

Kĩ thuật bao lồi (Convex Hull Trick)

1. [translate](#)

2. [wcipeg](#)

Kĩ thuật bao lồi (Convex Hull Trick)

1. [translate](#)

2. [wcipeg](#)

Nguồn: [P3G](#)

Người dịch: Phan Minh Hoàng

[Table of Contents](#)

- [Lịch sử](#)
- [Bài toán cơ bản](#)
- [Thuật toán duyệt](#)
- [Kĩ thuật](#)
- [Ý nghĩa của tên kĩ thuật](#)
- [Thêm một đường vào tập](#)
- [Phân tích thuật toán](#)
- [Ví dụ 1: USACO Tháng 3 năm 2008 "Acquire"](#)
- [Bài toán](#)
- [Nhận xét 1: Tồn tại các hình chữ nhật không quan trọng](#)
- [Nhận xét 2: Đoạn liên tiếp](#)
- [Lời giải Quy Hoạch Động](#)
- [Nhận xét 3: Sử dụng bao lồi](#)
- [Ví dụ 2: APIO 2010 Commando](#)
- [Bài toán](#)
- [Biến thể động \(Fully Dynamic Variant\)](#)
- [Code](#)
- [Bài tập:](#)

Kĩ thuật bao lồi là kĩ thuật (hoặc là cấu trúc dữ liệu) dùng để xác định hiệu quả, có tiền xử lý, cực trị của một tập các hàm tuyến tính tại một giá trị của biến độc lập. Mặc dù tên gọi giống nhưng kĩ thuật này lại khá khác biệt so với **thuật toán bao lồi** của hình học tính toán.

Ngoài ra có một kĩ thuật liên quan đến kĩ thuật bao lồi là **IT đoạn thẳng**

Lịch sử

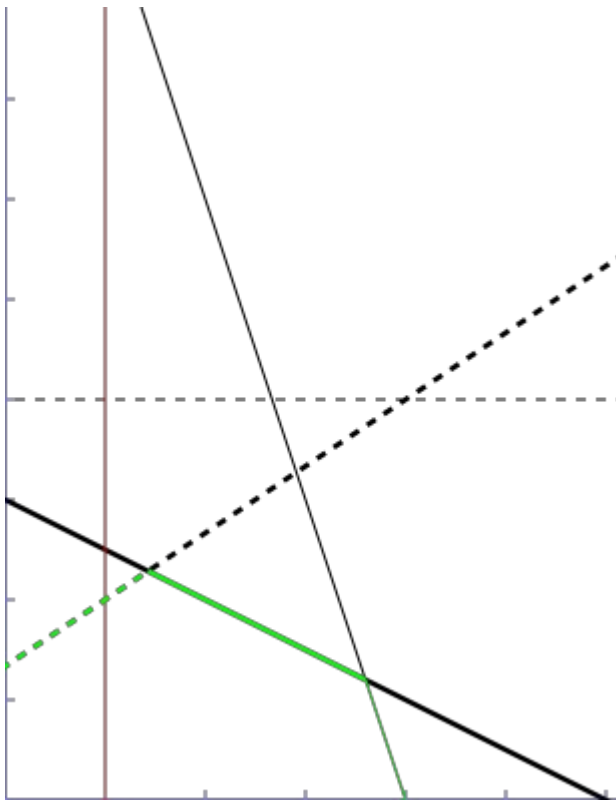
Kĩ thuật bao lồi được biết đến nhiều nhất có lẽ vì nó cần để ăn trọn toàn bộ số điểm trong nhiều bài toán USACO, như là bài **Acquire** trong bảng gold của USACO tháng 3 năm 2008. Thuật toán được đưa vào các cuộc thi lập trình một cách rộng rãi sau bài **Batch Scheduling** trong kì thi IOI 2002. Đây là một kĩ thuật khá lạ và ít có nguồn trên mạng về vấn đề này.

