И. С. Зверев, Разрезания трапеций на трапеции, гомотетичные трапециям заданного набора, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 2, 87–114

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9014

УДК 514.112.4

**И. С. Зверев**

# Разрезания трапеций на трапеции, гомотетичные трапециям заданного набора

Доказано несколько теорем, связанных с разрезанием трапеций на трапеции, гомотетичные заданным.

Доказывается, что гомотетиями трапеции с рациональным отношением оснований можно замостить любую трапецию с рациональным отношением оснований и такими же углами, но нельзя замостить никаких других трапеций.

Рассматриваются трапеции, отношение оснований которых является квадратичной иррациональностью. Для некоторых пар трапеций доказывается, что их гомотетиями можно замостить любую трапецию с такими же углами и отношением оснований из того же квадратичного поля. Еще для некоторого класса трапеций с квадратично-иррациональным отношением оснований приведено необходимое условие на трапеции, которые можно ими замостить. Это условие примечательно тем, что содержит трансцендентную функцию. Это первое появление трансцендентной функции в задачах о замощении многоугольников подобными многоугольниками.

Библиография: 8 названий.

**Ключевые слова:** разрезание многоугольников, замощение многоугольников, гомотетия, трапеции.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9014

## § 1. Введение

*Замощение* (*разрезание*) многоугольника $M$ – это конечный набор многоугольников с попарно непересекающимися внутренностями, объединение которых совпадает с $M$.

Первая сложная проблема, связанная с замощениями подобными многоугольниками, была рассмотрена Максом Деном в 1903 г. и заключалась в замощении прямоугольников квадратами (см. [1]). М. Ден доказал, что квадратами можно замостить только прямоугольник с рациональным отношением сторон.

В 1940 г. вышла статья [2] Р. Л. Брукса, С. А. Б. Смита, А. Х. Стоуна и У. Т. Татта о разрезании прямоугольника на квадраты попарно различного размера. В ней было доказано, что прямоугольник с рациональным отношением сторон всегда можно разрезать на попарно различные квадраты, причем бесконечным числом способов. Также именно в ней впервые имело место сопоставление замощений прямоугольника квадратами и электрических цепей, при

Работа выполнена в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-6137.2016.1).

помощи которого с большей легкостью передоказывалась теорема Дена (определение электрических цепей, как и их применение, см. в § 3).

В дальнейшем задача о разрезании прямоугольника на прямоугольники была в достаточной степени обобщена и исследована. В 1994 г. К. Фрайлинг, М. Ласкович, Д. Секереш и Д. Ринн сформулировали критерий, при выполнении которого квадрат можно разрезать на прямоугольники с заданным отношением сторон (см. [3], [4]). В 1997 г. они обобщили свой результат и привели критерий того, что заданный прямоугольник замощается прямоугольниками с заданным отношением сторон (см. [5]).

Наконец, стоит отметить недавнюю статью Ф. Шарова [6], в которой для прямоугольников с отношением сторон из $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ доказан критерий того, что данный прямоугольник можно замостить прямоугольниками с отношением сторон из данного множества (в статьях К. Фрайлинга, М. Ласковича, Д. Секереша, Д. Ринна отношение сторон замощающих прямоугольников было фиксировано). В настоящей работе также часто встречается поле $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, поэтому ниже приведем полную формулировку этого критерия для сравнения с результатами, полученными для трапеций.

Также были известны теоремы о замощениях другими многоугольниками; в частности, в статье Б. Сегеди [7] выведен критерий того, что квадрат замощается прямоугольными треугольниками с фиксированным углом.

Перейдем к статье Р. Кеньона [8], больше остальных повлиявшей на настоящую работу. Р. Кеньон несколько изменяет модель электрических цепей, использованную ранее, так что теперь ей можно описать не только замощения прямоугольниками, но и замощения трапециями.

Важный результат Р. Кеньона состоит в том, что если отношения оснований к высоте для замощающих трапеций рациональны, то и отношения оснований к высоте замощенной ими трапеции рациональны. Теорема 1 ниже – это чуть более общий вариант теоремы Кеньона для отношений оснований к высоте, лежащих в некотором подполе $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. В таком виде она будет необходима нам в дальнейшем. Чтобы продемонстрировать связь электрических цепей с разрезаниями трапеций, в § 3 приводится по сути принадлежащее Р. Кеньону доказательство этой теоремы.

Теорема 1 (см. [8; следствие 7]). *Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – трапеции, все основания которых параллельны. Пусть для любой из этих трапеций отношение каждого основания к высоте лежит в подполе $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Тогда если трапецию $B$ можно замостить трапециями, гомотетичными $A_1, A_2, \dots, A_n$, то отношения оснований трапеции $B$ к высоте тоже лежат в $\mathbb{K}$.*

Самая общая формулировка вопроса, на который мы стремимся ответить: “какие трапеции можно замостить трапециями, гомотетичными трапециям заданного набора”? В настоящей работе даются частные ответы на этот вопрос для следующих случаев.

Во-первых, будем рассматривать наборы, все основания трапеций которого параллельны. Р. Кеньону это условие было необходимо, чтобы работала физическая модель (расстояния между прямыми, содержащими основания, сопоставлялись разности потенциалов в цепи, см. лемму 1 ниже).

Во-вторых, будем рассматривать наборы, у всех трапеций которых одинаковы углы при основании. Теорема Кеньона верна и для трапеций с разными углами, однако мы собираемся параметризовать трапеции числами, поэтому класс рассматриваемых трапеций приходится ограничивать.

В-третьих, будем рассматривать наборы трапеций, у которых оба угла при основании равны $45°$. Это служит упрощению обозначений – решив задачу для равнобедренных трапеций с углами по $45°$, результаты нетрудно переформулировать для других трапеций, воспользовавшись афинными преобразованиями.

Для трапеций с рациональным отношением оснований все просто: любая такая трапеция может замостить любую другую с такими же углами при основании (в теореме 2 написано “с рациональными средними линиями”, однако для трапеций единичной высоты с углами $45°$ эти свойства равносильны). Тем не менее построить конструкцию замощения здесь сложнее, чем при доказательстве того же факта для прямоугольников (рис. 1). Следующая теорема является новой.

Теорема 2 (о рациональных средних линиях). *Пусть $A$, $B$ – трапеции единичной высоты с параллельными основаниями, углами $45°$ при основании и средними линиями $a$, $b$, соответственно. Пусть $a \in \mathbb{Q}$. Тогда трапециями, гомотетичными $A$, можно замостить трапецию $B$, если и только если $b \in \mathbb{Q}$.*

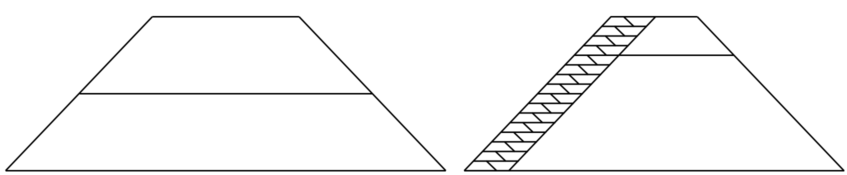

Рис. 1. Гомотетии трапеции со средней линией 2 замощают трапецию со средней линией $3/2$ (обе трапеции – высоты 1 и с углами $45°$ при основании).

Следующие теоремы связаны с квадратичным расширением $\mathbb{Q}$, поэтому введем необходимые определения уже здесь.

Пусть $d > 0$, $d \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Определим множество $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ как множество всех чисел вида $a + b\sqrt{d}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Ясно, что всякий $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ представляется в виде $a+b\sqrt{d}$ для $a, b \in \mathbb{Q}$ единственным образом. Это делает корректным следующую операцию сопряжения.

Пусть $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ и $x = a + b\sqrt{d}$ для $a, b \in \mathbb{Q}$. Тогда обозначим через $\overline{x}$ число $a - b\sqrt{d}$.

В случае с трапециями, отношения оснований которых лежат в $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, очевидно, что не для любой трапеции ее гомотетиями можно замостить все остальные. Это следует, как минимум, из теоремы 2. Однако следующая теорема показывает, насколько легко найти две трапеции, гомотетии которых могут замостить любую трапецию с отношением оснований из $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.

Теорема 3 (о средних линиях из $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$). *Пусть* $d > 0$, $d \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. *Пусть* $A$, $B$, $C$ *– трапеции единичной высоты с параллельными основаниями, углами* $45^\circ$ *при основании, и длины их средних линий равны соответственно* $a$, $b$, $c$. *Пусть также* $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ *и* $\overline{a} > 0$, $\overline{b} < 0$. *Тогда трапециями, гомотетичными* $A$ *и* $B$, *можно замостить* $C$, *если и только если* $c \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.

Здесь стоит процитировать теорему Шарова, чтобы провести необходимые параллели с замощениями прямоугольников.

Теорема 4 (см. [6; теорема 1]). *Пусть* $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, \dots, x_n = a_n + b_n\sqrt{p}$ *– такие числа, что* $x_i > 0$, $a_i, b_i, p \in \mathbb{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *и* $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. *Тогда*:

1) *если существуют такие числа* $i$ *и* $j$, *что* $1 \leqslant i, j \leqslant n$ *и* $(a_i - b_i\sqrt{p}) \times (a_j - b_j\sqrt{p}) < 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* $z$ *можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \dots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q}\};$$

2) *если для всех* $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* $z$ *можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \dots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} \;\middle|\; e, f \in \mathbb{Q},\ e > 0,\ \frac{|f|}{e} \leqslant \max_i \frac{|b_i|}{a_i} \right\};$$

3) *если для всех* $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* $z$ *можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \dots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} \;\middle|\; e, f \in \mathbb{Q},\ f > 0,\ \frac{|e|}{f} \leqslant \max_i \frac{|a_i|}{b_i} \right\}.$$

Теорема 3 – это аналог случая 1) для трапеций в теореме 4. Если мы будем рассматривать замощения гомотетиями трапеций данного набора, то найдя в наборе две трапеции со средними линиями $a, b$ такими, что $\overline{a}\overline{b} < 0$, мы замостим их гомотетиями любую трапецию со средней линией $c$ такой, что $c \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, $c > 1$. То, что всеми трапециями набора мы не замостим больше, чем данными двумя, следует, например, из теоремы 1.

Наша последняя теорема 5 – это необходимое условие на тривиальное разрезание некоторых трапеций с отношением оснований из $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ на трапеции, гомотетичные данной. Тривиальные разрезания, о которых в ней говорится, – это разрезания особого вида, которые определяются в § 8. У нас было две причины перейти к ним: во-первых, по опыту исследований прямоугольников можно выдвинуть гипотезу, что если существует разрезание трапеции на гомотетичные заданным, то существует и тривиальное разрезание. Во-вторых, для них есть вычислительно сложный, но гарантированный способ доказать незамостимость одной трапеции другой.

Заметим также, что теорема 5 показывает, что у случаев 2) и 3) теоремы Шарова при переходе от прямоугольников к трапециям не появляется очевидных аналогов.

