Kvantitatív módszerek a közgazdaságtanban

Badics Judit, Badics Tamás

September 8, 2009

Tartalom

1 ELŐSZÓ **3**

2 ALAPFOGALMAK **5**

3 A PARCIÁLIS DERIVÁLT **14**

4 TOPOLÓGIAI ALAPFOGALMAK **18**
4.1 NYÍLT ÉS ZÁRT HALMAZ FOGALMA 18
4.2 TOVÁBBI ÁLLÍTÁSOK* 21
4.3 ALKALMAZÁSOK 23

5 LÁNCSZABÁLY **27**
5.1 A LÁNCSZABÁLY EGYSZERŰ ESETE 27
5.2 ÁLTALÁNOSABB LÁNCSZABÁLYOK 29

6 KOMPARATÍV STATIKA I. **30**
6.1 IMPLICIT MÓDON MEGADOTT FÜGGVÉNYEK A MIKROÖKONÓMIÁBAN . . 31
6.2 IMPLICIT MÓDON MEGADOTT EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA 33
6.3 IMPLICIT MÓDON MEGADOTT KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI 34

7 VEKTORÉRTÉKŰ FÜGGVÉNYEK **36**
7.1 A LÁNCSZABÁLY ÁLTALÁNOS ESETE 36
7.2 KOMPARATÍV STATIKA II.* 39
7.2.1 Komparatív statika alaptétele* 39
7.2.2 Implicit függvény módszer* 41
7.2.3 Differenciálok módszere* 42

8 TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKEI **45**
8.1 ALAPFOGALMAK 46
8.2 FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKHELYE AZ ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY BELSŐ PONTJÁBAN 49
8.2.1 I. Szükséges feltételek 49
8.2.2 II. Elégséges feltételek 51

8.3 KONVEXITÁS ÉS SZÉLSŐÉRTÉK 55

9 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁS I. 58
9.1 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁS – A KORLÁTOZÓ FELTÉTEL EGYENLET 58
9.2 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS – A KORLÁTOZÓ FELTÉTEL EGYENLETRENDSZER 64

10 KOMPARATÍV STATIKA III. 66
10.1 BURKOLÓ-TÉTEL, AVAGY A SZÉLSŐÉRTÉK PARAMÉTERTŐL VALÓ FÜGGÉSE 66
10.1.1 A paraméteres feltétel nélküli szélsőérték-számítási feladat 67
10.1.2 A paraméteres feltételes szélsőérték-számítási feladat 69

10.2 A SZÉLSŐÉRTÉKHELY PARAMÉTERTŐL VALÓ FÜGGÉSE* 70

11 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS II. 72
11.1 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS – A KORLÁTOZÓ FELTÉTEL EGYENLŐTLENSÉG RENDSZER 72
11.1.1 Egyváltozós, egyenlőtlenséggel korlátozott szélsőérték-számítási feladat 72
11.1.2 Profitmaximalizálás 77
11.1.3 Többváltozós, egyenlőtlenség-rendszerrel korlátozott szélsőérték-számítási feladat 78

12 KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSOK 86
12.1 PREFERENCIÁK REPREZENTÁLHATÓSÁGA 86
12.2 A KERESLET TÖRVÉNYÉNEK SLUTSKY-FELBONTÁSTÓL FÜGGETLEN BIZONYÍTÁSA* 87
12.3 HOSSZÚ TÁVÚ ÉS RÖVID TÁVÚ KÖLTSÉGGÖRBÉK 88

13 BIBLIOGRÁFIAI ÚTMUTATÓ 88

1:

"If there is a God, he's a great mathematician."

Paul Dirac

1 ELŐSZÓ

A kvantitatív módszerek a közgazdaságtanban című tárgy célja az Alkalmazott közgazdaságtan alapszak közgazdaságtani tárgyainak módszertani megalapozása. Ezen tárgyak közül a legfontosabb a Mikroökonómia I. és II. című kötelező tantárgy, valamint a Mikroökonómia III., az Információ Közgazdaságtana és a Matematikai Közgazdaságtan választható tantárgyak. Hangsúlyozzuk, hogy a tananyag nem tartalmazza mindazokat az analízisbeli eszközöket, melyeket a fenti tárgyak igényelnének. Nem csupán fontos témaköröket kellett mellőznünk, de az itt tárgyalt módszereknek még különféle variánsaival és általánosításaival is fognak találkozni tanulmányaik során, melyekről a jegyzet végén felsorolt kézikönyvekben, vagy a haladó közgazdaságtan tankönyvek matematikai függelékében tájékozódhat az olvasó. A jegyzet szerzőinek be kell érniük annyival, hogy a kézhez kapott tananyag elsajátításával az olvasó biztos matematikai alapokat szerezhet a haladó közgazdaságtan könyvek és matematikai függelékeik tanulmányozásához. Későbbi közgazdasági tanulmányaink során látni fogjuk, hogy a többváltozós analízis számos állítása – az egyváltozós esettel ellentétben – meglehetősen bonyolult, szemléletesen nehezen átlátható, nehezen megjegyezhető. Bár a többváltozós analízisben a szemléletünkre és az intuíciónkra már kevésbé hagyatkozhatunk, van rá mód, hogy "fogást találjunk" a nehezen átlátható összefüggéseken. Látni fogjuk ugyanis, hogy a lineáris algebrában tanult mátrix és vektor jelölésrendszert és műveleti szabályokat felhasználva a többváltozós analízis számos összefüggése formailag az egyváltozós analízis megfelelő összefüggéséhez hasonló alakra hozható. Ne idegenkedjünk tehát a lineáris algebrai apparátus használatától, mert pontosan ez az eszköz teszi könnyen megjegyezhetővé, formailag egyszerűvé, és ezáltal "barátságossá" a többváltozós analízist.

Témáját tekintve, jelen jegyzet célkitűzése, hogy az elsőéves közgazdász hallgatók számára betekintést nyújtson a többváltozós valós analízis – elméleti közgazdaságtanban nélkülözhetetlen – eszköztárába, és rövid bevezetőül szolgáljon az ún. nemlineáris optimalizálásba, továbbá mindezek alkalmazásaként fokozatosan megismertesse a hallgatót a közgazdaságtan egy fontos elemzési eszközének, a komparatív statikának a matematikai alapjaival.

Elsőéves analízis tanulmányaik során a hallgatók megtanulták meghatározni az egyváltozós függvények szélsőértékeit. A kurzus során egyrészt olyan módszereket szeretnénk bemutatni, amelyek segítségével már többváltozós függvények szélsőértékeit is megkereshetjük, másrészt vizsgálni fogjuk a paraméteres szélsőértékfeladatok szélsőértékének, és a szélsőértékhelyének paramétertől való függését. Ez utóbbi vizsgálatok – mely vizsgálatokat a közgazdaságtanban komparatív statikának szoktak nevezni – lehetővé teszik számunkra annak kiszámítását, hogy egy modell paramétereinek, vagy exogén változóinak egységnyi megváltozásával, közelítőleg menyivel változnak az endogén változók egyensúlyi értékei. A szélsőértékszámítás általános módszereivel kapcsolatban látni fogjuk, hogy nem elégedhetünk meg az egyváltozós analízis tételeinek egyszerű általánosításával. A problémát a következőképpen érzékeltethetjük. Az egyváltozós analízisből tudjuk, hogy egy zárt intervallumon értelmezett differenciálható függvény szélsőértékhelye vagy az értelmezési tartomány belső pontja, és akkor ott a függvény deriváltja zérus, vagy az intervallum valamelyik végpontja, és ekkor a szélsőértékhelyen a függvény deriváltja nem feltétlenül zérus. A szélsőértékhely tehát a legtöbb ilyen típusú alkalmazásban egyszerűen meghatározható egyes függvényértékek összehasonlításával. Többváltozós függvény esetén ez az út nem járható, hiszen pl. egy zárt háromszöglap határa – ellentétben az egydimenziós szakasz határával – már végtelen sok pontból áll. Az ilyen típusú problémák numerikus megoldásával az ún. nemlineáris programozás foglalkozik. Mi természetesen e tudományterületnek csak az elméleti alapjait érintjük, és a numerikus módszerek helyett csak analitikus eszközöket használunk. Tárgyalásunk során mindvégig fontosnak tartjuk a megismert matematikai fogalmak közgazdasági illusztrálását, és a tételek közgazdasági alkalmazásait.

A megtanulandó tananyag nagy része a "definíció", "tétel", "bizonyítás", és "példa", címszavak valamelyikébe sorolható. A "példák" egy részére csak utalás szerepel a jegyzetben, ezek Sydsaeter-Hammond: "Matematika közgazdászoknak" című könyvben találhatók meg. A "feladatok" címszó alatt olyan feladatok találhatók, amelyekhez hasonlóak a dolgozatokban szerepelni fognak. Az m-indexű megjegyzések általában magyarázatokat, gyakori félreértésekre vonatkozó figyelmeztetéseket stb. tartalmaznak, esetleg bizonyos fogalmak közötti összefüggésekre hívják fel a figyelmet, ami nagyban elősegítheti az adott fogalmak megértését. A k-indexű megjegyzések olyan ismereteket tartalmaznak, melyeket didaktikai okokból nem próbáltunk meg a definíció-tétel-bizonyítás keretei közé beerőszakolni, ezek a magyarázatok stb. mellett kiegészítő ismereteket, állításokat, vagy új fogalmakat tartalmaznak. A csillaggal jelölt megjegyzések, tételek és anyagrészek nem tartoznak a kurzus számonkért tananyagához, de fontosak lehetnek későbbi, haladó szintű tanulmányaik során.

2 ALAPFOGALMAK

"In mathematics you don't understand things.
You just get used to them."
(A matematikában nem megértjük a dolgokat, csak megszokjuk őket.)
John von Neumann

Definíció Ha A állítás ekvivalens B-vel (jelölés: $A \Longleftrightarrow B$), akkor azt mondjuk, hogy az A állításnak B szükséges és elégséges feltétele. Ha A-ból következik B (jelölés: $A \Longrightarrow B$), azt mondjuk, hogy A-nak szükséges feltétele B, vagy hogy B-nek elégséges feltétele A.

Példa (1) Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor az $x = y$ állításnak szükséges feltétele az $x^2 = y^2$ állítás, de az $x = y$ állításnak nem elégséges feltétele az $x^2 = y^2$ állítás. Továbbá az $x^2 = y^2$ állításnak elégséges feltétele az $x = y$ állítás.