Bài toán cơ bản

Cho một tập lớn các hàm tuyến tính có dạng $y = m_i x + b_i$ và một số lượng lớn truy vấn. Mỗi truy vấn là một số x và hỏi giá trị cực tiểu y có thể đạt được nếu chúng ta thế x vào một trong những phương trình đã cho. Ví dụ, cho các phương trình $y = 4$, $y = 43 + 23x$, $y = 12 - 3x$ và $y = 3 - 12x$ và truy vấn $x = 1$. Chúng ta phải tìm phương trình mà trả về giá trị cực tiểu hoặc giá trị cực tiểu đó (trong trường hợp này là phương trình $y = 43 + 23x$ và giá trị cực tiểu đó là 2).

Biến thể của bài toán có thể là tìm giá trị cực đại có thể giải quyết với một thay đổi nhỏ vì vậy trong bài viết này chỉ tập trung vào bài toán tìm giá trị cực tiểu.

Sau khi ta vẽ các đường thẳng lên hệ trục tọa độ, dễ thấy rằng: chúng ta muốn xác định, tại $x = 1$ (đường màu đỏ) đường nào có tọa độ y nhỏ nhất. Ở trong trường hợp này là đường nét đứt đậm $y = 43 + 23x$.



Thuật toán duyệt

Với mỗi truy vấn trong Q truy vấn, ta duyệt qua từng hàm số và thử từng từng hàm và xem thử hàm nào trả giá trị cực tiểu cho giá trị x . Nếu có M đường thẳng và Q truy vấn, độ phức tạp của thuật toán sẽ $O(MQ)$. Kỹ thuật bao lồi sẽ giúp giảm độ phức tạp xuống còn $O((Q+M)\log M)$, một độ phức tạp hiệu quả hơn nhiều.

Kỹ thuật

Xét hình vẽ ở trên. Đường thẳng $y=4$ sẽ không bao giờ là giá trị nhỏ nhất với tất cả giá trị của x . Mỗi đường trong mỗi đường thẳng còn lại sẽ lại trả lại giá trị cực tiểu trong một và chỉ một đoạn liên tiếp (có thể có một biên là $+\infty$ hoặc $-\infty$). Đường chấm đậm sẽ cho giá trị cực tiểu với tất cả giá trị nằm bên trái điểm giao với đường đen đậm. Đường đen đậm sẽ cho giá trị cực tiểu với tất cả giá trị giữa giao điểm của nó với đường nhạt và đường chấm đậm. Và đường nhạt sẽ nhận cực tiểu cho tất cả giá trị bên phải giao điểm với đường đậm. Một nhận xét nữa là với giá trị của x càng tăng thì hệ số góc

của các hàm số sẽ giảm, 23, -12, -3. Với một chút chứng minh dễ thấy rằng điều này luôn đúng.

Điều này giúp chúng ta hiểu phần nào thuật toán:

- Bỏ đi các đường thẳng không quan trọng như $y=4$ trong ví dụ (những đường thẳng mà không nhận giá trị cực tiểu trong bất kì đoạn nào)
- Sắp xếp các đoạn thẳng còn lại theo hệ số góc và được một tập N đoạn thẳng (của N đường thẳng còn lại) mà mỗi đoạn có một đường thẳng nhận giá trị cực tiểu.
- Dùng thuật toán tìm kiếm nhị phân cơ bản để có thể tìm kiếm đáp án cho từng truy vấn.

Ý nghĩa của tên kĩ thuật

Cụm từ bao lồi được sử dụng để chỉ hình bao trên/dưới (upper / lower envelope). Trong ví dụ, nếu chúng ta coi mỗi phần đoạn thẳng tối ưu của đường thẳng (bỏ qua đường $y=4$), chúng ta sẽ thấy những đoạn đó tạo thành một hình bao dưới (lower envelope), một tập các đoạn thẳng chứa tất cả điểm cực tiểu cho mọi giá trị của X (hình bao dưới được tô bằng màu xanh trong hình. Cái tên kĩ thuật bao lồi xuất phát từ việc đường bao trên tạo thành một đường lồi, từ đó thành bao lồi của một tập điểm.

Thêm một đường vào tập

Ta có thể thấy nếu ta có một tập đường thẳng đã được xác định sắp xếp, ta có thể dễ dàng trả lời bất kì truy vấn nào với độ phức tạp là $O(\log M)$ với tìm kiếm nhị phân. Vậy nếu chúng ta tìm ra cách thêm một đường thẳng vào tính toán lại một cách hiệu quả là chúng ta đã có một thuật toán hoạt động ngon lành.

