqslant cp_l(\xi_n) + cp_l(\chi_n - \zeta_n) + c_1 p_m(\chi_n - \zeta_n) \\ &\leqslant cp_l(\chi_n) + (c + c_1) p_m(\chi_n - \zeta_n). \end{aligned}$$

Найдется число $c(m) > 0$ со свойством $p_m(\chi_n - \zeta_n) \leqslant c(m)p_1(\chi_n)$, $n = 1, \ldots, m-1$, а если $n \geqslant m$, то $p_m(\chi_n - \zeta_n) \leqslant p_n(\chi_n - \zeta_n) \leqslant dp_1(\chi_n)$, поэтому $p_m(\chi_n - \zeta_n) \leqslant (c(m) + d)p_l(\chi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Из всех этих оценок и вытекает искомое.

Следствие 5. *Пусть множества* $X, Y \subset F$ *достаточны соответственно для систем функционалов* (1.1) *и* (2.8), *а для некоторой непрерывной на пространстве* $F$ *полунормы* $p$ *функционалы* (1.1) *и* (2.8) *ограничены по этой полунорме соответственно на множествах* $Y$ *и* $X$ *и, наконец, объединение систем* (1.1) *и* (2.8) *линейно независимо на множестве* $X \cup Y$.

*Тогда множество* $X \cup Y$ *будет достаточным для объединения систем* (1.1) *и* (2.8).

Доказательство. Пусть функционал

$$T = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j S_j + \sum_{j=1}^{l} \beta_j R_j = T_1 + T_2, \qquad k, l \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{C},$$

ограничен по непрерывной на пространстве $F$ полунорме $q$ на множестве $X \cup Y$, тогда он будет тем более ограничен по полунорме $p + q$, а так как функционалы $T_1$ и $T_2$ ограничены по полунорме $p$ на множествах соответственно $Y$ и $X$, то функционалы $T_1$ и $T_2$ будут ограничены по полунорме $p+q$ на множествах $X$ и $Y$ соответственно.

По условию такие функционалы образуют конечномерные пространства, следовательно, множество линейных комбинаций объединения систем (1.1) и (2.8), ограниченных по полунорме $q$ на множестве $X \cup Y$, является конечномерным пространством, так что условия теоремы 1 выполнены.

Следствие доказано.

Из теоремы 1, очевидно, вытекает результат Эйдельгейта, если положить $X = F$.

Покажем, что всегда можно обойтись счетными достаточными множествами.

Предложение 1. *Для любого достаточного для системы* (1.1) *множества $X \subset F$ существует счетное множество $Y \subset X$, достаточное для той же системы.*

Доказательство. Будем придерживаться обозначений теоремы 1 и без ограничения общности предположим, что $T_j = S_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Как показано в теореме 1, найдутся числа $a_{j,l,k} \in \mathbb{C}$, $s_{l,k} \in \mathbb{N}$ и векторы $\chi_{j,l,k} \in X$, $l \in \mathbb{N}$, $j \leqslant s_{l,k}$, для которых выполняются соотношения

$$e_{l,k} = \sum_{j=1}^{s_{l,k}} a_{j,l,k} \chi_{j,l,k}, \qquad \langle S_\nu, e_{l,k} \rangle = \delta_{\nu,l}, \quad r, l \in \mathbb{N}, \quad \nu \leqslant l,$$

$$\sum_{j=1}^{s_{j,k}} p_r(a_{j,l,k} \chi_{j,l,k}) \leqslant k^{-1}, \qquad k, l, r \in \mathbb{N}, \quad m_r < l \leqslant m_{r+1}.$$

Положим

$$Y = \{\chi_{j,l,k} \colon j, l, k \in \mathbb{N},\ j \leqslant s_{j,k}\}$$

и покажем, что это множество достаточно для системы (1.1).

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ и последовательности чисел $b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, найдется последовательность натуральных чисел $d_n$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{d_n} \leqslant \varepsilon.$$

Положим $k_j = \max\{d_{m_j+1}, \ldots, d_{m_{j+1}}\}$, $j \in \mathbb{N}$, и рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned}\eta_n &= \sum_{l=1}^{m_1} b_l e_{l,1} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=m_r+1}^{m_{r+1}} b_l e_{l,k_r} \\ &= \sum_{l=1}^{m_1} b_l \sum_{j=1}^{s_{l,1}} a_{j,l,1}\chi_{j,l,1} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=m_r+1}^{m_{r+1}} b_l \sum_{j=1}^{s_{l,k_r}} a_{j,l,k_r}\chi_{j,l,k_r}, \qquad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\langle S_\nu, \eta_n\rangle = b_\nu, \qquad \nu \in \mathbb{N}, \quad \nu \leqslant m_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=m_r+1}^{m_{r+1}} \sum_{j=1}^{s_{l,k_r}} p_r(b_l a_{j,l,k_r}\chi_{j,l,k_r}) \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=m_r+1}^{m_{r+1}} \frac{|b_l|}{k_r} \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=m_r+1}^{m_{r+1}} \frac{|b_l|}{d_l} \leqslant \varepsilon,$$

поэтому последовательность $\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к вектору $\eta \in F$, удовлетворяющему системе (1.2), и, очевидно, этот вектор можно представить суммой абсолютно сходящегося ряда нужного вида.

Предложение доказано.

В частных случаях можно привести конструктивное построение решения системы (1.2) для последовательности функционалов (1.1).

Теорема 2. *Пусть на пространстве Фреше $F$ заданы возрастающая фундаментальная последовательность полунорм $p_j$, $j \in \mathbb{N}$, система линейных непрерывных функционалов (1.1) и множество векторов $X \subset F$ такие, что для любого числа $j \in \mathbb{N}$ функционал $S_j$ не ограничен по полунорме $p_j$ на множестве $X$ и ограничен по полунорме $p_{j+1}$ на этом же множестве.*

*Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и произвольной последовательности чисел $b_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, найдутся последовательность векторов $\chi_n$ множества $X$ и последовательность чисел $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(a_n\chi_n) \leqslant \varepsilon,$$

*а для вектора*

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n$$

*выполняются равенства (1.2).*

Доказательство. Пусть для последовательности положительных чисел $c_j$ выполнены неравенства

$$|\langle S_j, \chi\rangle| \leqslant c_j q_{j+1}(\chi), \qquad j \in \mathbb{N}, \quad \chi \in X.$$

Выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_j$, $j \in \mathbb{N}$, для которой

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j |b_j| \leqslant \varepsilon,$$

и положим $r_j = \min\{2^{-j}\varepsilon_1, 2^{-j+1}\varepsilon_2, \ldots, 2^{-1}\varepsilon_j\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Построим теперь последовательности векторов $\chi_n \in X$ и чисел $a^n_{j,k} \in \mathbb{C}$, $j,k = 1,2,\dots,n$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что для линейных комбинаций

$$\eta^n_j = \sum_{k=1}^{n} a^n_{j,k}\chi_k, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad j \leqslant n,$$

выполняются следующие условия:

$$\eta^n_j = \eta^{n-1}_j - \langle S_n, \eta^{n-1}_j\rangle \eta^n_n, \qquad j < n,$$

$$\langle S_j, \eta^n_k\rangle = \delta_{j,k}, \quad j,k = 1,2,\dots,n, \qquad \sum_{k=1}^{n} q_n(a^n_{n,k}\chi_k) \leqslant r_n,$$

$$|\langle S_n, \eta^{n-1}_j\rangle| \sum_{k=1}^{n} q_n(a^n_{n,k}\chi_k) \leqslant r_n, \qquad j = 1,2,\dots,n-1.$$

По условию найдется вектор $\chi_1 \in X$ такой, что $|\langle S_1, \chi_1\rangle| > r_1^{-1} p_1(\chi_1)$, поэтому для чисел $a^1_{1,1} = \langle S_1, \chi_1\rangle^{-1}$, $\eta^1_1 = a^1_{1,1}\chi_1$ имеем $\langle S_1, \eta^1_1\rangle = 1$, $p_1(a^1_{1,1}\chi_1) < r_1$, так что для $n = 1$ условия выполнены.

Допустим, что для $n = m$ нужные числа и векторы найдены, и положим

$$M = M_1 + \sum_{k=1}^{m} c_k |\langle S_{m+1}, \eta^m_k\rangle|,$$

где

$$M_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant m}\{1, |\langle S_{m+1}, \eta^m_k\rangle|\}\left(1 + \sum_{l=1}^{m} q_{m+1}(\chi_l) \sum_{j=1}^{m} c_j |a^m_{j,l}|\right) r^{-1}_{m+1}.$$

Найдется вектор $\chi_{m+1} \in X$, для которого $|\langle S_{m+1}, \chi_{m+1}\rangle| > M q_{m+1}(\chi_{m+1})$. Положим

$$w = -\sum_{j=1}^{m} \langle S_j, \chi_{m+1}\rangle \eta^m_j + \chi_{m+1}$$

и получим

$$|\langle S_{m+1}, w\rangle| > \left(M - \sum_{j=1}^{m} c_j |\langle S_{m+1}, \eta^m_j\rangle|\right) p_{m+1}(\chi_{m+1}) = M_1 q_{m+1}(\chi_{m+1}) \geqslant 0.$$

Для числа $a^{m+1}_{m+1,m+1} = \langle S_{m+1}, w\rangle^{-1}$ и вектора $v = a^{m+1}_{m+1,m+1}\chi_{m+1}$ из последних неравенств имеем $p_{m+1}(v) \leqslant M_1^{-1}$, а для вектора $\eta^{m+1}_{m+1} = a^{m+1}_{m+1,m+1} w$, очевидно, получаем

$$\langle S_j, \eta^{m+1}_{m+1}\rangle = \delta_{j,m+1}, \qquad j = 1,\dots,m+1, \quad \eta^{m+1}_{m+1} = \sum_{l=1}^{m+1} a^{m+1}_{m+1,l}\chi_l,$$

где

$$a^{m+1}_{m+1,l} = -\sum_{j=1}^{m} \langle S_j, v\rangle a^m_{j,l}, \qquad l \leqslant m,$$

поэтому

$$\sum_{l=1}^{m+1} p_{m+1}(a_{m+1,l}^{m+1}\chi_l) \leqslant \sum_{l=1}^{m} q_{m+1}(\chi_l)\sum_{j=1}^{m} c_j q_{m+1}(v)|a_{j,l}^m| + p_{m+1}(v)$$
$$= \left(1+\sum_{l=1}^{m} q_{m+1}(\chi_l)\sum_{j=1}^{m} c_j|a_{j,l}^m|\right)M_1^{-1} \leqslant r_{m+1}.$$

Далее, для векторов $\eta_k^{m+1} = \eta_k^m - \langle S_{m+1}, \eta_k^m\rangle\eta_{m+1}^{m+1}$ найдем

$$\langle S_j, \eta_k^{m+1}\rangle = \delta_{j,k}, \qquad j=1,2,\dots,m+1, \quad k=1,2,\dots,m,$$

и из доказанного выше получаем

$$|\langle S_{m+1}, \eta_k^m\rangle| \sum_{l=1}^{m+1} p_{m+1}(a_{m+1,l}^{m+1}\chi_l)$$
$$\leqslant |\langle S_{m+1}, \eta_k^m\rangle|\left(1+\sum_{l=1}^{m} q_{m+1}(\chi_l)\sum_{j=1}^{m} c_j|a_{j,l}^m|\right)M_1^{-1} \leqslant r_{m+1},$$

так что все необходимое выполнено и для $n=m+1$.