(2) Ha $x, y \geq 0$, akkor az $x = y$ állításnak szükséges és elégséges feltétele az $x^2 = y^2$ állítás.

Feladat 1. Egy szám 6-tal való oszthatóságának szükséges feltétele-e a 3-mal való oszthatóság?
2. És vajon elégséges-e?
3. Egy szám 2-vel való oszthatóságának szükséges vagy elégséges feltétele a 4-gyel való oszthatóság?

Egyenlet vagy azonosság? Tanulmányaink során gyakran találkozunk egyenletekkel. Az egyenletek ismeretlenei helyébe konkrét értékeket helyettesítve olyan állításokat kapunk, melyek vagy igazak, vagy hamisak. Az egyenletek megoldása lényegében olyan értékek megkereséséből áll, melyeket behelyettesítve az egyenletbe igaz állításhoz jutunk. Közgazdaságtani modellek felírásakor gyakran fogunk találkozni azonosságokkal, melyek formailag gyakran ugyanúgy néznek ki, mint az egyenletek. Lássunk egy példát. Az $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ egy azonosság, mert az x változó helyébe bármilyen értéket helyettesítünk be, egy igaz állításhoz jutunk. Amikor hangsúlyozni kívánjuk, hogy azonosságról, és nem egyenletről van szó, akkor a $\equiv$ -jelet használjuk. Vagyis a fenti azonosságot így írhatjuk: $(x+2)^2 \equiv x^2 + 4x + 4$. Ugyanakkor természetesen $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ jelölhet egyenletet is. Ekkor ennek megoldása minden $x \in \mathbb{R}$ szám. Sokak számára a fenti magyarázkodás talán triviális, de bármily meglepő, a jelölés nem egyértelmű volta gyakran vezet félreértésekre. Egy közgazdasági modell megadása ugyanis nem csak egyenleteket, de azonosságokat is tartalmazhat, melyeket a modell vizsgálata során az egyenletektől eltérő módon kell kezelnünk. Fontos különbség, hogy egy azonosság mindkét oldalának deriválásával még mindig érvényes azonossághoz jutunk, míg egy egyenlet esetén ugyanennek általában nincs értelme.

Definíció Az A és B halmazok Descartes szorzatának nevezzük és $A \times B$-vel jelöljük, az (a, b) rendezett párok halmazát, ahol $a \in A$ és $b \in B$. Vagyis ugyanez formálisan:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}$$

Jelölés $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-tényezős Descartes-szorzat}}$$

Definíció Az f függvény kétváltozós, valós értékű, ha $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ és $R_f \subseteq \mathbb{R}$.

Definíció Az f függvény n-változós, valós értékű, ha $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ és $R_f \subseteq \mathbb{R}$.

Definíció Az f függvény n-változós, vektor értékű, ha $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ és $R_f \subseteq \mathbb{R}^k$.

Megállapodás Mivel többnyire valós értékű függvényekkel fogunk foglalkozni, ha egy függvényről csak annyit közlünk hogy n-változós, akkor n-változós, valós értékű függvényre gondolunk.

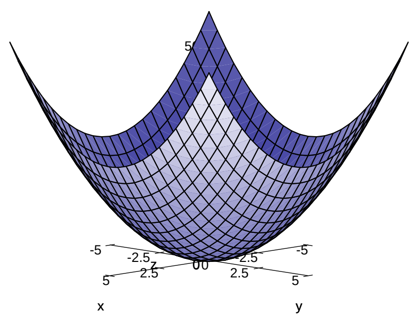
Megjegyzés[m] Egy n-változós függvény értelmezési tartományának elemei n-dimenziós vektorok, értékkészletének elemei valós számok.

Példa n-változós függvényre hasznossági függvény, termelési függvény, ld: S-H:15.3. példa és 15.8. példa.

Definíció Az f kétváltozós függvény gráfja, vagy grafikonja a 3-dimenziós tér alábbi részhalmaza:

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in D_f \text{ és } x_3 = f(x_1, x_2)\right\}$$

Példa Az $f(x_1, x_2) = x^2 + y^2$ függvény gráfja.



1.1. ábra

Definíció Az f n-változós függvény gráfja, vagy grafikonja az $(n+1)$-dimenziós tér alábbi részhalmaza:

$$\left\{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f \text{ és } x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\right\}$$

Definíció Az f kétváltozós függvénynek a $k \in R_f$ függvényértékhez tartozó szinthalmaza a 2-dimenziós sík alábbi részhalmaza:

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) \in D_f \text{ és } f(x_1, x_2) = k\right\}$$

Megjegyzés[k] A kétváltozós függvénynek a k függvényértékhez tartozó szinthalmaza az értelmezési tartomány azon elemeinek halmaza, melyekhez az f függvény a k értéket rendeli. A kétváltozós függvények szinthalmaza gyakran (de nem mindig) görbe, ilyenkor szokás a szinthalmazt *szintvonalnak* is nevezni.

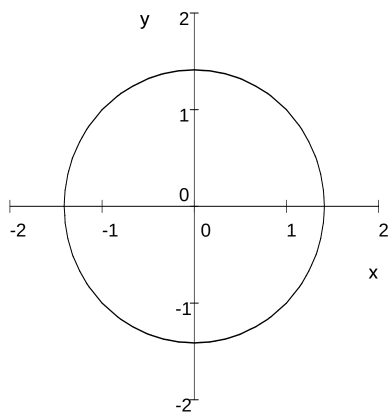
Példa ld: S-H:15.9. példa.

Definíció Az f kétváltozós függvénynek az $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \in D_f$ ponton áthaladó szinthalmaza az f-nek az $f(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ függvényértékhez tartozó szinthalmaza.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Tehát az f kétváltozós függvénynek az $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \in D_f$ ponton áthaladó szinthalmaza a kétdimenziós sík alábbi részhalmaza:

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) \in D_f \text{ és } f(x_1, x_2) = f(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)\right\}$$

Példa Az $f(x_1, x_2) = x^2 + y^2$ függvény $(1, 1)$ ponton átmenő szinthalmaza tehát a sík azon pontjainak halmaza, amelyek x és y koordinátái kielégítik a $2 = x^2 + y^2$ egyenletet. Ld. alábbi ábra.



1.2. ábra

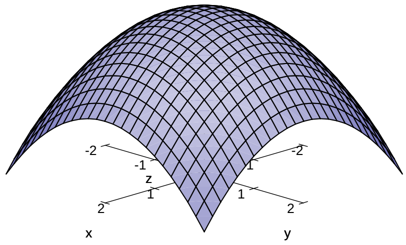
Definíció Az f n-változós függvénynek a $k \in R_f$ függvényértékhez tartozó szinthalmaza az n-dimenziós tér alábbi részhalmaza:

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f \text{ és } f(x_1, x_2, ..., x_n) = k\}$$

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Az f n-változós függvénynek a k függvényértékhez tartozó szinthalmaza az értelmezési tartomány azon elemeinek halmaza, melyekhez az f függvény a k értéket rendeli. Pl. $n = 1$ esetén az $f(x) = x^2$ függvény $k = 4$ értékhez tartozó szinthalmaza az $x^2 = 4$ egyenlet megoldáshalmaza, vagyis a $\{-2, 2\}$ kételemű halmaz.

Megjegyzés$^{\mathrm{k}}$ A háromváltozós függvények szinthalmaza gyakran egy felület a háromdimenziós térben, ilyenkor a szinthalmazt szokás *szintfelületnek* is nevezni.

Példa Az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ függvény $k = 8$ értékhez tartozó szinthalmaza:



1.3. ábra

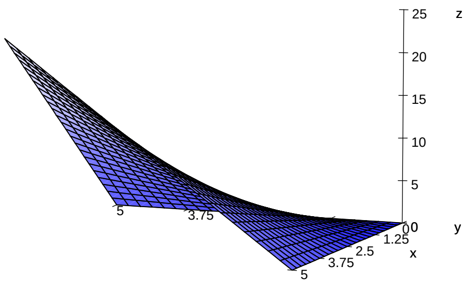
Definíció Az f n-változós függvénynek az $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n) \in D_f$ ponton áthaladó szinthalmaza az f-nek az $f(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n)$ függvényértékhez tartozó szinthalmaza.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Tehát az f n-változós függvénynek az $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n) \in D_f$ ponton áthaladó szinthalmaza az n-dimenziós tér alábbi részhalmaza:

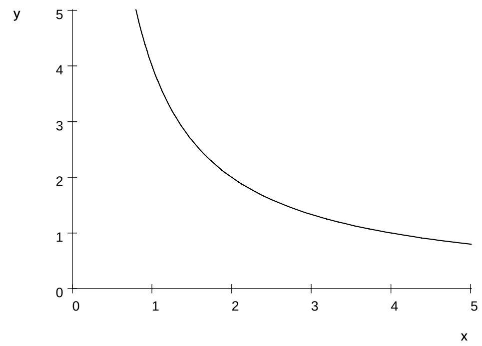
$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f \text{ és } f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n)\}$$

Példa szinthalmazra A közömbösségi görbe a hasznossági-függvény szitvonala (ld Varian: Mikroökonómia középfokon), egyenlőtermék görbe (izokvant): ld: S-H: 15.9. példa, 15.10. példa és 15.11. példa.

Példa A pozitív síknegyeden értelmezett $U(x, y) = xy$, alakú hasznossági függvény $U = 4$ hasznosági szinthez tartozó közömbösségi görbéje, a mi terminológiánk szerint az $U(x, y) = xy$ függvény $k = 4$ függvényértékhez tartozó szinthalmaza. Az U függvény gráfját és az említett szinthalmazt ld. az alábbi ábrákon.



1.4. ábra



1.5. ábra

Definíció Az f kétváltozós függvénynek az $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \in D_f$ ponthoz tartozó parciális függvényei az $f(x_1, \widehat{x}_2)$ és $f(\widehat{x}_1, x_2)$ egyváltozós függvények.

Definíció Az f n-változós függvénynek az $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n) \in D_f$ ponthoz tartozó parciális függvényei az $f(x_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3, ..., \widehat{x}_n)$, $f(\widehat{x}_1, x_2, \widehat{x}_3, ..., \widehat{x}_n)$,..., $f(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_{i-1}, x_i, \widehat{x}_{i+1}, ..., \widehat{x}_n)$,..., $f(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_{n-1}, x_n)$ egyváltozós függvények.