Giả sử chúng ta được xử lý tất cả đường thẳng trước khi làm các truy vấn thì chúng ta chỉ cần đơn giản sắp xếp các đường thẳng theo hệ số góc và thêm từng đường một vào. Sẽ có thể một số đường không quan trọng và sẽ bị bỏ đi. Chúng ta sẽ sử dụng cấu trúc

dữ liệu Stack để cài đặt, bỏ từng đường thẳng vào stack và nếu đường nào không quan trọng sẽ bị bỏ ra ngoài đến khi chỉ còn một đường thẳng (đường thẳng cuối không thể bỏ)

Vậy làm sao để có thể xác định đường thẳng nào sẽ bị bỏ khỏi stack? Giả

sử l_1 , l_2 và l_3 là đường thẳng áp chót (gần cuối) trên stack, đường thẳng cuối cùng trong stack và đường thẳng được thêm vào stack. Đoạn l_2 không quan trọng (không có giá trị cực tiểu ở điểm nào) khi và chỉ khi giao điểm của l_1 và l_3 nằm bên trái giao điểm của l_1 và l_2 (Đoạn mà l_3 nhận giá trị cực tiểu đã nằm đè lên đoạn của l_2). Giả sử rằng không có ba đường nào trùng hay song song với nhau (có thể giải quyết một cách đơn giản).

Phân tích thuật toán

Độ phức tạp bộ nhớ sẽ là $O(M)$: chúng ta cần một danh sách lưu lại các đoạn thẳng, biểu diễn bởi hai số thực.

Độ phức tạp thời gian cho phần tiền xây dựng:

- Để sắp xếp các đoạn thẳng theo tăng dần hệ số góc sẽ tốn $O(M \log M)$.
- Duyệt qua các đường thẳng mỗi đường được cho vào stack và bỏ khỏi stack tối đa một lần vậy nên sẽ tốn $O(M)$ cho bước này.

Vậy thời gian cho việc xây dựng sẽ là $O(M \log M)$. Với mỗi truy vấn dùng chặt nhị phân sẽ cho độ phức tạp tốt nhất $O(\log M)$.

Ví dụ 1: USACO Tháng 3 năm 2008 "Acquire"

Bài toán

Cho $N(N \leq 50000)$ hình chữ nhật khác nhau về hình dạng, mục tiêu của bài toán là phải lấy được tất cả hình chữ nhật. Một tập hình chữ nhật có thể thu được với chi phí bằng tích của chiều dài dài nhất và chiều rộng dài nhất. Chúng ta cần phân hoạch tập

các hình chữ nhật này một cách khôn khéo sao cho tổng chi phí có thể được tối thiểu hóa và tính chi phí này. Hình chữ nhật không thể được xoay (đổi chiều dài và chiều rộng).

Nhận xét 1: Tồn tại các hình chữ nhật không quan trọng

Giả sử tồn tại hai hình chữ nhật A và B mà cả chiều dài và chiều rộng của hình B đều bé hơn hình A thì ta có thể nói hình B là không quan trọng vì ta có thể để hình B chung với hình A từ đó chi phí của hình B không còn quan trọng. Sau khi đã loại hết tất cả hình không quan trọng đi và sắp xếp lại các hình theo chiều dài giảm dần thì chiều rộng các hình đã sắp xếp sẽ theo chiều tăng.

Nhận xét 2: Đoạn liên tiếp

Sau khi sắp xếp, ta có thể hình dung được rằng nếu chúng ta chọn hai hình chữ nhật ở vị trí i và ở vị trí j thì ta có thể chọn tất cả hình chữ nhật từ $i+1$ đến $j-1$ mà không tốn chi phí nào cả. Vậy ta có thể thấy rằng cách phân hoạch tối ưu là một cách phân dãy thành các đoạn liên tiếp và chi phí của một đoạn là bằng tích của chiều dài của hình chữ nhật đầu tiên và chiều rộng của hình chữ nhật cuối cùng.

