В. Н. Белых, К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке, *Матем. сб.*, 2019, том 210, номер 1, 27–62

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8984

УДК 519.644+517.518.85

В. Н. Белых

К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на отрезке

Построены ненасыщаемые хорошо обусловленные с весовой функцией из $L_p[I]$, $1 < p < \infty$, квадратурные формулы на конечном отрезке I. Специфическая особенность этих формул – отсутствие главного члена погрешности и как результат – способность автоматически с ростом числа узлов подстраиваться к любым избыточным (экстраординарным) запасам гладкости подынтегральных функций. Вычисление всех определяющих параметров квадратур – узлов, коэффициентов и числа обусловленности – осуществляется в рамках единого подхода, основанного на решении ряда специальных краевых задач теории мероморфных функций в единичном круге. Для частных видов весовых функций, имеющих важные приложения, указаны алгоритмы эффективного вычисления всех параметров квадратур. Для C^∞-гладких подынтегральных функций ответ конструируется с абсолютно неулучшаемой экспоненциальной оценкой погрешности. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких функций. Эта асимптотика также имеет вид убывающей к нулю (с ростом числа узлов n) экспоненты.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: квадратурная формула, ненасыщаемость, ошибка округления, хорошая обусловленность, экспоненциальная сходимость.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm8984

§ 1. Введение

В проблеме приближенного вычисления интегралов до сих пор имеется существенный пробел. Именно, не решен вопрос о действенном влиянии на конструируемый числовой ответ экстраординарного запаса гладкости класса X подынтегральных функций (интегранта X). К примеру, методы (см. [1]–[5]), получившие значительное распространение на практике, теряют бóльшую часть информации, содержащейся в таблице n чисел, которая возникает при их применении. Они не используют избыточную (т.е. $l > r$) гладкость X и их погрешность имеет степенной $O(n^{-r})$ порядок убывания к нулю, где $r > 0$ – целое число. Вследствие этого отыскание числового ответа нужной точности становится дорогим, ибо аппроксимационные возможности интегранта X, определяемые величиной александровского n-поперечника $\alpha_n(X) = O(n^{-l})$, вступают в конфликт с точностью $O(n^{-r})$, которую обеспечивает главный член погрешности метода (поперечник $\alpha_n(X)$ определяется как нижняя грань ε-сдвигов компакта X в компакт размерности не больше n (см. [6; гл. 1, § 1, п. 4]), а порядок убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$ определяется гладкостью X). В результате с расширением аппроксимационных возможностей X показатель r сходимости метода не увеличивается и в ответе приходится полагаться разве что на удачу, а не на гарантированный успех (см. [7]). Таким образом, “избыток” гладкости X в количестве $l > r$, превышающем необходимые потребности метода, всего лишь потенциален и не может реализовываться, когда у погрешности имеется главный член. Любые попытки усовершенствовать метод на классе функций бо́льшей гладкости за счет присоединения главного члена погрешности безуспешны: модифицированный, он не вносит принципиально ничего нового, полностью сохраняя прежний и локальный закон формирования погрешности, хотя и более высокого порядка. Иначе говоря, квадратурные формулы с главным членом погрешности изначально не являются вычислительным средством, ориентированным на учет экстраординарной гладкости интегранта X. И выход за пределы существующей конечно-разностной парадигмы становится возможен лишь в результате отказа от “ценностей”, ассоциированных с ее статус-кво – главным членом погрешности.

В 1975 г. в “Докладах АН СССР” (т. 221, № 1) появилось сообщение К. И. Бабенко о принципиально новых – ненасыщаемых – вычислительных методах (и численных алгоритмах). Обосновав введение в вычислительную математику таких числовых параметров, как александровский n-поперечник и колмогоровская ε-энтропия, К. И. Бабенко переформулировал в этих терминах существовавшее в теории приближений понятие насыщения. Естественным образом в этой связи появилось и понятие ненасыщаемого численного алгоритма.

Краткое изложение основ теории ненасыщаемых численных методов содержится в книге [8], второе издание которой появилось в 2002 г.

Отличительной чертой ненасыщаемого численного метода является отсутствие главного члена погрешности и как результат – способность автоматически подстраиваться к имеющимся аппроксимационным возможностям класса X отыскиваемых решений задач, определяемых асимптотикой убывания к нулю александровских n-поперечников $\alpha_n(X)$ с ростом параметра n (см. [8]). Скорость убывания $\alpha_n(X)$ к нулю сравнивается при этом с числом n свободных параметров конечномерного описания X: она тем выше, чем бо́льше “запас” гладкости X (здесь термин “запас” характеризует набор математических фактов, обеспечивающих наиболее быстрое с ростом n убывание $\alpha_n(X)$ к нулю). В результате численный метод, погрешность которого описывается в терминах $\alpha_n(X)$, с ростом гладкости X (при прочих равных условиях) самосовершенствуется, черпая приращение своей практической эффективности непосредственно в дифференциальной природе X (феномен ненасыщаемости; см. [9]). Для классов X конечной и бесконечной гладкости убывание $\alpha_n(X)$ к нулю с ростом n носит степенной и экспоненциальный характер соответственно. В итоге избыточная (экстраординарная) гладкость X, прежде находившаяся на периферии насущных интересов реальных вычислений, становится их активным персонажем. Причем пик эффективности – экспоненциальная сходимость – достигается на классах бесконечно гладких X. И это принципиально отличает ненасыщаемые численные методы от методов с главным членом погрешности, т.е. насыщаемых (см. [8]). При этом, открывая новые перспективы для вычислительной практики, ненасыщаемые численные методы создают серьезную основу для построения компьютерных числовых ответов гарантированного качества (см. [10], [11]).

Но никакие технические устройства не позволяют точно выполнять арифметические операции над числами, заданными бесконечными дробями. Операция замены вещественного числа конечной дробью (округление) является вынужденной и необходимой и без потери информации не обходится. В этой связи в мировой вычислительной практике сформировалось представление, излагаемое, к примеру, в известных монографиях С. К. Годунова [12], Дж. Деммеля [13], Л. Н. Трефетхена [14] и акцентирующее внимание на нетривиальности воздействия ошибок округления на компьютерный числовой процесс. В результате математика обрела числовые критерии "хорошей" обусловленности метода: в пределах разумной малости ошибок округления должны существовать механизмы, обеспечивающие стабильное (устойчивое) функционирование вычислительного процесса вплоть до получения конечного ответа.

Исследования К. И. Бабенко [15]–[17], сыграв решающую роль в становлении точных представлений о предельных возможностях численных алгоритмов, обнаружили, что, игнорируя экстраординарную гладкость интегранта X, мы не только резко сужаем возможности квадратурных формул, но и действуем крайне расточительно и неэкономно. Вдобавок наметился серьезный прогресс, связанный с открытием ненасыщаемых квадратурных формул, до недавнего времени не входивших в арсенал вычислительной практики.

§ 2. Постановка проблемы

Точными методами исчерпывается довольно узкий класс определенных интегралов; за его пределами прибегают к приближенным методам – квадратурным суммам

$$\xi \equiv \int_{-1}^{+1} f(t)\,d\sigma(t) \simeq \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k), \qquad t_k \in I \equiv [-1,1], \tag{2.1}$$

возникающим в прикладных науках обычно в качестве важного промежуточного этапа. При этом вещественные параметры t_k, c_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, – это соответственно узлы и коэффициенты (веса) квадратурной суммы (2.1), а выражение

$$\wp_n(f) = \int_{-1}^{+1} f(t)\,d\sigma(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k), \tag{2.2}$$

характеризующее точность представления интеграла конечной суммой, – функционал погрешности. Узлы и веса обычно задаются либо явно, либо как итог вполне определенной последовательности вычислений.

Будем считать, что любая специфичность в поведении подынтегрального выражения в (2.1) заранее предопределена и зафиксирована условием $d\sigma(t) = r(t)\,dt$, где $r(t)$ – функция, суммируемая со степенью $1 < p < \infty$, т.е. r принадлежит $L_p[I]$. Считаем также, что функция f принадлежит пространству $C \equiv C[I]$ непрерывных на отрезке I функций с чебышёвской нормой $\|f\| = \max_{t\in I}|f(t)|$, $C^k \equiv C^k[I]$ ($k \geqslant 0$ целое) – пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке I функций с нормой $\|f\|_k = \max_{0\leqslant\alpha\leqslant k}\sup_{t\in I}|D^\alpha f(t)|$, $D^\alpha \equiv d^\alpha/dt^\alpha$ и $\mathscr{P}^n \subset C$ – подпространство алгебраических многочленов степени не выше $n-1$ ($n>0$ целое).

Если приближенное равенство (2.1) обращается в точное на элементе g из C, то квадратурная сумма точна на g и g принадлежит $\ker\wp_n = \{f\in C \mid \wp_n(f)=0\}$.

Квадратурную сумму (2.1) назовем *сходящейся* (или *допустимой*) на элементе f из C, если $\wp_n(f)\to 0$ при $n\to\infty$.

Вычислить интеграл (2.1) приближенно – это значит, предъявив квадратурную сумму (2.1) из класса допустимых, построить значение интеграла (2.1) с наперед заданной точностью, измеряемой величиной $|\wp_n(f)|$ функционала (2.2).

Качество квадратурной суммы (2.1) определяется законом убывания функционала $\wp_n(f)$ к нулю с ростом числа узлов n. При этом порядок убывания $\wp_n(f)$ к нулю зависит как от конструктивных особенностей суммы (2.1), так и от наличия информации о "запасе" гладкости подынтегральной функции f.

В итоге на практике мы постоянно находимся в ситуации выбора. И хотя каждый выбор – акт чистого произвола и случая, он детерминирован и прежде всего той частью информации о подынтегральном выражении в (2.1), на которую мы намерены безусловно опереться в оценке величины $|\wp_n(f)|$ функционала погрешности (2.2).

Следующий факт свидетельствует о непростом разрешении этой проблемы.

Теорема 1 (см. [8; гл. 6, § 1, теорема 1]). *Ни для какой системы узлов и коэффициентов в* (2.1) *функционал погрешности* $\wp_n(f)$ *не стремится к нулю сильно на* C. *Более того, справедливо равенство*

$$\|\wp_n\| = \int_{-1}^{+1}|r(t)|\,dt + \sum_{k=1}^{n}|c_k|. \tag{2.3}$$

Несмотря на столь элементарный характер, равенство (2.3) свидетельствует о том, что, не располагая информацией о гладкости функции f (кроме условия ее непрерывности), никаким наперед заданным набором узлов и коэффициентов нельзя обеспечить приближенное вычисление интеграла суммой (2.1).

Столь неутешительный в своей определенности факт не так уж и трагичен. В действительности справедлив другой, куда более ценный для практики результат (см. [18]), состоящий в том, что проблема (2.1) разрешима всегда в слабом смысле: существуют системы узлов и коэффициентов такие, что $\wp_n(f)\to 0$ поточечно (слабо) в C при $n\to\infty$. Результат этот тем более важен, что обычно на практике приходится иметь дело не со всем пространством C, а лишь с некоторой его частью $X\subset C$ – классом подынтегральных функций, и часто для его элементов можно указать эффективный порядок стремления $\wp_n(f)$ к нулю. Акт объединения таких функций в класс X обычно завершается выяснением того характеристического свойства, которым обладают все элементы X в условиях допустимости суммы (2.1), т.е. выполнением условия

$$\sup_{f\in X}\wp_n(f)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.4}$$

Пусть X – компакт. Тогда условие (2.4) выполнено. В связи с этим нет особой необходимости задавать элементы X точно. Их всегда можно задать приближенно элементами линейных конечномерных подпространств L^n в C, но используя при этом информацию о принадлежности X.

В результате проблема приближенного вычисления интеграла (2.1) обретает следующую постановку: построить квадратурную сумму (2.1), предполагая, что X – компакт в C и сумма (2.1) точна на элементах некоторого подпространства $L^n \subseteq \ker \wp_n$, $\dim L^n \leqslant n$.

При этом оценка погрешности (2.2) на элементе f из X будет выглядеть так:

$$|\wp_n(f)| = |\wp_n(f-\psi)| \leqslant \|\wp_n\| \inf_{\psi \in L^n} \|f-\psi\|, \qquad \psi \in \ker \wp_n. \tag{2.5}$$

Если ввести понятие наилучшего в C приближения ψ к данной функции f

$$E(f, L^n) \equiv \inf_{\psi \in L^n} \|f-\psi\|, \qquad f \in C,$$

то функционал погрешности (2.2) будет определен на компакте X корректно и его величина оценивается следующим образом:

$$|\wp_n(f)| \leqslant \|\wp_n\| \varepsilon(X, L^n), \qquad \varepsilon(X, L^n) = \sup_{f \in X} E(f, L^n). \tag{2.6}$$

Здесь $\|\wp_n\|$ – норма (2.3), а $\varepsilon(X, L^n)$ – аппроксимационные числа, характеризующие точность представления компакта X последовательностью подпространств $L^n \subset C$ при $n \to \infty$. Величины $\varepsilon(X, L^n)$ зависят от выбора подпространств L^n. Причем если последовательность $\{L^n\}$ исчерпывает C, т.е. $L^n \subseteq L^{n+1}$ и $\overline{\bigcup_{n\geqslant 0} L^n} = C$, то для любой f из C справедливо $E(f, L^{n+1}) \leqslant E(f, L^n)$ и $\lim_{n\to\infty} E(f, L^n) = 0$ (теорема Вейерштрасса; см. [19; гл. 1, § 1, п. 10]).

Но выбор подпространств L^n пока никак не мотивирован. Поставив задачу отыскания последовательности $\{L^n\}$, на которой величины $\varepsilon(X, L^n)$ минимальны, приходим к понятию колмогоровского n-поперечника:

$$\varkappa_n(X) \equiv \inf_{L^n \subset C, \dim L^n \leqslant n} \varepsilon(X, L^n) = \varepsilon(X, M^n), \qquad M^n \subset C, \quad \dim M^n \leqslant n. \tag{2.7}$$

Асимптотика убывания $\varkappa_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$ характеризует точность оптимального исчерпывания компакта X последовательностью $\{M^n\}$ линейных подпространств в C; подпространство M^n, на котором реализуется inf в (2.7), называется *$\varkappa$-экстремальным*.

