Инженерная школа ДВФУ

П.В. Зиновьев

# МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

2019

Дальневосточный федеральный университет
Инженерная школа

П.В. Зиновьев

# МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Для студентов, обучающихся по укрупненным группам
направлений подготовки «Математические и естественные науки»
«Инженерное дело, технологии и технические науки»

Учебно-методическое пособие

Владивосток
Дальневосточный федеральный университет
2019

УДК 510(076)
ББК 22.12я73

З-63 **Зиновьев П.В**. Метод математической индукции: для студентов, обучающихся по укрупненным группам направлений подготовки «Математические и естественные науки», «Инженерное дело, технологии и технические науки»: учебно-методическое пособие / Инженерная школа ДВФУ. – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2019. – 22 с. – ISBN 978-5-7444-4526-3

Учебно-методическое пособие содержит краткую теорию по теме «Метод математической индукции», разбор основных примеров (доказательства математических равенств, неравенств, утверждений о делимости, общих формул числовых последовательностей, заданных рекуррентно, некоторых утверждений из курса «Математический анализ»), задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по укрупненным группам направлений подготовки «Математические и естественные науки», «Инженерное дело, технологии и технические науки».

*Ключевые слова:* математическая индукция, доказательство, неравенство, база индукции, предположение индукции, шаг индукции.

*Публикуется по решению кафедры механики и математического моделирования Инженерной школы ДВФУ*

УДК 510(076)
ББК 22.12я73

ISBN 978-5-7444-4526-3

## СОДЕРЖАНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея создания автором данного учебно-методического пособия возникла в связи с необходимостью более детально познакомить студентов первого курса с одним из важнейших методов доказательств утверждений в математике – методом математической индукции. В его структуре кратко изложена основная теоретическая часть, а именно объяснены главные этапы доказательства: база индукции, предположение индукции, шаг индукции. Более конкретно суть доказательства продемонстрирована на примерах: рассмотрены доказательства утверждений с равенствами, неравенствами, утверждений о делимости, примеры на доказательства утверждений о числовых последовательностях, заданных рекуррентно. Отдельный параграф посвящен разбору доказательств некоторых утверждений, теорем и лемм, встречающихся в ходе изложения курса «Математический анализ» в первом семестре. Учебно-методическое пособие будет являться хорошим подспорьем для студентов при подготовке к экзамену по указанной дисциплине, а также сможет заинтересовать любознательных школьников, изучающих математику в профильных классах.

# ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие «Метод математической индукции» предназначено для студентов 1 курса, изучающих дисциплины «Высшая математика» и «Математический анализ», в качестве помощи при подготовке к экзамену или зачету по этим дисциплинам. Пособие будет являться хорошим подспорьем при организации самостоятельной работы студентов. Большое внимание уделено разбору примеров на доказательства математических равенств, неравенств, утверждений, связанных с делимостью, общих формул числовых последовательностей, заданных рекуррентно. В школьном курсе математики данной теме внимание фактически не уделяется, за исключением, быть может, тех, кто обучался в классах с математическим уклоном или посещал факультативные занятия по математике. В вузе на изучение этого метода отводится больше часов. Для студентов математического и естественнонаучного профилей проводятся отдельные семинарские занятия, для студентов технических направлений подготовки объясняется суть метода и приводятся основные типы примеров и доказательств.

На протяжении курсов «Математический анализ» и «Высшая математика» лектор часто произносит фразу: «Это можно доказать методом математической индукции». Одни утверждения и теоремы доказываются, другие даются в качестве упражнений на самостоятельную работу, поэтому студенту необходимо не просто знать основу данного метода, но и уметь самому доказывать утверждения, и предложенное пособие будет хорошим помощником в этом вопросе.

В основу учебно-методического пособия «Метод математической индукции» положены семинарские (практические) занятия и лекции по дисциплине «Математический анализ», проводимые автором несколько лет в Дальневосточном федеральном университете для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 03.03.02 «Физика», 14.03.02 «Ядерная физика и технологии».

Данное пособие посвящено методу математической индукции, широко применяющемуся в математике и являющемуся одним из важных методов доказательств. Большинство тождеств, связанных с натуральными числами, могут быть доказаны этим методом. Например, хорошо известные из школьного курса формулы для суммы $n$-членов арифметической и геометрической прогрессий и др.

В пособии кратко рассмотрены основные понятия, непосредственно метод математической индукции и приведены некоторые примеры его применения.