Lời giải Quy Hoạch Động

Vậy bài toán trở về bài toán phân dãy sao cho tổng chi phí của các dãy là tối ưu. Đây là một dạng bài quy hoạch động hay gặp và chúng ta có thể dễ dàng nghĩ ra thuật toán $O(N^2)$ như mã giả phía dưới. (Giả sử các hình đã được sắp xếp và bỏ đi những hình chữ nhật không quan trọng)

```
input N
for i ∈ [1..N]
    input rect[i].h
    input rect[i].w
let cost[0] = 0
for i ∈ [1..N]
    let cost[i] = ∞
    for j ∈ [0..i-1]
```

```
cost[i] = min(cost[i], cost[j] + rect[i].h * rect[j+1].w)
print cost[N]
```

Ở trên `cost[k]` lưu lại chi phí cực tiểu để lấy được `k` hình chữ nhật đầu tiên. Hiển nhiên, `cost[0]=0`. Để tính toán được `cost[i]` với `i` khác 0, ta có tính tổng chi phí để lấy được các tập trước và cộng nó với chi phí của tập cuối cùng (có chứa `i`). Chi phí của một tập có thể dễ dàng tính bằng cách lấy tích của chiều dài hình chữ nhật đầu tiên và chiều rộng của hình chữ nhật cuối cùng. Vậy ta có `min(cost[i], cost[j]`

`+ rect[i].h * rect[j+1].w)` với `j` là hình chữ nhật đầu tiên của tập cuối cùng.

Với $N=50000$ thì thuật toán $O(N^2)$ này là quá chậm.

Nhận xét 3: Sử dụng bao lồi

Với $m_j = \text{rect}[j+1].w$, $b_j = \text{cost}[j]$, $x = \text{rect}[i].h$ với $\text{rect}[x].h$ là chiều rộng của hình chữ nhật x và $\text{rect}[x].w$ là chiều dài của hình chữ nhật x . Vậy thì bài toán trở về tìm hàm cực tiểu của $y = m_j x + b_j$ bằng cách tìm j tối ưu. Nó giống hoàn toàn bài toán chúng ta đã đề cập ở trên. Giả sử ta đã hoàn thành việc cài đặt cấu trúc đã đề cập ở trên chúng ta có thể có mã giả ở dưới đây:

```
input N
for i ∈ [1..N]
    input rect[i].h
    input rect[i].w
let E = empty lower envelope structure
let cost[0] = 0
add the line y=mx+b to E, where m=rect[1].w and b=cost[0] //b is zero
for i ∈ [1..N]
    cost[i] = E.query(rect[i].h)
    if i < N
        E.add(m=rect[i+1].w, b=cost[i])
print cost[N]
```

Rõ ràng các đường thẳng đã được sắp xếp giảm dần về độ lớn của hệ số góc do chúng ta đã sắp xếp các chiều dài giảm dần. Do mỗi truy vấn có thể thực hiện trong thời gian $O(\log N)$, ta có thể dễ dàng thấy thời gian thực hiện của cả bài toán là $O(N \log N)$. Do các truy vấn của chúng ta cũng tăng dần (do chiều rộng đã được sắp xếp tăng dần) ta có thể thay thế việc chèn nhị phân bằng một con trỏ chạy song song với việc quy

hoạch động đưa bước quy hoạch động còn $O(N)$ nhưng tổng độ phức tạp vẫn là $O(N\log N)$ do chi phí sắp xếp. Vậy là ta đã giải quyết thành công bài toán sử dụng kĩ thuật bao lồi đầu tiên của chúng ta :D.

Ví dụ 2: APIO 2010 Commando

Bài toán

Bạn được cho:

- Một dãy có N số nguyên dương ($1 \leq N \leq 10^6$)
- Một hàm số bậc 2 với hệ số nguyên dương $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$. Mục tiêu cũng của bài toán là phân dãy này ra thành các đoạn liên tiếp sao tổng các hàm f trên các dãy là lớn nhất (giá trị của hàm f lên dãy là $f(x)$ với x là tổng dãy đó) . Tương tự như bài trên công thức quy hoạch động có thể dễ thấy công thức $O(N^2)$.