Описание компакта X экстремальной последовательностью $\{M^n\}$ бывает на практике трудно реализуемо. Разумно заменить его другим, более слабым, но удобным, позволяющим ориентироваться в выборе последовательности не на точное значение $\varkappa_n(X)$, а на порядок стремления $\varkappa_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$.

Известно (см. [6; гл. 1, § 5, теорема 3]), что на отрезке I последовательность подпространств алгебраических многочленов $\{\mathscr{P}^n\}$ близка к $\varkappa$-экстремальной $\{M^n\}$ и подчинена результату, который коротко можно охарактеризовать как универсальную (по порядку приближения в C) экстремальность сразу для многих классов гладкости X (см. [19; гл. 3, § 3, следствие]). Ценность этого факта определяется возможностью существенного уточнения классической теоремы Вейерштрасса и новой ее формулировкой в форме “усиленного” неравенства Джексона (см. [8; гл. 4, § 5, п. 2, неравенство (8)]): если функция f принадлежит C^k, то

$$E(f,\mathscr{P}^n)=\inf_{\psi\in\mathscr{P}^n}\|f-\psi\|=\|f-Q_{n-1}\|$$
$$\equiv E_n(f)\leqslant\frac{\pi}{2}\min_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{a^k\|D^kf\|}{n^k},\qquad 1<a<5. \tag{2.8}$$

Используя оценку (2.8), следует иметь в виду, что сами по себе производные высоких порядков функции f дают лишь общее представление о том, как будет вести себя приближение Q_{n-1} из $\mathscr{P}^n$, если увеличивать n до бесконечности. На практике же приходится довольствоваться вполне определенными и конечными значениями n. Поэтому решающую роль в оценке (2.8) играет не только порядок приближения функции f многочленом Q_{n-1}, но и абсолютные значения самих ее производных высоких порядков.

Обратив на это внимание, построим квадратурную сумму (2.1), точную на подпространстве алгебраических многочленов $\mathscr{P}^n$ степени не выше $n-1$, $n>0$.

Для этого по фиксированным и несовпадающим узлам $t_1,t_2,\dots,t_n$ из I определим многочлен $\pi_n(t)=(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_n)$, а затем по значениям $Jf=(f(t_1),\dots,f(t_n))$ функции f в этих узлах построим интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$$p_n(t;Jf)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)l_{nk}(t),\qquad l_{nk}(t)=\frac{\pi_n(t)}{\pi_n'(t_k)(t-t_k)},\quad l_{nk}(t_j)=\delta_{kj}. \tag{2.9}$$

Вычислив весовые коэффициенты

$$c_k=\int_{-1}^{+1}r(t)l_{nk}(t)\,dt=\frac{1}{\pi_n'(t_k)}\int_{-1}^{+1}r(t)\frac{\pi_n(t)}{t-t_k}\,dt,\qquad k=1,2,\dots,n, \tag{2.10}$$

построим квадратурную сумму

$$\int_{-1}^{+1}r(t)f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}c_kf(t_k)+\wp_n(f). \tag{2.11}$$

Сумму в (2.11) с коэффициентами (2.10) назовем *интерполяционной квадратурной формулой* (*квадратурой*).

Из оценки (2.5) с учетом $L^n\equiv\mathscr{P}^n$, $E_n(f)\equiv E(f,\mathscr{P}^n)$ и f из X получим

$$|\wp_n(f)|\leqslant\|\wp_n\|E_n(f),$$
$$\|\wp_n\|=\int_{-1}^{+1}|r(t)|\,dt+\sum_{k=1}^{n}|c_k|,\qquad E_n(f)=\inf_{\psi\in\mathscr{P}^n}\|f-\psi\|. \tag{2.12}$$

Замечательное свойство оценки (2.12) – ее факторизуемость в произведение двух фактически независимых сомножителей $\|\wp_n\|$ и $E_n(f)$, причем если первый связан с выбором базиса в $\mathscr{P}^n$, то второй от выбора базиса не зависит и определяется исключительно гладкостью функции f.

§ 3. “Хорошая” обусловленность и ненасыщаемость квадратурных формул

Хорошая постановка (или корректность) компьютерной задачи определяется ее устойчивостью к погрешностям входных данных и ошибкам округлений.

Квадратурный процесс (2.11) как метод приближенного вычисления интеграла должен быть устойчив к ошибкам округлений. Под этим обычно подразумевается, что с ростом числа узлов n результат осуществляемых вычислений должен слабо зависеть как от вариации узлов, так и от значений в них непрерывной функции f.

При этом накопление ошибок округления при вычислении интеграла квадратурой (2.11) существенно зависит от коэффициентов $|c_k|$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Вследствие этого наиболее благоприятными для вычислений будут те квадратуры, для которых $\sum_{k=1}^{n} |c_k| \leqslant A$ (A – абсолютная постоянная). На практике предпочтительны квадратуры, у которых величина этой суммы имеет наименьшее значение. И потому нахождение нижней границы величины $\sum_{k=1}^{n} |c_k|$ имеет принципиальное значение.

В одном частном случае эта граница легко вычисляется. Так, если $r(t) > 0$, то из условия $1 \in \ker \wp_n$ вытекает, что минимальное значение суммы достигается тогда, когда все c_k в (2.11) положительны. То есть

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| = \int_{-1}^{+1} r(t)\, dt,$$

и потому в оценке (2.12) $\|\wp_n\| = 2\displaystyle\int_{-1}^{+1} |r(t)|\, dt$. В итоге формулы (2.11) с положительными коэффициентами имеют особо важное для практики значение.

Напротив, наличие отрицательных коэффициентов в сумме (2.11) является предупреждением о том, что существует опасность нарушения правильности работы квадратурной формулы. Действительно, согласно условию $1 \in \ker \wp_n$ среди коэффициентов c_k имеются отрицательные, и потому при всех n заведомо выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| \geqslant \int_{-1}^{+1} r(t)\, dt.$$

Вследствие этого величина суммы $\sum_{k=1}^{n} |c_k|$ может оказаться значительной (и даже зависящей от n), что считается большим дефектом квадратурной формулы (см. [1]).

На практике используются квадратуры, сумма модулей коэффициентов которых неограниченно растет с ростом числа их узлов n (см. [1]). При этом верхняя граница роста этой суммы определяется, судя по оценке

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-1}^{+1} r(t) l_{nk}(t)\, dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{-1}^{+1} |r(t)|\, |l_{nk}(t)|\, dt \leqslant \|p_n\| \int_{-1}^{+1} |r(t)|\, dt, \tag{3.1}$$

порядком роста к бесконечности констант Лебега $\|p_n\| = \max_{t \in I} \sum_{k=1}^{n} |l_{nk}(t)|$ при $n \to \infty$. Здесь $l_{nk}(t)$ – фундаментальные многочлены лагранжевой интерполяции из (2.9), образующие базис в подпространстве $\mathscr{P}^n$.

Константы $\|p_n\|$ весьма чувствительны к разбиениям отрезка I или, что то же самое, к выбору базиса в $\mathscr{P}^n$ (см. (2.9)), квалифицирующего положение по отношению к нему подынтегральной функции f, определяемое системой чисел $J\colon C \to \mathbb{R}^n$, где $Jf = (f(t_1), \dots, f(t_n))$ – координаты функции f в $\mathscr{P}^n$. Поэтому на практике предпочтительны базисы (2.9), наиболее стесняющие рост констант Лебега $\|p_n\|$, т.е. характеризующиеся близостью к абсолютной нижней границе $(1/(8\sqrt{\pi}))\ln n$ (см. [19; гл. 5, § 5, теорема]).

При этом наиболее близкими к нижней границе роста $\|p_n\|$ будут разбиения I нулями многочленов $T_n(t)$ и $(t^2-1)U_{n-1}(t)$ (см. [8; гл. 3, § 3, п. 2]). Другой выбор разбиений I ведет к бо́льшему росту величин $\|p_n\|$ и к ухудшению оценки погрешности (2.12). Здесь $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ и $U_{n-1} = \sin(n \arccos t)/\sqrt{1-t^2}$ – многочлены Чебышёва первого и второго рода соответственно.

Следовательно, узлы квадратурной формулы (2.11), взятые наугад, для компьютерных вычислений не годятся. Желательно, чтобы скорость сходимости квадратурного процесса была не намного хуже той, которую обеспечивают многочлены Q_{n-1} наилучшего приближения подынтегральной функции. Поэтому выявление условий, обеспечивающих выполнение неравенства $\sum_{k=1}^n |c_k| \leqslant A$ (A – абсолютная постоянная), имеет принципиальное значение в оценке общей пригодности формул (2.11) для компьютерных вычислений.

Возникают, однако, вопросы. Насколько осмотрительным следует быть в отборе узлов в формуле (2.11), если изменяется вес $r(t)$? И можно ли узлы подобрать так, чтобы выполнение оценки $\|\wp_n\| \leqslant A$ обеспечивалось с достаточно произвольным весом $r(t)$?

Следующий результат дает эффективное разрешение этих вопросов.

Теорема 2. *Если $r(t)$ – суммируемая на отрезке I функция и, кроме того, $r(t)$ принадлежит L_p $(1 < p < \infty)$, то интерполяционные квадратурные формулы* (2.11), *построенные по нулям многочленов $T_n(t)$ или $U_{n-1}(t)(t^2-1)$ $(n > 1)$, хорошо обусловлены, т.е. существуют абсолютные, не зависящие от n, константы A и $\|\wp_n\| \leqslant A$ (константы разные).*

Доказательство. Действительно, для любой f из C имеем

$$\wp_n(f) = \int_{-1}^{+1} r(t)f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k) = \int_{-1}^{+1} r(t)\bigl[f(t) - p_n(t, Jf)\bigr]\,dt$$
$$= \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{1/2} r(t)\bigl[f(t) - p_n(t, Jf)\bigr](1-t^2)^{-1/2}\,dt.$$

Воспользовавшись весовым неравенством Гёльдера, теоремами Эрдёша–Фельдхейма (см. [20]) и Варма–Вертези (см. [21]), получаем, если $p^{-1} + q^{-1} = 1$ $(p, q > 1)$,

$$|\wp_n(f)| \leqslant \biggl(\int_{-1}^{+1} \frac{|r(t)|^p (1-t^2)^{p/2}}{(1-t^2)^{1/2}}\,dt\biggr)^{1/p} \biggl(\int_{-1}^{+1} \frac{[f(t) - p_n(t, Jf)]^q}{(1-t^2)^{1/2}}\,dt\biggr)^{1/q}$$
$$= \biggl(\int_{-1}^{+1} |r(t)|^p (1-t^2)^{(p-1)/2}\,dt\biggr)^{1/p} \biggl(\int_{-1}^{+1} \frac{[f(t) - p_n(t, Jf)]^q}{(1-t^2)^{1/2}}\,dt\biggr)^{1/q}$$

$$
\leqslant \left(\int_{-1}^{+1} |r(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[f(t) - p_n(t, Jf)]^q}{(1-t^2)^{1/2}} \, dt \right)^{1/q} \to 0
$$
$$
\forall\, f \in C, \quad n \to \infty.
$$

С помощью теоремы Банаха–Штейнгауза приходим к нужному результату.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Справедливо следующее предельное равенство*:

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| \, dt.
$$

.

Доказательство. Пусть $K, K_n \colon C \to \mathbb{R}$ – ограниченные операторы,

$$
Kf = \int_{-1}^{+1} r(t) f(t) \, dt, \qquad K_n f = \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k),
$$

с соответствующими нормами

$$
\|K\| = \int_{-1}^{+1} |r(t)| \, dt, \qquad \|K_n\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.
$$

Предлагаемый метод доказательства зиждется на теории регулярных возмущений линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве (см. [22]). Согласно этой теории возмущение оператора K связывается с равномерной (по норме) сходимостью последовательности приближающих его операторов K_n.

При этом установление факта сходимости K_n по норме обычно встречает затруднение принципиального характера (см. [11]), связанное с выявлением условий, обеспечивающих выполнение предельного соотношения

$$
\|K - K_n\| = \sup_{\|g\| \leqslant 1} \|Kg - K_n g\| \to 0 \quad \text{при} \ \ n \to \infty. \tag{3.2}
$$

Здесь sup берется по единичному шару, т.е. по некомпактному в C множеству.

В рассматриваемом случае эту трудность удается преодолеть, ориентируясь на ключевые свойства последовательности $\{K_n\}$ – равномерную ограниченность $\|K_n\| \leqslant A$ и сильную сходимость $\|Kg - K_n g\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Действительно, из равномерной ограниченности K_n в $G = \{g \in C \mid \|g\| \leqslant 1\}$ следует, что замыкание объединения $\bigcup_{n \geqslant 0} K_n(G)$ компактно. И потому если равенство (3.2) не выполняется, т.е. существуют $\varepsilon > 0$ и некоторая последовательность $\{m_j\} \to \infty$ такие, что $\|K - K_{m_j}\| > \varepsilon$, то, поскольку K_n сходятся к K сильно, найдется подпоследовательность $\{n_i\} \subseteq \{m_j\}$ такая, что $\|K - K_{n_i}\| \to 0$ при $i \to \infty$; получаем противоречие с ранее сделанным допущением.

Наряду с этим известно (см. [22; гл. 4, §3, п. 3.3]), что при “малых” возмущениях ограниченного оператора K поведение спектрального радиуса $\rho(K) = \lim_{m\to\infty} \|K^m\|^{1/m}$ является полунепрерывной сверху функцией, т.е. $\overline{\lim}_{n\to\infty} \|K_n\| \leqslant \rho(K) \leqslant \|K\|$. С другой стороны, из равномерной ограниченности $\|K_n\|$ и условия (3.2) следует, что $\|K\| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \|K_n\|$. В результате получаем $\|K\| = \lim_{n\to\infty} \|K_n\|$.

ТЕОРЕМА 3. *Если $r(t)$ – суммируемая на отрезке I функция и, кроме того, $r(t)$ принадлежит $L_p[I]$ $(1 < p < \infty)$, то квадратурные формулы по нулям многочленов $T_n(t)$ или $U_{n-1}(t)(t^2-1)$ $(n > 1)$ ненасыщаемы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формально свойство ненасыщаемости численного метода определяется К.И. Бабенко в терминах александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ (см. [8; гл. 3, § 2, п. 4]). На практике использование этого n-поперечника затруднено отсутствием его точных асимптотик при $n \to \infty$. Но теория приближения содержит в своем арсенале и ряд других способов аппроксимации компакта X. В частности, существует описание X в терминах колмогоровского n-поперечника $\varkappa_n(X)$ (2.7) (см. [8; гл. 3, § 2, п. 3]).