# СУТЬ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Вначале давайте разберемся, а что же означает термин «математическая индукция»? Думаю, что слово «математическая» объяснять не надо. Что же такое индукция? **Индукцией** называют переход от частных утверждений к общим. Напротив, переход от общих утверждений к частным называется **дедукцией.** Например, утверждение «число 342 делится на три» является частным утверждением. Из него можно сформулировать множество общих. Например, «если сумма цифр числа делится на три, то и само число делится на три» или «любое трехзначное число делится на три» и т.д. Таким образом, индукция позволяет получить множество общих утверждений на основе частных, зачастую основанных на известных фактах. А метод математической индукции как раз и предназначен для определения истинности этих утверждений. В приведенных примерах очевидно, что первое утверждение является истинным, а второе – ложным.

В основе метода математической индукции лежит **принцип математической индукции.** Он заключается в следующем: пусть имеется какое-либо утверждение, зависящее от натурального числа $n$, являющееся истинным при начальном $n = 1$. Если предположить справедливость утверждения для произвольного натурального номера $n = k$ и из него получить истинность при натуральном $n = k + 1$, то данное утверждение верно для всех натуральных чисел $n$. Таким образом, метод доказательства утверждений, основанный на принципе математической индукции, называется **методом математической индукции.** Он состоит из нескольких этапов.

1. Проверяем истинность утверждения при $n = 1$ (**база индукции**);
2. Предполагаем, что утверждение верно при произвольном натуральном $n = k$ (**предположение индукции**);
3. Доказываем истинность утверждения для натурального $n = k + 1$, исходя из предположения индукции (пункт 2) (**шаг индукции**).

К приведенному выше алгоритму доказательства утверждений необходимо сделать несколько замечаний.

**Замечание 1.** Проверять истинность доказываемого утверждения необязательно нужно при $n = 1$ (база индукции). Как правило, во многих примерах справедливость утверждений при начальных номерах проверяется достаточно легко, фактически устно, поэтому исследователи и выбирают этот вариант доказательства. Вообще говоря, истинность утверждения можно проверить при натуральном $n = m$. Предположение индукции сделать для натурального $n = k$, причем $k > m$. А доказывать истинность утверждения тогда нужно для натурального $n = k + 1$. В этом случае мы докажем справедливость исходного утверждения для любого натурального номера $n \geq m$.

**Замечание 2.** Метод математической индукции применим для доказательства формулы общего члена числовой последовательности, заданной рекуррентно. Рекуррентный способ задания числовой последовательности подразумевает, что $n$-й член последовательности выражается через предыдущий, а иногда и через два предыдущих члена числовой последовательности. В этом случае метод математической индукции примет следующий вид.

1. Проверяем истинность утверждения при $n = 1$ и $n = 2$ (**база индукции**).
2. Предполагаем, что утверждение верно при произвольном натуральном $n = k$ и $n = k + 1$(**предположение индукции**).
3. Доказываем истинность утверждения для натурального $n = k + 2$, исходя из предположения индукции (пункт 2) (**шаг индукции**).

В следующих параграфах рассмотрим применение доказательства методом математической индукции на конкретных примерах.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ УТВЕРЖДЕНИЙ С РАВЕНСТВОМ

**Пример 1.** Доказать $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость равенства для натурального номера $n = 1$.

$1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$;

$2 = 2$. Утверждение верно.

2. *Предположение индукции.* Пусть исходное равенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, т.е. справедливо:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k\cdot(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}. \qquad (1)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что равенство будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (1) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \qquad (2)$$

Рассмотрим левую часть равенства (2):

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (k+1)(k+2) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1)+ (k+1)\cdot$$
$$\cdot(k+2) = |\text{по формуле (1)}| =$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Получили правую часть равенства (2). А это значит, что методом математической индукции мы доказали исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального номера $n$.

**Пример 2.** Доказать $sinx + \cdots + \sin(nx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}}$.

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость равенства для натурального номера $n = 1$.

$$sinx = \frac{cos\frac{x}{2} - cos\frac{3x}{2}}{2sin\frac{x}{2}}. \quad (3)$$

Рассмотрим правую часть равенства (3):

$$\frac{cos\frac{x}{2} - cos\frac{3x}{2}}{2sin\frac{x}{2}} = \frac{-2sinx \cdot \sin(-\frac{x}{2})}{2sin\frac{x}{2}} = \frac{2sinx \cdot \sin\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}} = sinx.$$

Это значит, что равенство верно при $n = 1$.