Эта теорема интересна тем, что в ней впервые появляется трансцендентная функция (логарифм) от отношения оснований трапеции. Ранее в результатах о замощениях многоугольников подобными многоугольниками возникали только рациональные функции от сторон (в качестве примеров приведем [6; теорема 1], [4; теорема 10], [5; теорема 5]).

Теорема 5. *Пусть $A$, $B$ – трапеции единичной высоты с параллельными основаниями, углами $45^\circ$ при большем основании и средними линиями $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, причем $1 < \overline{a} < a$. Пусть трапециями, гомотетичными трапеции $A$, можно тривиально замостить трапецию $B$. Тогда $b$ удовлетворяет следующим условиям*:

(i) $1 < \overline{b} < b$;

(ii) $\overline{b}/b \geqslant \overline{a}/a$;

(iii) $\ln G(b)/\ln \overline{G(b)} \geqslant \ln G(a)/\ln \overline{G(a)}$, *где* $G(x) = (x-1)/(x+1)$.

Следующее предложение показывает, что несторогое неравенство (iii) в теореме 5 является точным, и к тому же обращается в равенство в бесконечном количестве случаев.

Предложение 1. *Пусть $A$ – трапеция единичной высоты с углами $45^\circ$ при большем основании и средней линией $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, причем $1 < \overline{a} < a$.*

*Тогда существует бесконечно много различных $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ таких, что выполнены условия*:

- $\ln G(b)/\ln \overline{G(b)} = \ln G(a)/\ln \overline{G(a)}$;
- *трапециями, гомотетичными трапеции $A$, можно тривиально замостить трапецию единичной высоты с углами $45^\circ$ при большем основании и средней линией $b$.*

Основываясь на предложении 1, можно выдвинуть гипотезу о достаточности указанных неравенств.

Гипотеза 1. Пусть $A$, $B$ – трапеции единичной высоты с параллельными основаниями, углами $45^\circ$ при большем основании и средними линиями $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, причем $1 < \overline{a} < a$. Пусть $b$ удовлетворяет условиям из теоремы 5. Тогда трапециями, гомотетичными трапеции $A$, можно замостить трапецию $B$.

Для лучшего понимания доказательства теорем 3 и 5 и их геометрического смысла рекомендуем обратиться к § 10 настоящей работы.

## § 2. Структура работы

В работе по порядку доказывается четыре основные теоремы, а именно теоремы 1–3 и 5. Параграфы, выделенные непосредственно на доказательства, перемежаются параграфами, содержащими вспомогательные конструкции.

В § 3 приводится полное доказательство теоремы 1, проведенное аналогично доказательству из работы Р. Кеньона. В том числе в этот параграф входит описание понятия “электрической цепи”, необходимое в данном доказательстве (но не нужное для понимания доказательства остальных теорем).

В § 4 вводятся удобные нам обозначения для геометрических фигур, а также несложные леммы о замощениях, сформулированные в терминах этих обозначений. Эти леммы и определения многократно используются в доказательствах теорем 2, 3 и 5, особенно часто приходится ссылаться на лемму 5.

В § 5 доказана теорема 2. С использованием лемм из § 4 и теоремы 1 доказательство получается коротким и несложным.

Далее идут § 6, § 7, по которым разнесено доказательство теоремы 3. Конструкция доказательства уже гораздо сложнее, чем для теоремы 2, хотя методы и похожи. Отдельную сложность может представлять неясный интуитивно смысл функции $h$ или описывающих ее лемм (6–8). Для лучшего понимания рекомендуем обращаться к § 10.

В § 8 определяются тривиальные разрезания и вводятся леммы, связанные с ними.

В § 9 доказана теорема 5, в которой используется понятие тривиальных разрезаний.

Параграф 10 не содержит новых результатов, но поясняет старые. При работе с полем $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ можно представлять число $a \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ как точку $(\overline{a}, a)$ на координатной плоскости. Это представление придает утверждениям из § 6, § 7, § 9 наглядный геометрический смысл.

## § 3. Доказательство теоремы 1

Этот параграф не содержит новых результатов и, по сути, повторяет доказательство из работы [8; следствие 7] с тем замечанием, что вместо $\mathbb{Q}$ мы рассматриваем произвольное подполе $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$.

Определение 1. *Электрическая цепь* – это ориентированный граф, каждому ребру которого приписано положительное число (называемое его весом), с двумя выделенными вершинами $N$ и $P$; при этом для любой вершины $x$, кроме $N$ и $P$, существуют ориентированные пути от $x$ до $N$ и от $x$ до $P$. Количество ребер, идущих из $x$ в $y$, будет обозначаться через $c_{xy}$, вес $k$-го из них через $[xy]_k$.

Определение 2. *Потенциал* – это вещественнозначная функция $w$ на множестве вершин электрической цепи, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $w(N) = 1$, $w(P) = 0$;

2) для любого $x$, не равного $N$ и $P$, верно

$$\sum_{y \neq x} \sum_{i=1}^{c_{xy}} [xy]_i (w(x) - w(y)) = 0.$$

Определение 3 (см. рис. 2). Для произвольного замощения трапеции трапециями, все основания которых параллельны, обозначим через $S$ множество всех точек всех оснований трапеций замощения. Множество $S$ представимо в виде объединения нескольких непересекающихся отрезков (очевидно, единственным образом). Отрезки такого разбиения будем называть *разрезами* (на рис. 2 они изображены жирными линиями). В частности, оба основания замощенной трапеции всегда являются разрезами.

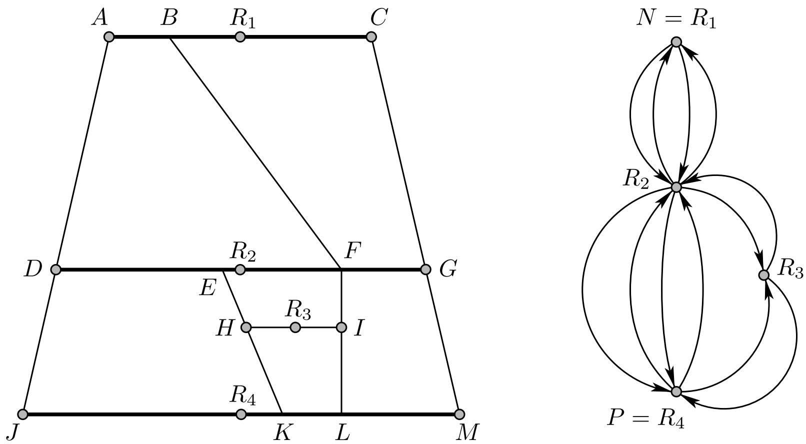


Рис. 2. Замощение трапеции и его электрическая цепь, к определению 4.

В качестве примера приведем рис. 2. На нем трапеция $ACMJ$ разбита на шесть различных трапеций. Объединение их оснований можно представить в виде объединения непересекающихся отрезков только одним способом: $AC \sqcup DG \sqcup HI \sqcup JM$ (жирные линии). Поэтому для данного разбиения имеем четыре разреза.

В дальнейшем рассуждении (как и во всей работе) мы говорим о трапециях, все основания которых параллельны. Для удобства будем считать, что их основания расположены горизонтально. Как следствие, мы можем говорить о “нижнем” и “верхнем” основании любой трапеции замощения.

*Общий план доказательства теоремы* 1.

1. По замощению трапеции высоты 1 другими трапециями мы строим электрическую цепь, веса ребер которой равны отношениям оснований к высоте для трапеций замощения (см. определение 4 и лемму 1).

2. Показываем, что в цепи существует потенциал $w$ такой, что высота каждой трапеции замощения является разностью значений $w$ на некоторых вершинах цепи (см. предложение 3 и лемму 1).

3. Доказываем, что потенциал в произвольной электрической цепи единственен и равен значению некоторой рациональной функции с рациональными коэффициентами от весов ребер (см. лемму 2).

Из пп. 1–3 почти напрямую будет следовать утверждение теоремы.

Определение 4. Пусть дано замощение трапеции трапециями с горизонтальными основаниями. Тогда *цепь, соответствующая данному замощению*, строится следующим образом.

1) Множество вершин графа – это множество середин всех разрезов замощения (см. $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ на рис. 2).

2) Выделенными вершинами будут $P$ – середина нижнего основания и $N$ – середина верхнего основания замощаемой трапеции.

3) Ребра графа строятся по трапециям замощения следующим образом.

Пусть $T$ – произвольная трапеция замощения. Обозначим длину ее нижнего основания через $b_1$, верхнего – через $b_2$. Обозначим середины разрезов, содержащих эти основания, через $B_1$ и $B_2$ соответственно. Обозначим высоту трапеции $T$ через $h$. Тогда добавим в граф ребро из $B_1$ в $B_2$ весом $b_1/h$ и ребро из $B_2$ в $B_1$ весом $b_2/h$.

Таким образом, по замощению мы получили ориентрованный граф с взвешенными ребрами (их в два раза больше, чем трапеций замощения).

На рис. 2 можно увидеть построенную указанным способом цепь для четырех разрезов (как следствие, четырех вершин) и шести трапеций замощения (как следствие, 12 ориентированных ребер). Чтобы не рисовать получившийся граф поверх замощения, точки $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ изображены дважды.

Предложение 2. *Для любого замощения трапеции трапециями цепь, соответствующая данному замощению* (*определение* 4), *действительно является электрической цепью.*

Доказательство. Из определения 4 очевидно, что веса ребер положительны. Тогда по определению 1 остается доказать, что из произвольной вершины $K$ есть пути в $N$ и в $P$. Докажем, что есть путь в $P$, для $N$ рассуждение аналогично.

Проведем доказательство от противного: пусть из $K$ нет пути в $P$. Тогда обозначим через $Q \neq P$ самую низкую (одну из самых низких) вершину графа такую, что из $K$ есть путь в $Q$.

Пусть $Q_1Q_2 \supset Q$ – разрез, содержащий $Q$. Так как он не является нижним основанием замощаемой трапеции, то существует трапеция замощения, верхнее основание которой принадлежит $Q_1Q_2$. Нижнее основание такой трапеции, соответственно, принадлежит некоторому разрезу $L_1L_2$ с серединой $L$. Но в этом случае:

1) из $Q$ в $L$ есть ребро, порожденное рассмотренной трапецией; как следствие, из $K$ есть путь в $L$;

2) точка $L$ строго ниже, чем точка $Q$.

Это противоречит тому, что $Q$ – самая низкая вершина, до которой есть путь из вершины $K$.

Достигнуто противоречие, значит, путь из $K$ в $P$ существует.

Предложение 3. *Возьмем произвольное замощение трапеции трапециями с горизонтальными основаниями. Определим на вершинах цепи, соответствующей этому замощению, функцию $w$ как расстояние от данной вершины до прямой, содержащей нижнее основание замощаемой трапеции.*

*Тогда $w$ является потенциалом в этой цепи.*

Доказательство. Определение потенциала 2 состоит из двух пунктов. Проверим их по очереди.

1. Вершины $P$ и $N$ – это середины нижнего и верхнего оснований трапеций. Для них очевидно, что $w(N) = 1$, $w(P) = 0$.