Точные порядки асимптотик $\varkappa_n(X)$ для классов гладких функций на отрезке I известны (см. [6; гл. 1, § 5, следствие 5]). В сумме с возможностью применения теоремы К. И. Бабенко (см. [6; гл. 1, § 5, теорема 3]) о слабой эквивалентности последовательностей $\varkappa_n(X)$ и $\alpha_n(X)$ при $n \to \infty$, т.е. о выполнимости неравенств $c_1\varkappa_n(X) \leqslant \alpha_n(X) \leqslant c_2\varkappa_n(X)$ с не зависящими от n постоянными $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ упомянутые асимптотики дают возможность использовать $\varkappa_n(X)$ в формальном определении ненасыщаемости интерполяционных квадратурных процессов (2.11). Для этого не требуется никаких дополнительных фактов: согласно теореме 1 ненасыщаемость формул (2.11) следует из их оценок погрешностей.

Действительно, рассмотрим класс функций

$$C^k(M) = \{\varphi \mid \varphi \in C^k,\ \|D^k\varphi\| \leqslant M\}.$$

Тогда $X^k \equiv C^k(M) \cap \{\varphi \mid \varphi \in C,\ \|\varphi\| \leqslant 1\}$ – компакт в пространстве C.

Пусть функция f принадлежит X^k и $\varrho_n(f) = |\wp_n(f)|$, $\epsilon_n(X^k) = \sup\{\varrho_n(f) \mid f \in X^k\}$ – точность этих формул на элементе f и на компакте X^k соответственно.

Классы X^k компактно вложены друг в друга: если $k_1 < k_2$, то $X^{k_2} \Subset X^{k_1}$.

Ненасыщаемость формул состоит в проверке при $n \to \infty$ для любого $k \geqslant 0$ следующих двух условий (см. [8; гл. 3, § 2, п. 5]):

1) $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n(X^k) = 0$;

2) $\epsilon_n(X^{k+1}) = o(\epsilon_n(X^k))$.

Убедимся в их справедливости.

Так, из оценки (2.12), теоремы 1 и неравенства Джексона (2.8) имеем

$$\epsilon_n(X^k) = \sup_{f\in X^k} |\wp_n(f)| \leqslant \|\wp_n\| \sup_{f\in X^k} E_n(f) \leqslant \frac{b_k}{n^k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \forall\, k \geqslant 0,$$

т.е. условие 1) выполнено.

С другой стороны, так как $\mathscr{P}^n \subseteq \ker \wp_n$, то, воспользовавшись результатом С. М. Никольского (см. [23]), определением $\varkappa_n(X^k)$ и оценкой колмогоровского n-поперечника $\varkappa_n(X^k)$ снизу (см. [6; гл. 1, § 5, п. 3]), получим для всех $k \geqslant 0$

$$\epsilon_n(X^k) = \sup_{f\in X^k} |\wp_n(f)| = \|\wp_n\| \sup_{f\in X^k} \inf_{g\in\mathscr{P}^n} \|g - f\| \geqslant \|\wp_n\|\varkappa_n(X^k) \geqslant \frac{d_k}{n^k}$$

(постоянные $b_k > 0$ и $d_k > 0$ от параметра n не зависят). В итоге получаем

$$0 \leqslant \frac{\epsilon_n(X^{k+1})}{\epsilon_n(X^k)} \leqslant \frac{b_{k+1}}{d_k}\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, и условие 2) выполнено. При этом смысл условия 2) состоит в следующем: если компакт X^{k_2} устроен существенно проще, чем компакт X^{k_1}, то при прочих равных условиях указанные квадратурные процессы в случае $f \in X^{k_2}$ вычисляют значение интеграла с точностью, большей, чем в случае $f \in X^{k_1}$. Интуитивно ясно: ненасыщаемость квадратурного процесса означает, что с ростом запаса гладкости подынтегральной функции f скорость убывания его погрешности $\wp_n(f)$ к нулю только возрастает.

Теорема 3 доказана.

§ 4. Феномен ненасыщаемости интерполяционной квадратурной формулы

Как следует поступать в том случае, когда информации о подынтегральной функции достаточно, но само ее использование или трудоемко, или, что часто случается на практике, невозможно? И насколько глубина представлений о дифференциальной природе подынтегральной функции способна внести в процедуру приближенного вычисления интеграла нечто существенно новое по сравнению с насыщаемой квадратурной формулой? На каких принципах основаны правила, управляющие ненасыщаемым квадратурным процессом?

Приведем доводы в пользу эффективного разрешения этих вопросов, выявив при этом и саму природу аналитической приспособляемости ненасыщаемых квадратурных формул к "запасам" гладкости подынтегральных функций.

Пусть функция f в квадратурных формулах принадлежит гладкой шкале пространств $\bigcup_{k\geqslant 0} C^k[I]$ ($k \geqslant 0$ целое), а $\{G(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел и $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$. Пусть $f \in C^\infty$, $f \notin \mathscr{P}^n$, $\|f\| = G(0) \neq 0$ и $\|D^k f\| \leqslant G(k)$. Сопоставим последовательности $\{G(k)\}_{k=1}^{\infty}$ пару функций вещественного аргумента $x \geqslant 0$ (см. (2.8))

$$\lambda(x) = \begin{cases} G(0) & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ \inf\limits_{0\leqslant k\leqslant x} \dfrac{G(k)}{x^k} & \text{при} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ \max\left\{k \;\middle|\; 1 \leqslant k \leqslant x \ \&\ \lambda(x) = \dfrac{G(k)}{x^k}\right\} & \text{при} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

При этом справедливы соотношения

$$\lambda(x) = \min_{0\leqslant k\leqslant x} \frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}}, \qquad E_n(f) \leqslant \frac{\pi}{2}\lambda\left(\frac{n}{a}\right), \quad 1 < a < 5. \tag{4.1}$$

Указанные классы C^∞-гладких функций не пусты: им принадлежат классы Жеврея, имеющие мажоранту $G(k) = A^k k^{\alpha k}$ ($\alpha > 1$, $A > 1$ – константы).

Теорема 4. *При $x \geqslant 1$ функция $\theta(x)$ целочисленна и неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с x. Функция $\lambda(x)$ строго монотонно убывает, непрерывна справа и стремится к нулю при $x \to \infty$. Точками, где $\lambda(x)$ терпит разрывы слева, являются точки разрыва $x = x_i$ функции $\theta(x)$.*

Доказательство. Целочисленность и неотрицательность функции $\theta(x)$ очевидны. Проверим, что $\theta(x)$ не убывает. Пусть $y > x \geqslant 1$, а $\theta(y) < \theta(x)$. Тогда $\theta(y) < \theta(x) \leqslant x$ и

$$\frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}} = \lambda(x) = \min_{1\leqslant k\leqslant x} \frac{G(k)}{x^k} \leqslant \frac{G[\theta(y)]}{x^{\theta(y)}}.$$

Значит,

$$y^{\theta(x)-\theta(y)} > x^{\theta(x)-\theta(y)} \geqslant \frac{G[\theta(x)]}{G[\theta(y)]},$$

т.е.

$$\frac{G[\theta(x)]}{y^{\theta(x)}} < \frac{G[\theta(y)]}{y^{\theta(y)}} = \lambda(y) \quad \text{при} \quad \theta(x) \leqslant x < y,$$

что противоречит определению $\lambda(y)$.

Для доказательства непрерывности справа функции $\theta(x)$ заметим, что значение $\theta(x+0)$ существует вследствие того, что $\theta(x)$ не убывает, и является целым числом, причем можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\theta(x+\varepsilon) = \theta(x+0)$ при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Пусть $R = \theta(x+\varepsilon) = \theta(x+0)$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ имеем

$$\lambda(x+\varepsilon) = \min_{1\leqslant k\leqslant x+\varepsilon} \frac{G(k)}{(x+\varepsilon)^k} = \frac{G(R)}{(x+\varepsilon)^R} \leqslant \frac{G(n)}{(x+\varepsilon)^n} \quad \forall\, n \leqslant x+\varepsilon.$$

По соображениям непрерывности при $\varepsilon \to +0$ для всех $n \leqslant x$ справедливо неравенство $G(R)/x^R \leqslant G(n)/x^n$ и, значит, $G(R)/x^R = \lambda(x)$. Следовательно, $\theta(x) \geqslant R = \theta(x+0)$. Но $\theta(x) \leqslant \theta(x+0)$ в силу монотонности $\theta(y)$ и непрерывность справа функции $\theta(x)$ установлена.

Легко разрешается вопрос и о поведении функции $\theta(x)$ при $x \to \infty$: оценка $\theta(x) \geqslant p$ с любым целым $p \geqslant 0$ верна при

$$x > \max_{0\leqslant k\leqslant p-1} \left\{ \sqrt[p-k]{\frac{G(p)}{G(k)}} \right\} \geqslant \sqrt[p]{\frac{G(p)}{\|f\|}},$$

и, поскольку $\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{G(p)} = \infty$, а $\theta(x)$ не убывает, имеем $\lim_{x\to\infty} \theta(x) = \infty$.

Устремив x к бесконечности, перенумеруем точки разрыва функции $\theta(x)$ в порядке их возрастания:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots, \quad \text{причем} \quad x_1 \geqslant 1.$$

В результате полуось $[0, \infty)$ разбивается на промежутки $[x_i, x_{i+1})$, в каждом из которых $\theta(x)$ принимает целое значение $\theta_i \equiv \theta(x_i) = \theta(x_i + 0)$. Значения θ_i строго возрастают, образуя неограниченно растущую последовательность: $\theta_0 = 0$, $\theta_i < \theta_{i+1}$ для любого $i \geqslant 0$.

Докажем монотонность функции $\lambda(x)$. Действительно, если $y > x \geqslant 1$ и $r = \theta(y)$, $l = \theta(x)$, то $\theta(x) \leqslant \theta(y)$, $l \geqslant 1$, и при этом

$$\lambda(y) = \frac{G(r)}{y^r} \leqslant \frac{G(l)}{y^l} = \frac{G(l)}{yy^{l-1}} \leqslant \frac{G(l)}{yx^{l-1}} \leqslant \frac{x}{y}\,\frac{G(l)}{x^l} = \frac{x}{y}\lambda(x) < \lambda(x).$$

Убывание функции $\lambda(x)$ к нулю с ростом x вытекает из неравенства $0 \leqslant \lambda(x) \leqslant G(1)/x$. Наконец, непрерывность справа функции $\lambda(x) = G[\theta(x)]/x^{\theta(x)}$ вытекает из уже установленной непрерывности функции $\theta(x)$: $\lambda(x) = \lambda(x+0)$. При этом $\lim_{x\to+0} \lambda(x) = \lambda(0)$.

Теорема 4 доказана.

Следствие 2. *Функция $\lambda(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени x, т.е. для любого $p \geqslant 0$ справедливо равенство* $\lim_{x\to\infty} x^p\lambda(x) = 0$.

Доказательство. Монотонная функция $\lambda(x)$ может иметь на конечном промежутке лишь конечное число точек разрыва; по теореме Лебега она имеет конечную производную на множестве полной меры, причем эта производная измерима и даже суммируема на нем. Если x изменяется внутри промежутка (x_i, x_{i+1}), то вследствие равенства $\ln\lambda(x) = -\theta(x)\ln x + \ln G[\theta(x)]$ имеем $d\ln\lambda(x)/dx = -\theta(x)/x$. Отсюда ввиду непрерывности $\theta(x)$ справа заключаем, что в каждой точке $x \geqslant 0$ функция $\ln\lambda(x)$ обладает правой производной:

$$\left[\frac{d\ln\lambda(x)}{dx}\right]_+ = -\frac{\theta(x)}{x} \quad \forall\, x \geqslant 0.$$

Остается применить другую теорему Лебега о восстановлении первообразной с помощью интегрирования. В результате для любой точки $\xi \geqslant 0$, в которой функция $\lambda(\xi)$ непрерывна, и любого $x > \xi$ получаем представление

$$\int_\xi^x \left[\frac{d\ln\lambda(t)}{dt}\right]_+ dt = -\int_\xi^x \frac{\theta(t)}{t}\,dt,$$

которое с известными предосторожностями переписывается в следующем виде:

$$\ln\frac{\lambda(x)}{\lambda(\xi)} = -\int_\xi^x \frac{\theta(t)}{t}\,dt - \sum_{\xi<x_i\leqslant x} |\sigma_i|, \qquad x \geqslant \xi, \tag{4.2}$$

где $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_i = \ln\lambda(x_i - 0) - \ln\lambda(x_i)$, а суммирование производится по всем точкам разрыва x_i функции $\theta(x)$, лежащим в промежутке $(\xi, x]$.

Учитывая монотонность функции $\theta(x)$, из равенства (4.2) получаем оценку

$$\theta_*(x) = \ln\frac{\lambda(1)}{\lambda(x)} = \sum_{1<x_i\leqslant x} |\sigma_i| + \int_1^x \frac{\theta(t)}{t}\,dt > \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\theta(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{2}\theta(\sqrt{x})\ln x.$$

Пользуясь ею, а также установленным в теореме 4 равенством $\lim_{x\to\infty}\theta(x) = \infty$, имеем $\lim_{x\to\infty}\theta_*(x)(\ln x)^{-1} = \infty$. Следовательно, для любого $p \geqslant 0$ верно равенство

$$\lim_{x\to\infty} x^p\lambda(x) = \lambda(1)\lim_{x\to\infty} x^p e^{-\theta_*(x)} = 0.$$

Таким образом, следствие 2 установлено.

Следствие 3. *Для классов Жеврея функции* $\lambda(x)$ *и* $\theta(x)$ *ведут себя так*:

$$\lambda(n) \asymp \exp\left(-\varrho \sqrt[\alpha]{n}\right), \quad \theta(n) \asymp \left[\varrho \sqrt[\alpha]{n}\right], \qquad n \to \infty, \quad \varrho > 0 \ \text{ – константа} \tag{4.3}$$

(*отношение* $f(n) \asymp g(n)$ *означает наличие двух констант* c_1 *и* c_2, $0 < c_1 \leqslant c_2$, *не зависящих от параметра* n *и таких, что* $c_1 \leqslant f(n)/g(n) \leqslant c_2$).