Из полученного выше несложно вывести равенства

$$\eta_j^n = \eta_j^j - \sum_{k=1}^{n-j}\langle S_{j+k}, \eta_j^{j+k-1}\rangle\eta_{j+k}^{j+k}, \qquad j,n\in\mathbb{N}, \quad j<n. \tag{2.9}$$

Для фиксированного числа $j\in\mathbb{N}$ рассмотрим ряд

$$\eta_j^j - \sum_{k=1}^{\infty}\langle S_{j+k}, \eta_j^{j+k-1}\rangle\eta_{j+k}^{j+k} \tag{2.10}$$

и запишем его в виде

$$\sum_{l=1}^{j} a_{j,l}^j\chi_l - \sum_{k=1}^{\infty}\langle S_{j+k}, \eta_j^{j+k-1}\rangle\sum_{l=1}^{j+k} a_{j+k,l}^{j+k}\chi_l. \tag{2.11}$$

Для членов этого ряда найдем

$$\sum_{l=1}^{j} q_j(a_{j,l}^j\chi_l) + \sum_{k=1}^{\infty}|\langle S_{j+k}, \eta_j^{j+k-1}\rangle|\sum_{l=1}^{j+k} p_{j+k}(a_{j+k,l}^{j+k}\chi_l)$$
$$\leqslant \sum_{k=j}^{\infty} r_j \leqslant \sum_{k=j}^{\infty}\frac{\varepsilon_j}{2^{k-j+1}} = \varepsilon_j;$$

каждая полунорма слева встречается лишь конечное число раз, индекс полунорм для векторов $\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_j$ не меньше $j$, а векторов $\chi_k$, $k=j+1,j+2,\dots$, не меньше $k$. В таком случае, как несложно показать, ряд из коэффициентов вектора $\chi_k$ в выражении (2.11) абсолютно сходится к некоторому числу $a_{j,k}\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$, и

$$\sum_{k=1}^{j} q_j(a_{j,k}\chi_k) + \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k(a_{j,k}\chi_k) \leqslant \varepsilon_j.$$

Далее, ряд (2.10) будет абсолютно сходиться в пространстве $F$ к вектору

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\chi_k, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

причем $p_j(\eta_j) \leqslant \varepsilon_j$, и в силу соотношений (2.9) будут выполняться равенства

$$\langle S_j, \eta_k \rangle = \delta_{j,k}, \qquad j,k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j \tag{2.13}$$

и запишем его в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty}\biggl(\sum_{k=1}^{j} b_j a_{j,k}\chi_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} b_j a_{j,k}\chi_k\biggr). \tag{2.14}$$

Для членов этого ряда имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty}\biggl(\sum_{k=1}^{j} q_j(b_j a_{j,k}\chi_k) + \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k(b_j a_{j,k}\chi_k)\biggr) \leqslant \varepsilon.$$

Как и выше, каждая полунорма слева встречается лишь конечное число раз, индекс полунорм для векторов $\chi_k$, $k = 1, 2, \dots$, не меньше $k$, поэтому ряды (2.13) и (2.14) будут сходиться в топологии пространства $F$ к вектору $\eta$, а ряд из коэффициентов вектора $\chi_k$ в выражении (2.14) абсолютно сходится к некоторому числу $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(a_k u_k) \leqslant \varepsilon.$$

Ясно, что вектор $\eta$ удовлетворяет равенствам (1.2).

Теорема 2 доказана.

Следствие 6. *Пусть в предположениях теоремы 2 для числа $l \in \mathbb{N}$ выполнено условие $b_j = 0$, $j = 1, \dots, l-1$.*

*Тогда найдутся последовательность векторов $\{\chi_n : n \in \mathbb{N}\}$ множества $X$ и последовательность чисел $\{a_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ такие, что*

$$\sum_{j=1}^{l} q_l(a_j\chi_j) + \sum_{j=l+1}^{\infty} p_j(a_j\chi_j) \leqslant \varepsilon,$$

*а вектор*

$$\eta = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\chi_j$$

*удовлетворяет системе (1.2).*

Действительно, достаточно применить рассуждения теоремы 2 для ряда

$$\sum_{j=l}^{\infty} b_j u_j.$$

Из теоремы Эйдельгейта вытекает невозможность существования последовательностей Эйдельгейта в банаховом пространстве. Покажем, что в небанаховом пространстве Фреше всегда можно построить пример, для которого применима теорема 2.

Предложение 2. *В любом небанаховом пространстве Фреше $F$ найдутся последовательности полунорм $q_j$, линейных непрерывных функционалов $S_j$ и элементов $\xi_j$ пространства $F$, $j \in \mathbb{N}$, для которых выполнены условия теоремы 2.*

Доказательство. Пусть $p_j$, $j \in \mathbb{N}$, – фундаментальная возрастающая система полунорм пространства $F$.

Покажем вначале, что для любого индекса $j \in \mathbb{N}$ существует линейный непрерывный функционал на пространстве $F$, неограниченный по полунорме $p_j$.

Действительно, в противном случае для произвольного функционала $S \in F^*$ найдется число $c > 0$ со свойством

$$|\langle S, \xi\rangle| \leqslant c p_j(\xi), \qquad \xi \in F.$$

Как известно, для любого ненулевого элемента $\xi_0 \in F$ существует функционал $S_0 \in F^*$ такой, что

$$\langle S_0, \xi_0\rangle = 1,$$

поэтому полунорма $p_j$ будет нормой. Ясно, что это верно и для полунорм с индексами, большими $j$.

Для непрерывной на пространстве $F$ нормы $p$ можно определить банахово пространство

$$F_p^* = \Big\{ S \in F^* \colon \|S\|_p = \sup_{\xi \in F, p(\xi) \leqslant 1} < \infty \Big\}$$

(см. [5]). Пространства $F_{p_j}^*$ и $F_{p_k}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $k > j$, по составу элементов совпадают с пространством $F^*$ и, очевидно,

$$\|S\|_{p_k} \leqslant \|S\|_{p_j}, \qquad S \in F^*.$$

В таком случае тождественное отображение пространства $F_{p_j}^*$ на пространство $F_{p_k}^*$ будет непрерывным, следовательно, обратное отображение также непрерывно и для некоторого числа $c_0 > 0$ имеем

$$\|S\|_{p_j} \leqslant c_0 \|S\|_{p_k}, \qquad S \in F^*.$$

Из теоремы Хана–Банаха вытекает, что для любого элемента $\xi \in F$ существует функционал $S \in F^*$ со свойством

$$\langle S, \xi\rangle = p_k(\xi), \qquad \|S\|_{p_k} = 1,$$

поэтому

$$p_k(\xi) = \langle S, \xi\rangle \leqslant \|S\|_{p_j} p_j(\xi) \leqslant c_0 \|S\|_{p_k} p_j(\xi) = c_0 p_j(\xi).$$

Из этих соотношений следует, что топология пространства $F$ определяется нормой $p_j$ и это пространство будет банаховым. Получили противоречие.

Положим $q_1 = p_1$ и найдем линейный непрерывный функционал $S_1 \in F^*$, неограниченный по этой полунорме. В таком случае существует не более чем счетное множество $X_1$ такое, что для любого числа $M > 0$ выполнено неравенство

$$|\langle S_1, \xi\rangle| > M q_1(\xi)$$

для некоторого элемента $\xi \in X_1$.

Далее, найдутся полунорма $p_{j_1}$ и число $c_1 > 0$ со свойством

$$|\langle S_1, \xi\rangle| \leqslant c_1 q_1(\xi), \qquad \xi \in F,$$

и процесс можно продолжить.

Все условия теоремы 2 будут выполнены, если положить

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j.$$

Предложение 2 доказано.

В некоторых случаях для применения теоремы 2 нужно добавлять "нестандартные" полунормы.

Предложение 3. *Пусть на пространстве Фреше $F$ заданы возрастающая последовательность полунорм $p_j$, $j \in \mathbb{N}$, определяющая топологию пространства $F$, система линейных непрерывных функционалов* (1.1) *и множество векторов*

$$X = \{\xi_j \in F\colon j \in \mathbb{N}\} \tag{2.15}$$

*такие, что для любого числа $j \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения*

$$\langle S_j, \xi_n\rangle \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle S_j, \xi_n\rangle}{\langle S_{j+1}, \xi_n\rangle} = 0, \tag{2.16}$$

*и, наконец, имеется последовательность натуральных чисел $l_s$, $1 < l_s < l_{s+1}$, $s \in \mathbb{N}$, со свойством*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_s(\xi_n)}{\langle S_{l_s}, \xi_n\rangle} = 0. \tag{2.17}$$

*Тогда найдется последовательность полунорм $q_j$, $j \in \mathbb{N}$, которая вместе с системами* (1.1) *и* (2.15) *будет удовлетворять всем условиям теоремы* 2.

Доказательство. Определим непрерывные на пространстве $F$ полунормы $t_j$ по правилу

$$t_j(\xi) = |\langle S_j, \xi\rangle|, \qquad \xi \in F, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В качестве полунормы $q_1$ возьмем функцию, тождественно равную нулю, так что для любого числа $M$ выполнено неравенство

$$|\langle S_1, \xi_1\rangle| > M q_1(\xi_1).$$

Функционал $S_1$, очевидно, ограничен по полунорме $q_2 = t_1$, а функционал $S_2$ по условию (2.16) не ограничен по ней на множестве $X$.

Функционал $S_2$ будет ограничен по полунорме $q_3 = \max\{t_1, t_2\}$ на множестве $X$, а функционал $S_3$ не ограничен по этой полунорме на множестве $X$. Продолжая этот процесс, получим, что функционал $S_{l_1-1}$ не ограничен по полунорме $q_{l_1-1} = \max\{q_{l_1-2}, t_{l_1-2}\}$ на множестве $X$ и ограничен по полунорме $q_{l_1} = \max\{q_{l_1-1}, t_{l_1-1}, p_1\}$ на этом же множестве. Из соотношений (2.16) и (2.17) вытекает, что функционал $S_{l_1}$ будет не ограничен по этой полунорме на множестве $X$ и так далее.

Полученная система полунорм будет, очевидно, удовлетворять условиям теоремы 2.

Предложение доказано.

Через $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_\infty$ обозначим соответственно множества $\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

Применим полученные результаты для усиления известной леммы Бореля о бесконечно дифференцируемых функциях с заданными производными в нуле.

Пусть $C^\infty(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной оси с топологией, порожденной системой норм $p_j, j \in \mathbb{N}_0$, заданных по правилу

$$p_j(f) = \max_{-j-1\leqslant x\leqslant j+1,\, 0\leqslant s\leqslant j} |f^{(s)}(x)|, \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Последовательность чисел $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, назовем *последовательностью класса $B$* для пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, если для произвольных чисел $b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ найдется последовательность чисел $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что ряд экспонент

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n x}$$

сходится абсолютно в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$ к некоторой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и

$$f^{(j)}(0) = b_j, \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 3. *Последовательность чисел $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, будет последовательностью класса $B$ для пространства $C^\infty(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда найдется число $d > 0$, для которого выполнено соотношение*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|^d}{e^{|\operatorname{Re}\lambda_n|}} = +\infty. \tag{2.18}$$

Доказательство. Положим $X = \{f_n \colon f_n(x) = e^{\lambda_n x}\}$ и обозначим через $S_j$ функционал, сопоставляющий функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ значение

$$\frac{f^{(j)}(0)}{j!}, \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда, как несложно показать,

$$\langle S_j, f_n\rangle = \frac{\lambda_n^j}{j!}, \qquad p_j(f_n) = \max\{1, |\lambda_n|^j\} e^{(j+1)|\operatorname{Re}\lambda_n|}.$$

Предположим, что система чисел $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, является последовательностью класса $B$ для пространства $C^\infty(\mathbb{R})$. В таком случае из теоремы 1 вытекает существование функционала $S_k$, $k \in \mathbb{N}$, неограниченного по полунорме $p_0$ на множестве $X$, поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\langle S_k, f_n\rangle|}{p_0(f_n)} = +\infty,$$

или

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|^k}{k!\, e^{|\operatorname{Re}\lambda_n|}} = +\infty,$$

и, следовательно, выполнено соотношение (2.18) для $d = k$.

Обратно, из равенства (2.18) следует, что найдется последовательность натуральных чисел $m_k$, $k \in \mathbb{N}$, со свойством

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{m_k}|^d}{e^{|\operatorname{Re}\lambda_{m_k}|}} = +\infty,$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty} |\lambda_{m_k}| = \infty,$$

и можно считать выполненным неравенство $|\lambda_{m_k}| \geqslant 1$ для всех индексов $k \in \mathbb{N}$.

В таком случае для любого числа $j \in \mathbb{N}$ получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\langle S_j, f_{m_k}\rangle|}{|\langle S_{j+1}, f_{m_k}\rangle|} = \lim_{k\to\infty} \frac{j+1}{|\lambda_{m_k}|} = 0,$$

и для чисел $s, l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant d(s+1) + s$, имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_s(f_{m_k})}{|\langle S_l, f_{m_k}\rangle|} = \lim_{k\to\infty} \frac{l!\, |\lambda_{m_k}|^s e^{(s+1)|\operatorname{Re}\lambda_{m_k}|}}{|\lambda_{m_k}|^l} = 0,$$

поэтому из предложения 3 следует, что система чисел $\lambda_{m_k}$, $k \in \mathbb{N}$, будет последовательностью класса $B$.

Как легко видеть, если у последовательности есть подпоследовательность класса $B$, то и сама эта последовательность будет класса $B$.

Теорема 3 доказана.

## § 3. О неединственности решения интерполяционной задачи

Для системы функционалов (1.1) обозначим

$$I = \{\chi \in F \colon \langle S_j, \chi\rangle = 0,\ j \in \mathbb{N}\},$$

а для множества $X \subset F$ через $\Sigma(X)$ будем обозначать множество сумм абсолютно сходящихся в пространстве $F$ рядов вида (2.1).