2. *Предположение индукции.* Пусть исходное равенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, т.е. справедливо:

$$sinx + \cdots + \sin(kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(k+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}}. \quad (4)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что равенство будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (4) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$sinx + \cdots + \sin\big((k+1)x\big) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{3}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}. \quad (5)$$

Рассмотрим левую часть равенства (5):

$$sinx + \cdots + \sin\big((k+1)x\big) = sinx + \cdots sinkx + \sin(k+1)\,x =$$

$$|\text{по формуле (4)}| = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}} + \sin(k+1)\,x = \frac{cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + 2\cdot\sin(k+1)x\cdot sin\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}} =$$

$$|\text{последнее слагаемое в числителе преобразуем по формуле произведения синусов}| =$$

$$\frac{= cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{3}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(k+\frac{3}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}.$$

Получили правую часть равенства (5). А это значит, что методом математической индукции мы доказали исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального номера $n$.

**Пример 3.** Доказать формулу Бинома–Ньютона $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$. Здесь $a, b$ – действительные числа, $n$ – натуральное число.

**Доказательство.** Докажем формулу Бинома–Ньютона методом математической индукции, но предварительно сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 1:

$$C_k^{i-1} + C_k^i = C_{k+1}^i. \quad (6)$$

**Доказательство**

Рассмотрим левую часть равенства (6), вспомнив, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$C_k^{i-1} + C_k^i = \frac{k!}{(i-1)!\,(k-i+1)!} + \frac{k!}{i!\,(k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)!\,(k-i)!}\left[\frac{1}{k-i+1} + \frac{1}{i}\right] =$$

$$= \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!}\left[\frac{i+k-i+1}{(k-i+1)i}\right] = \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!}\left[\frac{k+1}{(k-i+1)i}\right] == \frac{(k+1)!}{i!(k-i+1)!} = C_{k+1}^i.$$

Получили правую часть равенства (6). Утверждение 1 доказано.

Ну а теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы Бинома–Ньютона.

*1. База индукции.* Проверим справедливость равенства для натурального номера $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1} C_1^i a^i b^{1-i}. \tag{7}$$

В левой части равенства (7) мы получаем $a + b$. Посмотрим, что получается в правой части равенства (7):

$$\sum_{i=0}^{1} C_1^i a^i b^{1-i} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = |C_1^0 = 1, C_1^1 = 1| = 1 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot a \cdot 1 = b + a.$$

Значит, что равенство (6) верно при $n = 1$.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное равенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, т.е. справедливо:

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i}. \tag{8}$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что равенство будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (8) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i a^i b^{k+1-i}. \tag{9}$$

Рассмотрим левую часть равенства (9):

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) = |\text{по формуле (8)}| = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i} \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{i+1} b^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k+1-i} = \left|\sum_{i=0}^{k} a^i = \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} C_k^{i-1} a^i b^{k+1-i} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k+1-i} =$$

$$= C_k^k a^{k+1} b^0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} C_k^{i-1} a^i b^{k+1-i} + C_k^0 a^0 b^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i a^i b^{k+1-i} = \left|C_k^k = 1, C_k^0 = 1\right| =$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left(C_k^{i-1} + C_k^i\right) a^i b^{k+1-i} = |\text{по формуле (6)}| =$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} C_{k+1}^i a^i b^{k+1-i} = \left|\text{при } i = 0 \; C_{k+1}^i a^i b^{k+1-i} = b^{k+1}\right| =$$

$$= a^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^i a^i b^{k+1-i} = \left|\text{при } i = k+1 \; C_{k+1}^i a^i b^{k+1-i} = a^{k+1}\right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i a^i b^{k+1-i}.$$

Получили правую часть равенства (9). А это значит, что методом математической индукции мы доказали исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального номера $n$.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ УТВЕРЖДЕНИЙ С НЕРАВЕНСТВОМ

**Пример 4.** Доказать формулу Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \tag{10}$$

для любого $n \in N$, для любого действительного $x > -1$.

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость неравенства для натурального номера $n = 1$:

$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x;$

$1 + x \geq 1 + x.$

Неравенство верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное неравенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, т.е. справедливо:

$$(1+x)^k \geq 1 + kx. \tag{11}$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что неравенство будет верным для натурального номера $n = k+1$ при условии, что (11) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x. \tag{12}$$

Рассмотрим левую часть неравенства (12):

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq |\text{по формуле } (11)| \geq (1+kx)(1+x) =$$
$$= 1 + kx + x + +kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq$$
$$\geq |kx^2 \geq 0 \text{ для любого } x > -1| \geq 1 + (k+1)x.$$

А это значит, что методом математической индукции мы доказали исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального номера $n$ и любого действительного $x > -1$.