Feladat Határozzuk meg, és ábrázoljuk az $F(x, y) = \sqrt{xy}$ függvénynek a $(3, 4)$ ponthoz tartozó parciális függvényeit!

Megoldás $F(3, y) = \sqrt{3y}$ és $F(x, 4) = \sqrt{x \cdot 4} = 2\sqrt{x}$. A függvény ábrázolásánál ügyeljünk arra, hogy ha pl. F értelmezési tartományának elemeit z-vel jelöljük akkor a $z = F(3, y) = \sqrt{3y}$ parciális függvényt az (y, z) térben ábrázoljuk.

Példa parciális függvényre a keresleti függvény parciális függvényeinek gráfjai: Engel-görbe, keresleti görbe; a parciális termelési függvény a termelési függvény egy parciális függvénye.

Jelölés

$$\min\{a, b\} = \begin{cases} a, \text{ ha } a \leq b \\ b, \text{ ha } b \leq a \end{cases}$$

$$\min\{a, b, c\} = \begin{cases} a, \text{ ha } a \leq b \text{ és } a \leq c \\ b, \text{ ha } b \leq a \text{ és } b \leq c \\ c, \text{ ha } c \leq a \text{ és } c \leq b \end{cases}$$

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geq b \\ b, \text{ ha } b \geq a \end{cases}$$

$$\max\{a, b, c\} = \begin{cases} a, \text{ ha } a \geq b \text{ és } a \geq c \\ b, \text{ ha } b \geq a \text{ és } b \geq c \\ c, \text{ ha } c \geq a \text{ és } c \geq b \end{cases}$$

Feladat Írjuk fel és ábrázoljuk a következő függvénynek a $(2,3)$ ponton áthaladó szintvonalának egyenletét és a $(2,3)$ ponthoz tartozó parciális függvényeit!

$$f(x,y) = \min\{2x + y, 2y + 3\}$$

Megoldás Az f függvény értéke $(2,3)$-ban: $f(2,3) = \min\{2 \cdot 2 + 3, 2 \cdot 3 + 3\} = \min\{7,9\} = 7$. Az f függvénynek a $(2,3)$ ponton áthaladó szintvonalának egyenlete:

$$f(2,3) = f(x,y)$$

$$7 = \min\{2x + y, 2y + 3\}$$

Az ábrázoláshoz az egyenletet más alakban célszerű felírni:

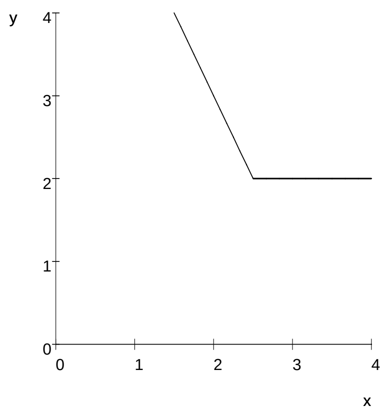
$$7 = \begin{cases} 2x + y, \text{ ha } 2x + y \leq 2y + 3 \\ 2y + 3, \text{ ha } 2y + 3 \leq 2x + y \end{cases}$$

$$7 = \begin{cases} 2x + y, \text{ ha } 2x - 3 \leq y \\ 2y + 3, \text{ ha } 2x - 3 \geq y \end{cases}$$

Először ábrázoljuk az eseteket elválasztó

$$2x - 3 = y$$

egyenletű görbét! (Ebben a példában ez egy egyenes.) Ez a görbe a síkot két tartományra osztja, melyek egyikében $2x - 3 \leq y$ teljesül, a másik tartományban $2x - 3 \geq y$. Határozzuk meg, hogy az egyes tartományokban melyik egyenlőtlenség teljesül! (A $2x - 3 = y$ egyenes feletti pontokban $2x - 3 \leq y$, alatta pedig $2x - 3 \geq y$.) Abban a tartományban, ahol $2x - 3 \leq y$ teljesül, ábrázoljuk a $7 = 2x + y$ egyenletű görbét! Ott, ahol a $2x - 3 \geq y$ teljesül, ábrázoljuk a $7 = 2x + 3$ egyenletű görbét! E két görbe egyesítése a keresett szinthalmaz. Ld. az alábbi ábrán.



1.6. ábra

Most határozzuk meg a $(2,3)$ ponthoz tartozó parciális függvényeket!

$$f(2,y) = \min\{2 \cdot 2 + y, 2y + 3\} = \min\{4 + y, 2y + 3\}.$$

Az egyik parciális függvény tehát

$$f(2,y) = \min\{4 + y, 2y + 3\}.$$

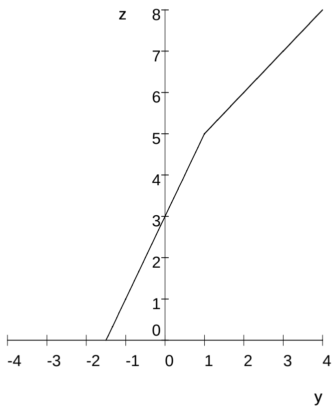
Az f függvény értékkészletének elemeit z-vel jelölve, ezt a parciális függvényt egy olyan koordinátarendszerben kell ábrázolnunk, melynek vizszintes tengelyét y-nal, a függőlegest z-vel jelöljük. Az ábrázoláshoz írjuk a függvényt a következő alakba:

$$z = \begin{cases} 4+y, \text{ ha } 4+y \leq 2y+3 \\ 2y+3, \text{ ha } 2y+3 \leq 4+y \end{cases}$$

vagyis

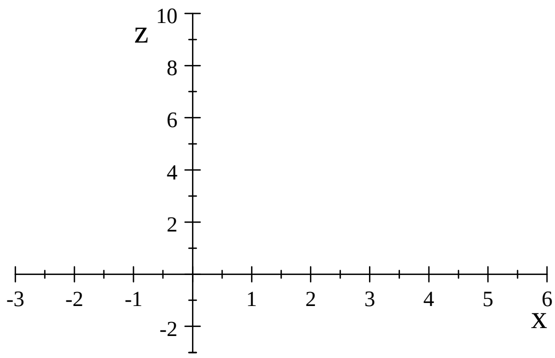
$$z = \begin{cases} 4+y, \text{ ha } 1 \leq y \\ 2y+3, \text{ ha } y \leq 1. \end{cases}$$

Ez alapján a parciális függvény már könnyen ábrázolható. Ld. alábbi. ábra.



1.7. ábra

A másik parciális függvény meghatározását az Olvasóra bízzuk, a végeredmény az alábbi ábrán látható.

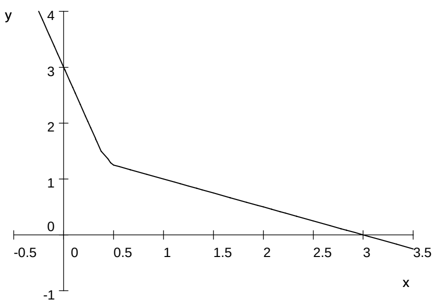


1.8. ábra

Feladat Írjuk fel és ábrázoljuk a következő függvénynek a $(1, 1)$ ponton áthaladó szintvonalának egyenletét és a $(1, 1)$ ponthoz tartozó parciális függvényeit!

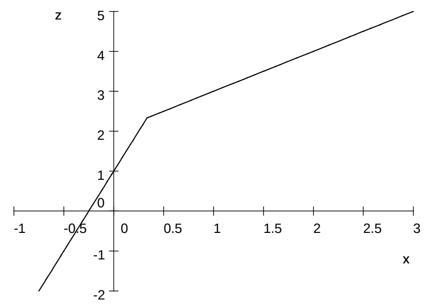
$$f(x, y) = \min\{x + 2y, y + 4x\}$$

Eredmény A szintvonal:

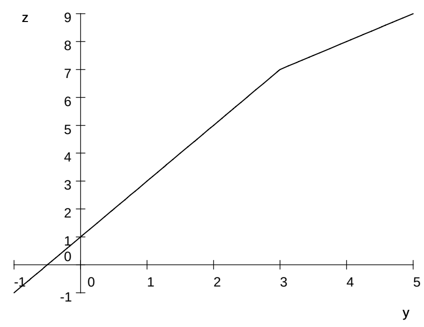


1.9. ábra

A parciális függvények:



1.10. ábra



1.11. ábra

Feladat Ábrázoljuk az $F(x, y) = \sqrt{xy}$ függvénynek a $(3, 4)$ ponton áthaladó szintvonalát!

Feladat Ábrázoljuk az $F(x, y) = x+\sqrt{y}$ függvénynek a $(3, 4)$ ponthoz tartozó parciális függvényeit!

Feladat Ábrázoljuk az $F(x, y) = x + \sqrt{y}$ függvénynek a $(3, 4)$ ponthoz tartozó szintvonalát!

Feladat Ábrázoljuk az $F(x, y) = x^2y^3$ függvénynek a $(1, 2)$ ponthoz tartozó parciális függvényeit!

Feladat Ábrázoljuk az $F(x, y) = x^2y^3$ függvénynek a $(1, 2)$ ponton áthaladó szintvonalát!

Feladat Ábrázoljuk az $F(x, y) = \max\{x, y^2\}$ függvénynek a $(5, 3)$ ponton áthaladó szintvonalát!

3 A PARCIÁLIS DERIVÁLT

A közgazdaságtanban fontos szerepet játszanak az ún. határfüggvények, mint pl. a határhaszon-, és a határtermék-függvények. (Ld. Varian: Mikroökonómia középfokon, 4. és 18. fejezet) Ezek pontos definiálásához szükségünk van a parciális derivált fogalmára.