Множество $\Sigma(X)$ будет подпространством пространства $F$, не обязательно замкнутым.

Если система (1.1) есть последовательность Эйдельгейта, а $I = \{0\}$, то, как несложно показать, пространство $F$ будет изоморфно пространству последовательностей $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Имеет место следующий результат.

Предложение 4. *Пусть множество $X \subset F$ достаточно для системы функционалов (1.1) и существует непрерывная на пространстве $F$ норма $p$.*

*Тогда пространство $I \cap \Sigma(X)$ будет бесконечномерным.*

*Обратно, если на пространстве $F$ нет непрерывной нормы, то существуют система функционалов (1.1) и достаточное множество $X$ для нее такие, что пространство $\Sigma(X)$ замкнуто и $I \cap \Sigma(X) = \{0\}$.*

Доказательство. Вначале докажем неравенство $I \cap \Sigma(X) \neq \{0\}$. Будем придерживаться обозначений теоремы 1 и предложения 1, и без ограничения общности можно считать, что $p_1 = p$.

Вектор

$$e_{m_1+1,1} = \sum_{j=1}^{s_{m_1+1,1}} a_{j,m_1+1,1}\xi_{j,m_1+1,1}$$

принадлежит пространству $L(X)$ и

$$p_1(e_{m_1+1,1}) > 0, \qquad \langle S_\nu, e_{m_1+1,1}\rangle = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad \nu \leqslant m_1.$$

Используя предложение 1, найдем вектор $\eta \in \Sigma(X)$, для которого

$$\langle S_j, e_{m_1+1,1}\rangle = \langle S_j, \eta\rangle, \qquad j \in \mathbb{N}, \quad p_1(\eta) < p_1(e_{m_1+1,1}),$$

поэтому $0 \neq e_{m_1+1,1} - \eta \in I \cap \Sigma(X)$.

Предположим теперь, что утверждение не верно, и пусть векторы $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in F$, $k \in \mathbb{N}$, образуют базис пространства $I \cap \Sigma(X)$.

Множество

$$\{(\langle T, \zeta_1\rangle, \dots, \langle T, \zeta_k\rangle) \colon T \in F^*\}$$

будет, как несложно показать, совпадать с пространством $\mathbb{C}^k$, поэтому найдутся линейные непрерывные на пространстве $F$ функционалы $S_{-k+1}, \dots, S_0$ со свойством

$$\langle S_{k-j}, \zeta_l\rangle = \delta_{j,l}, \qquad j, l \in \mathbb{N}, \quad j, l \leqslant k.$$

Для произвольных чисел $b_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{Z}$, $j > -k$, найдется вектор $\eta \in \Sigma(X)$, удовлетворяющий системе уравнений (1.2), а вектор

$$\eta + \sum_{j=1}^{k}(b_{-k+j} - \langle S_{-k+j}, \eta\rangle)\zeta_j,$$

очевидно, является решением аналогичной системы для $j \in \mathbb{Z}$, $j > -k$.

Это означает, что множество $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \cup X$ будет достаточным для системы функционалов $S_j$, $j \in \mathbb{Z}$, $j > -k$, и по доказанному выше существует ненулевой вектор

$$\zeta = \eta_1 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{-k+j}\zeta_j, \qquad \eta_1 \in \Sigma(X), \quad \alpha_{-k+1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{C},$$

аннулируемый этими функционалами. В таком случае $\eta_1 \in I \cap \Sigma(X)$ и по предположению

$$\eta_1 = \sum_{j=1}^{k} \beta_{-k+j}\zeta_j, \qquad \beta_{-k+1}, \dots, \beta_0 \in \mathbb{C},$$

из чего несложно вывести равенство $\zeta = 0$.

Полученное противоречие доказывает первую часть предложения.

Предположим теперь, что на пространстве $F$ нет непрерывных норм, и пусть $p_j$, $i \in \mathbb{N}$, – возрастающая последовательность полунорм, определяющая топологию пространства $F$.

Положим $q_1 = p_1$ и найдем ненулевой вектор $\chi_1 \in F$ и функционал $S_1 \in F^*$, для которых

$$q_1(\chi_1) = 0, \qquad \langle S_1, \chi \rangle = 1.$$

Существуют номер $k \in \mathbb{N}$ и число $c_1 > 0$ такие, что

$$|\langle S_1, \chi \rangle| \leqslant c_1 p_k(\chi), \qquad \chi \in F.$$

Так как функционал $S_1$, очевидно, не ограничен по полунорме $p_1$, то $k > 1$, и пусть $q_2 = p_k$.

Продолжая этот процесс, построим последовательности векторов $\chi_j \in F$, положительных чисел $c_j$ и полунорм $q_j$, определяющих топологию пространства $F$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$q_j(\chi_j) = 0, \quad \langle S_j, \chi_j \rangle = 1, \quad |\langle S_j, \chi \rangle| \leqslant c_j q_{j+1}(\chi), \qquad \chi \in F, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Для чисел $j, k \in \mathbb{N}$, $j < k$, имеем

$$|\langle S_j, \eta_k ) \rangle| \leqslant c_j q_{j+1}(\eta_k) \leqslant c_j q_k(\eta_k) = 0,$$

поэтому $\langle S_j, \eta_k \rangle = 0$.

Используя теорему 2, найдем последовательности чисел $a_{j,k} \in \mathbb{C}$, $j, k \in \mathbb{N}$, для которых ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k}\eta_j$$

сходятся абсолютно в пространстве $F$ к векторам $\xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\langle S_j, \xi_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

В таком случае $a_{j,k} = 0$, $j, k \in \mathbb{N}$, $j > k$, и поэтому $p_k(\xi_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Для любых чисел $b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \xi_j$$

сходится абсолютно в пространстве $F$ к вектору $\eta$, удовлетворяющему системе (1.2). Несложно показать, что для множества $X = \{\xi_j : j \in \mathbb{N}\}$ пространство $\Sigma(X)$ замкнуто и $I \cap \Sigma(X) = \{0\}$, следовательно, $I \oplus \Sigma(X) = F$.

Предложение 4 полностью доказано.

Из полученного результата вытекает, что если на пространстве $F$ нет непрерывных норм, то в нем есть замкнутое дополняемое пространство, изоморфное пространству последовательностей $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Это теорема Бессаги–Пелчиньского (см. [6]).

Как показывают следующие рассуждения, в пространстве с непрерывной нормой этого быть не может.

Предложение 5. *Пусть на пространстве Фреше $F$ имеется непрерывная норма $p$.*

*Тогда любые бесконечномерные подпространства пространств $F$ и $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ не изоморфны.*

Доказательство. Предположим, что для некоторых бесконечномерных подпространств $P \subset F$ и $Q \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ существует изоморфизм. В таком случае найдется последовательность ненулевых векторов $\zeta_j \in Q$, $j \in \mathbb{N}$, причем номер первой ненулевой компоненты вектора $\zeta_j$ стремится к бесконечности при возрастании номера. Этой последовательности соответствует последовательность $\eta_j \in P$ и $p(\eta_j) > 0$, $j \in \mathbb{N}$.

В таком случае последовательность

$$\frac{\zeta_j}{p(\eta_j)}, \qquad j \in \mathbb{N},$$

стремится к нулевому вектору, а последовательность

$$\frac{\eta_j}{p(\eta_j)}, \qquad j \in \mathbb{N},$$

не стремится.

Полученное противоречие и доказывает предложение.

Пространства Фреше с непрерывной нормой обладают еще следующим свойством.

Предложение 6. *Пусть на пространстве Фреше $F$ имеется непрерывная норма $p$, система функционалов (1.1) является последовательностью Эйдельгейта, а замкнутое бесконечномерное подпространство $P \subset F$ таково, что пространство $I + P$ также замкнуто.*

*Тогда пространство $I \cap P$ бесконечномерно.*

Доказательство. Предположим, что это не верно и пространство $Q = I \cap P$ конечномерно. В таком случае найдется замкнутое подпространство $P_1$ пространства $P$, для которого $P = Q \oplus P_1$, поэтому пространство $P_1$ будет бесконечномерно, $I + P_1 = I + P$ и $I \cap P_1 = \{0\}$. Без ограничения общности можно считать выполненным равенство $P_1 = P$.

Обозначим через $A$ линейный непрерывный оператор из пространства $F$ на пространство $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, определенный по формуле

$$A\eta = (\langle S_1, \eta\rangle, \langle S_2, \eta\rangle, \dots), \qquad \eta \in F.$$

По теореме Майкла существует непрерывный оператор $g\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to F$, для которого $A(g(\zeta)) = \zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (см. [7]).

Покажем, что пространство $A(P)$ замкнуто.

Пусть последовательность $\zeta_n = A(\eta_n)$, $\eta_n \in P$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в пространстве $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ к вектору $\zeta$ и, следовательно, последовательность $g(\zeta_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в пространстве $F$ к вектору $g(\zeta)$. Так как $A(g(\zeta_n)) = A(\eta_n)$, то $g(\zeta_n) \in I + P$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому и $g(\zeta) \in I + P$. Из этого включения вытекает $\zeta = A(g(\zeta)) \in A(I + P) = A(P)$, и замкнутость пространства $A(P)$ доказана.

Итак, оператор $A$ инъективно отображает пространство Фреше $P$ на пространство Фреше $A(P)$, по теореме Банаха эти пространства изоморфны, что противоречит предложению 5.

Предложение доказано.

## § 4. Интерполяция в пространствах голоморфных функций

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для множеств $C_1, C_2 \subset \mathbb{C}^n$ положим

$$\rho(C_1, C_2) = \inf_{z_1 \in C_1,\, z_2 \in C_2} |z_1 - z_2|.$$

Для области $U$ пространства $\mathbb{C}^n$ через $H(U)$ будем обозначать пространство голоморфных в этой области функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Для компакта $K \subset U$ и числа $\varepsilon > 0$ будем полагать

$$p_K(f) = \max_K |f(z)|, \qquad f \in H(U),$$

$$K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \rho(z, K) \leqslant \varepsilon\}, \qquad \widehat{K} = \widehat{K}_U = \{z \in U \colon |f(z)| \leqslant p_K(f),\ f \in H(U)\}.$$

Если $\varepsilon < \rho(K, \partial U)$, а область $U$ голоморфно выпукла, то оба этих множества являются компактами области $U$.

Определение и свойства областей голоморфности можно найти в монографии [8].

Предложение 7. *Пусть заданы область голоморфности $U$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, дискретное множество точек $\mu_j$ в области $U$ и последовательность чисел $m_j \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}$. Определим систему функционалов $S_{j,\nu}$ на пространстве $H(U)$, действующих по правилу*

$$\langle S_{j,\nu}, f\rangle = \frac{\partial^{|\nu|} f(\mu_j)}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0^n, \quad |\nu| = \sum_{l=1}^n \nu_l \leqslant m_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

*Тогда эти функционалы образуют последовательность Эйдельгейта в пространстве $H(U)$.*

Доказательство. Для функционала

$$S = \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\nu| \leqslant m_j} a_{j,\nu} S_{j,\nu}$$

положим

$$N(S) = \Big\{ \mu_j \colon 1 \leqslant j \leqslant k,\ \sum_{|\nu| \leqslant m_j} |a_{j,\nu}| > 0 \Big\}.$$

Если $N(S) \neq \varnothing$, то, как несложно показать, найдутся число $s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant s \leqslant k$, и мультииндекс $\nu^0$, $|\nu^0| \leqslant m_s$, такие, что $a_{s,\nu^0} \neq 0$ и для любого мультииндекса $\nu$, $|\nu| \leqslant m_s$, с условием $a_{s,\nu} \neq 0$ имеют место неравенства $\nu_l \leqslant \nu_l^0$, $l = 1, \dots, n$. Положим

$$g_j(z) = \frac{(\overline{\mu_{j,1} - \mu_{s,1}})(z_1 - \mu_{s,1}) + \dots + (\overline{\mu_{j,n} - \mu_{s,n}})(z_n - \mu_{s,n})}{|\mu_j - \mu_s|^2},$$
$$1 \leqslant j \leqslant k, \qquad j \neq s.$$

Многочлен

$$g(z) = (z_1 - \mu_{s,1})^{\nu_1^0} \cdots (z_n - \mu_{s,n})^{\nu_n^0} \prod_{1 \leqslant j \leqslant k,\, j \neq s} g_j^{m_j+1}$$

будет удовлетворять соотношениям

$$\langle S, g \rangle = \langle S_{s,\nu^0}, g \rangle = \nu_1^0! \cdots \nu_n^0! \neq 0,$$

поэтому заданная система функционалов линейно независима.