Định nghĩa rằng:

- $\text{sum}(i, j) = x[i] + x[i+1] + \dots + x[j]$
- $\text{adjust}(i, j) = a \cdot \text{sum}(i, j)^2 + b \cdot \text{sum}(i, j) + c$

Ta có:

$$\text{dp}(n) = \max_{0 \leq k < n} [\text{dp}(k) + \text{adjust}(k+1, n)]$$

Mã giả:

```
dp[0] ← 0
for n ∈ [1..N]
  for k ∈ [0..n-1]
    dp[n] ← max(dp[n], dp[k] + adjust(k + 1, n))
```

Hãy thử biến đổi hàm "adjust" một tí nào. Định nghĩa $\text{sum}(1, x)$ là $\delta(x)$. Vậy với một số k bất kì ta có thể viết là:

$$dp(n) = dp(k) + a(\delta(n) - \delta(k))^2 + b(\delta(n) - \delta(k)) + c$$

$$dp(n) = dp(k) + a(\delta(n)^2 + \delta(k)^2 - 2\delta(n)\delta(k)) + b(\delta(n) - \delta(k)) + c$$

$$dp(n) = (a\delta(n)^2 + b\delta(n) + c) + dp(k) - 2a\delta(n)\delta(k) + a\delta(k)^2 - b\delta(k)$$

Nếu:

- $z = \delta(n)$
- $m = -2a\delta(k)$
- $p = dp(k) + a\delta(k)^2 - b\delta(k)$

Ta có thể thấy $mz + p$ là đại lượng mà chúng ta muốn tối ưu hóa bằng cách chọn k . $dp(n)$ sẽ bằng đại lượng đó cộng thêm với $a\delta(n) + b\delta(n) + c$ (độc lập so với k). Trong đó z cũng độc lập với k , và m và p phụ thuộc vào k .

Ngược với bài "acquire" khi chúng ta phải tối thiểu hóa hàm quy hoạch động thì bài này chúng ta phải cực đại hóa nó. Chúng ta phải xây dựng một hình bao trên với các đường thẳng tăng dần về hệ số góc. Do đề bài đã cho $a < 0$ hệ số góc của chúng ta tăng dần và luôn dương thỏa với điều kiện của cấu trúc chúng ta.

Do dễ thấy $\delta(n) > \delta(n-1)$, giống như bài "acquire" các truy vấn chúng ta cũng tăng dần theo thứ tự do vậy chúng ta có thể khơi tạo một biến chạy để chạy song song khi làm quy hoạch động (bỏ được phần chặt nhị phân).

Biến thể động (Fully Dynamic Variant)

Kỹ thuật này có thể dễ dàng được thực hiện khi các đường thẳng được thêm trước tất cả các truy vấn hay các đường thẳng được thêm vào theo thứ tự giảm dần của hệ số góc. Hoặc với cấu trúc deque chúng ta cũng có thể thêm những đường thẳng có hệ số góc lớn hơn hết các đường thẳng đã có. Nhưng có những lúc sẽ có các bài toán khi chúng ta phải giải quyết các truy vấn và thêm đường thẳng lồng vào nhau với các hệ số góc ngẫu nhiên. Chúng ta không thể sắp xếp lại trước (do bị lồng vào truy vấn) và không thể sắp xếp lại với mỗi lần thêm đường thẳng (vậy sẽ cho ta một độ phức tạp tuyến tính với mỗi truy vấn).

Có tồn tại một cách để thêm các đường thẳng ngẫu nhiên vào trong độ phức tạp log. Chúng ta lưu các đoạn thẳng trong một cấu trúc có thứ tự động như `std::set` của C++. Mỗi đường thẳng chứa hệ số góc và giao điểm y (sắp xếp theo hệ số góc trước rồi theo y) cùng với một biến `left` thêm, x nhỏ nhất sao cho đường thẳng này đạt cực tiểu trong tập các đường thẳng. Sắp đường thẳng này vào vị trí đúng của nó và những đường bị loại sẽ là các đường liên tiếp kế bên nó. Chúng ta dùng các điều kiện tương tự trên để bỏ các đường thẳng bên trái và bên phải nó. Để trả lời truy vấn, chúng ta dùng một set nữa dùng chính các biến ấy nhưng lại sắp xếp theo `left`. Vậy mỗi lần truy vấn ta có thể dễ dàng chặt nhị phân để tìm ra kết quả như đã nói ở trên.

Code

[Code C++ cho "acquire"](#)

[Code C++ cho "commando"](#)

Bài tập:

- [Bài J - ACM ICPC Vietnam Regional 2017](#)