2. Пусть $x$, $y$ – вершины цепи и середины разрезов $X_1X_2$, $Y_1Y_2$ соответственно. Рассмотрим выражение $[xy](w(x) - w(y))$, как в определении 2 (опустим индекс $i$, так как для кратных ребер рассуждение аналогично).

Если $X$ и $Y$ соединены ребром, то по определению 4 это ребро соответствует некоторой трапеции $T$ с основаниями на $X_1X_2$, $Y_1Y_2$. Если обозначить длины оснований трапеции $T$ через $b_x$, $b_y$, а высоту через $h$, то опять же по определению 4 вес $[xy]$ будет равен $b_x/h$.

С другой стороны, $w(x) - w(y)$ – это разность расстояний от $x$ и $y$ до прямой, содержащей нижнее основание замощенной трапеции. Как следствие, это высота трапеции $T$ с точностью до знака, т.е. $\pm h$.

Таким образом, $[xy](w(x)-w(y)) = \pm(b_x/h)h = \pm b_x$. Нетрудно заметить, что знак, с которым будет взят $b_x$, будет зависеть от того, лежала ли вершина $y$ выше или ниже, чем вершина $x$.

Если мы просуммируем выражения $[xy](w(x) - w(y))$ по всем $y$ таким, что из $x$ в $y$ есть ребро и $y$ лежит ниже, чем $x$, то получится сумма верхних оснований, лежащих на $X_1X_2$, для всех трапеций, одно основание которых лежит на $X_1X_2$, а второе ниже, чем $X_1X_2$. Эта сумма как раз равна длине $X$.

Если просуммировать те же выражения, но для $y$, более высоких, чем $x$, получится длина $X_1X_2$, взятая с минусом. Поэтому общая сумма будет равна нулю, как и требуется в определении.

В качестве примера опять возьмем рис. 2. Из вершины $R_2$ исходит пять ребер: два в вершину $R_1$, два в вершину $R_4$ и одно в вершину $R_3$. При этом только вершины $R_4$ и $R_3$ находятся ниже, чем $R_2$.

Ребру, идущему из $R_2$ в $R_3$, соответствует трапеция $EFIH$. Выражение $[R_2R_3](w(R_2) - w(R_3))$ будет равняться длине основания $EF$. Аналогичные выражения от ребер, идущих в $R_4$, равняются длинам оснований $DE$ и $FG$. Поэтому в сумме три выражения дают длину разреза $DG$.

Аналогичные выражения для ребер, идущих в $R_1$, равны $DF$ и $FG$ и в сумме тоже дадут $DG$.

Прежде чем доказывать общие факты об электрической цепи, сгруппируем предложения выше в одну лемму, которую потом будет удобнее использовать.

Лемма 1. *Для произвольного замощения трапеции трапециями с горизонтальными основаниями существует электрическая цепь с определенным на ней потенциалом, удовлетворяющая двум условиям*:

1) *вес каждого ребра цепи равен отношению основания некоторой трапеции замощения к ее высоте*;

2) *высота каждой трапеции замощения равна разности потенциалов в двух точках цепи.*

Доказательство. Необходимая цепь строится по определению 4, из него же следует условие 1). Условие 2) следует напрямую из предложения 3.

Остается доказать одну лемму о потенциале в произвольной электрической цепи.

Лемма 2. *Если на электрической цепи существует потенциал, то он единственен, и его значение в любой вершине можно представить как рациональную функцию с рациональными коэффициентами от весов ребер цепи.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы 2. Пусть у цепи есть два потенциала. Обозначим их через $w$ и $v$. Рассмотрим функцию $f = w - v$.

Из определения потенциала следует, что для нее верно равенство

$$\sum_{y\neq x}\sum_{i=1}^{c_{xy}}[xy]_i(f(x)-f(y))=0$$

при $x$, не равных $N$ и $P$.

Докажем, что $f$ достигает максимума в вершине $N$ или $P$. Пусть $f$ достигла максимума в точке $x \notin \{N, P\}$. Рассмотрим ориентированный путь $x_0, \ldots, x_n$ от $x = x_0$ до $N = x_n$. Докажем по индукции, что для $k = 0, \ldots, n$ выполнено $f(x_k) = f(x)$ (чтобы получить $f(N) = f(x)$ и достижение максимума в $N$). База очевидна, остается переход.

При $k < n$ верно равенство

$$\sum_{y\neq x_k}\sum_{i=1}^{c_{x_k y}}[x_k y]_i(f(x_k)-f(y))=0.$$

Так как значение $f(x_k) = f(x)$ максимально, то все слагаемые слева неотрицательны, как следствие, равны нулю. Так как между $x_k$ и $x_{k+1}$ есть ребро, то необходимо, чтобы $f(x_k) - f(x_{k+1}) = 0$, т.е. $f(x_{k+1}) = f(x)$. Переход доказан, отсюда $f(N) = f(x)$ и максимум достигнут в $N$. Аналогичное рассуждение доказывает, что минимум $f$ достигается на $N$ или на $P$.

Однако из условия 1) в определении 2 следует, что $f(N) = f(P) = 0$. А если минимум и максимум равны нулю, то функция $f$ равна нулю на всей цепи. Значит, взятые изначально $w$ и $v$ совпадают. Таким образом, потенциал единственен.

Теперь докажем второе утверждение леммы.

Функцию на множестве мощности $n$ можно представить набором из $n$ чисел: $w(x_1), \ldots, w(x_n)$. Чтобы этот набор соотвествовал некоторому потенциалу цепи, на него надо наложить несколько условий следующего вида:

- $w(x_i) = 1$ для некоторых $i$;
- $w(x_i) = 0$ для некоторых $i$;
- $\Sigma_{j\neq i}\Sigma_k^{c_{x_i x_j}}[x_i x_j]_k(w(x_i) - w(x_j)) = 0$ для некоторых $i$.

Заметим, что все условия такого вида – линейные уравнения относительно $w(x_i)$, т.е. потенциалом является любое решение некоторой системы линейных уравнений. Коэффициенты этих уравнений – веса ребер графа, а также 0 и 1.

Как мы знаем из первой части леммы, потенциал в цепи всего один, а значит, и решение у системы одно. Единственное решение системы можно получить методом Гаусса. При вычислении методом Гаусса задействуются только четыре основных арифметических действия, поэтому решение системы будет значением рациональной функции с рациональными коэффициентами от весов ребер графа.

Доказательство теоремы 1. Подействуем на указанное в теореме замощение гомотетией так, чтобы высота замощенной трапеции стала равна 1. Отношения оснований трапеций замощения к высотам все еще лежат в поле $\mathbb{K}$.

Возьмем цепь, описанную в лемме 1. По той же лемме веса ребер в этой цепи будут лежать в $\mathbb{K}$. Тогда по лемме 2 значения потенциала тоже будут лежать в поле $\mathbb{K}$. Из свойств цепи высоты всех трапеций замощения лежат в $\mathbb{K}$. Зная, что в $\mathbb{K}$ также лежат отношения оснований к высотам, получаем, что все основания трапеций замощения тоже лежат в поле $\mathbb{K}$.

Оба основания замощаемой трапеции представляются в виде суммы оснований замощающих трапеций, поэтому тоже лежат в $\mathbb{K}$. Высота равна единице, поэтому отношения оснований к высоте замощенной трапеции тоже лежат в $\mathbb{K}$, что и требовалось доказать.

## § 4. Основные геометрические определения и связанные с ними леммы

Определение 5. *Стандартная трапеция* – это трапеция единичной высоты с горизонтальными основаниями и углами $45°$ при нижнем основании. Стандартную трапецию со средней линией $a$ для краткости обозначим через $t(a)$.

Определение 6. *Стандартный параллелограмм* – это параллелограмм единичной высоты с двумя горизонтальными основаниями и левым нижним углом $45°$ при основании. Стандартный параллелограмм с основанием $a$ обозначим через $p(a)$.

В некоторых случаях будем писать *стандартная фигура* – это следует понимать как стандартный параллелограмм или стандартную трапецию.

Как нетрудно заметить, средняя линия стандартной трапеции определяет ее однозначно – по ней можно высчитать оба основания. Аналогично, основание стандартного параллелограмма однозначно задает параллелограмм.

В работе нам неоднократно понадобится функция, связывающая среднюю линию стандартной трапеции с отношением оснований. Поэтому сформулируем ее свойства заранее.

Обозначение 1. Обозначим через $G(x)$ функцию, определенную на интервале $(1, +\infty)$ как $G(x) := (x-1)/(x+1)$.

Лемма 3 (свойства функции $G$). 1) *Функция $G$ – биекция между интервалами $(1, +\infty)$ и $(0, 1)$. В частности, она обратима и $G^{-1}(x) = (1+x)/(1-x)$.*

2) *$G(x)$ возрастает.*

3) *$G(x)$ – рациональная функция с рациональными коэффициентами; как следствие, если $x$ принадлежит полю $\mathbb{K}$, то $G(x)$ принадлежит тому же полю $\mathbb{K}$.*

4) *Если стандартная трапеция имеет среднюю линию $a$, то ее отношение оснований (меньшего к большему) равно $G(a)$. Также верно обратное.*

Доказательство. Все алгебраические факты очевидны. С геометрией тоже просто: стандартные трапеции имеют единичную высоту и углы $45°$ при основании, поэтому при средней линии в $a$ ее основания будут равны как раз $(a-1)$ и $(a+1)$.

Теперь сформулируем леммы, которые помогут нам избавиться от геометрическиех построений и далее оперировать исключительно числовыми понятиями.

Лемма 4. *Пусть $A$, $B$, $C$ – стандартные фигуры и $C$ состоит из двух фигур, гомотетичных $A$ и $B$ соответственно. Тогда существуют числа $a$, $b$, для которых выполнено одно из следующих условий*:

1) $A=p(a)$, $B=p(b)$, $C=p(a+b)$;
2) $A=p(a)$, $B=p(b)$, $C=p(ab/(a+b))$;
3) $A=t(a)$, $B=t(b)$, $C=p(a+b)$;
4) $A=p(a)$, $B=t(b)$, $C=t(a+b)$;
5) $A=t(a)$, $B=t(b)$, $C=t(G^{-1}(G(a)G(b)))=t((ab+1)/(a+b))$.

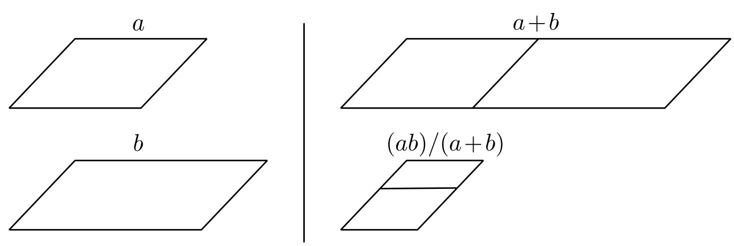


Рис. 3. К доказательству леммы 4 – выполнены условия 1) и 2).

