Краевая задача

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \tag{1}$$

Пусть функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ определены и непрерывны на некотором отрезке $t_0 \le t \le t_1$. Будем искать решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0) - \alpha_0 x(t_0) = \alpha_1, \\ \dot{x}(t_1) - \beta_0 x(t_1) = \beta_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ - постоянные.
Условия (2) называются краевыми или граничными условиями, а сама задача (1), (2) - краевой задачей.
Условия (2) не позволяют найти одновременно значение $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ ни при $t = t_0$, ни при $t = t_1$. Поэтому краевая задача (1), (2) не сводится к задаче Коши.
Для краевой задачи (1), (2) может осуществляться любая из трех возможностей: она может иметь единственное решение, бесконечное множество решений и вообще не иметь решений.

Пример. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{3}$$

общее решение которого имеет вид

$$x = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \tag{4}$$

рассмотрим следующие три краевые задачи с граничными условиями:

$$\dot{x}(0) = 0, \qquad \dot{x}(1) = 1; \tag{5}$$

$$\dot{x}(0) = 0, \qquad \dot{x}(\pi) = 1; \tag{6}$$

$$\dot{x}(0) = 0, \qquad \dot{x}(\pi) = 0; \tag{7}$$

Краевая задача (3), (5) имеет единственное решение, так как из формулы (4), в силу условий (5), получаем

$$c_1 = -\frac{1}{\sin(t)}, \qquad c_2 = 0,$$

Краевая задача (3), (6) не имеет решений, так как из формулы (4), в силу (6), следует что

$$1 = -c_1 \sin(\pi) = 0$$

что невозможно.
Краевая задача (3), (7) имеет бесконечное множество решений:

$$x = c_1 \cos(t)$$

где c_1 - произвольная постоянная.

Метод функции Грина

Для уравнения

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \tag{8}$$

рассмотрим краевую задачу с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} &\alpha_0\dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) = 0 \quad (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0) \\ &\beta_0\dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) = 0 \quad (\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0) \end{aligned} \tag{9}$$

Замечание. Любое неоднородное граничное условие можно преобразовать к однородному. Пусть дана краевая задача с неоднородными граничными условиями

$$\begin{aligned} &\alpha_0\dot{x}(t_0) + \alpha_1 x(t_0) = \alpha_2 \quad (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0) \\ &\beta_0\dot{x}(t_1) + \beta_1 x(t_1) = \beta_2 \quad (\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0) \end{aligned}$$

Пусть $\omega(t)$ произвольная непрерывная функция удовлетворяющая неоднородным граничным условиям. Сделаем замену $x(t) = y(t) + \omega(t)$. Получим

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = f(t) - \ddot{\omega}(t) - a(t)\dot{\omega}(t) - b(t)\omega(t) = f_1(t)$$

$$\begin{matrix} \alpha_0\dot{y}(t_0) + \alpha_1 y(t_0) + \alpha_0\dot{\omega}(t_0) + \alpha_1\omega(t_0) = \alpha_2 \\ \beta_0\dot{y}(t_1) + \beta_1 y(t_1) + \beta_0\dot{\omega}(t_1) + \beta_1\omega(t_1) = \beta_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} \alpha_0\dot{y}(t_0) + \alpha_1 y(t_0) = 0 \\ \beta_0\dot{y}(t_1) + \beta_1 y(t_1) = 0 \end{matrix}$$

Поэтому далее будем предпологать что замена сделана.

Будем предпологать, что рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение.
Пусть $x = x_1(t)$ - какое-либо нетривиальное решение однородного уравнения

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \tag{10}$$

удовлетворяющее первому из граничных условий (9),

$$\alpha_0\dot{x_1}(t_0)+\alpha_1 x_1(t_0)=0$$

а $x=x_2(t)$ - нетривиальное решение уравнения (10), удовлетворяющее второму граничному условию

$$\beta_0\dot{x_2}(t_1)+\beta_1 x_2(t_1)=0$$

Тогда $x_1(t)$ не удовлетворяет второму граничному условию, так как в противном случае при любой постоянной c функции $x=cx_1(t)$ были бы решениями краевой задачи (10), (9), и наша исходная краевая задача (8), (9) имела бы бесконечное множетво решений. Точно так же доказывается, что $x_2(t)$ не удовлетворяет первому граничному условию. Итак,

$$\begin{aligned}\beta_0\dot{x_1}(t_1)+\beta_1 x_1(t_1)\neq 0\\ \alpha_0\dot{x_2}(t_0)+\alpha_1 x_2(t_0)\neq 0\end{aligned}\tag{11}$$

Постороенные решения $x=x_1(t)$, $x=x_2(t)$ линейно независимы, так как в противном случае они были бы пропорциональны и потому удовлетворяли бы одним и тем же граничным условиям, что невозможно.
Решение неоднородного уравнения (8) будем искать методом вариации постоянных. Записывая решение $x(t)$ в виде

$$x(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)\tag{12}$$

для определения функций $\dot{c}_1(t)$ и $\dot{c}_2(t)$ получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{c}_1(t)x_1(t)+\dot{c}_2(t)x_2(t)=0\\ \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t)+\dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t)=f(t)\end{aligned}$$

