Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente

Proiect realizat de:Badia Lidia

Chișinău 2018

Subiecte abordate:

- Metoda bisecției
- Metoda coardelor
- Metoda Newton
- Definiții,descrieri,analize și exemple

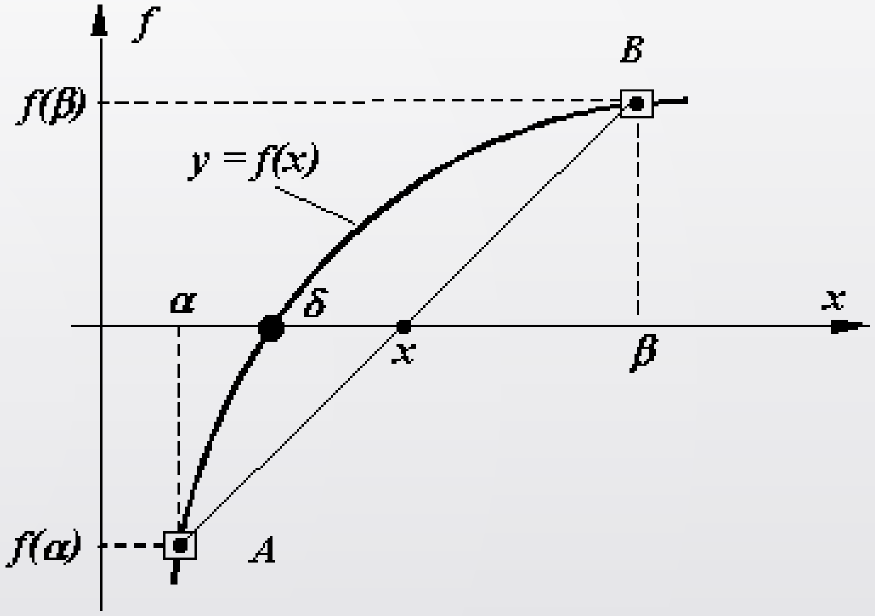
- Metoda Bisecției

Definiție:

- În analiză numerică,**metoda înjumătățirii intervalului** este un algoritm de determinare a rădăcinilor, care pornește de la un interval inițial de determinare a rădăcinii unei funcții și apoi selectează un subinterval în care se află rădăcina. Metoda se mai numește și **metoda căutării binare** sau **metoda dihotomiei**.

Utilizare:

- Metoda bisectiei se folosește la rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice si transcendente, în cazul când nu putem obține soluțiile ecuației f(x)=0 în forma analitică.



Algoritm

- Considerăm că $f(a)<0$, $f(b)>0$.
- **Pasul 1.** Verificăm dacă la capetele intervalului funcția ia valori de semn opus.
- **Pasul 2.** Împărțim [a, b] în 2 parți egale prin punctul $x_0=(a+b)/2$
- **Pasul 3.** Dacă $f(x_0)=0$, atunci x_0 este radăcina căutată, altfel alegem $[a_1, b_1]$ la capetele căruia funcția are semne opuse.
- $a_1=a_0$, $b_1=x_{0,}$ dacă $f(a)*f(x_0)<0$
- $a_1=x_0$, $b_1=b_{0,}$ dacă $f(a)*f(x_0)>0$.
- Acest interval îl notăm din nou cu [a, b].
- **Pasul 4.** Dacă lungimea intervalului a devenit mai mică ca **e,** atunci oprim execuția algoritmului, iar în calitate de soluție se va lua orice valoare din intervalul [a, b]. În caz contrar revenim la pasul 2.
- Numărul maximal de diviziuni a intervalului [a,b] poate fi obținut apriori din relația $e>(b-a)/2^n$, adică $n=[\ln((b-a)/ e)/\ln 2]+1$.

