Bài tập: Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng AB.CD ≤ AC.BD +AD.BC

Giải:

Do vai trò của A, B, C, D như nhau nên ta xét một trong bốn điểm đó, chẳng hạn điểm A.

* Nếu A trùng với một trong bốn điểm B, C, D thì bất đẳng thức phải chứng minh hiển nhiên đúng.
* Nếu A không trùng với B, C, D thì AB, AC, AD đều khác không. Khi ấy bất đẳng thứcAB.CD ≤ AC.BD +AD.BC tương đương với :

Để chứng minh bất đẳng thức (\*), ta chọn các điểm B’, C’, D’ sao cho:

Khi ấy ta có :

Thật vậy ta có :

Từ đó suy ra được:

Các đẳng thức còn lại chứng minh tương tự .

Mặt khác ta luôn có: .

Vậy bất đẳng thức (\*) được chứng minh.