Definíció Legyen f kétváltozós függvény, és tegyük fel, hogy minden $(x, y) \in D_f$ esetén létezik és véges a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

határérték. Ekkor az f függvény első változója szerinti *parciális derivált függvénye* a következő függvény:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Jelölés $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, $D_x f$, $D_1 f$, f'_1, f_x

Definíció Legyen f kétváltozós függvény, és tegyük fel, hogy minden $(x, y) \in D_f$ esetén létezik és véges a

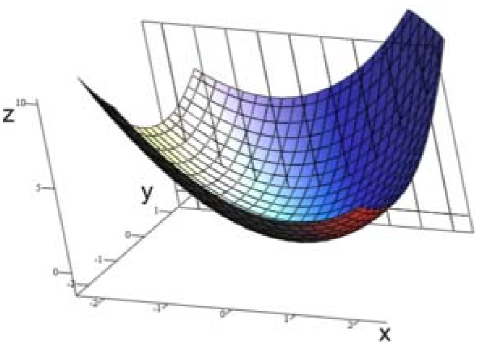
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

határérték. Ekkor az f függvény második változója szerinti parciális derivált függvénye a következő függvény:

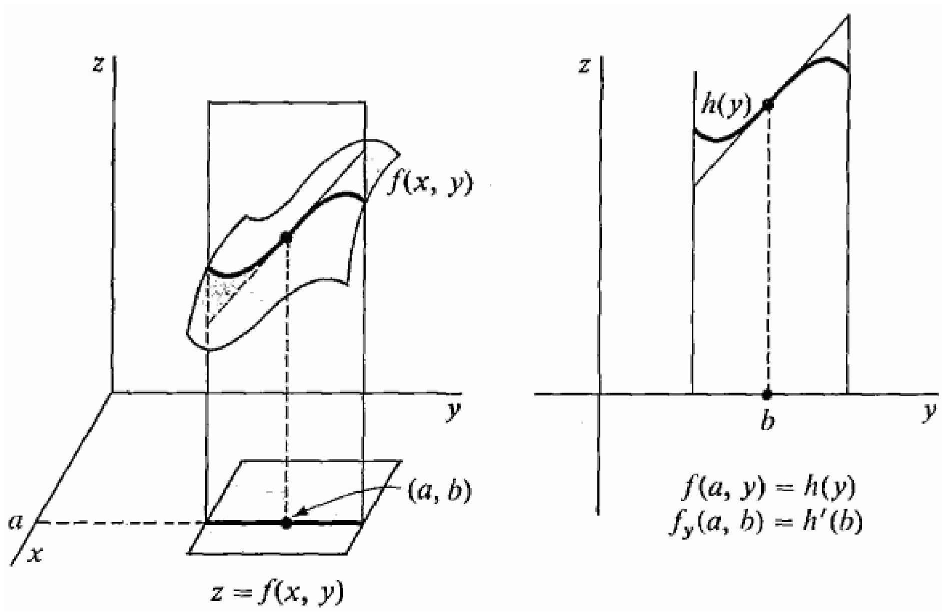
$$\frac{\partial f}{\partial y} : D_f \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Megjegyzés[m] Az f kétváltozós függvénynek az $(a, b) \in D_f$ pontban számított y-szerinti parciális deriváltja egyenlő a $h(y) = f(a, y)$ parciális függvénynek (amely egyváltozós) a b pontban számított deriváltjával. Ld. az alábbi ábrát.

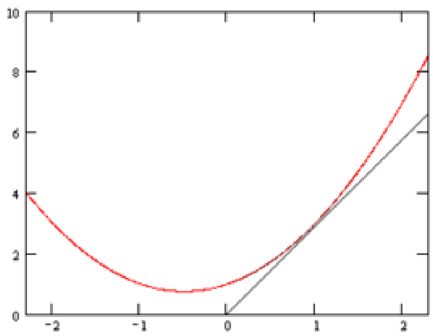
Példa Az $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ függvény $(1, 1)$ pontban számított x-szerinti $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ parciális deriváltja egyenlő 3-al. Ld. alábbi ábrák.



2.2. ábra



2: 2.1. ábra



2.3. ábra

Példa ld: S-H: 15.13. példa, 15.14. példa,15.15. példa, 15.16. példa és 15.17. példa.

Definíció Legyen f n-változós függvény, legyen i tetszőleges egész szám, melyre $1 \leq i \leq n$, és tegyük fel, hogy minden $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f$ esetén létezik és véges a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)}{h}$$

határérték. Ekkor az f függvénynek az i-edik változója szerinti parciális derivált függvénye a következő függvény:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad &: \quad D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) \quad &\longmapsto \quad \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)}{h} \end{aligned}$$

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Az f n-változós függvénynek az $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n) \in D_f$ pontban számított i-edik változója szerinti parciális deriváltja egyenlő az $f(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_{i-1}, x_i, \widehat{x}_{i+1}, ..., \widehat{x}_n)$ parciális függvénynek (amely egyváltozós) az $\widehat{x}_i$ helyen számított deriváltjával.

Definíció Az n-változós f függvény gradiense egy adott $\mathbf{x}_0$ pontban az adott pontbeli parciális deriváltjaiból álló

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

vektor.

Jelölés Az $\mathbf{x}_0$ pontbeli gradiens vektor szokásos jelölése $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, vagy $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)$

Feladat Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$ függvény parciális derivált függvényeit és adjuk meg az $(1, 2)$-beli gradiensét!

Feladat Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 y e^{x^2 y}$ függvény parciális derivált függvényeit és adjuk meg az $(1, 1)$-beli gradiensét!

Feladat Írjuk fel az $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ függvény parciális derivált függvényeit és adjuk meg az $(1, 1)$-beli gradiensét!

Definíció Legyen f n-változós függvény, legyenek i és j tetszőleges egész számok, melyekre $1 \leq i, j \leq n$, és tegyük fel, hogy minden $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f$ esetén létezik a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ i-edik parciális derivált függvény, és az a j-edik változója szerint parciálisan deriválható. Ekkor az $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ függvénynek a j-edik változója szerinti parciális derivált függvénye az f függvénynek másodrendű parciális derivált függvénye.

Jelölés

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Feladat Írjuk fel az $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y + 2xy^2 + y^2$ függvény első- és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Feladat Írjuk fel az $f(x, y) = e^{2xy} + y3^{2x+y}$ függvény első- és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Feladat Írjuk fel az $f(x, y) = \ln xy$ függvény első- és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Példa ld: S-H: 15.14., 15.15., 15.20., 15.21., 15.22. és 15.24. példa.

Tétel Az f kétváltozós függvény gráfját $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$-pontban érintő sík egyenlete

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Bizonyítás Az (x_0, y_0, z_0) ponton átmenő sík egyenlete:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

azaz

$$z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + z_0$$

Ez a következő kétváltozós (lineáris) függvény gráfja:

$$g(x, y) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + z_0$$

Keressük az érintősíkot ilyen alakban, vagyis a feladat A, B és z_0 meghatározása. Nyílván g olyan függvény, amelynek a gráfja érinti f gráfját $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$-ban. Ez azt jelenti, hogy

(1) g gráfja átmegy $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$-on,

(2) f és g parciális deriváltjai egyenlők (x_0, y_0)-ban.

(1) $\Longrightarrow$ $z_0 = f(x_0, y_0)$.

(2) $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A$$

(2) $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$$

Így a keresett érintősík egyenlete:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

azaz

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Feladat Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2y$ függvény gráfjához $(3, 2)$-ben húzott érintősík egyenletét!

Példa ld: S-H: 15.18. példa.

Megjegyzés[k] A parciális derivált közelíthető két függvényérték különbségével:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \underset{\text{ha } \Delta x \text{ kicsi}}{\underset{\uparrow}{\approx}} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \underset{\text{ha } \Delta x \approx 1}{\underset{\uparrow}{\approx}} \\ &\approx \frac{f(x+1, y) - f(x, y)}{1} = f(x+1, y) - f(x, y)\end{aligned}$$

megjegyzés$^{\mathrm{k}}$ A közgazdaságtanban gyakran előfordul, hogy a matematikai modellünket az egyensúly egy kis környezetében linearizáljuk, vagyis feltételezzük, hogy a függvényeink lineárisak. Ez a módszer azon a megfontoláson alapul, hogy a függvény gráfját egy adott pontban érintő sík, az érintési pont egy kis környezetében jól közelíti a függvény gráfját. Az érintősík egyenlete alapján ez azt jelenti, hogy az argumentum $(\Delta x, \Delta y)$ megváltozása esetén a függvényérték megváltozása közelítőleg

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Hogy ez a közelítés mennyire pontos, azt a több változós Taylor-formula másodrendű maradéktagja adja meg, ld.: következő tétel. A következő tétel több olyan fogalmat és jelölést tartalmaz, amit csak később fogunk tárgyalni, ezért első olvasásra a tétel kihagyható.

Tétel *(Taylor-formula másodrendű maradéktaggal) Legyen f egy az $\mathbb{R}^n$ konvex nyílt X részhalmazán értelmezett kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ha $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0+\mathbf{h} \in X$, akkor

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}' D^2 f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{h})\mathbf{h}$$

valamely $\lambda \in (0, 1)$ -re. (Itt $\mathbf{h}'$ a $\mathbf{h}$ vektor transzponáltját jelöli.)

4 TOPOLÓGIAI ALAPFOGALMAK

4.1 NYÍLT ÉS ZÁRT HALMAZ FOGALMA

Ebben a fejezetben az n-dimenziós tér két fontos tulajdonságával, a nyíltság és a zártság fogalmával fogunk megismerkedni. Ezek a fogalmak már az egyváltozós analízisben is fontos szerepet játszottak. Emlékezzünk rá hogy Weierstrass tétele szerint egy zárt halmazon értelmezett folytonos függvény mindig felveszi a szélsőértékeit. A nyílt halmaz fogalmának fontosságát egy példával szeretnénk hangsúlyozni. Gyakori tévedés, hogy egy egyváltozós differenciálható függvény szélsőértékhelyen vett deriváltja szükségképpen zérus. Ezt az állítást úgy pontosíthatjuk, hogy egy egyváltozós differenciálható függvény deriváltja zérus a szélsőértékhelyen, ha tudjuk, hogy a függvény **nyílt** halmazon van értelmezve, vagy legalábbis a szélsőérték benne van egy nyílt halmazban, amely halmaz része a függvény értelmezési tartományának. (Ez utóbbi feltevés azzal ekvivalens hogy a szélsőértékhely az értelmezési tartomány belső pontja.) Ebből következően a nyílt halmazon való maximalizálás és minimalizálás a legtöbb esetben elég egyszerű, és ez több változó esetén is így van. A közgazdaságtanban azonban általában nem nyílt halmazon optimalizálunk. Mint látni fogjuk, $n \geq 2$ dimenzió esetén a zárt halmazon való optimalizálás – az egydimenziós esettel ellentétben – nem problémamentes. Ahogy azt már a bevezetőben is említettük, a problémát az okozza, hogy egy több dimenziós halmaznak (ha van belső pontja) már a legegyszerűbb esetekben is végtelen sok határpontja van. A probléma megértéséhez és kezeléséhez tehát elengedehetetlen a nyílt és zárt halmaz valamint belső pont és határpont általános fogalmainak ismerete.