**Пример 5.** Доказать, что $3^{n-1} > 2n^2 - n$, для любого натурального $n \geq 5$.

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость неравенства для натурального номера $n = 5$:

$3^4 > 2 \cdot 25 - 5;$

$81 > 45.$

Неравенство верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное неравенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k, k > 5$, т.е. справедливо:

$$3^{k-1} > 2k^2 - k. \tag{13}$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что неравенство будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (13) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$3^k > 2(k+1)^2 - (k+1). \tag{14}$$

Рассмотрим левую часть неравенства (14):

$$3^k = 3^{k-1} \cdot 3 > |\text{согласно (13)}| > (2k^2 - k) \cdot 3 = 6k^2 - 3k = [2(k+1)^2 - \\ -(k+1)] + 4k^2 — 6k - 1 \boxed{>}.$$

Методом интервалов можно показать, что для любого $k > 2$ будет выполняться, что $4k^2 - 6k - 1 > 0$. Следовательно, оно будет выполняться и при $k > 5$. А это значит, что $\boxed{>}\ 2(k+1)^2 - (k+1)$.

А это значит, что методом математической индукции мы доказали исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального номера $n \geq 5$.

**Пример 6.** Используя неравенство $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$, доказать методом математической индукции $n^{\frac{n}{2}} < n! < (\frac{n+1}{2})^n, n \geq 3$.

**Доказательство**

Доказательство исходного утверждения разобьем на две части:

а) докажем, что $n^{\frac{n}{2}} < n!$, для натурального $n \geq 3$.

1. *База индукции.* Проверим справедливость неравенства для натурального номера $n = 3$.

$3^{1,5} < 3!$;

$\sqrt{27} < 6$;

$\sqrt{27} < \sqrt{36}$.

Неравенство верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное неравенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k, k > 3$, т.е. справедливо:

$$k^{\frac{k}{2}} < k! \tag{15}$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что неравенство будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (15) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$(k+1)^{\frac{k+1}{2}} < (k+1)! \tag{16}$$

Рассмотрим неравенство (15):

$$k^{\frac{k}{2}} < k!$$

Умножим обе части этого неравенства на $(k + 1) > 0$. Получим:

$$k^{\frac{k}{2}}(k+1) < (k+1)! \tag{17}$$

Если доказать, что

$$(k+1)^{\frac{k+1}{2}} < k^{\frac{k}{2}}(k+1), \tag{18}$$

то получим, что $(k+1)^{\frac{k+1}{2}} < k^{\frac{k}{2}}(k+1) < |\text{согласно (17)}| < (k+1)!$ А это есть формула (16), которую нам и надо доказать.

Итак, докажем (18). По условию $(1+\frac{1}{k})^k < 3$. Кроме того, при $k > 3$ выполняется $3 < k+1$. Поэтому

$$(1+\frac{1}{k})^k < k+1;$$

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{k}{2}} < \sqrt{k+1}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $k^{\frac{k}{2}} \cdot \sqrt{k+1} > 0$:

$$(k+1)^{\frac{k}{2}}\sqrt{k+1} < k^{\frac{k}{2}} \cdot (k+1),$$

т.е. $(k+1)^{\frac{k+1}{2}} < k^{\frac{k}{2}} \cdot (k+1)$.

Таким образом, неравенство (18) доказано, следовательно, доказано неравенство (16). А это значит, что методом математической индукции мы доказали, что исходное утверждение верно. Оно справедливо для любого натурального номера $n \geq 3$;

б) докажем, что $n! < (\frac{n+1}{2})^n, n \geq 3$.

1. *База индукции.* Проверим справедливость неравенства для натурального номера $n = 3$:

$3! < 2^3$;

$6 < 8$.

Неравенство верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное неравенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k, k > 3$, т.е. справедливо:

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k. \qquad (19)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что неравенство будет верным для натурального номера $n = k+1$ при условии, что (19) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$(k+1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}. \qquad (20)$$

Рассмотрим неравенство (19). Умножим его обе части на $(k+1) > 0$:

$$k! \cdot (k+1) < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot (k+1);$$

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} \cdot 2. \qquad (21)$$

Если доказать, что

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} \cdot 2 < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}, \qquad (22)$$

то получим, что $(k+1)! < |\text{по формуле (21)}| < \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} \cdot 2 < |\text{по формуле (22)}| < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$. А это и есть формула (20), которую нам надо доказать.