Доказательство. Пусть $G(k) = A^k k^{\alpha k}$, где $A > 1$ и $\alpha > 1$. Обозначим $y(k) = k^{\alpha k}/\sigma^k$, где $\sigma = x/A < x$. Функция $\ln y(\xi)$ выпукла вниз, так как $(\ln y)'' = \alpha/\xi > 0$. Выражение $\alpha\xi \ln \xi - \xi \ln \sigma$, где ξ – переменная, $\xi > 0$ и $\sigma = x/A$ фиксировано, достигает своего минимума при $\xi = e^{-1}\sigma^{1/\alpha} = \xi_0$. Если при этом ξ принимает целое значение n, то по определению функции $y(\xi)$ выражение $y(n)$ является минимальным:

$$y(n) = n^{\alpha n}\sigma^{-n} = e^{-\alpha\xi_0} = \exp(-\alpha e^{-1} \sqrt[\alpha]{\sigma}).$$

Если же $\xi = n + t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, то

$$y(n) = n^{\alpha n}\sigma^{-n} = e^{-\alpha n}\left[\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\right]^{-\alpha} \asymp e^{-\alpha(n+t)} = \exp(-\alpha e^{-1} \sqrt[\alpha]{\sigma}).$$

Ограничившись целыми ξ, заметим, что $\min_{1 \leqslant k \leqslant \infty} y(k)$ достигается при k, отличающемся от ξ_0 меньше, чем на единицу, т.е. во всяком случае при $k < x$. Но $\lambda(x)$ равно $\min_{1 \leqslant k \leqslant x} y(k)$ и есть наименьшее из значений функции $y(\xi)$ при целых $\xi < x$. Последний минимум хотя и не равен в точности $y(\xi_0)$, но при достаточно больших x определяется равенством

$$\lambda(x) = \left(\frac{A(\xi_0 + t)^\alpha}{x}\right)^{\xi_0 + t} \asymp y(\xi_0) = e^{-\alpha\xi_0}, \quad \text{где} \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Итоговые асимптотики функций $\lambda(x)$ и $\theta(x)$ для классов Жеврея будут таковы:

$$\lambda(x) \asymp \exp\left(-\alpha e^{-1} \sqrt[\alpha]{\frac{x}{A}}\right), \quad \theta(x) \asymp e^{-1} \sqrt[\alpha]{\frac{x}{A}}, \qquad x_n \asymp A e^\alpha n^\alpha.$$

Оценим константы в соотношениях (4.3). Поскольку минимум функции $\ln y(\xi)$ вычисляется лишь для целых ξ и всегда несколько выше величины $\ln y(\xi_0) = -\alpha\xi_0$, найденной в целой точке n, ближайшей справа к ξ_0, имеем

$$\ln y(\xi_0) \leqslant \ln y(n) \leqslant \ln y(\xi_0) + \frac{0.5\alpha}{\xi_0}.$$

Поэтому $y(\xi_0) \leqslant \lambda(x) \leqslant \exp(0.5\alpha/\xi_0) y(\xi_0)$. И стало быть, мы можем принять

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = \exp\left(\frac{\alpha e \sqrt[\alpha]{A}}{2}\right), \quad \varrho = \frac{\alpha e^{-1}}{\sqrt[\alpha]{A}}.$$

Следствие установлено.

Замечание 1. В теореме 4 предполагалось, что $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)}=\infty$. К этому случаю сводится и более общий, когда $\overline{\lim}_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)}=\infty$. Введем новую мажоранту $\widetilde{G}(k)$ равенством $\ln\widetilde{G}(k)=k\max_{1\leqslant t\leqslant k}(\ln G(t)/t)$. Заметим, что $\ln\widetilde{G}(k)/k$ – неубывающая функция и $G(k)\leqslant\widetilde{G}(k)$, $\lim_{k\to\infty}\ln\widetilde{G}(k)/k=\infty$. Более того, если $G_0(k)\leqslant\widetilde{G}(k)$ при $k>k_0$, то

$$\ln\widetilde{G}_0(k)=k\max_{1\leqslant t\leqslant k}\frac{\ln G_0(t)}{t}\leqslant k\max_{1\leqslant t\leqslant k}\frac{\ln\widetilde{G}(t)}{t}=\ln\widetilde{G}(k),$$

и поэтому $\widetilde{G}_0(k)\leqslant\widetilde{G}(k)$ при $k>k_1$. Тривиальные случаи – конечность и отсутствие предела $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)}$ – исключаются условием $f\notin\mathscr{P}^n$ из теоремы 4.

Практическая ценность ненасыщаемых квадратурных формул (2.11) определяется особой формой оценки их функционала погрешности

$$|\wp_n(f)|\leqslant\frac{\pi}{2}\|\wp_n\|\lambda\biggl(\frac{n}{a}\biggr),\qquad 5>a>1,\quad\|\wp_n\|=\int_{-1}^{+1}|r(t)|\,dt+\sum_{k=1}^{n}|c_k|,\quad(4.4)$$

позволившей посредством теоремы 4 вместить информацию о запасе гладкости подынтегральных функций. Действительно, в силу оценки (4.4) с ростом числа узлов n квадратурные формулы (2.11) черпают приращение своей практической эффективности непосредственно в дифференциальной природе f, настраиваясь по фактической гладкости f на оптимальный для данного n порядок сходимости $k=\theta(n)$, обеспечивающий строго монотонное с переменным шагом $\theta(n)$ восхождение по ступеням точности к конструируемому числовому ответу. При этом чем большее количество узлов n взято в (2.11), тем большее число $\theta(n)$ производных функции f участвует в формировании величины $|\wp_n(f)|$. Вследствие этого различные запасы гладкости f порождают и различные возможности эффективного развития квадратурных процессов. А благодаря монотонности $\theta(n)$ этот учет осуществляется с ростом n автоматически.

Следовательно, функционал погрешности $\wp_n(f)$ ненасыщаемой квадратурной формулы (2.11) перестает быть пассивным потребителем информации о запасе гладкости функции f: его конструкция уже изначально способна вместить возможности бесконечного множества квадратурных формул, сосредоточенные, так сказать, в ней одной. При этом экстраординарная гладкость (к примеру, бесконечная дифференцируемость и аналитичность, прежде находившиеся на периферии насущных интересов вычислений) становится их активным персонажем. Причем пик эффективности квадратур – экспоненциальная сходимость (см. [9]) – достигается на классах C^∞-гладких подынтегральных функций. Так, если f принадлежит C^∞, то при условии $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)}/k^\alpha<\infty$, где $\alpha>1$, получим

$$|\wp_n(f)|\leqslant c\|\wp_n\|e^{-\varrho\sqrt[\alpha]{n}};$$

здесь c, ϱ – положительные постоянные.

Ненасыщаемость квадратурных формул (2.11) расширяет сферу их практической применимости за счет использования избыточной информации о подынтегральной функции f. Так, рассматривая C^∞-гладкие функции, мы считали их бесконечно дифференцируемыми всюду вплоть до границ $I \equiv [-1, 1]$. Представляет интерес и тот случай, когда производные функции f, будучи ограниченными в замкнутом промежутке I, допускают вблизи его концов рост, характер которого фиксирован с помощью некоторого числового параметра. Подобные ситуации типичны для вычислительной практики (см. [10], [24]). Они возникают, например, при численном интегрировании функций, имеющих в режимах своего поведения на отрезке I резкие переходные зоны – "пограничные слои". Размеры этих переходных зон обычно характеризуются величиной числового параметра ε_0 $(0 < \varepsilon_0 < 1)$, называемого толщиной пограничного слоя.

Может ли это отразиться (если может, то как) на сходимости к нулю с ростом числа узлов n функционала погрешности квадратурной формулы?

Проведенные К. И. Бабенко изыскания (см. [24]) сформировали представление о том, в каких конструктивных терминах удобно описывать указанную специфику задач и за счет каких ресурсов возможна ее компьютерная численная нейтрализация. Дадим четкую формулировку проблемы, введя специальный термин, характеризующий рост градиентов функций вблизи концов отрезка I.

Определение (см. [9]). Функция $f \in C^\infty[I]$ *обладает* на отрезке $I \equiv [-1, 1]$ *пограничным слоем* толщины ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, если существуют такое малое положительное число $\tau = \tau(\varepsilon_0)$ и такая положительная функция $F(k)$, от ε_0 не зависящая, что при любом целом $k \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|f^{(k)}(t)| \leqslant \begin{cases} F(k), & \text{если} \quad t \in I_\tau \equiv [-1+\tau, 1-\tau], \\ {\varepsilon_0}^{-k} F(k), & \text{если} \quad t \in I \setminus I_\tau. \end{cases} \tag{4.5}$$

Наводящим соображением к выяснению характера влияния пограничного слоя на величину погрешности $|\wp_n(f)|$ формул служит следующий (см. [25; гл. VII, § 3]) восходящий к работе С. М. Никольского [26] результат.

Теорема 5 (В. К. Дзядык). *Для того чтобы k-я производная функции f удовлетворяла на отрезке $I \equiv [-1, 1]$ условию Гёльдера с показателем $0 < \gamma < 1$, необходимо и достаточно, чтобы при любом целом $n \geqslant k$ существовал такой алгебраический многочлен $P_n \in \mathscr{P}^n$ степени $n-1$, что для всех $t \in I$ справедливы оценки*

$$|f(t) - P_n(t)| \leqslant \frac{A_k}{n^{k+\gamma}} \left(\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{n} \right)^{k+\gamma}, \tag{4.6}$$

где A_k – постоянная, не зависящая от t и n.

Теорема В. К. Дзядыка усиливает неравенство Джексона (2.8), ибо при равномерной оценке $E_n(f) \leqslant M n^{-(k+\gamma)}$ устанавливает возможность приближения функции $f \in C^{k+\gamma}[I]$ вблизи концов отрезка I с погрешностью $O(n^{-2(k+\gamma)})$.

Следующий результат есть следствие фундаментальности (4.6), существующей в природе полиномиальной аппроксимации функций на конечном отрезке.

Теорема 6. *Пусть для функции $f \in C^\infty[I]$ выполнено (4.5) и $\tau = \varepsilon_0/2$. Тогда справедливо*

$$E_n(f) \leqslant \frac{\pi}{2} \min_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{{\varepsilon_0}^{-k/2} F_k}{n^k}. \tag{4.7}$$

Здесь коэффициенты F_k эффективно вычисляются по значениям $F(k)$ из (4.5).

Доказательство. Положим $t=\cos\theta$ и перейдем от промежутка $I\equiv[-1,1]$ к окружности $S\equiv[0,2\pi]$. Пусть $\widetilde{f}(\theta)=f(\cos\theta)$ и $D=d/d\theta$. Высшие производные $D^k\widetilde{f}(\theta)$ функции f переменной $t=t(\theta)$ выражаются через $t_j=D^jt$, $1\leqslant j\leqslant k$, по известной формуле Фаа де Бруно (см. [27; гл. I, § 3, п. 2]). Существует несколько версий записи этой формулы, по-разному выражающих оператор

$$D^k=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\,d^\alpha,\quad \text{где}\ \ d^\alpha=d_1^{\alpha_1}\cdots d_k^{\alpha_k}\quad \text{при}\ \ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k),$$
$$|\alpha|=\alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k,\qquad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_k!,$$

через коммутирующие дифференциальные операторы $d_j=(j!)^{-1}t_j\,\partial/\partial t$, которые, действуя в свою очередь на функции переменной t, переводят их в функции переменных t, t_j, $1\leqslant j\leqslant k$.

Одна из упомянутых версий с учетом зависимости $t=\cos\theta$ выглядит так:

$$D^k\widetilde{f}(\theta)=\sum_{j=0}^{k-1}f^{(k-j)}(\cos\theta)\,\varphi_{k,k-j}(\theta),\qquad f^{(j)}(t)=\frac{\partial^jf(t)}{\partial t^j}\Big|_{t=\cos\theta}. \tag{4.8}$$

Здесь

$$\varphi_{0,0}(\theta)=1,\qquad \varphi_{k,j}(\theta)=\frac{1}{j!}\sum_{\nu=1}^{j}\binom{j}{\nu}(-\cos\theta)^{j-\nu}D^k(\cos^\nu\theta)\quad \text{при}\ \ 1\leqslant j\leqslant k. \tag{4.9}$$

Коэффициенты $\varphi_{k,j}(\theta)$, как это явствует из (4.9), не зависят от функции f и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше j. Легко устанавливаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\varphi_{k,1}(\theta)=D\varphi_{k-1,1}(\theta),\quad \varphi_{k,k}(\theta)=-\sin\theta\,\varphi_{k-1,k-1}(\theta)\qquad \text{при}\ \ k\geqslant1, \tag{4.10}$$
$$\varphi_{k,j}(\theta)=-\sin\theta\,\varphi_{k-1,j-1}(\theta)+D\varphi_{k-1,j}(\theta)\quad \text{при}\ \ 2\leqslant j\leqslant k-1. \tag{4.11}$$

Если в качестве граничных данных принять условие $\varphi_{0,0}(\theta)=1$, то указанные соотношения станут удобны для рекуррентного восстановления коэффициентов $\varphi_{k,j}(\theta)$ из формулы (4.8). Например, из (4.10) сразу следует, что

$$\varphi_{k,k}(\theta)=(-\sin\theta)^k,\qquad \varphi_{k,k-1}(\theta)=(-1)^{k-1}\frac{k(k-1)}{2}\sin^{k-2}\theta\cos\theta.$$

Более тщательный анализ соотношений (4.11) выявляет аналитическое устройство некоторой части коэффициентов $\varphi_{k,j}(\theta)$. Например, в случае $j\leqslant[k/2]$, где $[k/2]$ – целая часть $k/2$, справедливо представление

$$\varphi_{k,k-j}(\theta)=(\sin\theta)^{k-2j}p_{k,k-j}(\theta)\quad \text{при}\ \ j\leqslant\left[\frac{k}{2}\right], \tag{4.12}$$

в котором $p_{k,k-j}(\theta)$ – тригонометрический полином порядка $\leqslant j$.