Exemplu de program

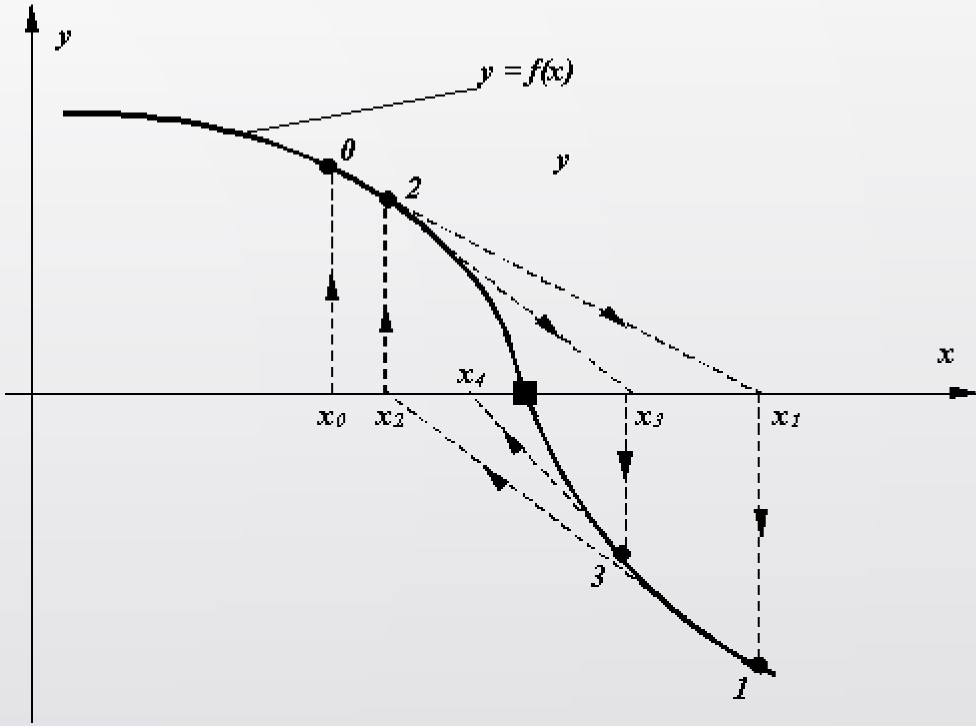
```
program cn003;
var a,b,c: real; i,n:integer;
function f(x:real):real;
 begin
f:=sqr(sqr(x))+2*x*sqr(x)-x-1;
end;
 begin
a:=0; b:=1; n:=16;
 for i:=1 to n do
 begin c:=(b+a)/2;
 writeln('i=',i:3,' x=',c:10:8,' f(x)=',f(c):12:8);
if f(c)=0 then break else
if f(c)*f(a)>0 then a:=c else b:=c;
end;
 end
```

- Metoda Newton

Definiție:

- Una dintre cele mai cunoscute și mai folosite tehnici de rezolvare a ecuațiilor neliniare este ***metoda Newton***, denumită uneori și ***metoda Newton-Raphson*** sau **metoda tangentelor**. Ea se deosebește de alte metode de aproximații succesive prin faptul că pentru fiecare punct din șirul aproximațiilor este necesară atât evaluarea funcției *f(x)* ce definește ecuația, cât și a derivatei acesteia *f '(x)*.
-

- Valoarea aproximativă a rădăcinii exacte se calculează folosind un șir de aproximații succesive $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ construit după următorul model. Pornind de la aproximația x_0, curba $y=f(x)$ este aproximată în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$ prin tangentă la ea. Noua aproximatie x_1 se obține la intersecția acestei tangente cu axa absciselor. Folosind pe x_1 ca aproximație inițială, se reia procedeul, determinându-se o noua aproximație x_2 s.a.m.d. până când abaterea între două iterații succesive scade sub o valoare prag impusă: $|x_{(n+1)} - x_n| < e$.



Algoritm:

- Definirea funcției *f(x)*, a derivatei *f '(x)*, a aproximației inițiale x, a preciziei *Eps* si a numărului maxim de iterații *Nmax*.
- Inițializarea procesului iterativ: *It <-- 0;*
- Procesul iterativ:
  - Se trece la o nouă iterație: *It <-- It+1;*
  - Calculul corecției: *dx <-- - f(x) / f '(x)*
  - Calculul noii aproximații: *x <-- x + dx*
  - Dacă s-a atins precizia dorită (|*dx*| <= *Eps*) sau numărul maxim de iterații (*It=Nmax*) se întrerupe bucla iterativă și se trece la pasul următor.
- Stabilirea condițiilor de ieșire din bucla iterativă:
  - Dacă |*dx*|<*Eps* - proces convergent – soluția aproximativă este x.
  - Dacă |*dx*|>=*Eps* si *It=Nmax*, se afișează mesajul "Depașire număr maxim iteratii".