Итак, докажем (22). По условию $2 < (1+\frac{1}{n})^n$ при $n \geq 3$. А это значит, что

$$2 < \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1};$$

$$2 < \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Умножим последнее неравенство на $\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > 0$, получим:

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} \cdot 2 < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}.$$

Таким образом, неравенство (22) доказано, тогда из (21) и (22) доказано неравенство (20). А это значит, что методом математической индукции мы доказали, что исходное утверждение верно. Оно справедливо для любого натурального номера $n \geq 3$.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ УТВЕРЖДЕНИЙ О ДЕЛИМОСТИ

**Пример 7.** Доказать, что $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ кратно 6 для любого натурального $n$.

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость утверждения для натурального номера $n = 1$:

$$1^3 + 9 \cdot 1^2 + 26 \cdot 1 + 24 = 60.$$

Очевидно, что 60 кратно 6. Утверждение верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное утверждение выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, т.е. справедливо:

$$k^3 + 9k^2 + 26k + 24 \text{ кратно 6 для любого натурального } k. \qquad (23)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что утверждение будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (23) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$(k+1)^3 + 9(k+1)^2 + 26(k+1) + 24 \text{ кратно 6.} \qquad (24)$$

Рассмотрим выражение (24):

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 9k^2 + 18k + 9 + 26k + 26 + 24 =$$
$$= (k^3 + 9k^2 + 26k + 24) + 3k^2 + 21k + 36. \qquad (25)$$

Выражение в скобках в (25) кратно 6 согласно (23). Таким образом, если показать, что

$$3k^2 + 21k + 36 \text{ кратно 6,} \qquad (26)$$

то мы докажем наше исходное утверждение. Опять рассмотрим метод математической индукции.

*1. База индукции.* Проверим справедливость утверждения для натурального номера $k = 1$:

$$3 \cdot 1^2 + 21 \cdot 1 + 36 = 60.$$

Очевидно, что 60 кратно 6. Утверждение верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное утверждение выполняется для некоторого натурального номера $k = m$, т.е. справедливо:

$$3m^2 + 21m + 36 \text{ кратно 6 для любого натурального } m. \qquad (27)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что утверждение будет верным для натурального номера $k = m + 1$ при условии, что (27) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$3(m+1)^2 + 21(m+1) + 36 \text{ кратно } 6. \qquad (28)$$

Рассмотрим выражение (28):

$$3m^2 + 6m + 3 + 21m + 21 + 36 = (3m^2 + 21m + 36) + 6m + 24 =$$
$$= (3m^2 + 21m + 36) + 6(m + 4). \qquad (29)$$

Выражение $3m^2 + 21m + 36$ кратно 6 согласно (27), а $6(m + 4)$, очевидно, кратно 6. А это значит, что методом математической индукции мы доказали утверждение (26). Оно справедливо для любого натурального номера $k$. Следовательно, исходное утверждение верно для любого натурального $n$.

**Пример 8**. Доказать, что $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость утверждения для натурального номера $n = 1$.

$$6^0 + 3^2 + 3^0 = 1 + 9 + 1 = 11.$$

11 делится на 11. Утверждение верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное утверждение выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, т.е. справедливо:

$$6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1} \text{ делится на } 11. \qquad (30)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что утверждение будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (30) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$6^{2(k+1)-2} + 3^{(k+1)+1} + 3^{(k+1)-1} \text{ делится на } 11. \qquad (31)$$

Рассмотрим выражение (31):

$$6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = 6^{2k-2+2} + 3^{k+1+1} + 3^{k-1+1} = 36 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 3^{k+1} +$$
$$+ 3 \cdot 3^{k-1} = 33 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 3^{k-1} = 33 \cdot 6^{2k-2} + 3(6^{2k-2} +$$
$$+ 3^{k+1} + 3^{k-1}). \qquad (32)$$

Первое слагаемое в (32), очевидно, делится на 11, а второе слагаемое – на 11 согласно (30). А это значит, что методом математической индукции мы доказали исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального номера $n$.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В УТВЕРЖДЕНИЯХ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ, ЗАДАННЫХ РЕКУРРЕНТНО

**Пример 9**. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 5$ $(n > 1)$. Доказать, что $a_n = \frac{1}{3}(2 \cdot 4^n - 5)$.