Покажем теперь, что в случае любого компакта $K \subset U$, $\widehat{K} = K$, найдется число $\varepsilon > 0$, для которого граница множества $\widehat{K}_\varepsilon$ не содержит точек последовательности $\{\mu_j \colon j \in \mathbb{N}\}$.

Действительно, в противном случае, как несложно показать, существуют монотонно убывающая к нулю последовательность чисел $\{\varepsilon_l \colon l \in \mathbb{N}\}$ и элемент $\mu$ множества $\{\mu_j \colon j \in \mathbb{N}\}$, для которых

$$\mu \in \partial \widehat{K}_{\varepsilon_l}, \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Для произвольной функции $f \in H(U)$ и числа $\delta > 0$ найдется номер $l \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\max_{K_{\varepsilon_l}} |f| \leqslant \max_K |f| + \delta;$$

в таком случае, очевидно, $f(\mu) \leqslant \max_K |f| + \delta$, а так как число $\delta$ любое, то $|f(\mu)| \leqslant \max_K |f|$. Таким образом, $\mu \in \widehat{K} = K$ и точка $\mu$ будет внутренней для всех компактов $\widehat{K}_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \rho(K, \partial U)$. Получили противоречие.

Из полученного результата заключаем, что область $U$ можно исчерпать возрастающей последовательностью компактов с непустой внутренностью $K_j$, $j \in \mathbb{N}$, со свойством

$$\widehat{K}_j = K_j, \qquad \partial \widehat{K}_j \cap \{\mu_l \colon l \in \mathbb{N}\} = \varnothing,$$

для любого $j \in \mathbb{N}$, поэтому система полунорм

$$p_j(f) = \max_{z\in K_j} |f(z)|, \qquad j \in \mathbb{N},$$

будет определяющей для пространства $H(U)$.

Пусть $K \subset U$ – один из компактов вышеприведенной последовательности, порождающий полунорму $p$. Очевидно, что если выполнено включение $N(S) \subset K$, то функционал $S$ ограничен по этой полунорме. Покажем обратное.

Будем предполагать, что $\mu_s \in N(S) \setminus K$, а мультииндекс $\nu^0$ и многочлен $g$ такие же, как выше. Как несложно показать, для любого числа $M > 0$ можно найти функцию $f \in H(U)$ со свойством $f(\mu_s) > Mp(f)$, поэтому

$$\langle S, gf\rangle = \langle S_{s,\nu^0}, gf\rangle = \nu_1^0! \cdots \nu_n^0!\, f(\mu_s) > \nu_1^0! \cdots \nu_n^0!\, Mp(f) \geqslant \frac{\nu_1^0! \cdots \nu_n^0!\, Mp(gf)}{p(g)},$$

из чего следует неограниченность функционала $S$ по полунорме $p$.

Таким образом, подпространство линейных комбинаций системы функционалов (4.1), ограниченных по этой полунорме, конечномерно.

Предложение 7 доказано.

Назовем *гекс-паркетом* множество замкнутых правильных шестиугольников комплексной плоскости такое, что вся плоскость оказывается покрытой этими шестиугольниками и любые два шестиугольника этого множества либо имеют общую сторону, либо не имеют общих точек.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Граница объединения конечного числа элементов гекс-паркета состоит из конечного множества непересекающихся замкнутых ломаных линий без самопересечений.*

Доказательство. Обозначим через $H$ конечное множество шестиугольников некоторого гекс-паркета. Граница объединения этих шестиугольников, очевидно, состоит из сторон шестиугольников множества $H$, которые принадлежат лишь одному шестиугольнику. Несложно показать, что любая крайняя точка одной из таких сторон является общей ровно для двух сторон границы. В таком случае, как легко видеть, искомая граница будет объединением некоторого конечного множества ломаных без самопересечений и общих точек.

В самом деле, если мы, начав с какой-нибудь точки границы, двигаемся по границе в одном и том же направлении, то первой из точек границы, в которую мы попадем вторично, окажется точка, из которой началось наше движение. Пройденная таким образом часть границы есть жорданова кривая. Никакая другая часть границы не может пересечь эту жорданову кривую.

Замечание 1. Это утверждение не верно для квадратной решетки (см. [9]).

Лемма 2. *Для любой области $U \subset \mathbb{C}$ и произвольного компакта $K \subset U$ найдется ограниченная область $D$ с границей, состоящей из конечного числа замкнутых ломаных без самопересечений и пересечений, такая, что выполнены условия $K \subset D$, $\overline{D} \subset U$.*

Доказательство. Покроем компакт $K$ конечным множеством замкнутых кружков, лежащих в области $U$, и соединим их между собой конечным числом кривых, также лежащих в этой области. Получим связный компакт $K_1$ со свойством $K \subset K_1 \subset U$ и обозначим через $\varepsilon$ расстояние этого компакта до границы области $U$.

Для некоторого гекс-паркета со сторонами длины $\varepsilon/2$ выделим множество шестиугольников, которые имеют общие точки с компактом $K_1$. Ясно, что все эти шестиугольники лежат в области $U$ и каждая точка компакта $K_1$ является внутренней для объединения от одного до трех шестиугольников. Обозначим через $D$ внутренность объединения этих шестиугольников. Множество $D$ является связным, иначе компакт $K_1$ пересекался бы с двумя открытыми множествами без общих точек, что противоречит связности компакта $K_1$.

Область $D$ удовлетворяет нужным условиям.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть границы областей $U_1$ и $U_2$ комплексной плоскости не пересекаются, а область $U_1$ ограничена или внешность некоторого круга лежит в ней.*

*Тогда множество $U_1 \cap U_2$ будет связным.*

Доказательство. Будем считать, что $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ и точки $z_1$, $z_2$ принадлежат пересечению этих областей. Надо показать, что эти точки можно соединить кривой, лежащей в пересечении областей $U_1$ и $U_2$.

Допустим вначале ограниченность области $U_1$ и найдем число $\varepsilon$, которое меньше расстояния между границами областей $U_1$ и $U_2$, а расстояние от точек $z_1$ и $z_2$ до границы области $U_1$ больше $\varepsilon$.

Множество точек области $U_1$ с расстоянием до границы области $U_1$ не более $\varepsilon$ образует компакт $K$ этой области, и точки $z_1, z_2$ принадлежат ему. Используя лемму 2 для области $U_1$ и компакта $K$, найдем ограниченную область $D$, граница которой состоит из замкнутых ломаных $C_1, \dots, C_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Из элементарных свойств связных множеств несложно вывести, что одна из ломаных, скажем $C_1$, лежит вне остальных, ломаные $C_2, \dots, C_k$ лежат внутри ломаной $C_1$, каждая ломаная $C_j$ лежит во внешности ломаной $C_k$, $j, k = 2, \dots, n$, $j \neq k$, а область $D$ совпадает с множеством точек, лежащих внутри ломаной $C_1$, но вне ломаных $C_2, \dots, C_k$.

Так как граница области $D$ не пересекается с компактом $K$, то каждая точка этой границы лежит от границы области $U$ на расстоянии меньше $\varepsilon$ и, следовательно, ломаные $C_1, \dots, C_k$ не пересекаются с границей области $U_2$.

Соединим точки $z_1$ и $z_2$ кривой $\gamma$, лежащей в области $U_2$, и предположим, что эта кривая не лежит целиком в области $U_1$. В таком случае кривая $\gamma$ должна пересечь границу области $D$, и пусть $w_1 \in \mathbb{C}$ – первая точка при движении по кривой $\gamma$ от $z_1$ до $z_2$, которая принадлежит некоторой ломаной $C_j$, $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant k$. Таким образом, ломаная $C_j$ имеет общие точки с областью $U_2$ и не пересекается с ее границей, поэтому эта ломаная целиком лежит в области $U_2$.

Так как точка $z_2$ лежит в области $D$, то найдется последняя точка $w_2$ кривой $\gamma$, принадлежащая ломаной $C_j$. Заменим кусок кривой $\gamma$ от точки $w_1$ до точки $w_2$ на кусок ломаной $C_j$ и, продолжив этот процесс, получим кривую на множестве $U_1 \cap U_2$, соединящую точки $z_1$ и $z_2$.

Предположим теперь, что существует число $r > 0$, для которого множество $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \geqslant r\}$ лежит в области $U_1$. Возьмем точку $z_0 \in U_1 \cap U_2$, $z_1 \neq z_0 \neq z_2$, и рассмотрим функцию $f(z) = (z - z_0)^{-1}$. Эта функция отобразит области $U_1$ и $U_2$ на области $G_1$ и $G_2$ соответственно, причем найдется число $r_1 > 0$ такое, что

$$\{w \in \mathbb{C}\colon |w| \geqslant r_1\} \subset G_1 \cap G_2.$$

Множество $G_3 = G_1 \cup \{0\}$ также будет областью, а $0 \in \partial G_2$.

Пусть теперь для числа $r_2$ выполнено неравенство

$$r_2 > \max\{r_1, |f(z_1)|, |f(z_2)|\},$$

тогда, очевидно, множество $G = \{w \in G_3\colon |w| < r_2\}$ будет ограниченной областью, граница ее не пересекается с границей области $G_2$ и по доказанному выше найдется кривая на множестве $G \cap G_2$, соединяющая точки $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Применение обратного отображения завершает доказательство леммы.

Следствие 7. *Для области $U \subset \mathbb{C}$ и компакта $K \subset U$ совокупность компонент связности множества $U \setminus K$ совпадает с системой пересечений области $U$ с компонентами связности множества $\mathbb{C} \setminus K$.*

Доказательство. Каждая компонента связности множества $U \setminus K$ лежит в одной из компонент связности множества $\mathbb{C} \setminus K$, поэтому для произвольной компоненты $O$ этого множества надо показать, что $O \cap U \neq \varnothing$ и множество $O \cap U$ связно.

Первое свойство несложно вывести из включений $\partial O \subset K \subset U$, откуда также следует соотношение $\partial O \cap \partial U = \varnothing$. Область $O$, очевидно, либо ограничена, либо содержит внешность некоторого круга, так что и второе свойство выполнено.

Следствие 8. *Пусть $K_1$ и $K_2$ – непересекающиеся компакты комплексной плоскости, множества $O_{j,m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant \omega_j$, $\omega_j \in \mathbb{N}_\infty$, являются компонентами связности компакта $K_j$, $j = 1, 2$.*

*Тогда система связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$ совпадает с системой непустых множеств из совокупности*

$$O_{1,k} \cap O_{2,l}, \qquad k, l \in \mathbb{N}, \quad k \leqslant \omega_1, \quad l \leqslant \omega_2. \tag{4.2}$$

Доказательство. Из включений $\partial O_{j,m} \subset K_j$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant \omega_j$, $j = 1, 2$, следуют соотношения $\partial O_{1,k} \cap \partial O_{2,l}$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k \leqslant \omega_1$, $l \leqslant \omega_2$, и имеют место равенства

$$\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2) = \bigcup_{k \leqslant \omega_1,\, l \leqslant \omega_2} (O_{1,k} \cap O_{2,l}),$$

элементы совокупности (4.2) попарно не пересекаются и непустые ее множества являются областями, из чего и следует искомое.

Для области $U \subset \mathbb{C}$ и компакта $K \subset U$ неограниченную связную компоненту множества $\mathbb{C} \setminus K$ назовем *внешностью* компакта $K$, а любую ограниченную связную компоненту того же множества назовем *внутренней областью* компакта $K$.

Лемма 4. *Пусть $K_1$ и $K_2$ – компакты комплексной плоскости, множества $O_{j,m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant \omega_j$, $\omega_j \in \mathbb{N}_\infty$, являются компонентами связности множества $\mathbb{C} \setminus K_j$, $j = 1, 2$, причем область $O_{1,1}$ не ограничена и содержит компакт $K_2$.*

*Тогда система связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$ совпадает с системой множеств*

$$O_{1,k}, \quad O_{1,1} \cap O_{2,l}, \qquad k, l \in \mathbb{N}, \quad 1 < k \leqslant \omega_1, \quad l \leqslant \omega_2.$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что компакт $K_1$ и любая внутренняя область $O$ этого компакта не пересекаются с компактом $K_2$, поэтому область $O$ будет лежать в одной из областей системы $O_{2,l}$, $l \leqslant \omega_2$, и искомое вытекает из следствий 7 и 8.

Следствие 9. *Пусть компакты $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ лежат во внешности друг друга.*

*Тогда система связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$ совпадает с совокупностью внутренних областей компактов $K_1$ и $K_2$ и пересечения их внешностей.*

Лемма 5. *Для плоского компакта $K$ объединение его с произвольной системой внутренних областей этого компакта также является компактом.*

Доказательство. Обозначим через $K_1$ вышеупомянутое объединение.