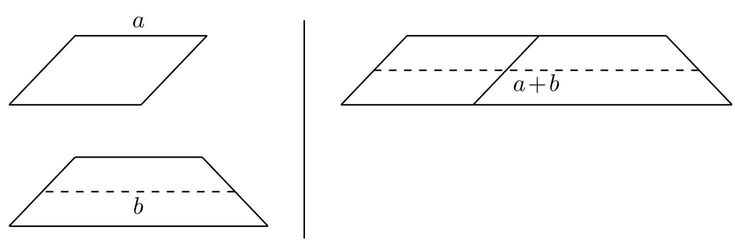


Рис. 4. К доказательству леммы 4 – выполнено условие 4).

Доказательство. Лемма проверяется полным перебором. Из гомотетий двух стандартных параллелограммов можно составить стандартный параллелограмм двумя способами, из трапеции и параллелограмма – трапецию, из двух трапеций – параллелограмм или трапецию. Все эти способы продемонстрированы на рис. 3–5. При каждом способе стыковки выполняется одно из условий.

Поясним, откуда берутся формулы. При выполнении условий 1), 3) или 4) мы не производим никаких гомотетий, а просто составляем фигуры вместе,

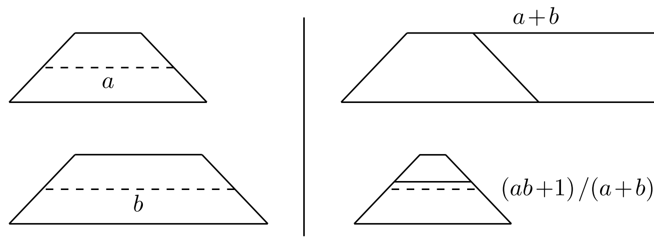


Рис. 5. К доказательству леммы 4 – выполнены условия 3) и 5).

и сумма средних линий равна средней линии суммы. При выполнении условия 2) над параллелограммами нужно провести гомотетии с коэффициентами $b/(a+b)$ и $a/(a+b)$, чтобы их суммарная высота стала равна единице.

При выполнении условия 5) используются две формулы, по которым можно вычислить среднюю линию трапеции $C$. Первая демонстрирует применение функции $G$: если поставить одну трапецию на другую, то их отношение оснований новой трапеции будет произведением их отношений оснований, значит, $G(c) = G(a)G(b)$ (где $c$ – средняя линия трапеции $C$). Формула $c = (ab+1)/(a+b)$ – это упрощенная формула $G(c) = G(a)G(b)$.

Так как описывать множества замостимых трапеций мы тоже намерены числами, введем соответствующие обозначения.

Определение 7. Пусть $\alpha \subset (1, +\infty)$ – произвольное множество. Обозначим через $T(\alpha)$ множество таких чисел $b$, что трапеция $t(b)$ замощается трапециями, гомотетичными $t(a_1), \ldots, t(a_k)$, $a_i \in \alpha$.

Аналогично, через $P(\alpha)$ обозначим множество чисел $b$ таких, что параллелограмм $p(b)$ замощается трапециями, гомотетичными $t(a_1), \ldots, t(a_k)$ для $a_i \in \alpha$.

Лемма 5. *Множества $T(\alpha)$ и $P(\alpha)$ обладают следующими свойствами*:
1) $a \in P(\alpha)$, $b \in P(\alpha) \Rightarrow a+b \in P(\alpha)$;
2) $a \in P(\alpha)$, $b \in P(\alpha) \Rightarrow ab/(a+b) \in P(\alpha)$;
3) $a \in T(\alpha)$, $b \in T(\alpha) \Rightarrow a+b \in P(\alpha)$;
4) $a \in P(\alpha)$, $b \in T(\alpha) \Rightarrow a+b \in T(\alpha)$;
5) $a \in T(\alpha)$, $b \in T(\alpha) \Rightarrow (ab+1)/(a+b) \in T(\alpha)$;
6) $a \in P(\alpha)$, $m \in \mathbb{Q}$, $m > 0 \Rightarrow am \in P(\alpha)$;
7) *пусть* $a \in T(\alpha)$, $\varepsilon > 0$, *тогда существует* $c$, *которое выражается через* $a$ *рациональной функцией с рациональными коэффициентами, такое, что* $c \in T(\alpha)$, $c < 1 + \varepsilon$.

Доказательство. Первые пять свойств напрямую следуют из пяти конструкций, предъявленных в рис. 3–5. Приведем пример: если $a \in P(\alpha)$, $b \in P(\alpha)$, то $p(a), p(b)$ замостимы трапециями, гомотетичными $t(a_1), \ldots, t(a_k)$, $a_i \in \alpha$. Разделим $p(a+b)$ на параллелограммы $p(a)$ и $p(b)$, как на рис. 3, и замостим каждый из них. Получим замощение параллелограмма $p(a+b)$, значит, $a+b \in P(\alpha)$.

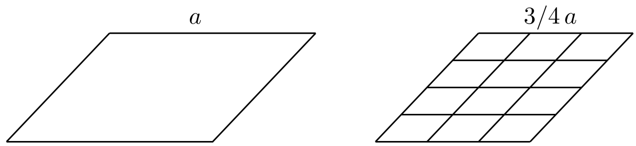


Рис. 6. К доказательству леммы 5 – свойство 6.

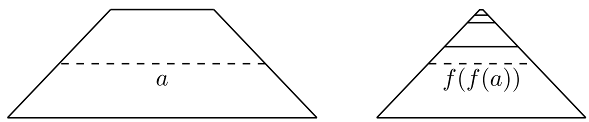


Рис. 7. К доказательству леммы 5 – свойство 7.

Шестое и седьмое свойства на самом деле следуют из предыдущих, однако доказывать их через предыдущие просто неудобно. Поэтому проще предъявить геометрические конструкции.

6) Рациональное число $m$ – это дробь вида $k/n$. Выложив параллелограммами сетку $k$ на $n$ (рис. 6), мы получим параллелограмм с отношением основания к высоте, равным $am$. После гомотетии это отношение как раз будет равно $p(am)$.

7) Сложим основаниями две трапеции, гомотетичные $t(a)$. Затем будем складывать получаемые так трапеции много раз, образуя пирамиду из $2^n$ трапеций (рис. 7). Средняя линия полученной трапеции устремляется к единице при увеличении числа трапеций в конструкции, так как отношение оснований стремится к нулю. Остается показать, что средняя линия полученной трапеции будет значением рациональной функции от $a$ с рациональными коэффициентами.

Если трапецию $t(a)$ сложить с гомотетичной ей трапецией, как на рис. 7, получится $t((a^2-1)/(2a))$ (это частный случай применения свойства 5)). Если обозначить $(a^2-1)/(2a)$ через $f(a)$, то при сложении $2^n$ гомотетий данной трапеции $t(a)$ мы получим $t(f(f(\ldots f(a)\ldots)))$, где $f$ применяется $n$ раз. Искомое число $c = f(f(\ldots f(a)\ldots))$, оно сколь угодно близко к единице (если в пирамиде было достаточно трапеций), и оно рационально выражено через $a$.

## § 5. Доказательство теоремы 2 о рациональных средних линиях

При всех шагах доказательства следует учитывать, что $a > 1$, $b > 1$.

1) В сторону "только если". Отношение каждого из оснований трапеции $A$ к высоте рационально. Из теоремы 1 следует, что любая замощаемая ей трапеция (в частности, $B$) тоже будет иметь рациональные отношения оснований к высоте. Поэтому и средняя линия $b$ будет рациональна.

2) В сторону “если”. Достаточно доказать, что $b \in T(a)$. Рассмотрим следующую цепочку утверждений, использующих свойства множества $T(a)$ из леммы 5.

Во-первых, $a \in T(a)$, так как $A$ тривиально замостима сама собой. По свойству 7) множество $T(a)$ содержит некоторое рациональное число $c$, меньшее $b$. По свойству 3) выполнено $a + a = 2a \in P(a)$. Число $(b - c)/2a$ рационально и положительно. По свойству 6) выполнено $2a(b - c)/2a = (b - c) \in P(a)$. По свойству 4) выполнено $c + (b - c) = b \in T(a)$, что и требовалось доказать.

## § 6. Вспомогательные леммы для доказательства теоремы 3 о средних линиях из $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$

В этом и следующих параграфах мы работаем в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, где $d > 0$, $d \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$.

Определение 8. Определим на числах из $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, строго больших единицы, функцию $h(x)$ со значениями в $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ следующим образом. Пусть $G(x) = a + b\sqrt{d}$ для некоторых рациональных $a, b$. Тогда положим $h(x) = a/b$, если $b \neq 0$, и $h(x) = \infty$ иначе.

Заметим, что числа, для которых $h = \infty$, – это рациональные числа.

Основное свойство функции $h$: условие $G(x)/G(y) \in \mathbb{Q}$ эквивалентно условию $h(x) = h(y)$. Оно нужно по простой причине: если у трапеций отношения оснований отличаются в рациональное число раз, то мы можем получить одну из другой, приставив ко второй трапецию с рациональным отношением оснований. Это свойство формализовано в следующей лемме.

Лемма 6 (о числах с равными $h$). *Пусть $x > y$ и $h(x) = h(y)$. Пусть $m \in \mathbb{Q}$ и $m > 1$. Тогда трапециями, гомотетичными трапециям $t(x)$ и $t(m)$, можно замостить трапецию $t(y)$, иными словами, $y \in T(x, m)$.*

Доказательство. Из $h(x) = h(y)$ следует, что $G(y)/G(x) \in \mathbb{Q}$. По лемме 3 функция $G$ возрастает, поэтому $y < x \Rightarrow G(y) < G(x)$. Таким образом, $G(y)/G(x)$ – рациональное положительное число, меньшее единицы.

На числах из интервала $(0, 1)$ определена функция $G^{-1}$. Применив ее, мы получим, что $G^{-1}(G(y)/G(x))$ – это рациональное число, большее единицы (по лемме 3).

По теореме 2 трапециями, гомотетичными $t(m)$, можно замостить трапецию $t(G^{-1}(G(y)/G(x)))$, потому что у обеих трапеций рациональные средние линии. Таким образом, $G^{-1}(G(y)/G(x)) \in T(x, m)$.

Воспользуемся свойством 5) из леммы 5 и следующими фактами: $x \in T(x, m)$ и $G^{-1}(G(y)/G(x)) = (xy + 1)/(x + y) \in T(x, m)$. Получим

$$G^{-1}(G(x)G(G^{-1}(G(y)/G(x)))) = G^{-1}(G(x)G(y)/G(x)) = y \in T(x, m),$$

что и требовалось доказать.

У следующих двух лемм есть простой геометрический смысл. Подробнее о нем можно узнать в § 10 (хотя это не обязательно для понимания доказательства).

Лемма 7 (о большом $x$ при фиксированном $h(x)$). *Для любых* $q \in \mathbb{Q}$, $N > 2$, $\varepsilon > 0$ *существует число* $x$ *такое, что* $h(x) = q$, $x > N$ *и* $|\overline{x} - q/\sqrt{d}| < \varepsilon$.

Доказательство. Для удобства пусть $q + \sqrt{d} > 0$, в противном случае доказательство проводится аналогично.