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость утверждения для натурального номера $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{3}(2 \cdot 4^1 - 5) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1.$$

Утверждение верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное утверждение выполняется для некоторого натурального номера $n = k, k > 1$, т.е. справедливо:

$$a_k = \frac{1}{3}(2 \cdot 4^k - 5). \quad (33)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что утверждение будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (33) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$a_{k+1} = \frac{1}{3}(2 \cdot 4^{k+1} - 5). \quad (34)$$

Запишем $a_{k+1}$ по рекуррентной формуле из условия примера:

$$a_{k+1} = 4a_k + 5 = |\text{по формуле (33)}| = 4 \cdot \frac{1}{3}(2 \cdot 4^k - 5) + 5 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4^{k+1} -$$
$$-\frac{20}{3} + 5 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4^{k+1} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(2 \cdot 4^{k+1} - 5).$$

Получили (34). Это значит, что методом математической индукции исходное утверждение доказано.

**Пример 10.** Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно:

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \quad (35)$$
$$a_1 = 0, a_2 = 1.$$

Доказать, что

$$a_n = 2^{n-1} - 1. \quad (36)$$

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость утверждения (36) для натуральных номеров $n = 1$ и $n = 2$:

$$a_1 = 2^0 - 1 = 0.$$
$$a_2 = 2^1 - 1 = 1.$$

Утверждение (36) верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть исходное утверждение выполняется для некоторых натуральных номеров $n = k$ и $n = k + 1$, т.е. справедливо:

$$a_k = 2^{k-1} - 1; \quad (37)$$
$$a_{k+1} = 2^k - 1. \quad (38)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что утверждение будет верным для натурального номера $n = k + 2$ при условии, что (37) и (38) справедливы. Таким образом, нужно показать, что

$$a_{k+2} = 2^{k+1} - 1. \quad (39)$$

Запишем $a_{k+2}$ по формуле (35):

$$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2 \cdot a_k = |\text{по формулам (37)и (38)}| = 3 \cdot (2^k - 1) - 2 \times$$
$$\times (2^{k-1} - 1) = 3 \cdot 2^k — 3 - 2^k + 2 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Получили (39). Это значит, что методом математической индукции исходное утверждение доказано.

# МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ НЕКОТОРЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ ИЗ КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

В этом параграфе обратим внимание на доказательства некоторых теорем, лемм, утверждений, встречающихся при чтении лекций по дисциплине «Математический анализ», методом математической индукции. Часто лектор обозначает, что некоторое утверждение доказывается методом математической индукции, но не проводит доказательства, задавая это как упражнение на самостоятельную работу. Конечно, мы рассмотрим не все такие утверждения, а лишь некоторые из них. Но если студент разберется в основной идее метода, то без труда сможет самостоятельно провести требуемое доказательство.

**Пример 11.** Доказать методом математической индукции лемму.

***Лемма 1.*** Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Прежде чем доказывать сформулированную выше лемму, введем ряд определений, утверждений и теорем, на которые мы будем ссылаться и которые будем упоминать в ходе доказательства.

*Определение 1: последовательность называется сходящейся, если она имеет конечный предел, в противном случае она называется расходящейся.*

*Определение 2: последовательность* $\{\alpha_n\}$ *называется бесконечно малой последовательностью, если* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

*Определение 3: последовательность* $\{x_n\}$ *называется ограниченной, если* $\exists\, M > 0\colon \forall n \in N$ *выполняется, что* $|x_n| \le M$.

***Лемма 2.*** *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть последовательность бесконечно малая.*

**Теорема 1. Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена**.

Ну а теперь непосредственно перейдем к доказательству Примера 11 (Леммы 1).

**Доказательство**

1. *База индукции.* Проверим справедливость Леммы 1 на примере произведения двух бесконечно малых последовательностей.

Пусть $\{\alpha_{n1}\}$ и $\{\alpha_{n2}\}$ бесконечно малые последовательности. Рассмотрим их произведение $\alpha_{n1} \cdot \alpha_{n2}$. Последовательность $\alpha_{n2}$ является сходящейся по Определению 1, тогда по Теореме 1 она ограничена. Следовательно, по Лемме 2 произведение является последовательностью бесконечно малой.

Утверждение верно.

2. *Предположение индукции.* Пусть Лемма 1 выполнена для натурального $n = k$, т.е. справедливо:

$\alpha_{n1} \cdot \alpha_{n2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk}$ является бесконечно малой последовательностью. Обозначим ее $\{\beta_k\}$.

3. *Шаг индукции.* Докажем, что Лемма 1 будет верна для натурального номера $n = k + 1$. Таким образом, нужно показать, что

$\alpha_{n1} \cdot \alpha_{n2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk} \cdot \alpha_{n(k+1)}$ является бесконечно малой последовательностью.