Решение этой систмы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{c}_1(t)=-\frac{x_2(t)f(t)}{w(t)},\\ \dot{c}_2(t)=\frac{x_1(t)f(t)}{w(t)},\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$w(t)=\begin{vmatrix}x_1(t) & x_2(t)\\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t)\end{vmatrix}\neq 0$$

- определитель Вронского, составленный для линейно независиых решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Интегрируя соотношения (13), получим

$$
c_1(t) = -\int_{t_1}^{t} \frac{x_2(s)f(s)}{w(s)}ds + \gamma_1 = \int_{t}^{t_1} \frac{x_2(s)f(s)}{w(s)}ds + \gamma_1,
$$
$$
c_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)f(s)}{w(s)}ds + \gamma_2
$$

где γ_1 и γ_2 - постоянные. Подставляя найденные выражения для $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в (12), получим общее решение уравнения (8)

$$
x(t) = x_1(t)\int_{t}^{t_1} \frac{x_2(s)f(s)}{w(s)}ds + x_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)f(s)}{w(s)}ds + \gamma_1 x_1(t) + \gamma_2 x_2(t) \quad (14)
$$

Дифференцируя (14) по t, имеем

$$
\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t)\int_{t}^{t_1} \frac{x_2(s)f(s)}{w(s)}ds + \dot{x}_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)f(s)}{w(s)}ds + \gamma_1 \dot{x}_1(t) + \gamma_2 \dot{x}_2(t) \quad (15)
$$

Потребуем теперь, чтобы решение (14) удовлетворяло граничным условиям (9). Подставляя выражения (14), (15) в первое из граничных условий (9) получим (так как $\alpha_0\dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0) = 0$)

$$
0 = (\alpha_0\dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0))\int_{t}^{t_1} \frac{x_2(s)f(s)}{w(s)}ds + \gamma_1(\alpha_0\dot{x}_1(t_0) + \alpha_1 x_1(t_0)) +
$$
$$
+ \gamma_2(\alpha_0\dot{x}_2(t_0) + \alpha_1 x_2(t_0)) = \gamma_2(\alpha_0\dot{x}_2(t_0) + \alpha_1 x_2(t_0))
$$

В силу неравенств (11) это возможно только при $\gamma_2 = 0$. Подобным же образом доказывается, что $\gamma_1 = 0$. Итак, решение краевой задачи (8), (9) можно представить в виде

$$
x(t) = x_1(t)\int_{t}^{t_1} \frac{x_2(s)f(s)}{w(s)}ds + x_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)f(s)}{w(s)}ds
$$

или

$$
x(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t,s)f(s)ds \quad (16)
$$

где

$$
G(t,s) = \begin{cases} \frac{x_1(s)x_2(t)}{w(s)}, & t_0 \le s \le t, \\ \frac{x_1(t)x_2(s)}{w(s)}, & t \le s \le t_1, \\ \frac{x_1(s)x_2(t)}{w(s)}, & t_0 \le t \le s, \\ \frac{x_1(t)x_2(s)}{w(s)}, & s \le t \le t_1, \end{cases} \quad (17)
$$

Построенная функция $G(t,s)$ называется функцией Грина краевой задачи (8), (9). Таким образом, если функция Грина найдена, то решение краевой задачи (8), (9) задается формулой (16). Сама функция Грина от $f(t)$ не зависит (она определяется решениями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ однородного уравнения (10)). Легко проверить, что функция Грина $G(t, s)$ при любом фиксированном s обладает следующими свойствами:

1. при $t \neq s$ $G(t, s)$ удовлетворяет однородному уравнению (10);
2. при $t = t_0$ и $t = t_1$ $G(t, s)$ удовлетворяет соответственно первому и второму граничным условиям (9);
3. при $t = s$ $G(t, s)$ непрерывна;
4. $t = s$ производная $G'_t(t, s)$ имеет скачок, равный 1:
$$G'_t|_{t=s+0} - G'_t|_{t=s-0} = 1$$

Свойства 1. - 3. проверяются совсем просто. Докажем свойство 4. В силу (17)

$$G'_t = \begin{cases} \frac{\dot{x}_1(t)x_2(s)}{w(s)}, & t_0 \le t \le s, \\ \frac{x_1(s)\dot{x}_2(t)}{w(s)}, & s \le t \le t_1, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$G'_t|_{t=s+0} - G'_t|_{t=s-0} = \frac{x_1(s)\dot{x}_2(s) - \dot{x}_1(s)x_2(s)}{w(s)} = 1.$$

Пример. Построим функцию Грина для краевой задачи

$$\ddot{x} - \dot{x} = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 0,$$

Общее решение однородного уравнения $\ddot{x} - \dot{x} = 0$ имеет вид $x = c_1 + c_2 e^t$, откуда находим $x_1(t) = 1 - e^t$ (нетривиальное решение, удовлетворяющее первому граничному условию), $x_2(t) = 1$, (нетривиальное решение, удовлетворяющее второму граничному условию),

$$w(t) = \begin{vmatrix} 1 - e^t & 1 \\ -e^t & 0 \end{vmatrix} = e^t$$

В силу формулы (17)

$$G(t, s) = \begin{cases} (1 - e^t)e^{-s}, & 0 \le t \le s, \\ e^{-s} - 1, & s \le t \le 1, \end{cases}$$