Справедливость этого равенства проверяется индукцией по k. При $k=1$ оно очевидно. Пусть (4.12) выполняется для некоторого целого $k>1$, докажем его справедливость для значения $k+1$. Привлекая соотношение (4.11), имеем

$$\varphi_{k+1,k+1-j}(\theta)=-\sin\theta\,\varphi_{k,k-j}(\theta)+D\varphi_{k,k+1-j}(\theta). \tag{4.13}$$

Из (4.13) вытекает, что рассмотрению подлежат лишь два случая: $j \leqslant (k+1)/2$ и $j < (k+1)/2$. В случае $j \leqslant (k+1)/2$, т.е. при $j-1 < k/2$, имеем

$$\varphi_{k,k+1-j}(\theta) = \varphi_{k,k-(j-1)}(\theta) = (\sin\theta)^{k-2(j-1)} p_{k,k-(j-1)}(\theta),$$

поэтому

$$D\varphi_{k,k+1-j}(\theta) \\ = (\sin\theta)^{k+1-2j}\big[(k+2-2j)\cos\theta\, p_{k,k+1-j}(\theta) + \sin\theta\, Dp_{k,k+1-j}(\theta)\big].$$

В случае $j < (k+1)/2$, т.е. при $j \leqslant k/2$, имеем $\varphi_{k,k-j}(\theta) = (\sin\theta)^{k-2j} p_{k,k-j}(\theta)$. Окончательно из (4.13) получается равенство

$$\varphi_{k+1,k+1-j}(\theta) = (\sin\theta)^{k+1-2j} p_{k+1,k+1-j}(\theta).$$

Оно и завершает индуктивные рассуждения, поскольку в случае $j = (k+1)/2$ соотношение (4.12) очевидно.

Проверка утверждения о порядке полинома $p_{k,k-j}(\theta)$ труда не составляет.

Индукцией по k с применением классической теоремы С. Н. Бернштейна об оценке производной полинома (см. [25; гл. V, § 2, п. 1]) из (4.11) легко выводятся следующие оценки в $C[S]$ для коэффициентов $\varphi_{k,j}(\theta)$ и $p_{k,j}(\theta)$ соответственно:

$$\|\varphi_{k,k-j}\| \leqslant (k-j)^{2j} \quad \text{при} \ \ 1 \leqslant j \leqslant k-1,$$
$$\|p_{k,k-j}\| \leqslant 2^{2j}(k-j)^{2j} \quad \text{при} \ \ j \leqslant \left[\frac{k}{2}\right].$$

Покажем, как в условиях (4.5) из формулы (4.8) выводятся равномерные оценки производных функции $\widetilde{f}$ на S. Так, подставив (4.12) в (4.8), получим

$$\begin{aligned} D^k\widetilde{f}(\theta) &= \sum_{j=0}^{[k/2]} f^{(k-j)}(\cos\theta)(\sin\theta)^{k-2j} p_{k,k-j}(\theta) + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} f^{(k-j)}(\cos\theta)\varphi_{k,k-j}(\theta) \\ &= \sum_{j=0}^{[k/2]} f^{(k-j)}(\cos\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{k-2j}\theta^{k-2j} p_{k,k-j}(\theta) \\ &\quad + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} f^{(k-j)}(\cos\theta)\varphi_{k,k-j}(\theta). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Функция $s(\theta) = \sin\theta/\theta$ на отрезке $[0,\pi/2]$ убывает, поскольку $Ds(\theta) = \cos\theta(\theta - \operatorname{tg}\theta)/\theta^2 < 0$, так как $\theta < \operatorname{tg}\theta$, а поэтому $s(\theta) > s(\pi/2) = 2/\pi$, т.е. $2/\pi < \sin\theta/\theta < 1$. Аналогично убеждаемся, что, поскольку функция $c(\theta) = \cos\theta - 1 + \theta^2/2$ обращается при $\theta = 0$ в нуль, а ее производная при $\theta > 0$ $Dc(\theta) = -\sin\theta + \theta$ больше нуля (ибо $\sin\theta < \theta$), функция $c(\theta)$ возрастает и, следовательно, $c(\theta) > c(0) = 0$, т.е. $\cos\theta > 1 - \theta^2/2$ для $0 < \theta < \pi/2$. Поэтому если $0 < \theta \leqslant \theta_0$ с $\theta_0 = \sqrt{2\tau} < \pi/2$, то $1 - \tau < t = \cos\theta < 1$. Далее, приняв

$\tau = \varepsilon_0/2$ и используя (4.5), оценим производную (4.14) вблизи правого конца отрезка I, т.е. на промежутке $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$, следующим образом:

$$\begin{aligned}|D^k \widetilde{f}(\theta)| &\leqslant \sum_{j=0}^{[k/2]} |f^{(k-j)}(t)|\theta_0^{k-2j}\|p_{k,k-j}\| + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} |f^{(k-j)}(t)|\|\varphi_{k,k-j}\| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{[k/2]} F(k-j)\varepsilon_0^{-k/2}\|p_{k,k-j}\| \\ &\qquad + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} F(k-j)\varepsilon_0^{-(k-j)}\|\varphi_{k,k-j}\| \leqslant \varepsilon_0^{-k/2}F_k.\end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$F_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} F(k-j)\|p_{k,k-j}\| + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} F(k-j)\varepsilon_0^{(j-k/2)}\|\varphi_{k,k-j}\|.$$

Принимая во внимание, что такое же неравенство верно и вблизи левого конца отрезка I, для всех точек $\theta \in S$ получаем, загрубляя общую оценку,

$$|D^k \widetilde{f}(\theta)| \leqslant \varepsilon_0^{-k/2}F_k, \qquad F_k \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} F(k-j)2^{2j}(k-j)^{2j}.$$

По теореме Джексона (см. [25; гл. IV, § 2, следствие 1]) для любого целого $n \geqslant k$ существует четный тригонометрический полином $H_n(\theta)$ порядка не выше n такой, что

$$|\widetilde{f}(\theta) - H_n(\theta)| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{F_k\varepsilon_0^{-k/2}}{n^k}.$$

И поскольку $H_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$, где $P_n(t)$ – алгебраический многочлен степени $\leqslant n$, для любого $t \in I$ будет выполнено неравенство $|f(t) - P_n(t)| \leqslant (\pi/2)\varepsilon_0^{-k/2}F_k/n^k$. Отсюда и следует оценка (4.7).

Теорема 6 доказана.

Прикладное значение оценки (4.7) состоит в следующем: за счет перераспределения пограничного слоя по всему отрезку I толщину его удалось увеличить до значения $\sqrt{\varepsilon_0}$, а функцию f охарактеризовать набором чисел $\{\varepsilon_0^{-k/2}F_k\}$, рост которых компенсируется в силу теоремы 4 выбором параметра n. Среди неравенств (4.7), отвечающих различным k, имеется наилучшее с $k = k_0$. А $k_0 = \theta(n)$ – это, кроме того, и порядок той (максимальной) производной, которая участвует в формировании величины правой части (4.7). Производные более высоких порядков $k > k_0$ смогут влиять на ее величину лишь с некоторого "порогового" значения $n_{\min} = n_{\min}(\varepsilon_0)$, т.е. при $n > n_{\min}$. В результате процедура нейтрализации пограничного слоя завершается выполнением неравенства

$$|\wp_n(f)| \leqslant 2\pi\|\wp_n\| \min_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{F_k}{(n\sqrt{\varepsilon_0})^k} < \epsilon, \qquad 0 < \epsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{4.15}$$

реализуемость которого обеспечивается выбором числа узлов $n > n_{\min}$.

Следовательно, наличие у функции f больших запасов гладкости создает благоприятные предпосылки для эффективного построения числового ответа, причем интерес к C^∞-гладким функциям вовсе не кажется неестественным (см. [10]).

Квадратурные формулы с главным членом погрешности (т.е. насыщаемые – формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона и ряд других; см. [1]) способностью к нейтрализации пограничного слоя не обладают; для них пограничный слой является "камнем преткновения" при компьютерной реализации формул.

§ 5. Ненасыщаемые квадратурные формулы с весом $r(t)$ из $L_p[I]$, $1 < p < \infty$

Основная трудность при конструировании ненасыщаемых квадратурных формул заключена в сложности задачи нахождения их весовых коэффициентов. При этом особый интерес представляют методы точного вычисления квадратурных коэффициентов, которые являются в свою очередь интегралами типа Коши по разомкнутому контуру с весовой функцией $r(t)$ из $L_p[I]$ $(1 < p < \infty)$. Ввиду непростой природы этих интегралов укажем способ, приводящий к их точному вычислению.

Если в качестве полинома $\pi_n(t)$ в формулах (2.10) выбрать многочлен $T_n(t)$ или $(t^2-1)U_{n-1}$ соответственно, то в силу элементарных тождеств

$$2(t^2-1)U_{n-1}(t) = T_{n+1}(t) - T_{n-1}(t), \qquad T_n(t) = U_n(t) - tU_{n-1}(t)$$

отыскание квадратурных коэффициентов c_k в формулах (2.11) сводится к вычислению следующих интегралов ($m > 0$ целое):

$$I_m^r(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{r(t)T_m(t)}{t-x}\,dt, \quad J_m^r(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{r(t)U_m(t)}{t-x}\,dt, \qquad x \in [-1,1]. \tag{5.1}$$

Здесь $T_m(t)$ и $U_m(t)$ – полиномы Чебышёва первого и второго рода соответственно.

Идея метода точного вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру принадлежит Г. Н. Пыхтееву (см. [28]) и состоит в эффективном их сведении к интегралам Коши мероморфных в единичном круге функций. Замечательность подхода состоит в том, что он сводит саму проблему к теореме о вычетах.

Зафиксируем в плоскости комплексной переменной ζ круг $\omega = \{\zeta \mid |\zeta| < 1\}$. В точках его границы $\partial\omega = \partial\omega^+ \cup \partial\omega^-$ (состоящей из верхней полуокружности $\partial\omega^+ = \{\zeta \mid |\zeta| = 1,\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и нижней полуокружности $\partial\omega^- = \{\zeta \mid |\zeta| = 1,$ $\operatorname{Im}\zeta \leqslant 0\}$) рассмотрим функцию $F(\tau)$, $\tau \in \partial\omega$.

Значения $F(\tau)$ на дугах $\partial\omega^\pm$ будем обозначать $F^\pm(\tau)$.

Операцию комплексного сопряжения условимся обозначать чертой.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$S(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega} \frac{F(\tau)}{\tau-\zeta}\,d\tau, \qquad \zeta \notin \partial\omega. \tag{5.2}$$

Относительно комплексной функции $F(\tau)$ будем предполагать, что она такова, что существует особый интеграл $S(\zeta_0)$ ($\zeta_0 \in \partial\omega$), понимаемый в смысле главного значения по Коши. Легко проверяется, что

$$S(\zeta_0)+S(\overline{\zeta}_0)-S(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}F(\tau)\frac{\tau-\overline{\tau}}{\tau+\overline{\tau}-\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\,\frac{d\tau}{\tau},\qquad \zeta_0\in\partial\omega,$$

$$S(\zeta_0)-S(\overline{\zeta}_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}F(\tau)\frac{\zeta_0-\overline{\zeta}_0}{\tau+\overline{\tau}-\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\,\frac{d\tau}{\tau},\qquad \zeta_0\in\partial\omega.$$

Подстановкой $\tau'=\overline{\tau}$ интеграл по дуге $\partial\omega^+$ приводится к интегралу по дуге $\partial\omega^-$. В результате получаем равенства

$$S(\zeta_0)+S(\overline{\zeta}_0)-S(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega^-}[F^-(\tau)-F^+(\overline{\tau})]\frac{\tau-\overline{\tau}}{\tau+\overline{\tau}-\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\,\frac{d\tau}{\tau},$$

$$S(\zeta_0)-S(\overline{\zeta}_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega^-}[F^-(\tau)+F^+(\overline{\tau})]\frac{\zeta_0-\overline{\zeta}_0}{\tau+\overline{\tau}-\zeta_0-\overline{\zeta}_0}\,\frac{d\tau}{\tau}.$$

Если в этих равенствах сделать подстановки

$$\zeta_0\equiv\zeta_0(x)=x-i\sqrt{1-x^2},\quad \tau\equiv\tau(t)=t-i\sqrt{1-t^2},\qquad x,t\in[-1,1],$$

то получим

$$S(\zeta_0)+S(\overline{\zeta}_0)-S(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1}\frac{F^-(\tau)-F^+(\overline{\tau})}{t-x}\,dt, \tag{5.3}$$

$$S(\zeta_0)-S(\overline{\zeta}_0)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi i}\int_{-1}^{+1}\frac{F^-(\tau)+F^+(\overline{\tau})}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{5.4}$$

Пусть функция $F(\zeta)$, определенная в круге ω, такова, что ее предельные значения $F(\zeta_0)$ на $\partial\omega$ подчинены одному из следующих условий с действительными функциями f и g соответственно:

(i) $\operatorname{Re}[F^-(\zeta_0)-F^+(\overline{\zeta}_0)]=0,\quad \zeta_0\in\partial\omega^-,\qquad \operatorname{Im}[F^-(\zeta_0)-F^+(\overline{\zeta}_0)]=2f(x);$

(j) $\operatorname{Im}[F^-(\zeta_0)+F^+(\overline{\zeta}_0)]=0,\quad \zeta_0\in\partial\omega^-,\qquad \operatorname{Re}[F^-(\zeta_0)+F^+(\overline{\zeta}_0)]=2g(x).$

С учетом условий (i), (j) равенства (5.3), (5.4) предстанут в соответствующем виде:

$$S_I(\zeta_0)+S_I(\overline{\zeta}_0)-S_I(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt\equiv I(x),\qquad x\in[-1,1], \tag{5.5}$$

$$-S_J(\zeta_0)+S_J(\overline{\zeta}_0)=i\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{g(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\equiv iJ(x),\qquad x\in[-1,1]. \tag{5.6}$$

Таким образом, если функция $F(\zeta)$ такова, что интегралы $S_{I,J}(\zeta_0)$ вычисляются точно, то и интегралы $I(x)$, $J(x)$, стоящие в правых частях равенств (5.5) и (5.6), также вычисляются точно. Но особые интегралы $S_{I,J}(\zeta_0)$ вычисляются точно, когда их удастся преобразовать к интегралам Коши мероморфных[1] в круге ω функций. Собственно на этом простом факте и основан метод

[1]Под мероморфной в круге ω функцией здесь и всюду в дальнейшем понимается мероморфная функция с конечным числом полюсов в ω.