Definíció Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ pontok euklideszi távolsága:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Definíció Legyen $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $\widehat{\mathbf{x}}$ pont ε sugarú környezete:

$$B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) < \varepsilon\}$$

Definíció Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz és $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pont. Azt mondjuk, hogy $\widehat{\mathbf{x}}$ a H halmaz belső pontja, ha

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \subseteq H.$$

Azt mondjuk, hogy $\widehat{\mathbf{x}}$ a H halmaz külső pontja, ha

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash H.$$

Azt mondjuk, hogy $\widehat{\mathbf{x}}$ a H halmaz határpontja, ha

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : \quad & B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \cap H \neq \varnothing \quad \text{és} \\ & B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \backslash H) \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Következmény 1) $\widehat{\mathbf{x}}$ a H-nak belső pontja $\Longleftrightarrow$ $\widehat{\mathbf{x}}$ az $\mathbb{R}^n \backslash H$ halmaz külső pontja. 2) $\widehat{\mathbf{x}}$ a H-nak külső pontja $\Longleftrightarrow$ $\widehat{\mathbf{x}}$ az $\mathbb{R}^n \backslash H$ halmaz belső pontja. 3) Bármely $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz és bármely $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ pont esetén az $\widehat{\mathbf{x}}$ a H-nak vagy belső-, vagy külső-, vagy határpontja. (Itt mindegyik "vagy" kizáró.)

Definíció Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. H *nyílt halmaz*, ha minden $\mathbf{x} \in H$ pontja belső pontja H-nak.

Definíció Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. H *zárt halmaz*, ha minden $\mathbf{x}$ határpontjára $\mathbf{x} \in H$.

Definíció Egy U halmazról azt mondjuk, hogy *környezete* $\mathbf{x}$ *-nek*, ha $\mathbf{x}$ az U-nak belső pontja.

Megjegyzés$^{\mathbf{m}}$ Ha egy halmaz nem nyílt, abból nem következik, hogy zárt lenne. Tehát vannak olyan halmazok, amelyek se nem nyíltak, se nem zárak. Sőt, olyan halmazok is vannak, amelyek egyszerre nyíltak is és zártak is. Gyakran használatos a következő állítás, aminek a bizonyítása szerepel a következő (csillagos) alfejezetben.

Állítás (1) Nyílt halmaz komplementere zárt. (2) Zárt halmaz komplementere nyílt.

Megjegyzés* Azokat a tulajdonságokat amelyek pusztán az $\mathbb{R}^n$ tér nyílt halmazaitól függenek, – tehát amelyek definiálásához nem kell felhasználni az $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett összeadás és szorzás műveleteket, a távolság fogalmát, a terület és térfogat fogalmakat, illetve $n = 1$ esetben a rendezést – topológiai tulajdonságoknak nevezzük. Ilyen topológiai tulajdonság pl. a sorozat konvergenciája. Emlékezzünk hogy egy a_n sorozatról akkor mondjuk hogy határértéke A, ha $\forall \varepsilon$ esetén $\exists\ n_0$, hogy ha $n > n_0$ akkor $|a_n - A| < \varepsilon$. Ez látszólag támaszkodik az $\mathbb{R}$ téren értelmezett összeadás fogalmára, valójában azonban könnyen látható, hogy ez a definíció ekvivalens a következővel: az a_n sorozat határértéke A, ha minden A-t tartalmazó U nyílt halmaz esetén a sorozat tagjai véges sok kivételével U-ban vannak. Ezen kívűl topológiai tulajdonságok még pl. a függvény folytonossága és határértékének létezése.

Példa (1) $\mathbb{R}$-ben az $]a,b]$ félig nyílt intervallum ($a<b$) nem nyílt halmaz, mert $b \in]a,b]$ és b nem belső pontja $]a,b]$-nek, ugyanis $\forall \varepsilon > 0$ esetén a $B(b,\varepsilon)$ környezetben van b-nél nagyobb szám, így $B(b,\varepsilon) \nsubseteq]a,b]$. $\mathbb{R}$-ben az $]a,b]$ nem zárt halmaz, mert

$$\forall \varepsilon > 0: \qquad B(a,\varepsilon) \cap]a,b] \neq \varnothing \text{ és}$$
$$B(a,\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus]a,b]) \neq \varnothing$$

így a határpontja $]a,b]$-nak, és $a \notin]a,b]$.

(2) $\mathbb{R}^n$-ben az $\varnothing$ halmaz egyszerre nyílt és zárt is. Ezt a következőképpen láthatjuk be. $\varnothing$-nak nincs eleme, ezért igaz, hogy minden pontja belső pont. Ezért $\varnothing$ nyílt halmaz. Mivel minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén $B(\mathbf{x},\varepsilon) \cap \varnothing = \varnothing$, azért $\varnothing$-nak nincs határpontja, így teljesül, hogy minden határponját tartalmazza. Ezért $\varnothing$ zárt halmaz.

(3) Minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén $B(\mathbf{x},\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$, ezért $\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Mivel minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és minden $\varepsilon > 0$ esetén $B(\mathbf{x},\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n) = \varnothing$, azért $\mathbb{R}^n$-nek nincs határpontja, így teljesül, hogy minden határponját tartalmazza. Ezért $\mathbb{R}^n$ zárt halmaz.

Feladat A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza zárt-e $\mathbb{R}$-ben?

Feladat Az $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ halmaz zárt-e $\mathbb{R}$-ben?

Feladat Az $\{n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ halmaz zárt-e $\mathbb{R}$-ben?

Feladat Az ε sugarú környezetek nyíltak-e $\mathbb{R}^n$ ben?

A közgazdaságtanban fontos szerepet játszik az $\mathbb{R}$-beli nyílt halmaz fogalmának következő általánosítása.

Definíció Legyen $\widehat{\mathbf{x}} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $\widehat{\mathbf{x}}$ pont X-beli ε sugarú környezete:

$$B_X(\widehat{\mathbf{x}},\varepsilon) = \{\mathbf{x} \in X \mid d(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{x}) < \varepsilon\}$$

Definíció (relatív nyíltság) Legyenek $X \subseteq \mathbb{R}^n$ és $H \subseteq X$ tetszőleges halmazok. Azt mondjuk, hogy H nyílt X-ben, ha minden $\widehat{\mathbf{x}} \in H$ ponthoz

$$\exists \varepsilon > 0: \quad B_X(\widehat{\mathbf{x}},\varepsilon) \subseteq H.$$

Tétel Egy $A \subseteq X$ halmaz pontosan akkor nyílt X-ben, ha $X \setminus A$ zárt X-ben.

Megjegyzés$^{\mathbf{k}}$ Vegyük észre, hogy nem mondtuk meg mi az hogy egy halmaz zárt X-ben, de bárki könnyen kitalálhatja. Mivel az összes korábban definiált topológiai fogalom az ε sugarú környezeten alapult, ezért nem meglepő hogy az X-beli ε sugarú környezet fogalmára áttérve analóg módon definiálhatjuk az X-beli belső pont, határpont, külső pont, zárt halmaz fogalmakat is.

Példa Lássuk be hogy az $A = (0,1]$ halmaz zárt $X = (0,\infty)$-ben.

Megoldás Legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy belátjuk, hogy $X \setminus A = (1, \infty)$ nyílt X-ben. Tetszőleges $x \in (1, \infty)$ esetén megadhaó olyan $B(x, \varepsilon)$ $\mathbb{R}$-beli környezet melyre $B(x, \varepsilon) \subseteq (1, \infty)$, ekkor viszont $B_X(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap X$ X-beli környezetre is teljesül, hogy $B_X(x, \varepsilon) \subseteq (1, \infty)$ vagyis $X \setminus A$ valóban nyílt X-ben. (Úgy is beláthattuk volna a zártságot, hogy megmutatjuk, hogy a $(0, 1]$ halmaz egyetlen X-beli határpontja az 1 és ezt tartalmazza. Igen! A 0 nem határpont X-ben, hiszen annak nem is eleme.)

4.2 TOVÁBBI ÁLLÍTÁSOK*

Álítás Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz és $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges pont. $\widehat{\mathbf{x}}$ határpontja H-nak $\Longleftrightarrow$ $\widehat{\mathbf{x}}$ határpontja $\mathbb{R}^n \backslash H$-nak.

Bizonyítás [$\Longrightarrow$] Legyen $\widehat{\mathbf{x}}$ határpontja H-nak. Ekkor a határpont definíciója szerint

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \cap H \neq \varnothing \quad \text{és}$$
$$B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \backslash H) \neq \varnothing$$

azaz

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \backslash H) \neq \varnothing \quad \text{és}$$
$$B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \cap \mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^n \backslash H) = B(\widehat{\mathbf{x}}, \varepsilon) \cap H \neq \varnothing$$

ami definíció szerint azt jelenti, hogy $\widehat{\mathbf{x}}$ határpontja $\mathbb{R}^n \backslash H$-nak.

Az ellentétes irány hasonlóan látható be.

Állítás (1) Nyílt halmaz komplementere zárt. (2) Zárt halmaz komplementere nyílt.

Bizonyítás (1) Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz. Ekkor H minden pontja belső pont. Így H egyetlen határpontját sem tartalmazza. Mivel H és $\mathbb{R}^n \backslash H$ határpontjai megegyeznek, ebből az következik, hogy H az $\mathbb{R}^n \backslash H$ halmaz egyetlen határpontját sem tartalmazza, ezért $\mathbb{R}^n \backslash H$ minden határpontja $(\mathbb{R}^n \backslash H)$-ban van, azaz $\mathbb{R}^n \backslash H$ zárt halmaz.

(2) bizonyítása házi feladat.

Következmény Tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra teljesülnek a következők:

H nyílt halmaz $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \backslash H$ zárt halmaz

H zárt halmaz $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \backslash H$ nyílt halmaz

Állítás (1) Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt halmaz.
(2) Akárhány nyílt halmaz egyesítése (uniója) nyílt halmaz.
(3) Véges sok zárt halmaz egyesítése zárt halmaz.
(4) Akárhány zárt halmaz metszete zárt halmaz.