Найдется число $r > 0$ такое, что круг $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant r\}$ будет содержать компакт $K$; в таком случае внешность этого круга лежит во внешности компакта $K$ и, следовательно, все его внутренние области содержатся в том же круге.

Множество $\mathbb{C} \setminus K_1$ открыто, так как оно является объединением открытых компонент множества $\mathbb{C} \setminus K$, поэтому множество $K_1$ замкнуто, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Аналогичное доказательству леммы 5 рассуждение для областей в теореме 1.3.3 монографии [8] неверно. Например, если

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}, \qquad K_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\},$$

то множество $\Omega \setminus K_1$ открыто, а множество $K_1$ замкнуто лишь в области $\Omega$, но не замкнуто на всей плоскости.

Лемма 6. *Для компакта $K$ и области $U$, $K \subset U \subset \mathbb{C}$, пересечение внешности компакта $K$ с областью $U$ не будет относительно компактно в этой области.*

Доказательство. Обозначим через $O$ внешность компакта $K$ и для произвольной точки $z \in K$ положим $t_1 = \max\{t \geqslant 0 \colon z + it \in K\}$. Как легко видеть, луч $\{z + it \colon t \geqslant t_1\}$ лежит в области $O$ и для некоторого числа

$\varepsilon > 0$ интервал $(z + it_1, z + it_1 + i\varepsilon)$ содержится в области $U$. Если множество $J = \{t\colon t > t_1,\ z + it \in U\}$ неограниченно, то и область $U \cap O$ будет неограниченной, в противном случае положим $t_2 = \sup J$. Точка $z + it_2$ будет предельной для области $U \cap O$, но не принадлежит области $U$, так что и в этом случае интересующая нас область не будет относительно компактной в области $U$.

Для компакта $K$ области $U \subset \mathbb{C}$ через $\widehat{K}$ будем обозначать объединение компакта $K$ со всеми внутренними областями этого компакта, которые содержатся в области $U$.

Ясно, что внешности компактов $K$ и $\widehat{K}$ одинаковые, а из следствия 7 и лемм 5, 6 следует, что множество $\widehat{K}$ будет компактом области $U$ и ни одна связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \widehat{K}$ не является относительно компактной в области $U$, и по теореме Рунге (см. [8; теорема 22]) это определение эквивалентно определению в начале параграфа.

Теорема 4. *Пусть заданы область $U \subset \mathbb{C}$, набор чисел $m_j \in \mathbb{N}$, последовательности функционалов $S_{j,1}, \dots, S_{j,m_j} \in H^*(U)$ и компактов*

$$K_j \subset U, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

*такие, что для каждого числа $l \in \mathbb{N}$ функционалы $S_{l,1}, \dots, S_{l,m_l}$ линейно независимы и ограничены по полунорме $p_{K_l}$, компакт $K_s$ лежит во внешности компакта $K_l$, $s \in \mathbb{N}$, $s \neq l$, и любой компакт области $U$ может пересекаться лишь с конечным числом компактов системы (4.3).*

*Тогда система функционалов $S_{j,k}$, $k = 1, \dots, m_j$, $j \in \mathbb{N}$, будет последовательностью Эйдельгейта в пространстве $H(U)$.*

Доказательство. Покажем вначале, что условия теоремы на компакты $K_j$ будут выполнены и для последовательности компактов $\widehat{K}_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Пусть заданы числа $l, s \in \mathbb{N}$, $s \neq l$, и $O$ – одна из внутренних областей компакта $K_l$, не обязательно лежащая в области $U$. Так как компакт $K_s$ лежит во внешности компакта $K_l$, то эти компакты не пересекаются и $K_s \cap O = \varnothing$. В таком случае область $O$ лежит в области $\Omega$ – одной из связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus K_s$ (см. [10]).

Допустим, что $\Omega$ – внутренняя область компакта $K_s$ и $O \neq \Omega$, поэтому $\partial O \cap \Omega \neq \varnothing$ (см. [11; формула (3.19.9)]). Но граница области $O$ лежит в компакте $K_l$ и не может пересекаться с внутренними областями компакта $K_s$. Если же $O = \Omega$, то $\partial O \subset K_s$, чего опять же быть не может.

Таким образом, множество $\Omega$ является внешностью компакта $K_s$ и первое условие доказано.

Докажем теперь, что любой компакт $K$ области $U$ будет лежать во внешности компактов $\widehat{K}_j$, $j \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера.

Действительно, в противном случае найдутся последовательности чисел $n_j \in \mathbb{N}$, $n_j < n_{j+1}$, и внутренних областей $O_j$ компактов $K_{n_j}$ со свойством $K \cap O_j \neq \varnothing$, $j \in \mathbb{N}$. В таком случае, очевидно, существуют число $z_0 \in U$ и последовательность чисел $z_j \in O_j$, $j \in \mathbb{N}$, для которых

$$\lim_{j \to \infty} z_j = z_0.$$

Пусть число $\varepsilon > 0$ таково, что круг $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$ лежит в области $U$. Начиная с некоторого номера будут выполнены включения $z_j \in D$, поэтому, как и выше, либо $D \subset O_j$, либо $D \cap \partial O_j \neq \varnothing$. Но мы доказали равенство $O_l \cap O_s = \varnothing$, $l, s \in \mathbb{N}$, $l \neq s$, и первое соотношение невозможно, а второе неравенство противоречит второму условию на систему компактов $K_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Итак, условия на последовательность $\widehat{K}_j$ проверены, и в дальнейшем будем считать, что имеют место равенства $\widehat{K}_j = K_j$, внешность компакта $K_j$ обозначим через $O_{j,1}$, а систему $O_{j,s}$, $1 < s \leqslant \omega_j$, $\omega_j \in \mathbb{N}_\infty$, считаем состоящей из всех внутренних областей компакта $K_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь произвольный компакт $V$ области $U$ и покажем, что можно найти компакт $K$, $V \subset K \subset U$, и число $n \in \mathbb{N}$, для которых $K_1 \subset K, \ldots, K_{n-1} \subset K$, а компакты $K \cup K_n \cup \cdots \cup K_j$ не имеют внутренних областей, лежащих в области $U$, и $K \cap K_j = \varnothing$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant n$.

Как доказано выше, найдется число $l \in \mathbb{N}$ такое, что компакт $V$ будет лежать во внешности компактов $K_j$ для $j \geqslant l$, поэтому, очевидно, и компакт

$$V_1 = V \cup \bigcup_{s=1}^{l-1} K_s$$

лежит во внешности тех же компактов.

Пусть число $\varepsilon > 0$ такое, что компакт $V_1 + \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant \varepsilon\}$ лежит в области $U$; в таком случае этот компакт будет лежать во внешности компактов системы (4.3) начиная с некоторого номера. Найдется число $\varepsilon_1$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$, для которого компакт $V_1 + \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant \varepsilon_1\}$ будет лежать во внешности компактов той же системы уже в случае $j \geqslant l$.

Построим на плоскости гекс-паркет из правильных шестиугольников со сторонами длины $\varepsilon_1/2$ и обозначим через $G$ объединение элементов этого паркета, которые имеют общие точки с компактом $V_1$. Ясно, что множество $G$ является компактом области $U$, лежащим во внешности компактов системы (4.3) для $j \geqslant l$, а множество $\mathbb{C} \setminus G$ имеет конечное число связных компонент $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, $k \in \mathbb{N}$, и пусть область $\Omega_1$ неограниченна.

Рассмотрим теперь последовательность компактов

$$G_s = G \cup \bigcup_{j=l}^{l+s-1} K_j, \qquad s \in \mathbb{N}_0,$$

и предположим, что для некоторого номера $s_1 \in \mathbb{N}_0$ выполнены соотношения

$$\widehat{G}_s = G_s, \qquad s \in \mathbb{N}_0, \quad s < s_1, \quad \widehat{G}_{s_1} \neq G_{s_1}.$$

Применяя лемму 4 и следствие 9, найдем, что совокупность связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus G_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, совпадает с системой множеств

$$O_{l,r_1}, O_{l+1,r_2}, \ldots, O_{l+s-1,r_s}, \qquad 1 < r_1 \leqslant \omega_1, \quad \ldots, \quad 1 < r_s \leqslant \omega_s, \tag{4.4}$$

$$\Omega_2 \cap \bigcap_{j=l}^{l+s-1} O_{j,1}, \quad \ldots, \quad \Omega_k \cap \bigcap_{j=l}^{l+s-1} O_{j,1}, \tag{4.5}$$

$$\Omega_1 \cap \bigcap_{j=l}^{l+s-1} O_{j,1}. \tag{4.6}$$

Так как произвольная внутренняя область любого компакта $K_j$, $j \in \mathbb{N}$, не содержится в области $U$, то внутренняя область компакта $G_s$, лежащая в области $U$, может быть лишь среди областей (4.5).

Будем считать, что

$$\bigcup_{t=2}^{k_1}\biggl(\Omega_t \cap \bigcap_{j=l}^{l+s_1-1} O_{j,1}\biggr) = E \subset U, \qquad 1 < k_1 \leqslant k,$$

и $\widehat{G}_{s_1} = G_{s_1} \cup E$.

Теперь будем рассматривать последовательность компактов $G_s \cup E$, $s \in \mathbb{N}$, $s > s_1$, и опять предположим, что для некоторого номера $s_2 \in \mathbb{N}$, $s_2 > s_1$, выполнены соотношения

$$\widehat{G_s \cup E} = G_s \cup E, \qquad s \in \mathbb{N}, \quad s_1 < s < s_2, \quad \widehat{G_{s_2} \cup E} \neq G_{s_2} \cup E.$$

Имеем

$$\mathbb{C} \setminus (G_{s_2} \cup E) = (\mathbb{C} \setminus G_{s_2}) \setminus E, \tag{4.7}$$

и множество в скобках справа является объединением областей (4.4), (4.5) и (4.6) для $s = s_2$.

Область $O_{j,r}$, $l \leqslant j \leqslant l + s_2 - 1$, $1 < r \leqslant \omega_j$, лежит в одной из областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$, не пересекается с множеством $E$ для $j \leqslant l + s_1 - 1$, а для $j > l + s_1 - 1$ имеем

$$O_{j,r} \subset \bigcap_{j=l}^{l+s_1-1} O_{j,1}.$$

В таком случае эта область либо содержится во множестве $E$, либо не пересекается с ним.

Очевидно, для $s = s_2$ множество $E$ содержит первые $k_1 - 1$ областей системы (4.5) и не пересекается с остальными, а также не пересекается с областью (4.6).

Из этих соображений вытекает, что компоненты связности множества (4.7) состоят из областей

$$\Omega_{k_1+1} \cap \bigcap_{j=l}^{l+s_2-1} O_{j,1}, \quad \dots, \quad \Omega_k \cap \bigcap_{j=l}^{l+s_2-1} O_{j,1}, \tag{4.8}$$

части областей системы (4.4) и области (4.6) для $s = s_2$.

Как и выше, внутренняя область компакта $G_{s_2} \cup E$, лежащая в области $U$, может быть лишь среди областей (4.8), и можно продолжить наши рассуждения дальше.

Ясно, что менее чем через $k$ шагов мы найдем компакт $V_2$, $V \subset V_2 \subset U$, и число $l_1 \in \mathbb{N}$, для которых компакты $V_2 \cup K_{l_1} \cup \dots \cup K_{l_1+j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, не имеют внутренних областей, лежащих в области $U$.

Компакт $V_2$ может пересекаться лишь с конечным числом компактов последовательности $K_j$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant l_1$, и пусть начиная с номера $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant l_1$ пересечений не будет. В таком случае компакт $K = V_2 \cup K_{l_1} \cup \dots \cup K_{n-1}$ и число $n$ удовлетворяют нужным условиям.

Рассмотрим произвольный функционал вида

$$S = \sum_{j=1}^{r} \sum_{s=1}^{m_j} \alpha_{j,s} S_{j,s} = \sum_{j=1}^{r} T_j, \tag{4.9}$$

где $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_{j,s} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, r$, $s = 1, \ldots, m_j$. Если $r < n$, то, очевидно, этот функционал будет ограничен по полунорме $p_K$.

Предположим теперь, что $r \geqslant n$ и $|\alpha_{r,1}| + \ldots + |\alpha_{r,m_j}| > 0$ и по условиям теоремы $S \neq 0$, поэтому найдется функция $f \in H(U)$, удовлетворяющая равенству $\langle S, f \rangle = 1$.