Г. Н. Пыхтеева (см. [28]) точного вычисления интегралов: одновременно вычисляются и особый интеграл $S(\zeta_0)$, и интегралы $I(x)$, $J(x)$. Для того чтобы реализовать это, необходимо предварительно по заданным функциям f или g построить соответствующие им мероморфные функции $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$, причем в том классе мероморфных в ω функций, для которого особые интегралы $S_I(\zeta_0)$ и $S_J(\zeta_0)$ вычисляются точно.

Пусть $F(\zeta)$ – мероморфная в ω функция, $R(\zeta)$ – сумма главных частей разложения $F(\zeta)$ в окрестности полюсов и $F_O(\zeta) = F(\zeta) - R(\zeta)$ – регулярная часть функции $F(\zeta)$.

Мероморфная в круге ω функция $F(\zeta)$ принадлежит классу $H_p \equiv H_p(\omega)$, если ее регулярная часть $F_O(\zeta)$ принадлежит пространству (Харди), состоящему из функций $h(\zeta)$, аналитических в ω, для которых

$$\|h\|_p = \sup_{0\leqslant\varrho<1} M_p(h,\varrho) < \infty, \qquad M_p(h,\varrho) \equiv \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(\varrho e^{i\theta}|^p \,\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty.$$

Будем отыскивать $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$ в классе функций из $H_p(\omega)$, представимых в ω соответствующими интегралами Коши.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $F(\zeta_0)$ из $L_p(\partial\omega)$ $(1 < p < \infty)$ была краевым значением однозначной и мероморфной функции $F(\zeta)$ из $H_p(\omega)$, необходимо и достаточно выполнения условия $2S(\zeta_0) = F(\zeta_0) - 2R(\zeta_0)$.*

Доказательство основано на теореме Коши и формулах Сохоцкого [29].

Пусть $F_I(\zeta), F_J(\zeta)$ однозначно мероморфны в круге ω, представимы интегралами Коши и для них выполнены условия (i) и (j) соответственно. Тогда справедлива

Теорема 7 (Г. Н. Пыхтеев; см. [28]). *Если*

$$f(x) = \operatorname{Im} F_I[\zeta_0(x)], \quad g(x) = \operatorname{Re} F_J[\zeta_0(x)], \qquad x \in [-1,1],$$

то соответственно

$$I(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x}\,dt = \operatorname{Re} F_I[\zeta_0(x)] - 2\operatorname{Re} R_I[\zeta_0(x)] - F_O(0),$$

$$J(x) \equiv \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{g(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\operatorname{Im} F_J[\zeta_0(x)] + 2\operatorname{Im} R_J[\zeta_0(x)],$$

где $F_O(\zeta) = F_I(\zeta) - R_I(\zeta)$, а $R_I(\zeta)$ и $R_J(\zeta)$ – суммы главных частей разложений функций $F_I(\zeta)$ и $F_J(\zeta)$ в окрестностях их полюсов в ω соответственно. В приведенных формулах для аналитических в ω функций $F_I(\zeta), F_J(\zeta)$ следует положить $R_I(\zeta) \equiv 0$, $R_J(\zeta) \equiv 0$.

Доказательство основано на классической теореме Коши, формулах Сохоцкого и того факта, что в сопряженных относительно действительного диаметра точках круга ω функции $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$ принимают сопряженные значения:

$$F(\zeta) - F(\overline{\zeta}) = 2i\operatorname{Im} F(\zeta), \qquad F(\zeta) + F(\overline{\zeta}) = 2\operatorname{Re} F(\zeta).$$

Процедура эффективного построения по заданным f и g мероморфных функций из класса $H_p(\omega)$ пока не алгоритмизована и является наиболее трудным моментом в этом подходе. Однако для некоторых специальных функций $r(t)$ эта проблема может быть разрешена в явном виде.

В частности, это верно для весовых функций $r(t) = -\ln|t|$ и $r(t) \equiv 1$.

Для реализации этого метода потребуется ряд вспомогательных результатов.

Напомним, что

$$\zeta_0 \equiv \zeta_0(x) = x - i\sqrt{1-x^2}, \quad \zeta_0^{-n}(x) = T_n(x) + iu_n(x), \qquad x \in [-1,1];$$

здесь $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и $u_n(x) = \sin(n \arccos x)$.

Введем следующие функции:

$$N(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \ln\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t}, \qquad x \in [-1,1],$$

$$\alpha(\zeta) = \ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \qquad \alpha(\zeta) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k, \quad \zeta \in \omega,$$

$$\beta(\zeta) = \int_1^{\zeta} \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{d\tau}{\tau}, \qquad \beta(\zeta) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \zeta^m, \quad \zeta \in \omega.$$

Функции $\alpha(\zeta)$ и $\beta(\zeta)$ аналитичны в ω; ветвь $\ln\zeta$ выбрана стандартно: $\ln 1 = 0$.

Функции $\alpha(\zeta)$ и $\beta(\zeta)$ принадлежат классу $H_p(\omega)$, $p > 1$, и потому их предельные значения $\alpha(\zeta_0)$ и $\beta(\zeta_0)$ на $\partial\omega$ существуют почти всюду и принадлежат классу $L_p(\partial\omega)$, $p > 1$ (класс функций, интегрируемых в степени p по Лебегу); см. [28].

Лемма 2. *Справедливы представления* $N(x) = \operatorname{sign}(x)N(|x|)$,

$$N(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2}, & \textit{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}-1, \\ \displaystyle\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\ln x \ln\frac{1-x}{1+x} - N\left(\frac{1-x}{1+x}\right), & \textit{если} \quad \sqrt{2}-1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Нечетность функции $N(x)$ очевидна; представления для $N(x)$ получаются разложением в степенной ряд и интегрированием по частям.

Лемма 3. *Функция* $\alpha(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^k$ *имеет представление*

$$\alpha(\zeta_0) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - i\frac{\pi}{2}.$$

Коэффициенты α_k *имеют при этом следующий вид*: $\alpha_k = (1-(-1)^k)/k$.

Доказательство. Так как

$$\zeta_0 = \zeta_0(x) = x - i\sqrt{1-x^2}, \quad \overline{\zeta}_0(x) = \zeta_0(x) = x + i\sqrt{1-x^2}, \qquad \zeta_0\overline{\zeta}_0 = 1,$$

то

$$\frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0} = \frac{(1+\zeta_0)(1-\overline{\zeta}_0)}{(1-\zeta_0)(1-\overline{\zeta}_0)} = \frac{-2i\sqrt{1-x^2}}{2-2x} = -i\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Отсюда получаем

$$\ln\frac{1+\zeta_0}{1-\zeta_0} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + i\arg\left[-i\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - i\frac{\pi}{2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Функция* $\beta(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty}\beta_m\zeta^m$ *имеет представление*

$$\beta(\zeta_0) = \Pi(x) + i\frac{\pi}{2}\ln|x|, \qquad \Pi(x) \equiv \frac{\pi^2}{8} - N(x) - \frac{\pi}{2}\arg(x).$$

Коэффициенты β_m *вычисляются рекуррентно по формулам* $\beta_0 = -\pi^2/8$,

$$\beta_m = \frac{1-(-1)^m}{m}\,d_{[(m-1)/2]}, \qquad m \geqslant 1,$$

$$d_0 = 1, \qquad d_k = -d_{k-1} - \frac{0.5}{k^2-0.25}, \quad k \geqslant 1.$$

Здесь через $[x]$ *обозначено целое число, ближайшее слева к* x.

Доказательство. Исходя из определения функции $\beta(\zeta)$, имеем

$$\beta(\zeta) = \int_1^{\zeta}(1-\zeta^2)\frac{1}{\zeta}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\cdot\frac{1}{1+\zeta^2}\,d\zeta \equiv \int_1^{\zeta} d(\zeta)\,d\zeta.$$

Разложением подынтегральных функций в степенные ряды по ζ и учетом равенства

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2nt}{2\cos t}\,dt = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = c_{n-1}, \qquad n \geqslant 1, \quad c_0 = 1,$$

находим

$$d(\zeta) = 2\sum_{n=0}^{\infty} d_n\zeta^{2n},$$

$$d_0 = 1, \qquad d_n = c_n - c_{n-1} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t}\cos(2n+1)t\,dt, \quad n \geqslant 1.$$

Отсюда получаем

$$d_n + d_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\cos 2nt\sin t\,dt = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = -\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}.$$

В результате имеем рекуррентные формулы для коэффициентов ряда $d(\zeta)$

$$d_0 = 1, \qquad d_k = -d_{k-1} - \frac{0.5}{k^2-0.25}, \quad k \geqslant 1.$$

Получим теперь рекуррентные формулы для коэффициентов ряда $\beta(\zeta)$. Для этого, проинтегрировав ряд для $d(\zeta)$:

$$\beta(\zeta)=\int_1^\zeta d(\zeta)\,d\zeta=2\sum_{m=0}^\infty\frac{d_m}{2m+1}\zeta^{2m+1}-2\sum_{m=0}^\infty\frac{d_m}{2m+1},$$

найдем

$$\begin{aligned}\beta(\zeta)&=\beta(0)+\sum_{m=0}^\infty\frac{1-(-1)^{2m+1}}{2m+1}d_m\zeta^{2m+1}\\&=\beta(0)+\sum_{m=1}^\infty\frac{1-(-1)^m}{m}d_{[(m-1)/2]}\zeta^m\equiv\beta(0)+\sum_{m=1}^\infty\beta_m\zeta^m.\end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\beta(0)=-2\sum_{m=0}^\infty\frac{d_m}{2m+1},\quad \beta_m=\frac{1-(-1)^m}{m}d_{[(m-1)/2]},\qquad m\geqslant 1.$$

Осталось вычислить нулевой коэффициент:

$$\beta_0\equiv\beta(0)=-2\sum_{n=0}^\infty\frac{d_n}{2n+1}.$$

Введем функции

$$v=\ln\frac{\tau^2+1}{2\tau},\quad \frac{dv}{d\tau}=\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}\,\frac{1}{\tau},\qquad u=\ln\frac{1+\tau}{1-\tau},\quad \frac{du}{d\tau}=\frac{2}{(1+\tau)(1-\tau)}.$$

Далее, проинтегрировав по частям в выражении

$$\begin{aligned}\beta(\zeta)&=\int_\zeta^1\overbrace{\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}}^{=u}\cdot\overbrace{\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}\,\frac{d\zeta}{\zeta}}^{=dv}\\&=-\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\,\ln\frac{\zeta^2+1}{2\zeta}-\int_\zeta^1\ln\frac{\tau^2+1}{2\tau}\cdot\frac{2\,d\tau}{(1+\tau)(1-\tau)}\end{aligned}$$

и воспользовавшись разложением

$$\ln x=2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1},\qquad x>0,$$

приходим к нужному результату:

$$\begin{aligned}\beta(0)&=-\int_0^1\ln\frac{\tau^2+1}{2\tau}\cdot\frac{2\,d\tau}{(1+\tau)(1-\tau)}\\&=2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2k+1}\int_0^1\frac{(1-\tau)^{4k+1}}{(1+\tau)^{4k+3}}(-2\,d\tau)=2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2k+1}\int_1^0 y^{4k+1}\,dy\\&=2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2k+1}\,\frac{y^{4k+2}}{4k+2}\bigg|_1^0=-2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2(2k+1)^2}=-\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Осталось отделить действительную и мнимую части в выражении

$$\beta(\zeta_0) = \int_1^{\zeta_0} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\cdot\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\,\frac{d\tau}{\tau}.$$

Поступим следующим образом. Так как справедливы соотношения

$$\tau \equiv \tau(t) = t - i\sqrt{1-t^2}, \quad \overline{\tau} = \overline{\tau}(t) = t + i\sqrt{1-t^2}, \qquad \tau\overline{\tau} = 1,$$

$$\frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{\tau-\overline{\tau}}{2-(\tau+\overline{\tau})} = -i\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} = -i\sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

$$\ln\frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tau}{1-\tau}\right| + i\arg\frac{1+\tau}{1-\tau} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - i\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\,\frac{d\tau}{\tau} &= \frac{\overline{\tau}-\tau}{\overline{\tau}+\tau}\,\frac{d\tau}{\tau} = \frac{2i\sqrt{1-t^2}}{2t}\,\frac{d\tau}{\tau} = i\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\overline{\tau}\,d\tau \\ &= i\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\overline{\tau}\,\frac{d\tau}{dt}\,dt = i\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\overline{\tau}\left(1 - i\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\right)dt \\ &= i\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,\frac{\sqrt{1-t^2}+it}{\sqrt{1-t^2}}\overline{\tau}\,dt = -(t-i\sqrt{1-t^2})\overline{\tau}\,\frac{dt}{t} = -\frac{dt}{t},\end{aligned}$$

то с учетом леммы 2 и равенства $\zeta_0 = \zeta_0(x) = x - i\sqrt{1-x^2}$ получаем

$$\begin{aligned}\beta(\zeta_0) &= \int_1^{\zeta_0} \ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\cdot\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\,\frac{d\tau}{\tau} = \int_1^{x}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - i\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{dt}{t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_x^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\,\frac{dt}{t} + i\frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2}\int_x^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\,\frac{dt}{t} + i\frac{\pi}{2}\big(\ln|x| + i\arg(x)\big) \\ &= \frac{1}{2}\int_x^1 \ln\frac{1+t}{1-t}\,\frac{dt}{t} - \frac{\pi}{2}\arg(x) + i\frac{\pi}{2}\ln|x| \equiv \Pi(x) + i\frac{\pi}{2}\ln|x|.\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для коэффициентов α_n и β_n верны рекуррентные формулы*

$$\alpha_n = \frac{1-(-1)^n}{2}C_{[(n+1)/2]}, \qquad C_j = \frac{1}{j-0.5}, \quad j \geqslant 2, \quad C_1 = 2,$$

$$\beta_n = \frac{1-(-1)^n}{2}D_{[(n+1)/2]},$$

$$D_j = -\frac{j-1.5}{j-0.5}D_{j-1} - \frac{0.5}{(j-0.5)^2(j-1.5)}, \quad j \geqslant 2, \qquad D_1 = 2.$$

Здесь через $[x]$ обозначено целое число, ближайшее слева к x.