Построим искомое число $x$ явно. Для этого нужно ввести переменные, через которые его удобно выразить.

Возьмем достаточно малое $\delta > 0$, для которого выполняется следующий ряд условий:

- $\delta(q + \sqrt{d}) < 1 - G(N)$;
- $\delta\sqrt{d}\,|d - q^2| < d$;
- $\delta(q + \sqrt{d})/d\,|d - q^2| < \varepsilon$;
- $\delta < 1/(q + \sqrt{d})$;
- $1/(q + \sqrt{d}) - \delta \in \mathbb{Q}$.

Нетрудно убедиться, что все числа, которыми мы ограничиваем $\delta$, положительны. Из плотности $\mathbb{Q}$ следует что мы найдем и $\delta$, удовлетворяющую последнему условию.

Проверим, что условиям леммы удовлетворяет число

$$x = G^{-1}\left((q + \sqrt{d})\left(\frac{1}{q + \sqrt{d}} - \delta\right)\right).$$

Покажем сначала, что $x$ определен корректно. Для этого нужно проверить корректность функции $G^{-1}$, определенной только на интервале $(0, 1)$. Из предпоследнего условия на $\delta$ следует, что выражение в скобках больше нуля, а из $\delta > 0$ следует, что оно меньше единицы.

1. Докажем, что $h(x) = q$. Применив функцию $G$, получаем

$$G(x) = (q + \sqrt{d})\left(\frac{1}{q + \sqrt{d}} - \delta\right).$$

По последнему условию на $\delta$ выполнено $(1/(q + \sqrt{d}) - \delta) \in \mathbb{Q}$, поэтому $G(x)$ имеет вид $(q + \sqrt{d})a$ для некоторого рационального $a$. Это по определению значит, что $h(x) = q$.

2. Докажем, что $x > N$. Действительно,

$$G(x) = \left(\frac{1}{q + \sqrt{d}} - \delta\right)(q + \sqrt{d}) = 1 - \delta\big(q + \sqrt{d}\big) > 1 - (1 - G(N)) = G(N).$$

Так как $G$ – возрастающая функция, то из $G(x) > G(N)$ следует, что $x > N$.

3. Докажем, $|\overline{x} - q/\sqrt{d}| < \varepsilon$. Мы знаем что $1/(q + \sqrt{d}) - \delta \in \mathbb{Q}$, поэтому можем сопрячь выражение:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \overline{G^{-1}\left(\left(\frac{1}{q + \sqrt{d}} - \delta\right)\left(q + \sqrt{d}\right)\right)} \\ &= \frac{1 + (1/(q + \sqrt{d}) - \delta)(q - \sqrt{d})}{1 - (1/(q + \sqrt{d}) - \delta)(q - \sqrt{d})} = \frac{2q + \delta(d - q^2)}{2\sqrt{d} - \delta(d - q^2)}.\end{aligned}$$

Теперь оценим $|\overline{x} - q/\sqrt{d}|$, после чего используем условия, ограничившие $\delta$,

$$\left|\frac{2q+\delta(d-q^2)}{2\sqrt{d}-\delta(d-q^2)} - \frac{q}{\sqrt{d}}\right| = \left|\frac{\delta(d-q^2)(q+\sqrt{d})}{2d-\delta(d-q^2)\sqrt{d}}\right| \leqslant \left|\frac{\delta(d-q^2)(q+\sqrt{d})}{d}\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, сформулируем последнюю лемму, необходимую для доказательства теоремы 3.

Лемма 8. *Пусть* $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, $d \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. *Пусть также* $\overline{a} > 0$, $\overline{b} < 0$. *Тогда для любого рационального* $q$ *и любого* $M > 0$ *существует* $x$ *со следующими свойствами*:

1) $h(x) = q$;
2) $x > M$;
3) $x = ma + nb$ *для некоторых положительных рациональных* $m$, $n$.

Доказательство. Воспользовавшись леммой 7, найдем $x$ такой, что

$$x > \max\left\{M, \frac{(|q/\sqrt{d}|+1)b}{|\overline{b}|}, \frac{(|q/\sqrt{d}|+1)a}{|\overline{a}|}\right\},$$
$$\left|\overline{x} - \frac{q}{\sqrt{d}}\right| < 1, \qquad h(x) = q.$$

Проверим, что тогда следующие $m, n$ удовлетворяют всем указанным в условии 3) свойствам (положительны, рациональны и $ma + nb = x$):

$$m = \frac{x\overline{b} - \overline{x}b}{a\overline{b} - \overline{a}b}, \qquad n = \frac{x\overline{a} - \overline{x}a}{b\overline{a} - \overline{b}a}.$$

1. Дроби определены корректно: используя $a, b, \overline{a} > 0$, $\overline{b} < 0$, увидим, что знаменатель первой дроби строго меньше нуля, а второй – больше нуля.

2. Имеем

$$ma + nb = \frac{x\overline{b}a - \overline{x}ba - x\overline{a}b + \overline{x}ab}{a\overline{b} - \overline{a}b} = \frac{x(\overline{b}a - \overline{a}b)}{a\overline{b} - \overline{a}b} = x.$$

3. Имеем $m, n \in \mathbb{Q}$, так как числители и знаменатели обеих дробей представимы в виде $t - \overline{t}$ для $t \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, а значит, имеют вид $q\sqrt{d}$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$. Частное двух чисел такого вида рационально.

4. Докажем, что $m > 0$; для $n$ рассуждение аналогично.

Знаменатель, как уже было сказано, меньше нуля. Остается доказать, что $x\overline{b} < \overline{x}b$. Однако левое число меньше нуля ($x > 0$, $\overline{b} < 0$), поэтому достаточно доказать $|x\overline{b}| > |\overline{x}b|$. Для этого используем оценки на $x$:

$$|\overline{x}b| < \left|\frac{q}{\sqrt{d}}\right||b| + \left|\overline{x} - \frac{q}{\sqrt{d}}\right||b| < \left(\left|\frac{q}{\sqrt{d}}\right| + 1\right)|b| < |x|\,|\overline{b}|.$$

Подходящие $m$, $n$ найдены, что и требовалось доказать.

## § 7. Доказательство теоремы 3

Доказательство в сторону "только если" строится так же, как в теореме 2, за исключением того, что вместо $\mathbb{Q}$ мы используем $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Ключевым моментом является доказательство в сторону "если" (построение замощения), для которого и были сформулированы новые леммы.

Мы хотим доказать для произвольного $c > 1$ из $Q[\sqrt{d}]$, что $c \in T(a, b)$.

Говоря о "свойствах" мы, как и раньше, имеем в виду свойства из леммы 5.

Мы имеем $a, b \in T(a, b)$. По свойству 3) выполнено $2a, 2b \in P(a, b)$.

Теперь применим лемму 8 к числам $2a$, $2b$ и найдем $x > (a + b)$ такой, что $x = 2am+2bn$ и $h(x) = 0$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Q}$. Из того, что $x = 2am+2bn > (a + b)$, следует, что либо $m$, либо $n$ превышают $1/2$. Пусть $m > 1/2$ (случай $n > 1/2$ полностью аналогичен). Тогда по свойству 6) выполнено $2a(m-1/2) \in P(a, b)$ и $2bn \in P(a, b)$.

По свойству 1) имеем $2a(m - 1/2) + 2bn \in P(a, b)$. По свойству 4) имеем $a+2a(m-1/2)+2bn = 2am+2bn = x \in T(a, b)$. Мы знаем, что $h(x) = 0$. Значит, $G(x)$ имеет вид $q\sqrt{d}$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$. Применяя свойство 5) к $a = b = x$, получим $G^{-1}(G(x)G(x)) \in T(a, b)$. Это число рационально, так как $G(x)^2 = q^2 d \in \mathbb{Q}$, а $G^{-1}$ – рациональная функция с рациональными коэффициентами. Таким образом, $T(a, b)$ содержит хотя бы одно рациональное число.

Если $c$ рационально, то теорема доказана (сведена к теореме 2). Если же нет – применим лемму 8 к числам $2a$, $2b$, $q = h(c)$, $M = a + b + c$ и найдем $x'$ такой, что $h(x') = h(c)$ и $x' > c$. Повторяя доказательство того, что $x \in T(a, b)$, получим, что $x' \in T(a, b)$. Теперь у нас есть все условия (важным условием было наличие рационального числа в $T(a, b)$), чтобы воспользоваться леммой 6. По лемме 6 получим $c \in T(a, b)$, что и требовалось доказать.

## § 8. Тривиальные разрезания и связанные с ними леммы

Определим тривиальные разрезания, упомянутые в формулировке теоремы 5.

Определение 9. Замощение плоской фигуры называется *тривиальным*, если выполнено одно из двух условий:

1) оно состоит только из данной фигуры;

2) существует отрезок, проходящий только по границам фигур замощения и разделяющий фигуру на две, каждая из которых замощена тривиально (определение применяется рекурсивно).

В связи с новым видом замощений вводим новое обозначение.

Определение 10. Пусть $\alpha$ – множество чисел, больших единицы. Обозначим через $T'(\alpha)$ множество средних линий трапеций, которые можно *тривиально* замостить трапециями, гомотетичными $t(a_1), \dots, t(a_k)$, $a_1, \dots, a_k \in \alpha$. Аналогично введем обозначение $P'(\alpha)$.

Очевидно, что $T'(\alpha) \subset T(\alpha)$, $P'(\alpha) \subset P(\alpha)$. Нетрудно также доказать, что пара $(T'(\alpha), P'(\alpha))$ удовлетворяет свойствам из леммы 5. Достаточно просто повторить доказательство леммы 5, замечая при этом, что при составлении новой стандартной фигуры любым из указанных способов получается тривиальное замощение.

Для удобства ссылок вынесем это утверждение в отдельную лемму; доказательство леммы опустим.

Лемма 9. *Пусть* $\alpha \subset \{x \in \mathbb{R} \colon x > 1\}$. *Тогда для множеств* $T'(\alpha)$, $P'(\alpha)$ *выполнены свойства* 1)–7) *из леммы* 5.

После перехода к тривиальным разрезаниям новым результатом становится следующая лемма, в некотором роде обратная лемме 5.

Лемма 10. *Пусть* $\alpha \subset \{x \in \mathbb{R} \colon x > 1\}$. *Пусть* $T$, $P$ *– такая пара множеств, что для них выполняются свойства* 1)–5) *из леммы* 5, *и при этом* $\alpha \subset T$.

*Тогда* $T'(\alpha) \subset T$ *и* $P'(\alpha) \subset P$.

Доказательство. Пусть $c \in T'(\alpha)$ или $c \in P'(\alpha)$. Это значит, что $t(c)$ или $p(c)$ тривиально замощается трапециями, гомотетичными $t(a_1), \dots, t(a_k)$, где $a_i \in \alpha$. Пусть минимальное такое замощение состоит из $n$ фигур. Мы утверждаем, что в этом случае $c$ будет также лежать в $T$ или $P$ соответственно; доказывать это будем индукцией по $n$.