Bizonyítás (1) Legyen H_1, H_2,..., $H_m \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz. Be kell látnunk, hogy a

$$H = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$$

halmaz nyílt. A nyílt halmaz definíciója miatt ez azzal egyenértékű, hogy $\forall \mathbf{x} \in H$ belső pontja H-nak. Ez a belső pont definíciója szerint azt jelenti, hogy

$$\forall \mathbf{x} \in H \quad \exists \varepsilon > 0 : B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq H.$$

(Ezt fogjuk bebizonyítani.)

Legyen $\mathbf{x} \in H = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$ tetszőleges, a továbbiakban rögzített pont. Ekkor

$$\forall i\text{-re } (1 \leq i \leq m) \quad \mathbf{x} \in H_i.$$

Mivel H_i nyílt halmaz minden i-re, és nyílt halmaz minden pontja belső pont, ezért teljesül, hogy

$$\forall i\text{-re } (1 \leq i \leq m) \quad \mathbf{x} \text{ a } H_i \text{ halmaz belső pontja.}$$

A belső pont definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$\forall i\text{-re } (1 \leq i \leq m) \quad \exists \varepsilon_i > 0 : B(\mathbf{x}, \varepsilon_i) \subseteq H_i.$$

Legyen

$$\varepsilon = \min \{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq m\}.$$

Erre az ε-ra teljesül, hogy

$$\forall i\text{-re} \quad B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq B(\mathbf{x}, \varepsilon_i) \subseteq H_i,$$

ezért

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} H_i = H.$$

Ezzel beláttuk az állítást.

(2) Legyen I tetszőleges (véges vagy végtelen) indexhalmaz, és legyen minden $i \in I$ indexre $H_i \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges nyílt halmaz. Legyen $H = \bigcup_{i \in I} H_i$. Be kell látnunk, hogy H nyílt halmaz, azaz hogy

$$\forall \mathbf{x} \in H \quad \exists \varepsilon > 0 : B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq H.$$

(Ezt fogjuk bebizonyítani.) Legyen $\mathbf{x} \in H = \bigcup_{i \in I} H_i$ tetszőleges, a továbbiakban rögzített pont. Ekkor $\exists i \in I$ melyre $\mathbf{x} \in H_i$. Ez a H_i halmaz nyílt, így mivel nyílt halmaz minden pontja belső pont, ezért $\exists i \in I$ hogy $\mathbf{x}$ a H_i halmaz belső pontja. A belső pont definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$\exists i \in I, \exists \varepsilon > 0 : B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq H_i.$$

így

$$\exists i \in I, \exists \varepsilon > 0 : B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq H_i \subseteq \bigcup_{i \in I} H_i = H.$$

Ezzel beláttuk az állítást.

(3) A bizonyításnak ebben a pontjában fel fogjuk használni az

$$\mathbb{R}^n \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{m} H_i \right) = \bigcap_{i=1}^{m} (\mathbb{R}^n \backslash H_i),$$

ún. De-Morgan azonosságot. Legyen H_1, H_2,..., $H_m \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges zárt halmaz. Mivel zárt halmaz komplementere nyílt, ezért teljesül, hogy $\forall i$-re $(1 \leq i \leq m)$ az $\mathbb{R}^n \backslash H_i$ halmaz nyílt. Így $\mathbb{R}^n \backslash H_1$, $\mathbb{R}^n \backslash H_2$,..., $\mathbb{R}^n \backslash H_m$ véges sok nyílt halmaz, ezért a már bizonyított (1) állításból az következik, hogy a

$$\bigcap_{i=1}^{m} (\mathbb{R}^n \backslash H_i)$$

halmaz nyílt. Ebből és De-Morgan azonosságból:

$$\bigcup_{i=1}^{m} H_i = \mathbb{R}^n \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{m} (\mathbb{R}^n \backslash H_i) \right),$$

amiből már következik a (3) állítás.

(4) bizonyítása házi feladat.

Példa Az $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ alakú halmazok összessége, ahol $n \in \mathbb{N}$, végtelen sok nyílt halmaz, melyeknek metszete nem nyílt.

4.3 ALKALMAZÁSOK

Definíció Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ n-változós függvény és $\widehat{\mathbf{x}} \in X$ az f értelmezési tartományának pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos az* $\widehat{\mathbf{x}}$ *pontban*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in B(\widehat{\mathbf{x}}, \delta) \cap X \text{ esetén } |f(\mathbf{x}) - f(\widehat{\mathbf{x}})| < \varepsilon.$$

f *folytonos*, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Tétel (folytonosság topológikus jellemzése) Egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$-en értelmezett n-változós f függvényre az alábbiak ekvivalensek:
1.) f folytonos
2.) tetszőleges $F \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz esetén az

$$\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \in F\}$$

halmaz zárt X-ben.
3.) tetszőleges $G \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén az

$$\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) \in G\}$$

halmaz nyílt X-ben.

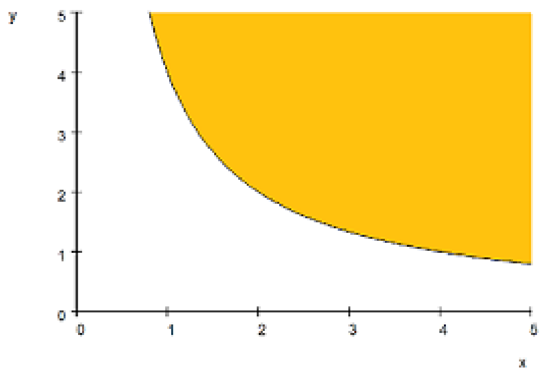
Definíció Az f kétváltozós függvénynek az alsó szinthalmazai a 2-dimenziós sík

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) \in D_f \text{ és } f(x_1, x_2) \leq k\right\}$$

alakú részhalmazai, ahol $k \in \mathbb{R}$.

Az előző tétel triviális következménye az alábbi:

Tétel Egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$-en értelmezett n-változós folytonos függvény minden szinthalmaza és alsó szinthalmaza zárt X-ben.



3: 3.1. ábra

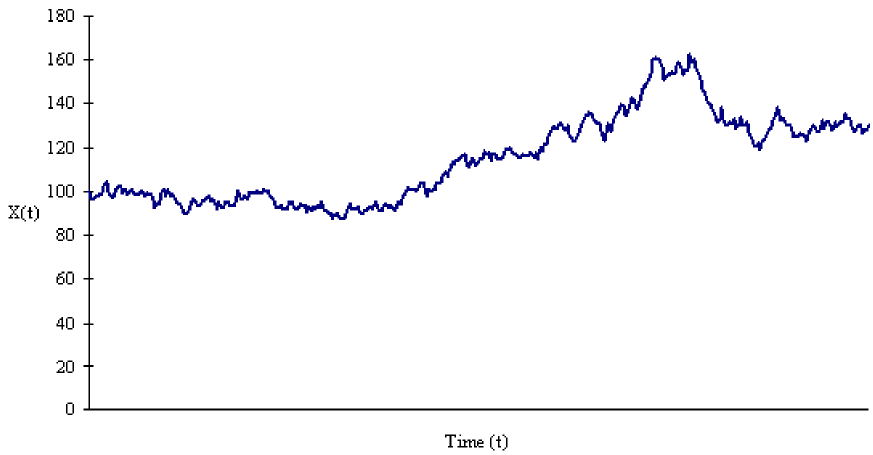
Megjegyzések[k] Természetesen az analóg módon definiált felső szinthalmazai is zártak X-ben. Az alábbi ábra a nemnegatív síknegyeden értelmezett $U(x, y) = xy$ függvény egy felső szinthalmazát ábrázolja.

Közgazdasági alkalmazás A mikroökonómiában a fogyasztók preferenciáiról fel szokás tételezni, hogy bárhogyan is rögzítünk egy jószágkosarat, az ahhoz képest gyengén preferált és gyengén diszpreferált kosarak halmaza $\mathbb{R}^n_+$-ban zárt halmaz. Ha a preferenciák hasznossági függvénnyel reprezentálhatóak, ez pontosan azt jelenti, hogy a hasznossági függvény felső és alsó szinthalmazai $\mathbb{R}^n_+$-ban zártak. Ezen feltétel szerepéről a közgazdasági alkalmazások című fejezetben fogunk szót ejteni. A feltételes szélsőértékszámítás fejezetben látni fogjuk, hogy a függvények szélsőértékeit általában csak valamely folytonos függvény felső vagy alsó szinthalmazának elemei között, vagy ilyenek metszetéből álló halmaz elemei között keressük. Ebben az összefügésben a zártság ismét fontos szerepet fog játszani.

Megjegyzés[k] Ne gondoljuk azt, hogy a folytonos függvényeket könnyű lerajzolni vagy elképzelni. A pénzügytanban fontos szerepet játszó Wiener-folyamat (más néven Brown-mozgás) trajektóriái (ne rökönyödjünk meg ezen az itt definiálatlan kifejezésen, mondanivalónk szempontjából a definíciónak nincs jelentősége) egy valószínűséggel olyan függvények, amelyek seholsem differenciálhatóak, és nem létezik "ívhosszuk" semmilyen kis intervallumon. Ez utóbbi azt jelenti, hogy ha az értelmezési tartományuk akármilyen kis intervallumán próbálnánk megrajzolni a függvény gráfját, ehhez végtelen sok ceruzára volna szükségünk. No meg szó szerint végtelen sok türelemre. Az alábbi ábra a Wiener-folyamat egy trajektoriáját ábrázolja. Ha ezt a képet egyre jobban felnagyítanánk, akkor sem találnánk a függvény gráfjában egyenes vagy "sima" részeket, egyre újabb és újabb hegyek és völgyek válnának láthatóvá.

Tétel (Young-tétele) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz és $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ n-változós függvény. Tegyük fel, hogy az f függvény két m-edrendű parciális deriváltjában az azonos változók szerinti deriválások száma megegyezik, és egy $S \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon a két parciális derivált folytonos. Ekkor a két parciális derivált az S minden pontjában egyenlő.

Következmény Ha Young tételének feltételei teljesülnek, akkor a deriválások sorrendje felcserélhető.