Din punct de vedere formal, metoda Newton folosește formula de recurență (iterare):

$$x_{n+1} = x_n + h_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

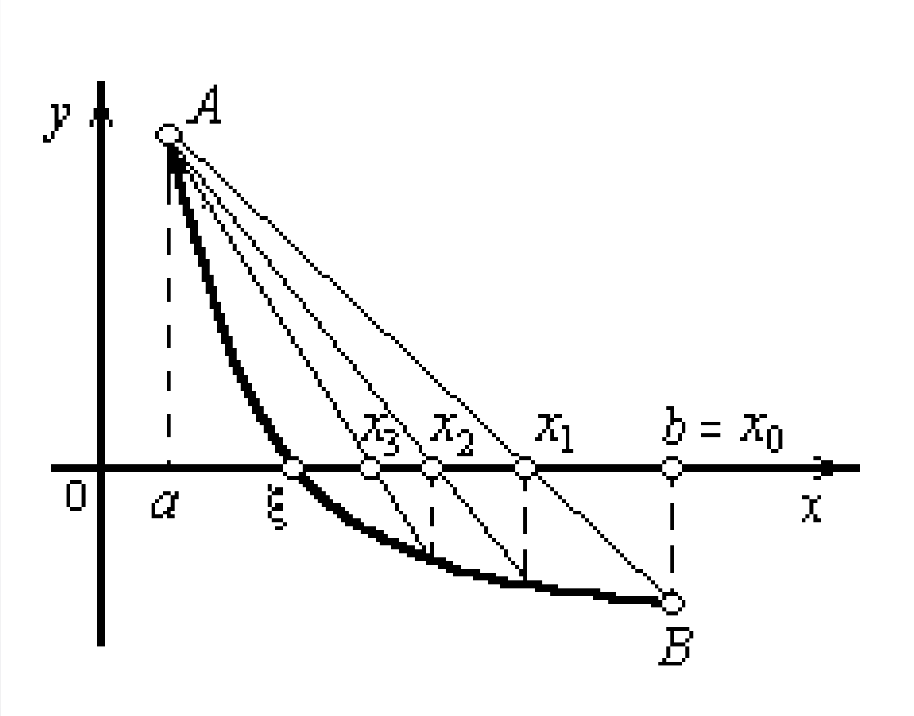
- Metoda coardelor

Definiție:

- În analiză numerică, **metoda coardei** (sau **metoda falsei poziții**, **metoda falsi**) este o metodă de determinare a rădăcinii unei funcții pe un interval.
-

Utilizare:

- Metoda coardelor este utilizată pentru găsirea rădăcinii aproximative E,a ecuației f(x)=0 izolate într-un interval [a,b] în cazul în care f(a)*f(b)<0 cu aproximarea E prestabilită.



Algoritm

1. Determinăm extreminarea fixă e și aproximarea x0

C:=a-(f(a)/f(b)-f(a))*(b-a).Dacă f(c)*f(a)<0 atunci e:=a,x0>=b, astfel e:=b ,x0:=a, i:=0

2.Calculăm x(i+1) conform formulei x(i+1)=x(i)-(f(x(i))/(f(e)-f(x)))*(e-x(i))

3.Daca i+1=n atunci soluția calculată x:=x(i).Sfirsit.

In caz contrat i:=i+1 si se revine la pasul 2.

Bibliografie:

- http://www.math.md/stireal/informatica/candidat/calcul_numeric_3.pdf
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Metoda_%C3%AEnjum%C4%83t%C4%83%C8%9Birii_intervalului
- http://www.creeaza.com/referate/matematica/Metoda-bisectiei-injumatatirii172.php
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Metoda_coardei
- http://iota.ee.tuiasi.ro/~mgavril/Metode/Luc8/MetLuc8.html