Действительно, $\alpha_{n1} \cdot \alpha_{n2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk} \cdot \alpha_{n(k+1)} =$ |по предположению индукции| $=$ $= \beta_k \cdot \alpha_{n(k+1)}$.

Последовательность $\{\alpha_{n(k+1)}\}$ является бесконечно малой. Следовательно, по Определению 1 она сходится. Тогда по Теореме 1 она ограничена. Следовательно, по Лемме 2 произведение $\beta_k \cdot \alpha_{n(k+1)}$ является бесконечно малой последовательностью. А это нам и надо было показать, т.е. Лемма 1 доказана.

**Пример 12.** Доказать методом математической индукции, что $d^n y = y^{(n)} dx^n$.

Речь пойдет о дифференциале $n$-го порядка функции. Как и в предыдущем примере введем ряд определений, необходимых нам для понимания сущности рассматриваемого вопроса.

*Определение 4: функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0$, называется дифференцируемой при $x = x_0$, если ее приращение в этой точке, т.е.*

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ *представимо в виде:*

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0, A = const.$

**Теорема 2. Для того чтобы функция $f$ была дифференцируемой в некоторой точке $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную; при этом $dy = f'(x)dx$.**

*Определение 5: значение дифференциала $\delta(dy)$, то есть дифференциала от первого дифференциала, в некоторой точке $x_0$ при $\delta x = dx$ называется вторым дифференциалом функции $f$ в этой точке и обозначается $d^2y$, т.е. $d^2y = f''(x_0)dx^2$.*

Подобным же образом в том случае, когда производная $(n-1)$-го порядка $y^{(n-1)}$, дифференцируема в точке $x_0$ или, что эквивалентно, когда при $x = x_0$ существует производная $n$-го порядка $y^{(n)}$, определяется дифференциал $n$-го порядка $d^n y$ функции $y = f(x)$ в точке $x_0$, как дифференциал $\delta(d^{n-1}y)$ от дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}y$, в котором $\delta x = dx$.

А теперь перейдем непосредственно к решению Примера 12.

1. *База индукции.* Проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Оно выполняется по Теореме 2.

2. *Предположение индукции.* Пусть утверждение выполнено для натурального $n = k - 1$, т.е. справедливо:

$$d^{k-1}y = y^{(k-1)}dx^{k-1}. \qquad (40)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что утверждение будет верным для натурального номера $n = k$ при условии, что (40) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$d^k y = y^{(k)}dx^k. \qquad (41)$$

По определению 5, получим:

$$\delta(d^{k-1}y) = \delta\left(y^{(k-1)}dx^{k-1}\right) = \left(y^{(k-1)}dx^{k-1}\right)'\delta x = y^{(k)}\delta x dx^{k-1} =$$
$$= |\delta x = dx| = y^{(k)}dx^k.$$

Получили (41). Это значит, что методом математической индукции исходное утверждение доказано.

Рассмотрим еще один из типов примеров, которые доказываются методом математической индукции – примеры на нахождение производной $n$-го порядка от некоторой заданной функции. Производная $n$-го порядка находится индуктивно: сначала берется производная первого порядка, затем второго, третьего и последующих до тех пор, пока не выяснится некоторая закономерность (если, конечно, эту закономерность можно обнаружить). По выявленной закономерности записывается производная $n$-го порядка. Как правило, этим дело и заканчивается. Однако для математической строгости выявленную закономерность необходимо доказать, и в этом вопросе как раз и применяется метод математической индукции.

**Пример 13.** Доказать, что производная $n$-го порядка от функции $y = sinx$ выражается формулой:

$$y^{(n)} = sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \quad (42)$$

**Доказательство**

Прежде чем доказывать (42), напомним два определения: производная от функции в данной точке и производная высшего порядка от функции в данной точке.

*Определение 6: пусть функция* $y = f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* $x_0 \in R$ *и пусть* $x$ *– произвольная точка этой окрестности. Если существует* $lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, *то он называется производной функции* $f(x)$ *в точке* $x_0$ *и обозначается* $f'(x_0)$.

*Определение 7: пусть функция* $f(x)$, *определенная на интервале* $(a, b)$, *имеет в каждой точке* $x \in (a, b)$ *производную* $f'(x)$ *и пусть* $x_0 \in (a, b)$. *Если при* $x = x_0$ *у производной* $f'(x)$ *функции* $f(x)$ *существует производная, то она называется второй производной и обозначается* $f''(x_0)$. *Аналогично определяется производная* $y^{(n)}$ *любого порядка для* $n > 1$*: если существует производная* $y^{(n-1)}$ *порядка* $(n-1)$, *то по определению* $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$.