Выберем два открытых множества $D_1$ и $D_2$ со свойствами $D_1, D_2 \subset U$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, $K \cup K_n \cup \cdots \cup K_{r-1} = K_0 \subset D_1$, $K_r \subset D_2$, и зададим функцию $\psi$ соотношениями $\psi(z) = 0$, $z \in D_1$, $\psi(z) = f(z)$, $z \in D_2$.

По теореме Рунге (см. [8]) функцию $g$ можно равномерно приблизить на компакте $K_0 \cup K_r$ функциями пространства $H(U)$, а по условиям нашей теоремы найдется число $c > 0$ такое, что для любой функции $g \in H(U)$ выполняются неравенства

$$\left| \left\langle \sum_{j=1}^{r-1} T_j, g \right\rangle \right| \leqslant c p_{K_0}(g), \qquad |\langle T_r, g \rangle| \leqslant c p_{K_r}(g).$$

Для числа $\varepsilon > 0$ найдем функцию $f_0 \in H(U)$, которая отличается от функции $\psi$ на компакте $K_0 \cup K_r$ не более чем на $\varepsilon$, поэтому

$$p_K(f_0) \leqslant \varepsilon, \qquad \left| \left\langle \sum_{j=1}^{r-1} T_j, f_0 \right\rangle \right| \leqslant c\varepsilon,$$

$$|\langle T_r, f_0 \rangle| \geqslant |\langle T_r, f \rangle| - |\langle T_r, (f_0 - f) \rangle| \geqslant 1 - c\varepsilon,$$

и, следовательно,

$$|\langle S, f_0 \rangle| \geqslant 1 - 2c\varepsilon.$$

Из этих неравенств, очевидно, вытекает неограниченность функционала $S$ по полунорме $p_K$.

Таким образом, функционалы вида (4.9), ограниченные по полунорме $p_K$, образуют конечномерное пространство. Тем более это будет верно для полунормы $p_V$ и, как легко видеть, для произвольной непрерывной на пространстве $H(U)$ полунормы.

Полагая $K = \varnothing, n = 1$ и рассуждая, как и выше, несложно вывести линейную независимость интересующей нас системы функционалов.

Теорема 4 доказана.

Для натурального числа $m$ и произвольного множества $A \subset \mathbb{C}^m$ назовем вектор $\sigma \in \mathbb{C}^m$, $|\sigma| = 1$, *предельным направлением* для множества $A$, если для некоторой последовательности точек $\lambda_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, имеют место равенства

$$\lim_{j \to \infty} |\lambda_j| = \infty, \qquad \lim_{j \to \infty} \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} = \sigma. \tag{4.10}$$

Как несложно показать, множество всех предельных направлений множества $A$ является замкнутым подмножеством единичной сферы.

Обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных вещественных чисел.

Предложение 8. *Пусть заданы дискретное множество точек* $\mu_j \in \mathbb{R}^m_+$ *и последовательность векторов* $\lambda_j \in \mathbb{R}^m_+$, $j \in \mathbb{N}$, *причем множество предельных направлений этой последовательности совпадает с множеством*

$$\{\sigma \in \mathbb{R}^m_+ \colon |\sigma| = 1\}. \tag{4.11}$$

*Тогда для произвольных чисел* $b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *найдется последовательность чисел* $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *такая, что ряд экспонент*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \tag{4.12}$$

*сходится абсолютно в пространстве* $H(\mathbb{C}^m)$ *к некоторой функции* $f \in H(\mathbb{C}^m)$ *и*

$$f(\mu_j) = b_j, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Предположим вначале, что для любого числа $R > 0$ на сфере $\{x \in \mathbb{R}^m_+ \colon |x| = R\}$ лежит не более одной точки множества $\{\mu_j \colon j \in \mathbb{N}\}$, поэтому без ограничения общности можно считать выполненным условие $|\mu_j| < |\mu_{j+1}|$, и пусть $R_j = |\mu_j|$, $j \in \mathbb{N}$.

Возьмем в качестве множества (2.15) последовательность экспонент с показателями $\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, а в качестве полунормы $q_1$ возьмем функцию, тождественно равную нулю, так что функционал $S_1$ будет не ограничен по этой полунорме на множестве $X$.

Введем теперь на пространстве $H(\mathbb{C}^m)$ полунормы $q_j$ по правилу

$$q_j(f) = \max_{|z| \leqslant R_{j-1}} |f(z)|, \qquad f \in H(\mathbb{C}^m), \quad j \in \mathbb{N}, \quad j > 1.$$

Ясно, что функционал $S_j$ будет ограничен по полунорме $p_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, и осталось показать неограниченность функционала $S_j$ по полунорме $p_j$ на множестве $X$, $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$.

Для точки

$$\sigma = \frac{\mu_l}{|\mu_l|}, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad l > 1,$$

по условию найдется последовательность натуральных чисел $n_j$, $j \in \mathbb{N}$, со свойством (4.10). Как несложно показать,

$$\begin{aligned} \frac{q_l(\xi_{n_j})}{\langle S_l, \xi_{n_j} \rangle} &= \frac{e^{R_{l-1}|\lambda_{n_j}|}}{e^{\lambda_{n_j}\mu_l}} = e^{R_{l-1}|\lambda_{n_j}| - \lambda_{n_j}\mu_l} \\ &= \exp\left(|\lambda_{n_j}|\left(R_{l-1} - R_l \frac{\lambda_{n_j}\sigma}{|\lambda_{n_j}|}\right)\right); \end{aligned}$$

выражение во внутренних круглых скобках сколь угодно близко к числу $R_l - R_{l-1}$ для достаточно больших $j$, поэтому

$$\lim_{j \to \infty} \frac{q_l(\xi_{n_j})}{\langle S_l, \xi_{n_j} \rangle} = 0$$

и все условия теоремы 2 выполнены.

Займемся теперь общим случаем.

Точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от точек $\mu_j$ и $\mu_n$, $j,n \in \mathbb{N}$, $j \neq n$, лежат на гиперплоскости $\Pi_{j,n}$, проходящей через середину отрезка $[\mu_j, \mu_n]$ и перпендикулярной ему.

По теореме Бэра найдется точка

$$\mu_0, \qquad -\mu_0 \in \mathbb{R}^m_+, \quad \mu_0 \notin \bigcup_{j,n\in\mathbb{N},\, j<n} \Pi_{j,n}.$$

В таком случае точки $\mu_j - \mu_0$ будут расположены на разных расстояниях от начала координат и, как доказано выше, найдутся числа $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых ряд экспонент

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{\lambda_n z}$$

сходится абсолютно в пространстве $H(\mathbb{C}^m)$ к некоторой функции $g \in H(\mathbb{C}^m)$ и $g(\mu_j - \mu_0) = b_j$, $j \in \mathbb{N}$. Ясно, что последовательность чисел

$$a_n = \alpha_n e^{-\lambda_n \mu_0}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

будет обладать нужными свойствами.

Предложение 8 доказано.

Приведем примеры множеств, для которых применимо предложение 8.

Предложение 9. *Пусть последовательность положительных векторов*

$$\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \omega_{2,k_2}, \dots, \omega_{m,k_m}), \qquad k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m, \tag{4.14}$$

*такова, что*

$$\lim_{j\to\infty} \omega_{l,j} = +\infty, \qquad l = 1, 2, \dots, m,$$
$$\lim_{j\to\infty} \frac{\omega_{l,j+1}}{\omega_{l,j}} = 1, \qquad l = 2, \dots, m.$$

*Тогда множество предельных направлений последовательности* (4.14) *совпадает с множеством* (4.11).

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $\sigma$ множества (4.11) с ненулевыми координатами и для числа $n \in \mathbb{N}$ найдем номер $s_{2,n}$ со свойством

$$\sigma_1 \omega_{2,s_{2,n}} \leqslant \sigma_2 \omega_{1,n} < \sigma_1 \omega_{2,s_{2,n}+1}.$$

Далее находим числа $s_{3,n}, \dots, s_{m,n}$ такие, что

$$\sigma_2 \omega_{3,s_{3,n}} \leqslant \sigma_3 \omega_{2,s_{2,n}} < \sigma_2 \omega_{3,s_{3,n}+1}, \qquad \dots,$$
$$\sigma_{m-1} \omega_{m,s_{m,n}} \leqslant \sigma_m \omega_{m-1,s_{m-1,n}} < \sigma_{m-1} \omega_{m,s_{m,n}+1}.$$

Если число $n$ стремится к бесконечности, то, очевидно, и числа $s_{2,n}, \dots, s_{m,n}$ будут стремиться к бесконечности, поэтому из приведенных неравенств получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{1,n}}{\omega_{2,s_{2,n}}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \qquad \dots, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{m-1,s_{m-1,n}}}{\omega_{m,s_{m,n}}} = \frac{\sigma_{m-1}}{\sigma_m},$$

из чего несложно вывести соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\omega_{1,n},\omega_{2,s_{2,n}},\dots,\omega_{m,s_{m,n}})}{\sqrt{\omega_{1,n}^2+\omega_{2,s_{2,n}}^2+\dots+\omega_{m,s_{m,n}}^2}}=\sigma.$$

Так как множество предельных направлений замкнуто, то все точки множества (4.11) будут предельными направлениями множества (4.11).

Предложение доказано.

Покажем точность полученного результата.

Пример 1. Пусть в последовательности (4.11)

$$\omega_{1,k_1}=e^{k_1},\quad \omega_{2,k_2}=e^{k_2},\qquad k_1,k_2\in\mathbb{N},$$

а остальные координаты произвольны.

Как несложно видеть, любое предельное направление $\sigma$ этой последовательности, для которой $\sigma_1\sigma_2\neq 0$, будет удовлетворять соотношению $\sigma_2=\sigma_1 e^s$, $s\in\mathbb{Z}$, так что множество предельных направлений такой последовательности не может содержать множество (4.11).

Покажем, что при фиксированном наборе узлов можно обойтись для интерполяции множеством показателей с единственным предельным направлением.

Предложение 10. *Пусть последовательность точек $\mu_j$ и функционалов $S_j$, $j\in\mathbb{N}$, определены, как в предложении 8.*

*Тогда найдутся положительные числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ такие, что для любой последовательности $\varphi_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющей соотношениям*

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{|\varphi_n|}=\sigma,\quad \operatorname{Re}\sigma>0,$$

*и произвольных чисел $b_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, найдется последовательность чисел $a_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, для которой ряд экспонент*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{(\alpha_1 z_1+\dots+\alpha_m z_m)\varphi_n},\qquad z=(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C},\tag{4.15}$$

*сходится абсолютно в пространстве $H(\mathbb{C}^m)$ к некоторой функции $f\in H(\mathbb{C}^m)$, и выполнены равенства (4.13).*

Доказательство. Определим множество $\Pi_{j,k}$ как гиперплоскость пространства $\mathbb{C}^m$, ортогональную вектору $\mu_j-\mu_k$, $j\neq k$. По теореме Бэра найдется точка $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{R}^m$, $\alpha_l>0$, $l=1,\dots,m$, такая, что

$$\alpha\notin\bigcup_{j,k\in\mathbb{N},\,j\neq n}\Pi_{j,n};$$

в таком случае числа $\alpha\mu_j$ будут различны, положительны и, очевидно,

$$\lim_{j\to\infty}\alpha\mu_j=\infty.$$

Искомое будет теперь следовать из теоремы 1 статьи [12].

Пусть $C^\infty_\infty(\mathbb{R}^m)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на пространстве $\mathbb{R}^m$, все производные которых ограничены, с топологией, порожденной системой норм $p_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, заданных по правилу

$$p_j(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\ |k|\leqslant j} |f^{(k)}(x)|, \qquad f \in C^\infty_\infty(\mathbb{R}^m),$$

где $k \in \mathbb{N}_0^m$ – мультииндекс.