Далее мы ведем рассуждение только для $c \in T'(\alpha)$, при $c \in P'(\alpha)$ оно проводится аналогично.

База: если $n = 1$, то $c \in \alpha$. Мы знаем, что $\alpha \subset T$, поэтому $c \in T$.

Переход: по определению тривиального разрезания есть прямой разрез через всю трапецию $t(c)$, разделяющий ее на две фигуры, замостимые трапециями $t(a_1), \dots, t(a_k)$ для $a_1, \dots, a_k \in \alpha$. Так как разрез идет по границам фигур, он может проходить только в трех направлениях: горизонтально или под углом $45^\circ$ к горизонтали (в любую сторону).

Перебрав варианты прохождения разреза, мы увидим, что он делит трапецию либо на две трапеции, как на рис. 5, либо на параллелограмм и трапецию, как на рис. 4, либо на шестиугольник и треугольник. Однако треугольник было бы невозможно сложить из трапеций, поэтому этот вариант отбрасывается. Разберем два возможных случая.

1. Если трапеция разбита горизонтальным разрезом на две трапеции, гомотетичные стандартным, обозначим эти две трапеции $t(a)$ и $t(b)$. Тогда $c = (ab+1)/(a+b)$ (это равенство доказано в лемме 4).

Заметим, что $a$ и $b$ лежат в $T'(\alpha)$, так как составлены из трапеций, гомотетичных $t(a_1), \dots, t(a_k)$ для $a_1, \dots, a_k \in \alpha$. Более того, замощения $t(a)$ и $t(b)$ состоят не более, чем из $n-1$ фигуры, поэтому по предположению индукции $a, b \in T$.

Однако $T$ удовлетворяет свойствам из леммы 5, в том числе $a, b \in T \Rightarrow (ab+1)/(a+b) \in T$. Таким образом, $c \in T$.

2. Если трапеция разбита на параллелограмм и трапецию, нужно действовать аналогично, но в конце применить свойство 4).

Если $c \in P$, шаг индукции проводится аналогично, но разбираются три варианта разрезания параллелограмма на две стандартные фигуры.

## § 9. Теорема 5 о логарифмах

Доказательство теоремы о логарифмах состоит из громоздкой проверки многих утверждений. Сначала объясним общее направление доказательства.

*Общий план доказательства* (см. также § 10 и рис. 10).

Введем еще одно условие:

(i′) $0 < \bar{b} < b$.

Обозначим через $T$ множество чисел $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, удовлетворяющих условиям (i), (ii), (iii); через $P$ – множество чисел $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, удовлетворяющих условиям (i′), (ii).

Мы хотим доказать, что пара $(T, P)$ удовлетворяет свойствам 1)–5) из леммы 5. Тогда по лемме 10 мы получим, что $T'(a) \in T$ и $P'(a) \in P$ (так как очевидно, что $a \in T$). Как следствие, средняя линия трапеции, замостимой трапецией $A$, будет лежать в $T$, что и требуется доказать.

Однако показать, что пара $(T, P)$ удовлетворяет свойствам 1)–5), непросто. Для примера рассмотрим свойство 4): "если $x \in P$, $y \in T$, то $x + y \in T$". Чтобы проверить свойство 4), нужно убедиться, что число $x + y$ удовлетворяет нетривиальным неравенствам (i), (ii), (iii). Аналогично для каждого свойства. Проверка неравенства (iii) в доказательстве свойства 4) оказалось настолько сложной, что ее пришлось разнести на три леммы: два вспомогательных неравенства и само неравенство (iii). Поэтому мы сначала доказываем эти три леммы, а потом теорему, которая с учетом этих лемм станет сравнительно простой.

Лемма 11. *Пусть* $z > t > 1$. *Тогда* $\ln G(t)/\ln G(z) > z/t$.

Доказательство. Значение $G(z)$, как и $G(t)$, лежит в интервале $(0, 1)$. Поэтому неравенство $\ln G(t)/\ln G(z) > z/t$ равносильно $t \ln G(t) < z \ln G(z)$.

Рассмотрим функцию $f(x) := x \ln G(x) = x(\ln(x-1) - \ln(x+1))$. Ее производные равны

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)} + \ln\frac{x-1}{x+1}, \qquad f''(x) = -\frac{4}{(x^2-1)^2}.$$

Функция $f''$ отрицательна, значит, $f'$ строго убывает на луче $(1, +\infty)$. Из формулы ясно, что $f'$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, а значит, $f'$ положительна. Значит, функция $f$ на своей области определения строго возрастает.

Из этого и следует, что для $z > t > 1$ верно $t \ln G(t) < z \ln G(z)$.

Лемма 12. *Для* $c \in (0, 1)$ *определим*

$$F_c(x) = \frac{1 + ((x-1)/(x+1))^c}{1 - ((x-1)/(x+1))^c}.$$

*Тогда* $F_c'(x) > 1/c$ *для* $x > 1$.

Доказательство. Вычислим производную

$$F_c'(x) = \frac{4c((x-1)/(x+1))^c}{(x^2-1)\bigl(1 - ((x-1)/(x+1))^c\bigr)^2}.$$

Обозначим $y := (x-1)/(x+1)$ и выразим $x$ в формуле $F'_c(x)$ через $y$ (заметим, что условием на $y$ будет $y \in (0,1)$)

$$\begin{aligned} F'_c(x) &= \frac{4cy^c}{\big(((1+y)/(1-y))^2-1\big)(1-y^c)^2} \\ &= \frac{4cy^c(1-y)^2}{((1+y)^2-(1-y)^2)(1-y^c)^2} = \frac{cy^c(1-y)^2}{y(1-y^c)^2}. \end{aligned}$$

Мы хотим доказать следующее неравенство:

$$\frac{cy^c(1-y)^2}{y(1-y^c)^2} > \frac{1}{c}.$$

Сделаем замену $t = \sqrt{y}$, тогда на $t$ будет наложено условие $t \in (0,1)$,

$$c^2t^{2c}(1-t^2)^2 > t^2(1-t^{2c})^2, \qquad ct^c(1-t^2) > t(1-t^{2c}), \qquad \frac{1-t^2c}{ct^c} < \frac{1-t^2}{t},$$
$$\frac{1/t^c - t^c}{c} < \frac{1/t - t}{1}.$$

Теперь, если мы докажем, что производная функции $f(x) = (t^{-x} - t^x)/x$ на $x \in (0,1]$ больше нуля, то мы докажем утверждение леммы. Вычислим эту производную:

$$\left(\frac{t^{-x}-t^x}{x}\right)' = \frac{t^{-x}(t^{2x} - x(t^{2x}+1)\ln t - 1)}{x^2}.$$

Мы хотим доказать, что это выражение больше нуля. Поделив на заведомо положительные множители, сведем задачу к следующей:

$$t^{2x} - x(t^{2x}+1)\ln t - 1 > 0.$$

Сделаем замену $u = t^{2x}$, тогда выполнено ограничение $u \in (0,1)$ и неравенство примет вид

$$u - \frac{1}{2}\ln u(u+1) - 1 > 0, \qquad \frac{1}{2}\ln u < \frac{u-1}{u+1}.$$

Можно заметить, что при $u = 1$ значения выражений с обеих сторон неравенства совпадают. Чтобы доказать неравенство при $u \in (0,1)$, достаточно проверить $((\ln u)/2 - (u-1)/(u+1))' > 0$. Для этого найдем производную

$$\left(\frac{1}{2}\ln u - \frac{u-1}{1+u}\right)' = \frac{(u-1)^2}{2u(u+1)^2} > 0.$$

Из этого неравенства следует утверждение леммы.

Лемма 13. *Напомним, что $P$ – множество чисел $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, удовлетворяющих условиям* (i′), (ii), *а $T$ – множество чисел $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$, удовлетворяющих условиям* (i), (ii), (iii).

*Тогда если $x \in T$, $y \in P$, то $x + y$ удовлетворяет условию* (iii), *т.е.*

$$\frac{\ln G(x+y)}{\ln G(\overline{x+y})} > \frac{\ln G(a)}{\ln G(\overline{a})}.$$

Доказательство. Обозначим $c := \ln G(a)/\ln G(\overline{a})$. Заметим, что по лемме 3 из $a > \overline{a} > 1$ следует, что $c \in (0,1)$. Условие $\ln G(b)/\ln G(b') = c$ в области $1 < b' < b$ можно переписать в виде

$$\ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right) = c\ln\left(\frac{b'-1}{b'+1}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{b-1}{b+1} = \left(\frac{b'-1}{b'+1}\right)^c$$
$$\Longleftrightarrow \quad b = \frac{1+((b'-1)/(b'+1))^c}{1-((b'-1)/(b'+1))^c} = F_c(b'),$$

где функция $F_c$ определена в лемме 12.

Пары $b$, $b'$, удовлетворяющие $\ln G(b)/\ln G(b') = c$, – это график функции $b = F_c(b')$.

Так как $x \in T$, то $\ln G(x)/\ln G(\overline{x}) \geqslant c$.

Если в выражении $\ln G(x_0)/\ln G(\overline{x})$ устремить $x_0$ к $+\infty$, то само выражение будет непрерывно уменьшаться, стремясь к нулю. Значит, найдется такой $x_0 > x$, что $\ln G(x_0)/\ln G(\overline{x}) = c$. Что равносильно $F_c(\overline{x}) = x_0 > x$.

Введем функцию $K(z) = (z-\overline{x})y/\overline{y}+x$. Заметим, что $K(\overline{x}) = x$ и $K(\overline{x+y}) = x+y$.

Покажем, что на отрезке от $\overline{x}$ до $\overline{x+y}$ производная функции $F_c$ больше, чем производная функции $K$. Действительно, $F_c' > 1/c = \ln G(\overline{a})/\ln G(a) > a/\overline{a} \geqslant y/\overline{y} = K'$. Здесь использованы леммы 12, 11, а также тот факт, что $y \in P$.

Мы уже получили, что $F_c(\overline{x}) > x = K(\overline{x})$, и благодаря неравенству на производные имеем $F_c(\overline{x+y}) > K(\overline{x+y}) = x+y$.

Рассмотрим тождество $\ln G(F_c(z))/\ln G(z) = c$ (оно равносильно $F_c(z) = F_c(z)$, как показано в начале доказательства). Подставим в него $\overline{x+y}$:

$$\frac{\ln G(F_c(\overline{x+y}))}{\ln G(\overline{x+y})} = c.$$

Функция $\ln G$ убывающая. Как показано выше, $x+y < F_c(\overline{x+y})$. Используя это, получим

$$\frac{\ln G(x+y)}{\ln G(\overline{x+y})} > c.$$

Вспоминая, что $c = \ln G(a)/\ln G(\overline{a})$, получим

$$\frac{\ln G(x+y)}{\ln G(\overline{x+y})} > \frac{\ln G(a)}{\ln(G(\overline{a})}$$

что и требовалось доказать.

Наконец мы имеем возможность перейти к доказательству теоремы. Множества $T$, $P$ определены выше, поэтому сразу перейдем к доказательству того, что они удовлетворяют свойствам 1)–5) из леммы 5.

