

Домашнее задание 3. Числа Стирлинга 2 рода.

Задач на зачёт: 3

1. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?
2. Доказать комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n, 3)$:

$$S(n, 3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

3. Доказать, что числа Стирлинга $S(n, n - 2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n, n - 2) = \frac{n(n - 1)(n - 2)(3n - 5)}{24}.$$

Напоминание: Числом Белла $B(n)$ называется количество всех возможных разбиений n -элементного множества. Если разбить всевозможные разбиения на группы по количеству частей, на которые разбивается множество, то в каждой группе число разбиений будет выражаться числом Стирлинга второго рода. Отсюда получаем выражение для чисел Белла:

$$B(n) = \sum_{i=1}^n S(n, i)$$

4. Докажите комбинаторно, что:

$$B(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k).$$

5. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n -множества без блоков единичной длины. Докажите, что $B(n) = F(n) + F(n + 1)$.