Доказательство. Из лемм 3, 4 следует $\alpha_{2m} = 0$, $\beta_{2m} = 0$ $(m \geqslant 0)$. Пусть $D_m = \beta_{2m-1}$, $C_m = \alpha_{2m-1}$. Тогда

$$D_{j+1} = \frac{2d_j}{2j+1}, \quad C_j = \frac{2}{2j-1}, \qquad j \geqslant 1.$$

Поскольку $[(n-1)/2]+1 = [(n-1)/2+1] = [(n+1)/2]$, из определения α_n получаем

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1-(-1)^n}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n} C_{[(n+1)/2]} \frac{2[(n+1)/2]-1}{2} \\ &= \overbrace{\frac{1-(-1)^n}{2}\,\frac{2[(n+1)/2]-1}{n}}^{\equiv 0 \text{ или } 1} C_{[(n+1)/2]} = \frac{1-(-1)^n}{2} C_{[(n+1)/2]}.\end{aligned}$$

Аналогично получаются рекуррентные формулы для коэффициентов β_n.

Лемма доказана.

Вычислим интегралы (5.1) с весовыми функциями $r(t) = -\ln|t|$ и $r(t) \equiv 1$.

Теорема 8. *Если x принадлежит $[-1,1]$, то справедливы равенства*

$$I_n^{ln}(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)\ln|t|}{t-x}\,dt = \frac{2}{\pi}\bigl\{NN(x)T_n(x) + T^\beta(n,x)\bigr\}, \qquad n \geqslant 0, \tag{5.7}$$

$$J_n^{ln}(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{U_{n-1}(t)\ln|t|}{t-x}\,dt = \frac{2}{\pi}\bigl\{NN(x)U_{n-1}(x) + U^\beta(n,x)\bigr\}, \qquad n \geqslant 1. \tag{5.8}$$

Здесь обозначено

$$NN(x) = \operatorname{sign}(x)\bigl(0.25\pi^2 - N(|x|)\bigr),$$
$$T^\beta(n,x) = -\sum_{s=1}^{n-1}\beta_s T_{n-s}(x) - 0.5\beta_n, \qquad U^\beta(n,x) = -\sum_{s=1}^{n-1}\beta_s U_{n-1-s}(x)$$

и коэффициенты β_s вычисляются по формулам, указанным в лемме 5.

Доказательство. Функции

$$\begin{aligned}F_I(\zeta) &= \frac{2}{\pi}\beta(\zeta)\frac{\zeta^n+\zeta^{-n}}{2}, \\ F_J(\zeta) &= i\frac{2}{\pi}\beta(\zeta)\frac{\zeta^n-\zeta^{-n}}{2i} \in H_p(\omega), \qquad 1<p<\infty,\end{aligned}$$

мероморфны в круге ω, удовлетворяют условиям (i), (j) соответственно и $F_I(\zeta_0)$, $F_J(\zeta_0)$ принадлежат $L_p(\partial\omega)$ $(1<p<\infty)$. Поэтому (5.7), (5.8) вычисляются точно.

Действительно, в силу равенства $\zeta_0^n(x) = T_n(x) - iu_n(x)$ и леммы 4 имеем

$$F_I(\zeta_0) = 2\pi^{-1}\Pi(x)T_n(x) + iT_n(x)\ln|x|,$$
$$F_J(\zeta_0) = u_n(x)\ln|x| - i2\pi^{-1}\Pi(x)u_n(x), \qquad u_n(x) = \sin(n\arccos x).$$

Главные части $R_I(\zeta)$, $R_J(\zeta)$ разложений мероморфных функций $F_I(\zeta)$, $F_J(\zeta)$ в окрестности единственного n-кратного в ω полюса $\zeta = 0$ легко подсчитываются:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} R_I(\zeta_0) &\equiv \pi^{-1} \operatorname{Re}\Bigl[\beta(0)\zeta_0^{-n}(x) + \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s \zeta_0^{s-n}(x)\Bigr] \\
&= \pi^{-1}\Bigl[\beta(0)T_n(x) + \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s T_{n-s}(x)\Bigr], \\
F_O(0) &\equiv F_I(0) - R_I(0) = \frac{\beta_n}{\pi}, \\
\operatorname{Im} R_J(\zeta_0) &\equiv -\pi^{-1} \operatorname{Im}\Bigl[\beta(0)\zeta_0^{-n}(x) + \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s \zeta_0^{s-n}(x)\Bigr] \\
&= -\pi^{-1}\Bigl[\beta(0)u_n(x) + \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s u_{n-s}(x)\Bigr].
\end{aligned}$$

Из теоремы Г. Н. Пыхтеева с учетом равенства $u_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)$ находим

$$\begin{gathered}
f(x) = \operatorname{Im} F_I(\zeta_0) = T_n(x)\ln|x|, \\
I_n^{ln}(x) = \operatorname{Re} F_I(\zeta_0) - 2\operatorname{Re} R_I(\zeta_0) - F_O(0) = 2\pi^{-1}\bigl\{[\Pi(x) - \beta(0)]T_n(x) + T^\beta(n,x)\bigr\}, \\
g(x) = \operatorname{Re} F_J(\zeta_0) = u_n(x)\ln|x| = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)\ln|x|, \\
\begin{aligned}
J_n^{ln}(x) &= (1-x^2)^{-1/2}\bigl(-\operatorname{Im} F_J(\zeta_0) + 2\operatorname{Im} R_J(\zeta_0)\bigr) \\
&= 2\pi^{-1}\bigl\{[\Pi(x) - \beta(0)]U_{n-1}(x) + U^\beta(n,x)\bigr\}.
\end{aligned}
\end{gathered}$$

Для завершения доказательства воспользуемся леммой 2:

$$\begin{aligned}
\Pi(x) - \beta(0) &= 0.25\pi^2 - 0.5\pi\arg(x) - N(x) \\
&= \operatorname{sign}(x)\bigl(0.25\pi^2 - N(|x|)\bigr) \equiv NN(x).
\end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

Теорема 9. *Если x принадлежит $[-1,1]$, то справедливы равенства*

$$I_n^1(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)}{t-x}\,dt = \frac{2}{\pi}\Bigl\{\frac{1}{2}T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + T^\alpha(n,x)\Bigr\}, \qquad n \geqslant 0, \tag{5.9}$$

$$J_n^1(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{U_{n-1}(t)}{t-x}\,dt = \frac{2}{\pi}\Bigl\{\frac{1}{2}U_{n-1}(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + U^\alpha(n,x)\Bigr\}, \qquad n \geqslant 1; \tag{5.10}$$

здесь

$$T^\alpha(n,x) = \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s T_{n-s}(x) + 0.5\alpha_n, \qquad U^\alpha(n,x) = \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s U_{n-1-s}(x)$$

и коэффициенты α_s вычисляются по формулам, указанным в лемме 5.

Доказательство. Функции

$$F_I(\zeta) = -\frac{2}{\pi}\alpha(\zeta)\frac{\zeta^n+\zeta^{-n}}{2},$$
$$F_J(\zeta) = -i\frac{2}{\pi}\alpha(\zeta)\frac{\zeta^n-\zeta^{-n}}{2i} \in H_p(\omega), \qquad 1<p<\infty,$$

мероморфны в круге ω, удовлетворяют условиям (i), (j) соответственно, а их значения $F_I(\zeta_0), F_J(\zeta_0)$ принадлежат $L_p(\partial\omega)$ $(1<p<\infty)$. Поэтому из соотношений

$$F_I(\zeta_0) = \pi^{-1}T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + iT_n(x), \qquad \operatorname{Re} R_I(\zeta_0) = -\pi^{-1}\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_s T_{n-s}(x),$$
$$F_O(0) = F_I(0) - R_I(0) = -\frac{\alpha_n}{\pi},$$
$$F_J(\zeta_0) = u_n(x) - i\pi^{-1}u_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x}, \qquad \operatorname{Im} R_J(\zeta_0) = \pi^{-1}\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_s u_{n-s}(x),$$

равенства $u_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x)$ и теоремы Г. Н. Пыхтеева получаем

$$f(x) = \operatorname{Im} F_I(\zeta_0) = T_n(x),$$
$$I_n^1(x) = \operatorname{Re} F_I(\zeta_0) - 2\operatorname{Re} R_I(\zeta_0) - F_O(0) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}T_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + T^\alpha(n,x)\right),$$
$$g(x) = \operatorname{Re} F_J(\zeta_0) = u_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,U_{n-1}(x),$$
$$J_n^1(x) = (1-x^2)^{-1/2}\bigl(-\operatorname{Im} F_J(\zeta_0) + 2\operatorname{Im} R_J(\zeta_0)\bigr)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}U_{n-1}(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + U^\alpha(n,x)\right).$$

Теорема 9 доказана.

Воспользовавшись теоремами 8 и 9, нетрудно построить ненасыщаемые квадратурные формулы (2.11) с весовыми функциями $r(t) = -\ln|t|$ и $r(t) = 1$.

Теорема 10. *Ненасыщаемые квадратурные формулы с весовыми функциями $r(t) = -\ln|t|$ и $r(t) = 1$ по нулям $t_k = \cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \geqslant 2$, многочлена $T_n(x) = \cos\bigl(n\arccos x\bigr)$ степени n имеют соответственно следующий вид*:

$$-\int_{-1}^{+1} f(t)\ln|t|\,dt = \sum_{k=1}^n a_k f(t_k) + \wp_n^D(f), \qquad |\wp_n^D(f)| \leqslant \left(2 + \sum_{k=1}^n |a_k|\right)E_n(f), \tag{5.11}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n A_k f(t_k) + \wp_n^C(f), \qquad |\wp_n^C(f)| \leqslant \left(2 + \sum_{k=1}^n |A_k|\right)E_n(f). \tag{5.12}$$

Здесь

$$a_k = 2(-1)^{k-1}\frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n}\,T^D(n,t_k), \qquad A_k = 2(-1)^{k-1}\frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n}\,T^C(n,t_k),$$

а функции

$$T^D(n,x) = \sum_{m=1}^{[n/2]} D_m T_{n+1-2m}(x) + \frac{1-(-1)^n}{4} D_{[(n+1)/2]},$$
$$T^C(n,x) = \sum_{m=1}^{[n/2]} C_m T_{n+1-2m}(x) + \frac{1-(-1)^n}{4} C_{[(n+1)/2]}$$

вычисляются по предварительно рассчитанным коэффициентам D_m, C_m, $1 \leqslant m \leqslant [(n+1)/2]$ (*см. лемму* 5).

Доказательство. Исходя из определения (2.10) и равенства (5.7), находим

$$a_k \equiv (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n} \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)}{t-t_k} \ln \frac{1}{|t|}\, dt = (-1)^k \frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n} \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t) \ln|t|}{t-t_k}\, dt$$
$$= \pi(-1)^k \frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n} I_n^{ln}(t_k) = \pi \frac{2}{\pi} (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n} T^D(n,t_k).$$

Отсюда, учитывая, что $\beta_s = \frac{1-(-1)^s}{2} D_{[(s+1)/2]}$ (см. лемму 5), получим

$$T^D(n,t_k) = \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s T_{n-s}(t_k) + 0.5\beta_n$$
$$= \sum_{m=1}^{[n/2]} D_m T_{n+1-2m}(t_k) + \frac{1-(-1)^n}{4} D_{[(n+1)/2]}.$$

Далее, исходя из определения (2.10) и равенства (5.9), находим

$$A_k = (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n} \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(t)}{t-t_k}\, dt$$
$$= \pi(-1)^{k-1} \frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n} I_n^1(t_k) = \pi \frac{2}{\pi} (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{1-t_k^2}}{n} T^C(n,t_k).$$

И поскольку $\alpha_s = \frac{1-(-1)^s}{2} C_{[(s+1)/2]}$ (см. лемму 5), получим

$$T^C(n,t_k) = \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s T_{n-s}(t_k) + 0.5\alpha_n$$
$$= \sum_{s=1}^{[n/2]} C_m T_{n+1-2m}(t_k) + \frac{1-(-1)^n}{4} C_{[(n+1)/2]}.$$

Теорема доказана.

Теорема 11. *Ненасыщаемые квадратурные формулы с весовыми функциями* $r(t) = -\ln|t|$ *и* $r(t) = 1$ *по нулям* $\tau_0 = 1$, $\tau_n = -1$, $\tau_k = \cos(\pi k/n)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$, *многочлена* $(t^2-1)U_{n-1}(t)$ *степени* $n+1$ *имеют соответственно* *следующий вид*:

$$
\begin{gathered}
-\int_{-1}^{+1} f(t)\ln|t|\,dt = b_0 f(\tau_0) + b_n f(\tau_n) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k f(\tau_k) + \varrho_n^D(f),\\
|\varrho_n^D(f)| \leqslant \left(2 + \sum_{k=0}^{n} |b_k|\right) E_n(f),
\end{gathered} \tag{5.13}
$$

$$
\begin{gathered}
\int_{-1}^{+1} f(t)\,dt = B_0 f(\tau_0) + B_n f(\tau_n) + \sum_{k=1}^{n-1} B_k f(\tau_k) + \varrho_n^C(f),\\
|\varrho_n^C(f)| \leqslant \left(2 + \sum_{k=0}^{n} |B_k|\right) E_n(f).
\end{gathered} \tag{5.14}
$$

Здесь обозначено

$$
b_0 = \frac{-1}{2n}\int_{-1}^{+1} U_{n-1}(t)(t+1)\ln|t|\,dt, \qquad b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\int_{-1}^{+1} U_{n-1}(t)(t-1)\ln|t|\,dt, \tag{5.15}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k = \frac{(-1)^k}{n}\biggl(&2(\tau_k^2-1)U^D(n,\tau_k) - \frac{1-(-1)^n}{2}\tau_k D_{[(n+1)/2]}\\
&- \frac{1+(-1)^n}{4}\bigl(D_{[n/2]} + D_{[(n+2)/2]}\bigr)\biggr), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

$$
B_0 = \frac{1}{2n}\int_{-1}^{+1} U_{n-1}(t)(t+1)\,dt, \qquad B_n = \frac{(-1)^n}{2n}\int_{-1}^{+1} U_{n-1}(t)(t-1)\,dt, \tag{5.17}
$$

$$
\begin{aligned}
B_k = \frac{(-1)^{k-1}}{n}\biggl(&2(\tau_k^2-1)U^C(n,\tau_k) - \frac{1-(-1)^n}{2}\tau_k C_{[(n+1)/2]}\\
&- \frac{1+(-1)^n}{4}\bigl(C_{[n/2]} + C_{[(n+2)/2]}\bigr)\biggr),
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

а функции

$$
U^D(n,x) = \sum_{m=1}^{[n/2]} D_m U_{n-2m}(x), \qquad U^C(n,x) = \sum_{m=1}^{[n/2]} C_m U_{n-2m}(x)
$$

вычисляются по предварительно рассчитанным коэффициентам D_m, C_m, $1 \leqslant m \leqslant [(n+2)/2]$ (*см. лемму* 5).