4: 3.2. ábra

Példa Megmutatjuk, hogy a következő függvény esetén a parciális deriválások sorrendje nem felcserélhető:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad\qquad , \text{ ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ld.: következő ábra. Minden $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, y) - f(0,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot y\frac{(\Delta x)^2 - y^2}{(\Delta x)^2 + y^2} - 0 \cdot y\frac{0^2-y^2}{0^2+y^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} y\frac{(\Delta x)^2 - y^2}{(\Delta x)^2 + y^2} = -y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot 0\frac{(\Delta x)^2 - 0^2}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} &= 0, \end{aligned}$$

így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1$$

Minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{f(x, 0+\Delta y) - f(x,0)}{\Delta y} = \\ \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{x \cdot (\Delta y)\frac{x^2-(\Delta y)^2}{x^2+(\Delta y)^2} - x \cdot 0\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} x\frac{x^2 - (\Delta y)^2}{x^2 + (\Delta y)^2} = x, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \longrightarrow 0} \frac{0 \cdot (\Delta y) \frac{0^2 - (\Delta y)^2}{0^2 + (\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0,$$

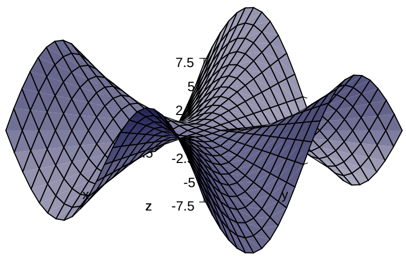
így

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$

Látható, hogy erre a függvényre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

teljesül. Így Young tételéből az következik, hogy nincs olyan, a $(0,0)$ pontot tartalmazó nyílt S halmaz, melyen az f vegyes másodrendű deriváltjai folytonosak lennének.



3.3. ábra

5 LÁNCSZABÁLY

Ebben a fejezetben az egyváltozós függvényekre már ismert összetett függvények deriválási szabályának többdimenziós megfelelőjével fogunk foglalkozni.

5.1 A LÁNCSZABÁLY EGYSZERŰ ESETE

Tétel (láncszabály) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, mindkét változója szerint parciálisan differenciálható függvény, melynek a parciális deriváltjai is folytonosak. Legyen $Y \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ és $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható egyváltozós függvények, melyekre $R_f \times R_g \subseteq X$. Ekkor az $F(x_1, x_2)$, $f(y)$ és $g(y)$ függvényekből képzett $z(y) = F(f(y), g(y))$ függvényre minden $y \in Y$ esetén teljesül, hogy

$$\frac{dz}{dy}(y) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(f(y), g(y)) \cdot \frac{df}{dy}(y) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(f(y), g(y)) \cdot \frac{dg}{dy}(y).$$

Bizonyítás A $z(y)$ egyváltozós függvény deriváltjának definíciójából indulunk ki:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dy}(y) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{z(y+h) - z(y)}{h} \underset{z \text{ definíciója}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(f(y+h), g(y+h)) - F(f(y), g(y))}{h} = \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(f(y+h), g(y+h)) - F(f(y), g(y+h)) + F(f(y), g(y+h)) - F(f(y), g(y))}{h} = \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(f(y+h), g(y+h)) - F(f(y), g(y+h))}{h} + \frac{F(f(y), g(y+h)) - F(f(y), g(y))}{h} = \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{F(f(y+h), g(y+h)) - F(f(y), g(y+h))}{f(y+h) - f(y)} \cdot \frac{f(y+h) - f(y)}{h} + \\
&+ \frac{F(f(y), g(y+h)) - F(f(y), g(y))}{g(y+h) - g(y)} \cdot \frac{g(y+h) - g(y)}{h} \underset{\substack{f \text{ és } g \text{ folytonos} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} \text{ folytonos a 2. változójában}}}{\underset{\uparrow}{=}} \\
&= \frac{\partial F}{\partial x_1}(f(y), g(y)) \cdot \frac{df}{dy}(y) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(f(y), g(y)) \cdot \frac{dg}{dy}(y).
\end{aligned}$$

Definíció A láncszabályban szereplő z függvény deriváltját az F függvény y szerinti *teljes deriváltjának* nevezzük, és $\frac{dF}{dy}$-nal jelöljük.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ A fogalom és a jelölés kissé félrevezető, mert valójában $\frac{dF}{dy}$ nem az F függvény deriváltja, hanem a z összetett függvényé, de ennek ellenére a fogalom a közgazdaságtanban gyakran előfordul.

Útmutatás a láncszabály alkalmazásához Időnként hasznos lehet, ha a többváltozós valós értékű függvények parciális deriváltjait egy sorvektorba rendezzük, és az egyváltozós de vektorértékű függvények koordinátafüggvényeinek deriváltjait pedig egy oszlopvektorba. Hogy ezeknek a vektorok milyen értelemben tekinthetők deriváltaknak, azzal később foglakozunk, most csak az a fontos, hogy egy új jelölést akarunk bevezetni, ami sok esetben a tételek egyszerübb kimondásához vezet, ezáltal bizonyos tételekben szereplő bonyolultabb kifejezések megjegyzését segíti elő. Definiáljuk a G :

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt a következőképpen $G(y) = (f(y), g(y))$. Ekkor az $f(y)$ és $g(y)$ függvényeket a vektorértékű G függvény *koordinátafüggvényeinek* nevezzük. Ekkor a fenti tételben szereplő $z(y)$ függvény valójában az $F \circ G$ összetett függvény. Ha most a G függvény koordinátafüggvényeinek deriváltját az

$$\begin{pmatrix} \frac{df}{dy}(y) \\ \frac{dg}{dy}(y) \end{pmatrix}$$

oszlop vektorral , az F függvény $(f(y), g(y))$ helyen vett parciális deriváltjait pedig a

$$(\frac{\partial F}{\partial x_1}(f(y), g(y)), \frac{\partial F}{\partial x_2}(f(y), g(y)))$$

sorvektorral reprezentáljuk, akkor a láncszabály a következő alakot ölti:

$$\frac{dz}{dy}(y) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}(f(y), g(y)), \frac{\partial F}{\partial x_2}(f(y), g(y))) \cdot \begin{pmatrix} \frac{df}{dy}(y) \\ \frac{dg}{dy}(y) \end{pmatrix}$$

ahol a $\cdot$ jel a lineáris algebrában tanult mátrixszorzást jelöli. Jelöljük most a

$$(\frac{\partial F}{\partial x_1}(f(y), g(y)), \frac{\partial F}{\partial x_2}(f(y), g(y)))$$

sorvektort $(F' \circ G)(y)$ -nal, és a

$$\begin{pmatrix} \frac{df}{dy}(y) \\ \frac{dg}{dy}(y) \end{pmatrix}$$

oszlopvektort $G'(y)$ -vel. Ekkor a fenti láncszabály a következő még egyszerűbb, és talán ismerős alakba írható:

$$\frac{d(F \circ G)(y)}{dy} = (F' \circ G)(y) \cdot G'(y).$$

Ez pedig formailag megegyezik az egyváltozós analízisben megtanult öszetett függvény deriválási szabályával.

Példa ld: S-H: 16.1. példa, 16.2. példa és 16.4. példa. 16.1 alfejezet gyakorlatai.

Példa (Euler-tétel) Egy f függvényt *elsőfokon (pozitív) homogénnek* nevezünk, ha minden x, y számpárra

$$\text{minden } t > 0 \text{ esetén} \qquad f(tx, ty) = tf(x, y),$$

vagyis

$$f(tx, ty) \equiv tf(x, y)$$

Lássuk be, hogy egy elsőfokon homogén függvény esetében minden (x, y)-ra igaz az

$$f(x, y) = x\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

egyenlőség, vagyis az $f(x, y)$ függvény azonos az

$$(x, y) \mapsto x\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

függvénnyel.

Megoldás Tekintsük x_0 és y_0 értékét rögzítettnek. Mivel $f(tx_0, ty_0) \equiv tf(x_0, y_0)$ egy azonosság t-ben, ezért mindkét oldalát deriválhatjuk t szerint, és az így kapott deriváltak megegyeznek. A jobb oldal deriváltja $f(x_0, y_0)$, a baloldal deriválásához használjuk a láncszabályt. A baloldal a $t \mapsto (tx_0, ty_0)$ függvény, mint belső függvény, és az f függvény, mint külső függvény kompozíciója. A fenti útmutatás szerint a külső függvény "deriváltját" a (tx_0, ty_0) helyen az $\left(\frac{\partial f(tx_0,ty_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(tx_0,ty_0)}{\partial y}\right)$, a belső függvény "deriváltját" az

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

vektorral reprezentálhatjuk. A kettő szorzata

$$x\frac{\partial f(tx_0, ty_0)}{\partial x} + y\frac{\partial f(tx_0, ty_0)}{\partial y}.$$

A két derivált a fenti indoklás megegyezik x_0 és y_0 bármely értékére, vagyis

$$f(x, y) \equiv x\frac{\partial f(tx, ty)}{\partial x} + y\frac{\partial f(tx, ty)}{\partial y},$$

Amiből $t = 1$ helyettesítéssel kapjuk:

$$f(x, y) \equiv x\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Feladat Vezessük le az Euler-tétel megfelelő alakját *k-adfokban* (*pozitív*) *homogén* függvényre, vagyis olyan f függvényre, melyre

$$\text{minden } t > 0 \text{ esetén} \qquad f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

5.2 ÁLTALÁNOSABB LÁNCSZABÁLYOK

Tétel Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ tetszőleges halmaz, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ és $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos, mindkét változójuk szerint parciálisan differenciálható függvények, melyek parciális deriváltjai is folytonosak, és amelyekre $R_f \times R_g \subseteq X$. Ekkor az $F(x_1, x_2)$, $f(y_1, y_2)$ és $g(y_1, y_2)$ függvényekből képzett $z(y_1, y_2) = F(f(y_1, y_2), g(y_1, y_2))$ függvényre minden $(y_1, y_2) \in Y$ és $i \in \{1, 2\}$ esetén teljesül, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial y_i}(y_1, y_2) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(f(y_1, y_2), g(y_1, y_2)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1, y_2) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(f(y_1, y_2), g(y_1, y_2)) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i}(y_1, y_2).$$

Tétel Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ tetszőleges halmaz. Legyenek az $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és minden $k \in \{1, 2, ..., n\}$-re az $f_k : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosak, és minden változójuk szerint parciálisan differenciálhatóak, melyek parciális deriváltjai is folytonosak, és melyekre $\overset{n}{\underset{k=1}{\times}} R_{f_k} \subseteq X$. Ekkor az $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, és $f_1(\mathbf{y})$, $f_2(\mathbf{y})$,..., $f_n(\mathbf{y})$, függvényekből képzett $z(\mathbf{y}) = F(f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), ..., f_n(\mathbf{y}))$ függvényre minden $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in Y$ és $i \in \{1, 2, ..., m\}$ esetén teljesül, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial y_i}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), ..., f_n(\mathbf{y})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial y_i}(\mathbf{y}) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), ..., f_n(\mathbf{y})) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_i}(\mathbf{y}) +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial x_2}(f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), ..., f_n(\mathbf{y})) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y_i}(\mathbf{y}) + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}(f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), ..., f_n(\mathbf{y})) \cdot \frac{\partial f_n}{\partial y_i}(\mathbf{y}).$$

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Vegyük észre, hogy itt $z(\mathbf{y}) = (F \circ g)(\mathbf{y})$, ahol $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \longmapsto (f_1(\mathbf{y}), f_2(\mathbf{y}), ..., f_n(\mathbf{y}))$

Feladat Legyenek $u = 3xy + xz$, $x = 2 + t^2$, $y = t - 2$ és $z = 3t$. Adja meg a $\frac{du}{dt}$ teljes deriváltat!

