

Магистратура ИТМО. 4 октября 2022.
Перечислительная комбинаторика-3. Числа Стирлинга 2 рода.

1. Пусть у нас есть два множества: $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $B = \{1, 2, \dots, m\}$.
 - Сколько всего существует инъекций из A в B ?
 - При каких n, m инъекций из A в B не существует?
 - Сколько всего существует биекций из A в B ?
 - При каких n, m биекций из A в B не существует?
 - Сколько всего существует сюръекций из A в B ?
 - При каких n, m сюръекций из A в B не существует?
2. Сосчитайте количество размещений n различных предметов по k различным ящикам при условии, что ровно r из k ящиков должны быть заняты.
3. Получите явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n, 1)$, $S(n, n)$, $S(n, 2)$ и $S(n, n - 1)$.
4. В начале учебного года на кафедре происходит распределение нагрузки. Имеется 5 преподавателей и 7 различных групп студентов, которым эти преподаватели должны прочесть один и тот же курс. Любой преподаватель может вести занятия в любой группе. Найдите количество способов распределения нагрузки между преподавателями при условии, что каждый преподаватель должен вести занятия хотя бы в одной группе.
5. Придумайте комбинаторное доказательство формулы

$$k^n = \sum_{i=0}^n (k)_i \cdot S(n, i).$$

6. Доказать, что количество разбиений n -элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n - 1)$.
7. Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?
8. (*) Вычислите:

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$

9. (*) Между двумя берегами реки расположено 6 островов. Мосты можно строить только от берега до соседних островов и между соседними островами. Сколько существует способов построить несколько мостов так, чтобы можно было перебраться с одного берега на другой?