Доказательство теоремы 5. *Свойство* 1). Пусть $x, y \in P$. Доказываем, что $x+y \in P$, т.е. $(x+y)$ удовлетворяет условиям (i)$'$, (ii), наложенным на множество $P$.

(i)$'$. Мы имеем $0 < \overline{x} < x, 0 < \overline{y} < y$. Сложив, получаем $0 < \overline{(x+y)} < (x+y)$.

(ii). Мы имеем $x, y > 0$, поэтому дроби $x/(x+y)$ и $y/(x+y)$ положительны и дают единицу в сумме. Домножим на эти коэффициенты неравенства из условия (ii), получим

$$\frac{\overline{a}}{a} \leqslant \frac{\overline{x}}{x}\,\frac{x}{(x+y)} + \frac{\overline{y}}{y}\,\frac{y}{(x+y)} = \frac{\overline{x+y}}{x+y},$$

что и требовалось доказать.

*Свойство* 2). Пусть $x, y \in P$. Мы доказываем, что $(xy)/(x+y) \in P$.

Воспользуемся тождеством

$$\frac{y\overline{y}}{(x+y)(\overline{x+y})}x + \frac{x\overline{x}}{(x+y)(\overline{x+y})}y = \frac{xy}{x+y}.$$

У нас есть условия $x > \overline{x} > 0$, $y > \overline{y} > 0$, из чего следует, что коэффициенты перед $x$ и $y$ в этом тождестве положительны. Коэффициенты будут рациональны, так как являются произведением сопряженных друг другу чисел из $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.

Заметим, что если $x \in P$, то для любого положительного рационального числа $a$ верно $ax \in P$ (условия (i$'$), (ii) проверяются непосредственно).

Тогда мы можем домножить $x$, $y$ на рациональные положительные числа и получить $y\overline{y}/((x+y)(\overline{x+y}))x \in P$, $x\overline{x}/((x+y)(\overline{x+y}))y \in P$. Используя доказанное выше свойство 1), получаем $xy/(x+y) \in P$.

*Свойство* 3). Пусть $x, y \in T$. Доказываем, что $x+y \in P$. Можно заметить, что неравенство (i) сильнее неравенства (i$'$), поэтому $T \subset P$. Из этого следует, что $x, y \in P$, и по свойству 1) получаем $x+y \in P$.

*Свойство* 4). Пусть $x \in T$, $y \in P$. Доказываем, что $x+y \in T$.

4(i) и 4(ii) аналогичны 1(i$'$) и 1(ii), 4(iii) доказано в лемме 13.

*Свойство* 5). Пусть $x \in T$, $y \in T$. Доказываем, что

$$G^{-1}(G(x)G(y)) = \frac{xy+1}{x+y} \in T.$$

Все пункты будут построены по одному принципу: берем неравенство, следующее из свойств (i), (ii), (iii) и применяем несколько преобразований.

5(i). Так как $\overline{x}, \overline{y} > 1$, то $(\overline{x}-1)(\overline{y}-1) > 0 \Rightarrow (\overline{xy}+1)/(\overline{x+y}) > 1$ (доказана первая часть неравенства (i)).

Далее, $(y\overline{y}-1)(x-\overline{x})+(x\overline{x}-1)(y-\overline{y}) > 0 \Rightarrow xy\overline{y}+xy\overline{x}+\overline{x}+\overline{y} > \overline{xy}y+\overline{xy}x+x+y$ $\Rightarrow (\overline{x+y})(xy+1) > (x+y)(\overline{xy}+1) \Rightarrow (xy+1)/(x+y) > (\overline{xy}+1)/\overline{x+y}$ (доказана вторая часть неравенства (i)).

5(ii). По условию (ii), задающему множество $T$, выполнены неравенства $\overline{x}/x \geqslant \overline{a}/a$ и $\overline{y}/y \geqslant \overline{a}/a$. Домножая обе части неравенств на равные числа, мы получаем $\overline{x}a - x\overline{a} \geqslant 0$, $\overline{y}a - y\overline{a} \geqslant 0 \Rightarrow x\overline{x}(\overline{y}a - y\overline{a}) + y\overline{y}(\overline{x}a - x\overline{a}) + (xa - \overline{xa}) + (ya - \overline{ya}) > 0 \Rightarrow \overline{xy}xa + \overline{xy}ya + xa + ya > xy\overline{xa} + xy\overline{ya} + \overline{xa} + \overline{ya} \Rightarrow (\overline{xy}+1)(x+y)a > (xy+1)(\overline{x+y})\overline{a} \Rightarrow \big((\overline{xy}+1)/(\overline{x+y})\big)/\big((xy+1)/(x+y)\big) = \big(\overline{G^{-1}(G(x)G(y))}\big)/\big(G^{-1}(G(x)G(y))\big) \geqslant \overline{a}/a$.

5(iii). Если в условие (iii) вместо $b$ подставить число $G^{-1}(G(x)G(y)$, то неравенство раскроется следующим образом:

$$\frac{\ln G(G^{-1}(G(x)G(y)))}{\ln G(G^{-1}(\overline{G(x)G(y)}))} = \frac{\ln G(x) + \ln G(y)}{\ln(\overline{G(x)}) + \ln(\overline{G(y)})}.$$

Зная, что $\ln G(x)/\ln\overline{G(x)} \geqslant \ln G(a)/\ln\overline{G(a)}$ и $\ln G(y)/\ln\overline{G(y)} \geqslant \ln G(a)/\ln\overline{G(a)}$, мы получаем $(\ln G(x)+\ln G(y))/(\ln(\overline{G(x)})+\ln(\overline{G(y)})) \geqslant \ln G(a)/\ln\overline{G(a)}$ по аналогии с п. 1(ii).

По лемме 10 мы получаем, что $T'(a) \in T$ и $P'(a) \in P$ (так как очевидно, что $a \in T$). Как следствие, средняя линия трапеции, тривиально замостимой гомотетиями трапеции $A$, лежит в $T$, что и требовалось доказать.

В этом параграфе также докажем предложение 1.

Доказательство предложения 1. Мы хотим найти бесконечное количество чисел $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ таких, что $b \in T'(a)$ и $\ln G(b)/\ln G(\bar{b}) = \ln G(a)/\ln G(\overline{a})$.

Определим $b_1 = a$, $b_{n+1} = G^{-1}(G(a)G(b_n))$. Попарная различность всех $b_i$ следует из геометрического смысла условия 5) в лемме 4: трапеция $t(b_{n+1})$ получается при сложении верхним и нижним основанием двух трапеций, гомотетичных $t(a)$ и $t(b_n)$, а значит, ее отношение оснований меньше. Значит, и ее средняя линия $b_{n+1}$ меньше, чем $b_n$.

Докажем по индукции, что $b_i \in T'(a)$. Для $b_1 = a$ это очевидно. Переход делается при помощи свойства 5) из леммы 9: из $a \in T'(a)$, $b_n \in T'(a)$ следует $b_{n+1} \in T'(a)$.

Докажем по индукции, что $\ln G(b_i)/\ln G(\bar{b}_i) = \ln G(a)/\ln G(\overline{a})$. Для $b_1 = a$ это, опять же, очевидно. Сделаем шаг индукции от $b_n$ к $b_{n+1}$. По предположению индукции мы также знаем, что $\ln G(b_n)/\ln G(\bar{b}_n) = \ln G(a)/\ln G(\overline{a})$ или, равносильно, $\ln G(b_n)/\ln G(a) = \ln G(\bar{b}_n)/\ln G(\overline{a})$. Воспользуемся этим и получим

$$\frac{\ln G(b_{n+1})}{\ln G(\bar{b}_{n+1})} = \frac{\ln G(a)+\ln G(b_n)}{\ln G(\overline{a})+\ln G(\bar{b}_n)} = \frac{\ln G(a)(1+\ln G(b_n)/\ln G(a))}{\ln G(\overline{a})(1+\ln G(\bar{b}_n)/\ln G(\overline{a}))} = \frac{\ln G(a)}{\ln G(\overline{a})}.$$

Мы доказали, что каждое $b_i$ лежит в $T'(a)$ и удовлетворяет равенству

$$\frac{\ln G(b_i)}{\ln G(\bar{b}_i)} = \frac{\ln G(a)}{\ln G(\overline{a})},$$

что и требовалось.

## § 10. Геометрическая интерпретация

Несмотря на то, что доказываемые теоремы изначально утверждают геометрические факты (и первые две теоремы можно использовать, чтобы явно конструировать замощения трапеций), здесь речь пойдет не об этой геометрической интерпретации. Нам хотелось бы неформально пояснить, как были придуманы доказательства (и отчасти формулировки) теорем 3 и 5.

Для начала вернемся к лемме 5 и выделим из имеющихся свойств 1) и 6). Числа, лежащие в $P$, можно складывать и домножать на рациональные. Это наводит на мысль, что параллелограммам можно сопоставить некоторое векторное пространство. И если при $P \subset \mathbb{Q}$ это было еще не так важно, то при $P \subset \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$ такой подход сильно помогает понять процесс.

Как было сказано ранее, стандартный параллелограмм задается длиной основания. Пойдем дальше: будем изображать параллелограмм $p(a)$ точкой

$(\overline{a}, a)$, а трапецию $t(b)$ точкой $(\overline{b}, b)$. Оси координатной плоскости будем называть $\overline{y}$, $y$, чтобы лучше видеть, что и по какой оси мы отмечаем.

Так, на рис. 8 (для $d = 2$) отметим точку $T$, соответствующую $t(4)$, и $P$, соответствующую $p(1 + \sqrt{2})$. Нетрудно заметить, что точки, соответствующие всевозможным трапециям вида $t(b)$, где $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, будут всюду плотны на полуплоскости $y > 1$, а соответствующие параллелограммам – на $y > 0$. Для удобства изобразим тонкой штриховой линией прямую, ниже которой не могут находиться точки, соответствующие трапециям.

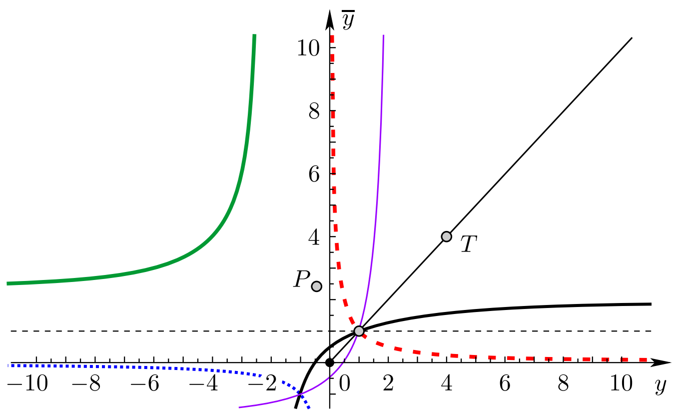


Рис. 8. Плоскость $(\overline{y}, y)$ с линиями $h = -3$, $h = 0$, $h = 3$, $h = \infty$.