Ну а теперь перейдем непосредственно к доказательству Примера 13.

*1. База индукции.* Проверим справедливость утверждения (42) при $n = 1$.

$y' = \sin\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$=|по формуле приведения| $= cosx$.

Утверждение (42) верно.

*2. Предположение индукции.* Пусть утверждение выполнено для натурального $n = k$, т.е. справедливо:

$$y^{(k)} = sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right). \quad (43)$$

3. *Шаг индукции.* Докажем, что утверждение будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что (43) справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$y^{(k+1)} = sin\left(x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right); \qquad (44)$$

$$y^{(k+1)} = |\text{по определению 7}| = \left(y^{(k)}\right)'' = |\text{по формуле (43)}| =$$

$$= \left(sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)' = cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \left|cosx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= sin\left(x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Получили (44). Это значит, что методом математической индукции исходное утверждение (42) доказано.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Соминский И.С. Метод математической индукции. М.: Наука, 1965. 58 с. (Популярные лекции по математике). Вып. 3.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов. 10-е изд. М.: Наука, 1990. 624 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Дрофа, 2003. Т. 1. 704 с.
4. Леонтьева А.В. Сборник задач (метод математической индукции): учеб.-метод. пособие. Н. Новгород: НГУ им. Н.И. Лобачевского, 2014.

# ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
3. $\frac{1}{2}+cosx+\cdots cosnx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}}$.
4. $\frac{1}{4\cdot8}+\frac{1}{8\cdot12}+\cdots+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16(n+1)}$.
5. $1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.
6. $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$.
7. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$.
8. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.
9. $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.
10. $(1+h)^n>1+n\cdot h+\frac{n(n-1)}{2}\cdot h^2, n\geq3,\ h>0$.
11. $2^n>n^2, n\geq5$.
12. $\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1}, n>1$.
13. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}, n>1$.
14. $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n},\ n>1$.
15. $n!>2^n, n>3$.
16. $4^n>n^2$.
17. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$.
18. Доказать, что $3^{3n+2}+2^{4n+1}$ кратно 11.
19. Доказать, что $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.
20. Доказать, что $4^n+15n-1$ кратно 9.
21. Доказать, что $n^3+3n^2+5n+3$ делится на 3.
22. Доказать, что $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7.
23. Доказать, что $10^n+18n-28$ кратно 27.
24. Доказать, что $5^{2n+1}+3^{n+2}2^{n-1}$ кратно 19.
25. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1=1, a_{n+1}=a_n+3$. Доказать, что $a_n=3n-2$.
26. Доказать формулу для нахождения *n*-го члена арифметической прогрессии $a_n=a_1++d(n-1)$. $d$ – разность арифметической прогрессии, $a_{n+1}=a_n+d$.
27. Доказать формулу для нахождения *n*-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$. $q$ – знаменатель геометрической прогрессии, $b_{n+1}=b_nq$.
28. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1=2, a_{n+1}==2(a_n+(2n+1)2^n)$. Доказать, что $a_n=n^22^n$.
29. Доказать формулу Лейбница $(U\cdot V)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kU^{(k)}V^{(n-k)}$, где $U^{(k)},V^{(k)}$ – производные *n*-го порядка функций $U$ и $V$.
30. Доказать формулу Муавра: для любого натурального $n$ $(cosx+isinx)^n==\cos(nx)+isin(nx)$.

*Учебное издание*

*Автор*
**Зиновьев Павел Владимирович** – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа Школы естественных наук, ученый секретарь Ученого совета Инженерной школы
*Дальневосточный федеральный университет*

# МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Для студентов, обучающихся по укрупненным группам направлений подготовки «Математические и естественные науки» «Инженерное дело, технологии и технические науки»

Учебно-методическое пособие

Редактор И.А. Гончарук
Компьютерная верстка И.А. Гончарук

Подписано в печать 17.06.2019

Формат 60x84/8
Усл. печ. л. 2,6
Тираж 25 экз.
Заказ

Издание находится в свободном доступе на сайте ДВФУ
URL: https://www.dvfu.ru/schools/engineering/science/scientific-and-educational-publications/manuals/

Издание подготовлено редакционно-издательским отделом Инженерной школы ДВФУ
[Кампус ДВФУ, корп. С, каб. С714]

Дальневосточный федеральный университет
690091, Владивосток, ул. Суханова, 8

Отпечатано в Дальневосточном федеральном университете
(типография Издательства ДВФУ
690091, г. Владивосток, ул. Пушкинская, 10)