Доказательство. Исходя из определения (2.10), тождества

$$
(t^2-1)U_{n-1}(t) = -\frac{1}{2}(T_{n-1}(t) - T_{n+1}(t)), \qquad n \geqslant 2,
$$

и равенства (5.8) для значений $1 \leqslant k \leqslant n-1$ $(k \neq 0, n)$, имеем

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{(-1)^k}{n}\int_{-1}^{+1} \frac{U_{n-1}(t)(t^2-1)}{t-\tau_k}\ln\frac{1}{|t|}\,dt\\
&= -\frac{(-1)^k}{n}\int_{-1}^{+1} \frac{U_{n-1}(t)(t^2-1)}{t-\tau_k}\ln|t|\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\frac{(-1)^{k-1}}{2n}\big[I^{ln}_{n-1}(\tau_k)-I^{ln}_{n+1}(\tau_k)\big]\\
&= \pi\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k-1}}{2n}\big(T^{\beta}(n-1,\tau_k)-T^{\beta}(n+1,\tau_k)\big)\\
&= \pi\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{k}}{2n}\Bigg(2(\tau_k^2-1)\overbrace{\sum_{s=1}^{n-1}\beta_s U_{n-s-1}(\tau_k)}^{\equiv U^D(n,\tau_k)}-\frac{\beta_{n-1}+\beta_{n+1}}{2}-\beta_n\tau_k\Bigg).
\end{aligned}
$$

Учитывая, что $\beta_s=\frac{1-(-1)^s}{2}D_{[(s+1)2]}$ (лемма 5), находим

$$
\frac{\beta_{n-1}+\beta_{n+1}}{2}=\frac{1+(-1)^n}{4}\big(D_{[n/2]}+D_{[(n+2)/2]}\big),\qquad \beta_n\tau_k=\frac{1-(-1)^n}{2}D_{[(n+1)/2]}\tau_k,
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n-1}\beta_s U_{n-s-1}(\tau_k) &= \overbrace{\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1-(-1)^s}{2}D_{[(s+1)/2]}U_{n-s-1}(\tau_k)}^{s=2m-1}\\
&\equiv \sum_{m=1}^{[n/2]} D_m U_{n-2m}(\tau_k).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует требуемое равенство (5.16).

Поскольку функции $U_{n-1}(t)(t+1)$ и $U_{n-1}(t)(t-1)$ – многочлены степени n, коэффициенты b_0, b_n в формулах (5.15) вычисляются квадратурой (5.11) точно (теорема 10), если в ней в качестве узлов $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$ взяты нули многочлена $T_{m+1}(t)$ степени $m \geqslant n+1$.

Аналогично, исходя из определения (2.10), равенства (5.10) и тождества

$$
(t^2-1)U_{n-1}(t)=-\frac{1}{2}\big(T_{n-1}(t)-T_{n+1}(t)\big),
$$

для значений $1\leqslant k\leqslant n-1$ и $n\geqslant 2$ последовательно находим

$$
\begin{aligned}
B_k &= \frac{(-1)^k}{n}\int_{-1}^{+1}\frac{U_{n-1}(t)(t^2-1)}{t-\tau_k}\,dt=-\pi\frac{(-1)^k}{2n}\big[I^1_{n-1}(\tau_k)-I^1_{n+1}(\tau_k)\big]\\
&= -\pi\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2n}\Bigg(2(\tau_k^2-1)\overbrace{\sum_{s=1}^{n-1}\alpha_s U_{n-s-1}(\tau_k)}^{\equiv U^C(n,\tau_k)}-0.5\alpha_{n-1}-\alpha_n\tau_k-0.5\alpha_{n+1}\Bigg)\\
&= -\pi\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2n}\Bigg(2(\tau_k^2-1)U^C(n,\tau_k)-\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}}{2}-\alpha_n\tau_k\Bigg).
\end{aligned}
$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha_s=\frac{1-(-1)^s}{2}C_{[(s+1)/2]}$ (лемма 5), находим

$$
\frac{\alpha_{n-1}+\alpha_{n+1}}{2}=\frac{1+(-1)^n}{4}\big(C_{[n/2]}+C_{[(n+2)/2]}\big),\qquad \alpha_n\tau_k=\frac{1-(-1)^n}{2}C_{[(n+1)/2]}\tau_k,
$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s U_{n-s-1}(\tau_k) = \overbrace{\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1-(-1)^s}{2} C_{[(s+1)/2]} U_{n-s-1}(\tau_k)}^{s=2m-1}$$
$$\equiv \sum_{m=1}^{[n/2]} C_m U_{n-2m}(\tau_k).$$

С учетом этих равенств получаем формулу (5.18).

Так как $U_{n-1}(t)(t+1)$ и $U_{n-1}(t)(t-1)$ – это многочлены степени n, то квадратурные коэффициенты B_0, B_n удобно вычислять с помощью квадратурной формулы (5.12), организованной по нулям $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ многочлена $T_{m+1}(t)$ степени $m \geqslant n+1$ (теорема 10). Однако эти значения вычисляются и точно:

$$B_0 \equiv B_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{1}{(n+1)(n-1)} + \frac{1-(-1)^n}{2} \frac{1}{n^2}.$$

Теорема 11 доказана.

При применении теорем 10 и 11 следует обращать внимание на следующее важное обстоятельство. Поскольку арифметические операции над вещественными числами осуществляются на компьютере с округлением, при суммировании большого количества чисел желательно сначала складывать малые, так как на каждом шаге получения частичных сумм дополнительная погрешность округления будет пропорциональна этим суммам. Числа $|D_m|$ и C_m с ростом m убывают, поэтому порядок накопления слагаемых при вычислении функций $T^D(n,x)$, $U^D(n,x)$, $T^C(n,x)$, $U^C(n,x)$ следует изменить на противоположный по сравнению с указанным в теоремах.

Построенные в теоремах 10 и 11 ненасыщаемые квадратурные формулы нашли применение при компьютерной реализации осесимметричных краевых задач теории гармонического потенциала (см. [10]).

В заключение обратим внимание на то, что проблема приближенного вычисления кратных интегралов (если речь идет о компьютерных алгоритмах) до сих пор остается фундаментальной и глубоко интригующей математической проблемой, поскольку на практике всегда приходится считаться с кратностью интеграла (см. [30]). Вдобавок с ростом кратности интеграла “вмешательство” ошибок округления в кубатурный процесс только усугубляет ситуацию, причем настолько, что формулы с главным членом погрешности, т.е. насыщаемые, оказываются вообще за пределами возможностей вычислительных устройств (см. [7]). Не стоит поэтому заблуждаться, полагая, что сколько-нибудь существенный прогресс для многомерного случая возможен за счет простого переноса его с одномерного: многомерный подход все еще далек от теоретических изысков одномерного и требует привлечения глубоких фактов многомерного анализа (см. [31], [32]). В результате теория кубатурных формул уже не может развиваться без опоры на интеллектуальный ресурс самого интегранта. И определяющую роль здесь должна сыграть, видимо, идея ненасыщаемости кубатур, несмотря на то, что ее компьютерная реализация может столкнуться с серьезными математическими трудностями (см. [7]). Пока же определенно ясно одно: если универсальные закономерности, лежащие в основе компьютерной реализации интегралов по отрезку, уже хорошо различимы, то в многомерном случае такого рода закономерности различимы еще весьма смутно. Хотя вряд ли стоит всерьез сомневаться в тесной взаимосвязи свойства ненасыщаемости кубатурного процесса с многомерной теорией приближения функций и его способности обнаруживаться не только для отрезка. Скорее всего это достаточно общий факт, а одномерность – всего лишь счастливый случай проявления пока еще не окончательно выявленных закономерностей.

Благодарность. Автор выражает особую признательность рецензенту за полезные замечания и предложения, способствующие улучшению окончательного варианта статьи.

Список литературы

[1] Н. С. Бахвалов, *Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)*, Наука, М., 1973, 631 с.; фр. пер.: N. Bakhvalov, *Méthodes numériques. Analyse, algèbre, équations différentielles ordinaires*, Mir, M., 1976, 606 pp.

[2] С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, 2-е изд., Наука, М., 1974, 224 с.; исп. пер. 4-го изд.: S. Nikolski, *Fórmulas de cuadratura*, Editorial Mir, M., 1990, 293 pp.

[3] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974, 808 с.; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Cubature formulas and modern analysis. An introduction*, Gordon and Breach Science Publishers, Montreux, 1992, xvi+379 pp.

[4] И. П. Мысовских, *Интерполяционные квадратурные формулы*, Наука, М., 1981, 336 с.

[5] М. Д. Рамазанов, *Решетчатые кубатурные формулы на изотропных пространствах*, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2014, 210 с.

[6] *Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики*, ред. К. И. Бабенко, Наука, М., 1979, 296 с.

[7] В. Л. Васкевич, *Гарантированная точность вычисления многомерных интегралов*, Дисс. … докт. физ.-матем. наук, ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2003, 243 с.

[8] К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Наука, М., 1986, 744 с.; 2-е изд., НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2002, 848 с.

[9] В. Н. Белых, “Ненасыщаемые квадратурные формулы на отрезке (к проблеме К. И. Бабенко)”, *Докл. РАН*, **467**:5 (2016), 509–513; англ. пер.: V. N. Belykh, “Nonsaturable quadrature formulas on an interval (on Babenko's problem)”, *Dokl. Math.*, **93**:2 (2016), 197–201.

[10] В. Н. Белых, “Ненасыщаемый численный метод решения внешней осесимметричной задачи Неймана для уравнения Лапласа”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:6 (2011), 1234–1252; англ. пер.: V. N. Belykh, “An unsaturated numerical method for the exterior axisymmetric Neumann problem for Laplace's equation”, *Siberian Math. J.*, **52**:6 (2011), 980–994.

[11] В. Н. Белых, “Особенности реализации ненасыщаемого численного метода для внешней осесимметричной задачи Неймана”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:6 (2013), 1237–1249; англ. пер.: V. N. Belykh, “Particular features of implementation of an unsaturated numerical method for the exterior axisymmetric Neumann problem”, *Siberian Math. J.*, **54**:6 (2013), 984–993.

[12] С. К. Годунов, А. Г. Антонов, О. П. Кирилюк, В. И. Костин, *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*, 2-е изд., перераб. и доп., Наука, Новосибирск, 1992, 353 с.; англ. пер.:

S. K. Godunov, A. G. Antonov, O. P. Kiriljuk, V. I. Kostin, *Guaranteed accuracy in numerical linear algebra*, Math. Appl., **252**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, xii+535 pp.

[13] Дж. Деммель, *Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения*, Мир, М., 2001, 436 с.; пер. с англ.: J. W. Demmel, *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997, xii+419 pp.

[14] L. N. Trefethen, D. Bau, *Numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, PA, 1997, xii+361 pp.

[15] К. И. Бабенко, "Об одном подходе к оценке качества вычислительных алгоритмов", *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1974, 007, 68 с.

[16] K. I. Babenko, "Estimating the quality of computational algorithms. I", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **7**:1 (1976), 47–73; II, № 2, 135–152.

[17] К. И. Бабенко, "О некоторых общих свойствах вычислительных алгоритмов", *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1977, 029, 71 с.

[18] Г. Вейль, "О равномерном распределении чисел по модулю один", *Избранные труды*, Классики науки, Наука, М., 1984, 58–93; пер. с нем.: H. Weyl, "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", *Math. Ann.*, **77**:3 (1916), 313–352.

[19] И. К. Даугавет, *Введение в классическую теорию приближения функций*, СПбГУ, СПб., 2011, 230 с.

[20] P. Erdős, E. Feldheim, "Sur le mode de convergence pour l'interpolation de Lagrange", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **203** (1936), 913–915.

[21] A. K. Varma, P. Vértesi, "Some Erdős–Feldheim type theorems on mean convergence of Lagrange interpolation", *J. Math. Anal. Appl.*, **91**:1 (1983), 68–79.

[22] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.

[23] С. М. Никольский, "Об одном функциональном неравенстве", *Избранные труды*, т. 1, в 3-х т., Наука, М., 2006, 36–38.

[24] К. И. Бабенко, В. А. Стебунов, "О спектральной задаче Орра–Зоммерфельда", *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 1975, 093, 34 с.

[25] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977, 511 с.

[26] С. М. Никольский, "О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:4 (1946), 295–322.

[27] Н. Бурбаки, *Функции действительного переменного*, Элементы математики, Наука, М., 1965, 424 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*. I. *Les structures fondamentales de l'analyse. Livre* IV: *Fonctions d'une variable réelle* (*théorie élémentaire*). *Ch.* 1: *Dérievées. Ch.* 2: *Primitives et intégrales. Ch.* 3: *Fonctions élémentaires*, 2-ème éd., Actualités Sci. Indust., **1074**, Hermann, Paris, 1958, 184 pp.

[28] Г. Н. Пыхтеев, "Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру", *Apl. Mat.*, **10**:4 (1965), 351–372.

[29] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, 2-е изд., Физматгиз, М., 1963, 639 с.; англ. пер.: F. D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon Press, Oxford–New York–Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, MA–London, 1966, xix+561 pp.

[30] М. Д. Рамазанов, "Асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем и свойством ненасыщаемости", *Матем. сб.*, **204**:7 (2013), 71–96; англ. пер.: M. D. Ramazanov, "Asymptotically optimal unsaturated lattice cubature formulae with bounded boundary layer", *Sb. Math.*, **204**:7 (2013), 1003–1027.

[31] К. И. Бабенко, “О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами”, *Докл. АН СССР*, **132**:2 (1960), 247–250; англ. пер.: K. I. Babenko, “Approximation of periodic functions of many variables by trigonometric polynomials”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 513–516.

[32] К. И. Бабенко, “О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами”, *Докл. АН СССР*, **132**:5 (1960), 982–985; англ. пер.: K. I. Babenko, “Approximation by trigonometric polynomials in a certain class of periodic functions of several variables”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 672–675.

Владимир Никитич Белых
(Vladimir N. Belykh)
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
г. Новосибирск
E-mail: belykh@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
25.06.2017 и 17.10.2018