Следствие 10. *Пусть* $\pi_1, \dots, \pi_m$ *– различные простые числа и*

$$\lambda_n = (\pi_1^n, \dots, \pi_m^n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

*– вектор из степеней этих чисел.*

*Тогда для произвольных чисел* $b_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0^m$, *найдется последовательность чисел* $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *такая, что ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e^{i\lambda_n x}$$

*абсолютно сходится в пространстве* $C^\infty_\infty(\mathbb{R}^m)$ *к некоторой функции* $f$, *и*

$$f^{(k)}(0) = b_k, \qquad k \in \mathbb{N}_0^m.$$

Доказательство. Положим $\alpha_1 = \ln \pi_1$, $\alpha_2 = \ln\pi_2$, ..., $\alpha_m = \ln\pi_m$. Из основной теоремы арифметики следует, что числа $\alpha k$, $k \in \mathbb{N}_0^m$, различны. И если положить $\mu_k = k$, $k \in \mathbb{N}_0^m$, $\varphi_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, то из доказанного выше результата вытекает существование последовательности чисел $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, для которой ряд

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e^{(\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_m z_m)n}, \qquad z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m,$$

сходится абсолютно в пространстве $H(\mathbb{C}^m)$ к некоторой функции $f$, и

$$f(k) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^k = i^{-|k|} b_k, \qquad k \in \mathbb{N}_0^m.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e^{i\lambda_n x}. \tag{4.16}$$

Производная $k$-го порядка, где $k \in \mathbb{N}_0^m$, примененная почленно к этому ряду, дает

$$\sum_{n=1}^\infty a_n (i\lambda_n)^k e^{i\lambda_n x} = i^{|k|} \sum_{n=1}^\infty a_n \lambda_n^k e^{i\lambda_n x};$$

все эти ряды, очевидно, сходятся абсолютно и равномерно на всем пространстве $\mathbb{R}^m$, поэтому ряд (4.16) сходится абсолютно в пространстве $C^\infty_\infty(\mathbb{R}^m)$ к некоторой функции $g \in C^\infty_\infty(\mathbb{R}^m)$ и

$$g^{(k)}(0) = i^{|k|} \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\lambda_n k} = i^{|k|} i^{-|k|} b_k = b_k,$$

что и требовалось доказать.

Приведем еще один пример применения предложения 3.

Назовем дискретное множество точек $\mu_j$, $j \in \mathbb{N}$ в комплексной плоскости *последовательностью класса* $R$, если для любых последовательностей $m_j \in \mathbb{N}_0$, $b_{j,\nu} \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu \leqslant m_j$, и $\lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, причем

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{|\lambda_k|} = 1, \tag{4.17}$$

существует система чисел $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, для которой ряд экспонент

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z} \tag{4.18}$$

сходится абсолютно в пространстве $H(\mathbb{C})$ к некоторой функции $f \in H(\mathbb{C})$, и $f^{(\nu)}(\mu_j) = b_{j,\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu \leqslant m_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Множество точек* $\mu_j$, $j \in \mathbb{N}$, *является последовательностью класса* $R$ *тогда и только тогда, когда для любого числа* $d \in \mathbb{R}$ *множество* $\{j \in \mathbb{N}\colon \operatorname{Re}\mu_j \leqslant d\}$ *конечно и на прямой* $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z = d\}$ *лежит не более одной точки этой последовательности.*

Доказательство. В случае $\lambda_n = n$ сумма ряда (4.18) будет ограничена в любой левой полуплоскости, и если бы в одной из этих полуплоскостей было бесконечное число точек последовательности $\mu_j$, $j \in \mathbb{N}$, то не все интерполяционные задачи были бы разрешимы.

Предположим, что для некоторых индексов $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$, имеет место равенство $\operatorname{Re}\mu_k = \operatorname{Re}\mu_l$, и пусть $d = \operatorname{Im}(\mu_k - \mu_l)$. Но тогда для последовательности $\lambda_n = 2\pi n/d$ сумма ряда (4.18) будет принимать одинаковые значения в точках $\mu_k$ и $\mu_l$ и интерполяция не всегда возможна.

Пусть теперь последовательность $\mu_j$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяет вышеприведенным условиям, поэтому можно считать, что $\operatorname{Re}\mu_j < \operatorname{Re}\mu_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, и

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{Re}\mu_j = +\infty.$$

Возьмем в качестве множества (2.15) систему экспонент с показателями $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющими соотношениям (4.17), обозначим через $S_{j,\nu}$ функционалы, сопоставляющие функции $f \in H(\mathbb{C})$ значение

$$f^{(\nu)}(\mu_j), \qquad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \nu \leqslant m_j, \quad j \in \mathbb{N},$$

и определим на пространстве $H(\mathbb{C})$ последовательность полунорм $p_j$ по правилу

$$p_j(f) = \max_{z \in K_j} |f(z)|,$$

где

$$K_j = \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Re} z| \leqslant j,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant j\}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

В таком случае несложно показать, что

$$\langle S_{j,\nu}, \xi_k\rangle = |\lambda_k|^{\nu} e^{\lambda_k \mu_j}, \qquad p_j(\xi_k) = e^{j(|\operatorname{Re}\lambda_k| + |\operatorname{Im}\lambda_k|)}, \quad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \nu \leqslant m_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Зададим лексикографический порядок на множестве пар $(j,\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, $\nu\leqslant m_j$, $j\in\mathbb{N}$, и рассмотрим два соседних по этому порядку функционала, т.е. $S_{j,m_j}$ и $S_{j+1,0}$ либо $S_{j,\nu}$ и $S_{j,\nu+1}$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, $\nu<m_j$, $j\in\mathbb{N}$.

В первом случае для $k\in\mathbb{N}$ получим

$$\frac{|\langle S_{j,m_j},\xi_k\rangle|}{|\langle S_{j+1,0},\xi_k\rangle|}=\frac{|\lambda_k|^{m_j}e^{\operatorname{Re}\lambda_k\mu_j}}{e^{\operatorname{Re}\lambda_k\mu_{j+1}}}=|\lambda_k|^{m_j}e^{\operatorname{Re}\lambda_k(\mu_j-\mu_{j+1})}$$
$$=|\lambda_k|^{m_j}\exp\biggl(|\lambda_k|\operatorname{Re}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}(\mu_j-\mu_{j+1})\biggr),$$

а так как

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{Re}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}(\mu_j-\mu_{j+1})=\operatorname{Re}(\mu_j-\mu_{j+1})<0,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\langle S_{j,m_j},\xi_k\rangle|}{|\langle S_{j+1,0},\xi_k\rangle|}=0.$$

Во втором случае для $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$\frac{|\langle S_{j,\nu},\xi_k\rangle|}{|\langle S_{j,\nu+1},\xi_k\rangle|}=\frac{|\lambda_k|^{\nu}e^{\operatorname{Re}\lambda_k\mu_j}}{|\lambda_k|^{\nu+1}e^{\operatorname{Re}\lambda_k\mu_j}}=\frac{1}{|\lambda_k|},$$

так что и в этом случае

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\langle S_{j,\nu},\xi_k\rangle|}{|\langle S_{j,\nu+1},\xi_k\rangle|}=0.$$

Наконец, для $j,k,n\in\mathbb{N}$ найдем

$$\frac{p_n(\xi_k)}{|\langle S_{j,0},\xi_k\rangle|}=\frac{e^{n(|\operatorname{Re}\lambda_k|+|\operatorname{Im}\lambda_k|)}}{e^{\operatorname{Re}\lambda_k\mu_j}}=e^{n(|\operatorname{Re}\lambda_k|+|\operatorname{Im}\lambda_k|)-\operatorname{Re}\lambda_k\mu_j},$$

показатель последнего выражения запишем в виде

$$|\lambda_k|\biggl[n\biggl(\frac{|\operatorname{Re}\lambda_k|}{|\lambda_k|}+\frac{|\operatorname{Im}\lambda_k|}{|\lambda_k|}\biggr)-\frac{\operatorname{Re}\lambda_k\mu_j}{|\lambda_k|}\biggr].$$

Предел формулы в квадратных скобках при $k$, стремящемся к бесконечности, равен $n-\operatorname{Re}\mu_j$, поэтому для номеров $j$ таких, что $\operatorname{Re}\mu_j>n$, получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_n(\xi_k)}{|\langle S_{j,0},\xi_k\rangle|}=0,$$

и искомое утверждение вытекает из предложения 3.

Теорема 5 доказана.

Ранее подобные результаты другими методами были получены в статьях [12] и [13].

Следствие 11. *Пусть последовательности чисел $\mu_j,\lambda_k$, $j\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}$, таковы, что*

$$\operatorname{Re}\mu_j<\operatorname{Re}\mu_{j+1},\qquad j\in\mathbb{Z},$$
$$\lim_{j\to\pm\infty}\operatorname{Re}\mu_j=\pm\infty,\qquad\lim_{|k|\to\infty}\lambda_k=\infty,\qquad\lim_{k\to\pm\infty}\frac{\lambda_k}{|\lambda_k|}=\pm1.$$

*Тогда для любой последовательности чисел* $m_j \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, *множество*

$$X = \{\xi_k \in H(\mathbb{C})\colon \xi_k(z) = e^{\lambda_k z},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

*является достаточным для системы функционалов*

$$S_{j,\nu}, \qquad \langle S_{j,\nu}, f\rangle = f^{(\nu)}(\mu_j), \quad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \nu \leqslant m_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{4.19}$$

Доказательство. Из теоремы 5 вытекает, что для любого числа $l \in \mathbb{Z}$ множество

$$X_0 = \{\xi_j \in X\colon j \in \mathbb{Z},\ j \geqslant 0\}$$

является достаточным для системы функционалов $S_{j,\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, $\nu \leqslant m_j$, $j \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant l$, поэтому система функционалов (4.19) будет линейно независимой в пространстве $L(X_0)$ и, как несложно показать заменой переменных, множество $Y_0$, дополнительное к $X_0$, является достаточным для системы функционалов с индексами $j \in \mathbb{Z}$, $j < l$.

Выберем число $\mu \in \mathbb{R}$ со свойством $\operatorname{Re}\mu_{l-1} < \mu < \operatorname{Re}\mu_l$ и определим полунорму $p$ на пространстве $H(\mathbb{C})$ равенством $p(f) = |f(\mu)|$.

Рассуждая, как и выше, для числа $j \in \mathbb{Z}$, $j < l$, получим

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\langle S_{j,\nu}, \xi_k\rangle|}{p(\xi_k)} = \frac{|\lambda_k|^\nu e^{\operatorname{Re}\lambda_k \mu_j}}{e^{\operatorname{Re}\lambda_k \mu}} = 0,$$

и аналогичное соотношение выполняется в случае $j \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant l$, и множества $Y_0$.

Искомый результат вытекает из следствия 5.

Рассмотрим теперь примеры, когда для узлов интерполяции не выполнены условия теоремы 5.

Предложение 11. *Пусть заданы неограниченно возрастающая последовательность вещественных чисел* $x_j$, *последовательность различных чисел* $\mu_j$, $\operatorname{Re}\mu_{2j-1} = \operatorname{Re}\mu_{2j} = x_j$, $j \in \mathbb{N}$, *и последовательность чисел* $\lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющая соотношениям* (4.17).

*Тогда множество*

$$X = \{\xi_k \in H(\mathbb{C})\colon \xi_{2k-1}(z) = e^{\lambda_k z},\ \xi_{2k}(z) = z e^{\lambda_k z},\ k \in \mathbb{N}\}$$

*является достаточным для системы функционалов* $S_j \in H^*(\mathbb{C})$, *определенных по правилу*

$$\langle S_j, f\rangle = f(\mu_j), \qquad f \in H(\mathbb{C}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Предположим вначале, что $x_1 > 0$, и выберем последовательность положительных чисел $c_j$, $d_j$, $x_{j-1} < c_j < x_j$, для которых последовательность компактов

$$K_j = \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Re} z| \leqslant c_j,\ |\operatorname{Im} z| \leqslant d_j\}$$

возрастает, исчерпывает всю плоскость и $\mu_{2j-1}, \mu_{2j} \in K_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. В таком случае последовательность полунорм $p_{K_j}$ определяет топологию пространства $H(\mathbb{C})$, а функционалы $S_l$, $l \in \mathbb{N}$, $l \leqslant 2j$, ограничены по полунорме $p_{K_{j+1}}$, $j \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь функционал

$$S = \alpha S_{2m-1} + \beta S_{2m}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и допустим, что он ограничен по полунорме $p_{K_m}$ на множестве $X$.

Имеем

$$|\langle S, \xi_{2k-1}\rangle| \leqslant c p_{K_m}(\xi_{2k-1}) = c e^{c_m |\operatorname{Re}\lambda_k| + y_m |\operatorname{Im}\lambda_k|},$$
$$|\langle S, \xi_{2k}\rangle| \leqslant c p_{K_m}(\xi_{2k}) = c\sqrt{c_m^2 + d_m^2}\, e^{c_m |\operatorname{Re}\lambda_k| + d_m |\operatorname{Im}\lambda_k|},$$
$$c > 0, \qquad k \in \mathbb{N},$$

поэтому из равенств

$$\mu_{2m-1}\langle S, \xi_{2k-1}\rangle - \langle S, \xi_{2k}\rangle = \beta(\mu_{2m-1} - \mu_{2m}) e^{\lambda_k \mu_{2m}},$$
$$\mu_{2m}\langle S, \xi_{2k-1}\rangle - \langle S, \xi_{2k}\rangle = \alpha(\mu_{2m} - \mu_{2m-1}) e^{\lambda_k \mu_{2m-1}}$$

получим

$$|\beta(\mu_{2m-1} - \mu_{2m})| \leqslant c\big(|\mu_{2m-1}| + \sqrt{c_m^2 + d_m^2}\,\big) e^{c_m \operatorname{Re}\lambda_k + d_m \operatorname{Im}\lambda_k - \operatorname{Re}(\lambda_k \mu_{2m})}.$$

Показатель степени выражения справа не превосходит

$$(c_m - \operatorname{Re}\mu_{2m} + \varepsilon)|\lambda_k|, \qquad \varepsilon > 0, \quad k \geqslant k(\varepsilon),$$

из чего следует равенство $\beta = 0$; равенство $\alpha = 0$ выводится аналогично.