В этом параграфе понятие $T(\alpha)$ резонно переопределить не как множество чисел, а как множество точек вида $(\overline{y}, y)$ таких, что трапеция $t(y)$ замощается трапециями $t(a_1), \ldots, t(a_k)$ для $a_1, \ldots, a_k \in \alpha$. Для так определенных множеств $T(\alpha), P(\alpha)$ будет несложно переписать свойства из леммы 5: например, свойство 1) будет выглядеть как $(\overline{a}, a) \in P(\alpha)$, $(\overline{b}, b) \in P(\alpha) \Rightarrow (\overline{a} + \overline{b}, a + b) \in P(\alpha)$.

Линии, которые отмечены на рис. 8 – это линии уровня функции $h(\overline{y}, y) := h(y)$. В частности, луч, на котором лежит $T$, – это линия уровня $h = \infty$, рациональные числа. Остальные три линии соответствуют $h = -3$, $h = 0$ и $h = 3$ (жирная сплошная, пунктирная и жирная штриховая соответственно).

Здесь мы опускаем формальное доказательство, но линия уровня $h(x) = k$ – это часть гиперболы $(y + k/\sqrt{2})(\overline{y} - k/\sqrt{2}) = 1 - k^2/2$. В частности, у таких гипербол есть вертикальные асимптоты – сколь угодно большой $y$ при стремящемся к константе $\overline{y}$. Неочевидно, что множество точек вида $(y, \overline{y})$ на гиперболе окажется плотным, однако лемма 7 – это в точности утверждение о том, что на ней есть сколь угодно высокие точки такого вида.

Лемма же 6 сводится к следующему: если в $T(\alpha)$ лежит некоторая точка $M$ луча $\{y = \overline{y},\ y > 1\}$ и некоторая точка $X$ гиперболы $h(y) = q$, то в ней также лежат все точки (вида $(y, \overline{y})$ для $y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$), находящиеся на гиперболе $h(y) = q$ ниже, чем $X$.

Теперь мы в состоянии осознать геометрический смысл всего доказательства теоремы 3. В ней сказано, что трапеции $t(a), t(b)$ с $\overline{a} > 0$ и $\overline{b} < 0$ способны замостить любую другую трапецию. Соответствующие им точки $A, B \in T(a, b)$ расположены по разные стороны от оси $\overline{y} = 0$ (здесь и далее см. рис. 9).

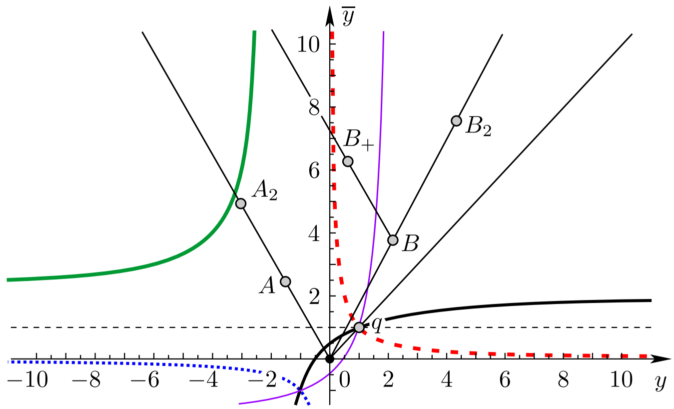


Рис. 9. Геометрическое толкование доказательства теоремы 3.

Сначала мы пользуемся свойством 3) из леммы 5 – векторно складываем каждую из этих точек саму с собой, получаем точки $A_2, B_2 \in P(\alpha)$, расположенные по разные стороны от оси $\overline{y} = 0$. Очевидный факт: угол, натянутый на векторы $A_2, B_2$, пересекает каждую из гипербол, содержащих множества $\{h(y) = q\}$, и, как следствие, для любого $q$ этот угол содержит точку $(\overline{x}, x)$ такую, что $h(x) = q$.

У множества $P(\alpha)$ есть крайне удобные свойства 1) и 6), из которых следует его замкнутость относительно векторного сложения и домножения вектора на положительное рациональное число. Из этого следует, что $P(\alpha)$ будет содержать все точки вида $(\overline{y}, y)$ для $y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, лежащие внутри угла $AOB$ (шаг не совсем очевиден и доказывается аналогично лемме 8). А если воспользоваться свойством 3), по которому сумма точки из $T(\alpha)$ и $P(\alpha)$ лежит в $T(\alpha)$, то мы можем еще и доказать, что точки угла $B_+BB_2$ лежат в $T(\alpha)$ (здесь отрезок $B_+B$ построен параллельно $OA$).

Именно эта логика – представление необходимой точки угла в виде суммы точки из $T(\alpha)$ и линейной комбинации точек из $P(\alpha)$ – стоит за леммой 8. В самой лемме нет аналога “угла”, потому что мы сразу нацелены на более важный результат – для каждой гиперболы вида $h(y) = q$ все ее достаточно высокие точки лежат в $T(\alpha)$. И если мы найдем в $T(\alpha)$ точку вида $(m, m)$ $(m \in \mathbb{Q})$, то, исходя из леммы 6 или описанного выше свойства гипербол, в $T(\alpha)$ лежат все трапеции вида $t(b)$ для $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

Чтобы доказательство было закончено, надо доказать, почему $T(\alpha)$ содержит хотя бы одну точку вида $(m, m)$ для рационального $m$. В доказательстве теоремы 3 разобрано, почему если $x \in T(\alpha)$ и $h(x) = 0$, то $T(\alpha)$ содержит некоторое рациональное число. На рис. 9 этот факт не нагляден, поэтому не был показан.

Теперь, когда мы освоились с геометрическим представлением множества трапеций, нам бы хотелось перейти к геометрической стороне теоремы 5 и, в частности, пояснить, чем интересно условие, заданное трансцендентной функцией.

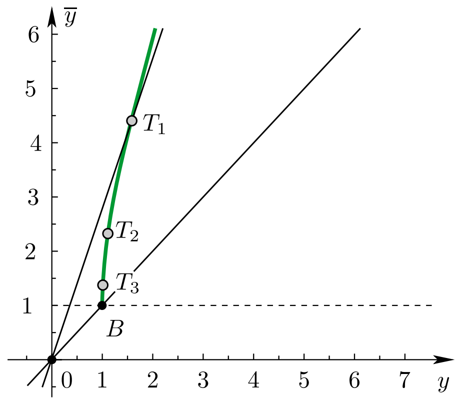


Рис. 10. К теореме 5.

В этом параграфе под $T'(a)$ мы так же понимаем множество *точек*, соответствующих тривиально замостимым трапециям.

Мы рассматриваем множество $T'(a)$ для $a > \overline{a} > 1$. На рис. 10 координатам $(\overline{a}, a)$ для $a = 3 + \sqrt{2}$ соответствует точка $T_1$.

Луч $OB$ задается уравнением $\overline{y} = y$, луч $OT_1$ задается уравнением $\overline{y}/y = \overline{a}/a$. Кривая $T_1T_2B$ задана уравнением $\ln G(y)/\ln G(\overline{y}) = \ln G(a)/\ln G(\overline{a})$ или же равносильным уравнением $y = F_c(\overline{y})$. Здесь обозначение $F_c$ взято из леммы 12, равносильность двух уравнений доказана в самом начале доказательства леммы 13.

В доказательстве теоремы 5 рассматриваются множества чисел $T$ и $P$. Из неравенств на эти множества очевидна геометрическая интерпретация – множеству $P$ соответствуют точки внутри угла $T_1OB$, множеству $T$ – точки, лежащие внутри того же угла, но ниже кривой $T_1T_2B$. Доказывается, что эти два множества (в данной интерпретации это множества точек) удовлетворяют всем свойствам из леммы 5. В частности, п. 4(iii) доказательства переформулируется так: “для точки $a$ из области $T$ и точки $b$ из области $P$ доказать, что $a + b$ будет лежать ниже кривой $T_1T_2B$”. Геометрически очевидно, что это стоит доказывать через тот факт, что наклон кривой $T_1T_2B$ в каждой точке превышает наклон прямой $OT_1$. Это и делается в лемме 12. Очевидная мысль использовать выпуклость функции в этой ситуации не слишком помогает – выпуклость так заданной кривой тоже доказывается через сложные вычисления.

Перейдем к геометрическим соображениям, выходящим за пределы доказанных нами теорем. Мы хотели бы обратить внимание на участок кривой $BT_1$. Сама кривая описывается трансцендентным уравнением – это график функции $F_c(x)$ из леммы 12. Однако по предложению 1 на этой кривой лежит бесконечное количество точек, принадлежащих “сетке” $\{(\overline{y}, y) \colon y \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]\}$ (на рис. 10

отмечены $T_2$, $T_3$). Мы не знаем способа доказать, что на этом участке кривой больше нет точек из этого множества. Также мы не видим очевидного способа найти на кривой точки сетки выше, чем $T_1$. Это затруднение интуитивно понятно: точки вида $T_n$ соответствуют сложениям трапеции из нескольких гомотетий трапеции $t(a)$ (см. доказательство леммы 5), но если такую операцию обратить (разрезать трапецию на $n$ подобных друг другу), то отношение оснований полученных трапеций будет лежать за пределами $\mathbb{Q}[\sqrt{d}\,]$.

Таким образом, необходимое условие из теоремы 5 может быть достаточным, но даже если оно не достаточное, указанная трансцендентная кривая проходит через бесконечное число точек на границе множества "реализуемых" точек $(b, \bar{b})$. Поэтому трансцендентность ограничивающей кривой может считаться достоверно установленной новой особенностью, пока не появлявшейся в работах по разрезанию многоугольников на подобные.

## Список литературы


[1] M. Dehn, "Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke", *Math. Ann.*, **57**:3 (1903), 314–332.

[2] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, W. T. Tutte, "The dissection of rectangles into squares", *Duke Math. J.*, **7** (1940), 312–340.

[3] C. Freiling, D. Rinne, "Tiling a square with similar rectangles", *Math. Res. Lett.*, **1**:5 (1994), 547–558.

[4] M. Laczkovich, G. Szekeres, "Tiling of the square with similar rectangles", *Discrete Comput. Geom.*, **13**:3-4 (1995), 569–572.

[5] C. Freiling, M. Laczkovich, D. Rinne, "Rectangling a rectangle", *Discrete Comput. Geom.*, **17**:2 (1997), 217–225.

[6] Ф. А. Шаров, "Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон", Матем. просв., сер. 3, **20**, МЦНМО, М., 2016, 200–214; англ. пер.: F. Sharov, *Dissection of a rectangle into rectangles with given side ratios*, arXiv: 1604.00316.

[7] B. Szegedy, "Tilings of the square with similar right triangles", *Combinatorica*, **21**:1 (2001), 139–144.

[8] R. Kenyon, "Tilings and discrete Dirichlet problems", *Israel J. Math.*, **105**:1 (1998), 61–84.



**Иван Сергеевич Зверев**
**(Ivan S. Zverev)**
Факультет математики,
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
*E-mail*: professor8@mail.ru



Поступила в редакцию
25.09.2017 и 25.10.2018