В таком случае из следствия 2 вытекает, что множество $X$ является достаточным для системы функционалов $S_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Займемся теперь общим случаем. Пусть число $l \in \mathbb{N}$ таково, что $x_l > 0$ и, значит, для системы функционалов $S_j$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2l - 1$, множество $X$ будет достаточным; также достаточным это множество будет для системы функционалов $T_j$, определенных по формуле

$$\langle T_j, f\rangle = f(\mu_j + h), \qquad j \in \mathbb{N},$$

если $h > -x_1$.

В таком случае эта система функционалов линейно независима на пространстве $L(X)$, которое является инвариантным относительно сдвига, поэтому и наша первоначальная система функционалов будет линейно независимой на пространстве $L(X)$.

Искомое вытекает из следствия 1.

Предложение 12. *Пусть заданы последовательность* $\mu_j$, $\mu_{2j-1} = x_j + \pi i$, $\mu_{2j} = x_j - \pi i$, $0 < x_j < x_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, *последовательность различных чисел* $\lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$, *система функционалов* $S_j$, *определенных соотношениями*

$$\langle S_j, f\rangle = f(\mu_j), \qquad f \in H(\mathbb{C}), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{4.20}$$

*и множество*

$$X = \{\xi_k \in H(\mathbb{C})\colon \xi_k(z) = e^{\lambda_k z},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

*Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Если для некоторого числа* $\alpha \in \mathbb{C}$ *выполнены соотношения*

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, c > 0\colon \quad |\lambda_j - j - \alpha| \leqslant ce^{-Mj}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{4.21}$$

*то система функционалов* (4.20) *не будет последовательностью Эйдельгейта на замыкании пространства* $L(X)$ *в пространстве* $H(\mathbb{C})$.

2. *Если выполнены условия* (4.17) *и существует число* $M \in \mathbb{R}_+$ *такое, что для любого числа* $\alpha \in \mathbb{C}$ *имеют место соотношения*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \rho(\lambda_k - \alpha, \mathbb{N})}{k} \geqslant -M, \qquad x_1 > M, \qquad x_{j+1} - x_j > M, \quad j \in \mathbb{N},$$

*то множество* $X$ *будет достаточным для системы* (4.20).

Доказательство. 1. Предположим, что соотношение (4.21) выполнено, но система функционалов (4.20) все же является последовательностью Эйдельгейта в пространстве $W$.

Найдется число $s \in \mathbb{N}$, для которого все члены последовательности $\lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant s$, лежат в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z > 0\}$ и имеют различные расстояния до начала координат; в таком случае система точек $\{\pm\lambda_k\colon k \in \mathbb{N},\ k \geqslant s\}$ будет регулярным множеством при порядке $\rho = 1$ (см. [14]).

Функция

$$f(z) = \prod_{k=s}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$$

является четной целой функцией экспоненциального типа, поэтому ее индикатриса роста будет всюду неотрицательной, и из теоремы 1.2.6 монографии [14] для любого $\varepsilon > 0$ получим

$$\ln |f'(\pm\lambda_k)| > -\varepsilon|\lambda_k|, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

В таком случае из теоремы 4.2.4 монографии А. Ф. Леонтьева [15] следует, что любая функция из замыкания линейной оболочки системы экспонент с показателями

$$\{\pm\lambda_k\colon k \in \mathbb{N},\ k \geqslant s\}$$

представляется в виде суммы ряда экспонент с этими же показателями, причем из доказательства этой теоремы вытекает абсолютная сходимость рядов в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Наконец, как показано в теореме 1.1.4 книги [15], к системе экспонент имеется биортогональная система линейных непрерывных функционалов пространства $H(\mathbb{C})$, поэтому любая функция из вышеупомянутого замыкания линейной оболочки будет представляться абсолютно сходящимся в пространстве $H(\mathbb{C})$ рядом экспонент с показателями $\lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant s$. Ясно, что это будет верно и для замыкания пространства $L(X)$ и системы экспонент множества $X$.

Так как система функционалов (4.20) по предположению является последовательностью Эйдельгейта в пространстве $W$, то тем более такой же будет система

$$T_j = \frac{e^{-\pi i\alpha} S_{2j-1} - e^{\pi i\alpha} S_{2j}}{2i}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Определим полунорму $p$ на пространстве $H(\mathbb{C})$ по формуле

$$p(f) = |f(0)|.$$

Несложно показать, что

$$\langle T_j, \xi_k \rangle = e^{x_j \lambda_k} \sin \pi(\lambda_k - \alpha), \qquad p(\xi_k) = 1, \quad j, k \in \mathbb{N}.$$

Применяя теорему 1 к системе функционалов $T_j$, $j \in \mathbb{N}$, и множеству $X$, получим

$$\varlimsup_{k\to\infty} e^{x_j \operatorname{Re} \lambda_k} |\sin \pi(\lambda_k - \alpha)| = +\infty \tag{4.22}$$

для всех достаточно больших индексов $j \in \mathbb{N}$. Из соотношений (4.21) для числа $M = |x_j|$ и некоторого числа $c > 0$ имеем

$$|\lambda_k| \leqslant n_k + |\alpha| + ce^{-|x_j| n_k} \leqslant n_k + |\alpha| + c,$$
$$|\sin \pi(\lambda_k - \alpha)| = |\sin \pi(\lambda_k - n_k - \alpha)| \leqslant |\pi(\lambda_k - n_k - \alpha)| \leqslant c\pi e^{-|x_j| n_k},$$

поэтому

$$\begin{aligned} e^{x_j \operatorname{Re} \lambda_k} |\sin \pi(\lambda_k - \alpha)| &\leqslant e^{|x_j|(n_k + |\alpha| + c)} c\pi e^{-|x_j| n_k} \\ &= c\pi e^{|x_j|(|\alpha| + c)}, \end{aligned}$$

что противоречит формуле (4.22).

2. Зафиксируем произвольное число $j \in \mathbb{N}$ и определим на пространстве $H(\mathbb{C})$ норму $p_j$ по правилу

$$p_j(f) = \max_{|z| \in K_j} |f(z)|, \qquad f \in H(\mathbb{C}),$$
$$K_j = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| \leqslant x_{j-1},\ |\operatorname{Im} z| \leqslant x_{j-1}\},$$

где $x_0 = 0$. Покажем, что любая нетривиальная линейная комбинация $S$ функционалов $S_{2j-1}$ и $S_{2j+1}$ будет неограниченной по этой норме на множестве $X$.

Действительно, для функционала $S$ имеем

$$\langle S, \xi_k \rangle = a e^{x_j \lambda_k} \sin \pi(\lambda_k - \alpha)$$

для некоторых чисел $a$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $0 \leqslant \operatorname{Re} \alpha < 1$.

Если

$$\varlimsup_{k\to\infty} |\sin \pi(\lambda_k - \alpha)| > 0,$$

то, как несложно показать,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{|\langle S, \xi_k \rangle|}{p_s(\xi_k)} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|a| e^{x_j \operatorname{Re} \lambda_k} |\sin \pi(\lambda_k - \alpha)|}{e^{x_{j-1}(|\operatorname{Re} \lambda_k| + |\operatorname{Im} \lambda_k|)}} = +\infty.$$

В противном случае для числа $\varepsilon = x_j - x_{j-1} - M$ найдутся возрастающие последовательности натуральных чисел $k_l$, $n_l$, $l \in \mathbb{N}$, такие, то

$$\lim_{l\to\infty} (\lambda_{k_l} - n_l - \alpha) = 0, \qquad |\lambda_{k_l} - n_l - \alpha| \geqslant \exp((-M + \varepsilon) n_l), \qquad l \in \mathbb{N},$$
$$\frac{|\langle S, \xi_{k_l} \rangle|}{p_s(\xi_{k_l})} = \frac{|a| e^{x_j \operatorname{Re} \lambda_{k_l}} |\sin \pi(\lambda_{k_l} - \alpha)|}{e^{x_{j-1}(|\operatorname{Re} \lambda_{k_l}| + |\operatorname{Im} \lambda_{k_l}|)}} \geqslant |a| e^{-\varepsilon |\lambda_{k_l}|/2}$$

для больших номеров $l \in \mathbb{N}$, и искомая неограниченность доказана.

Очевидно, что функционалы $S_{2j-1}$ и $S_{2j}$ ограничены по норме $p_{j+1}$, поэтому пункт 2 вытекает из следствия 2.

Предложение 12 доказано.

Покажем точность полученного результата.

Пример 2. Пусть в обозначениях предложения 12

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad \varphi(\lambda) = \cos \pi\lambda - e^{\lambda} \sin \pi\lambda$$

и $\lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, – корни функции $\varphi$ в правой полуплоскости. Как несложно показать, $\lambda_k \approx k + e^{-k}/\pi$, $k \in \mathbb{N}$, верхний предел в пункте 2 равен $x_2 - x_1 = 1$ и множество $X$ не является достаточным для системы функционалов (4.20), потому что функционал $S_1 + S_2 + i(S_3 - S_4)$ пространства $L$ обращается в нуль на множестве $X$.

## Список литературы


[1] M. Eidelheit, "Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen", *Studia Math.*, **6** (1936), 139–148.

[2] С. А. Шкарин, "О проблеме моментов в пространствах Фреше", *Матем. заметки*, **54**:1 (1993), 110–123; англ. пер.: S. A. Shkarin, "Moments problem in Frechet spaces", *Math. Notes*, **54**:1 (1993), 739–746.

[3] R. Meise, D. Vogt, *Introduction to functional analysis*, Transl. from the German, Oxf. Grad. Texts Math., **2**, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1997, x+437 pp.

[4] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973, 472 с.; пер. с англ.: R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Math. Ser., **28**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970, xviii+451 pp.

[5] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теорий функций и функционального анализа*, 7-е изд., Физматлит, М., 2004, 572 с.; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Rev. ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NY, 1970, xii+403 pp.

[6] C. Bessaga, A. Pelczyński, "On a class of $B_0$-spaces", *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III, **5** (1957), 375–377.

[7] E. Michael, "Continuous selections. I", *Ann. of Math.* (2), **63**:2 (1956), 361–382.

[8] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968, 279 с.; пер. с англ.: L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1966, x+208 pp.

[9] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961, 508 с.; пер. с англ.: J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, 3rd ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **XX**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960, x+398 pp.

[10] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1968, 383 с.; пер. с англ.: J. L. Kelley, *General topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto–New York–London, 1955, xiv+298 pp.

[11] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964, 430 с.; пер. с англ.: J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Pure Appl. Math., **10**, Academic Press, New York–London, 1960, xiv+361 pp.

[12] С. Г. Мерзляков, С. В. Попенов, “Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(\mathbb{C})$ с узлами на вещественной оси”, *Уфимск. матем. журн.*, **5**:3 (2013), 130–143; англ. пер.: S. G. Merzlyakov, S. V. Popenov, “Interpolation with multiplicity by series of exponentials in $H(\mathbb{C})$ with nodes on the real axis”, *Ufa Math. J.*, **5**:3 (2013), 127–140.

[13] С. Г. Мерзляков, С. В. Попенов, “Интерполяция рядами экспонент в $H(D)$, с вещественными узлами”, *Уфимск. матем. журн.*, **7**:1 (2015), 46–58; англ. пер.: S. G. Merzlyakov, S. V. Popenov, “Interpolation by series of exponentials in $H(D)$ with real nodes”, *Ufa Math. J.*, **7**:1 (2015), 46–57.

[14] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976, 536 с.

[15] А. Ф. Леонтьев, *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980, 384 с.

**Сергей Георгиевич Мерзляков**
**(Sergey G. Merzlyakov)**
Институт математики с вычислительным центром,
Уфимский федеральный исследовательский центр
Российской академии наук
*E-mail*: msg2000@mail.ru

Поступила в редакцию
31.12.2016 и 05.07.2018