Megoldás A feladat a $\frac{d(u \circ G)(t)}{dt}$ derivált kiszámítása, ahol $G : t \longrightarrow (2 + t^2, t - 2, 3t)$. A külső függvény gradiense: $(3y + z, 3x, x)$ ez az $(2 + t^2, t - 2, 2t)$ helyen: $(3\,(t-2) + 3t, 3\,(2 + t^2)\,, 2 + t^2)$ vagyis $(6t - 6, 6 + 3t^2, 2 + t^2)$. A belső függvény deriváltját a

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oszlopvektor reprezentálja. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{d(u \circ G)(t)}{dt} &= (6t - 6, 6 + 3t^2, 2 + t^2) \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ & \quad 2t(6t - 6) + 6 + 3t^2 + 3(2 + t^2). \end{aligned}$$

Feladat Legyenek $u = xy + z$, $x = r + s$, $y = r - s$ és $z = rs$. Adja meg a $\frac{\partial u}{\partial r}$ teljes deriváltat!

Megoldás A feladat a $\frac{\partial(u \circ G)(r,s)}{\partial r}$ parciális derivált kiszámítása, ahol $G : (r, s) \longrightarrow (r + s, r - s, rs)$. A külső függvény gradiense: $(y, x, 1)$ ez az $(r + s, r - s, rs)$ helyen: $(r - s, r + s, 1)$. A belső függvény r szerinti parciális deriváltját a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

oszlopvektor reprezentálja. Ekkor

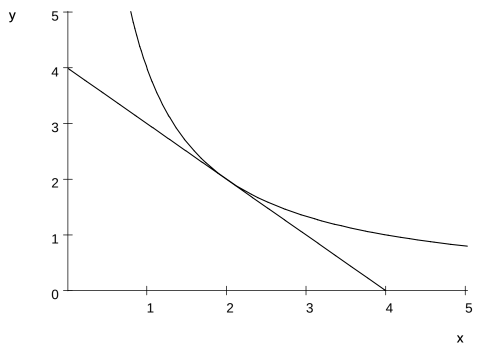
$$\frac{\partial(u \circ G)(r, s)}{\partial r} = (r - s, r + s, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} = r - s + r + s + s = 2r + s.$$

6 KOMPARATÍV STATIKA I.

A közgazdaságtanban valamely egyensúlyt leíró egyenlet vagy egyenletrendszer tartalmazhat exogén (ezek lényegében az egyenletrendszer paraméterei, a közgazdasági modellekben ezeket rögzítettnek tekintjük) és endogén változókat (az egyenletrendszer tényleges változói, ld. Varian: Mikroökonómia középfokon, 1. fejezet). A komparatív statika (Ld. Varian 1. fejezet) azt vizsgálja, hogy az exogén változók megváltozásának hatására hogyan változik az endogén változók vektora. Az ilyen típusú vizsgálatokhoz léteznie kell az egyensúly egy környezetében annak a függvénynek, ami a lehetséges exogén változókhoz rendeli az endogén változók egyensúlyi értékeit. Azonban szükséges hangsúlyozni, hogy nem minden egyensúlyt leíró egyenlet határoz meg a fenti módon, egy az egyensúly valamely környezetében értelmezett függvényt. Tekintsük például az $y^2 + x = 0$ egyenletet, ahol y az endogén és x az exogén változó. Legyen $x = 0$. Ebben az esetben az y egyensúlyi értéke (vagyis a fenti egyenlet megoldása) $y = 0$, de x-et növelve nincs egyensúly, csökkentve pedig az egyensúly nem egyértelmű. Ebben az esetben tehát az implicit módon megadott $y(x)$ függvény – ami tehát az exogén változó adott értéke esetén megmutatja az endogén változó egyensúlyi értékét – az egyensúly semmilyen környezetében sincs értelmezve. Ennek oka az, hogy az $f(x,y)=y^2+x$ függvény y szerinti parciális deriváltja $(0,0)$-ban zérus. Az alábbiakban bemutatandó módszerek alkalmazhatóságának egy elégséges feltételét az implicit függvény tétel, más néven a komparatív statika alaptétele adja meg. A komparatív statika alaptételének elnevezését jól indokolja a fenti okfejtés. Látni fogjuk, hogy a fenti alkalmazás során, az exogén változók megváltozásának hatását anélkül tudjuk jellemezni, hogy az egyensúlyt ténylegesen meghatároznánk. Azonban a komparatív statika eszközeit, így az említett tételt legtöbbször nem ebben az összefüggésben használjuk, hanem az endogén változók közötti, a modell egyes egyenletei által meghatározott függvényszerű kapcsolat jellemzésére. Ez utóbbi típusú alkalmazásokban a tétel az egyensúly illetve az optimum meghatározásában is segítségünkre lehet. Ennek alapötletét tartalmazza a következő közgazdasági alkalmazás.

6.1 IMPLICIT MÓDON MEGADOTT FÜGGVÉNYEK A MIKROÖKONÓM

Induljunk ki a fogyasztói optimalizálás alapproblémájából. Ismeretes, hogy az optimumban a közömbösségi görbe meredeksége meg kell egyezzen költségvetési egyenes meredekségével. Ezt a tényt egyenlőre fogadjuk el bizonyítás nélkül, később a feltételes szélsőértékszámítás módszereivel igazolni fogjuk. Felmerül tehát a probléma, hogy hogyan tudjuk kiszámítani a közömbösségi görbe meredekségét egy adott pontban. Induljunk ki ismét az $U(x,y)=xy$, alakú hasznossági függvény $U=4$ hasznosági szinthez tartozó közömbösségi görbéjéből. Vajon hogyan tudnánk kiszámítani a közönbösségi görbét a $(2,2)$ pontban érintő egyenes meredekségét, – ld.: alábbi ábra – illetve általános módszert találni az $U(x,y)$ hasznossági függvény közömbösségi görbéinek egy tetszőleges (x_0,y_0) ponbeli meredekségének kiszámítására ?



5.1. ábra

Egy pillantást vetve a közömbösségi görbére, látható, hogy a közömbösségi görbe maga is értelmezhető úgy mint egy függvény gráfja. A szóban forgó függvény – ahogy az ábrából leolvasható pl. az $x=2$-höz az $y=2$-t, az $x=4$-höz az $y=1$-et rendeli. Egy kicsit még pongyola szóhasználattal mondhatnánk, hogy a szóban forgó függvényünket "implicit módon" definiálja az $U(x,y)=xy$ hasznosságfüggvény, és a $(2,2)$ pont. Jelöljük ezt a függvényt $y(x)$-szel. Mivel definíció szerint az $(x,y(x))$ pont minden x esetén rajta van a közömbösségi görbén, ezért az $y(x)$ pontosan az egyetlen olyan függvény, melyre minden x esetén teljesül, hogy $U(x,y(x))=4$, vagyis $U(x,y(x))\equiv 4$ egy azonosság. Ahogyan az ábrából is látszik a közömbösségi görbe $(x,y(x))$ pontbeli meredeksége valójában az $y'(x)$ deriválttal egyezik meg, feladatunk tehát $y'(x_0)$ meghatározása. Az hogy $U(x,y(x))\equiv 4$ egy azonosság, azt jelenti, hogy ugyan a baloldal látszólag mintha függene x-től valójában a konstans 4 függvény. Ha tehát lederiváljuk az $U(x,y(x))\equiv 4$ azonosság mindkét oldalát x szerint, akkor 0-t kell kapnunk. Használjuk a láncszabályt. Legyen $z:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ az U és y függvényekből képzett összetett függvény, melyre teljesül, hogy

$$\forall x \in \mathbb{R}\text{-re } z(x) = U(x, y(x)).$$

A láncszabályt erre az összetett függvényre alkalmazva:

$$\forall x \in \mathbb{R}\text{-re } \frac{dz}{dx}(x) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x). \qquad (*)$$

Ahogy említettük, ez a derivált zérus kell hogy legyen, vagyis

$$\forall x \in \mathbb{R}\text{-ra } 0 = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x).$$

Azon x esetén melyekre $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \neq 0$, teljesül, hogy

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial U}{\partial y}(x, y(x))},$$

tehát ha $\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$, akkor

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y(x_0))}{\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y(x_0))} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0)},$$

vagyis a mikroökonómiában használt jelöléssel

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{MU_x(x_0, y_0)}{MU_y(x_0, y_0)},$$

Ez alapján az ábrán látható érintő meredeksége

$$-\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(2,2)}{\frac{\partial U}{\partial y}(2,2)} = -\frac{2}{2} = -1.$$

A továbbiakban az itt felhasznált gondolatmenetet átültetjük a matematika nyelvére, tisztázzuk az alkalmazhatóság feltételeit, ezáltal általánosan használható módszert kapunk. Meg kell jegyeznünk, hogy az alább ismertetendő implicit függvények deriválási szabályára ritkán hivatkoznak a közgazdaságtan tankönyvek. Meglepő módon úgy kerülik ki a tétel kimondását, hogy a tétel állítását a fenti példához hasonlóan minden alkalommal levezetik. Ez utóbbi módszert implicit függvény módszernek is nevezik. Annak a felismerésében viszont, hogy mikor kell alkalmaznunk az implicit függvény deriválási szabályát, vagy éppen annak a levezetését, elengedhetetlen hogy a tételt általános alakban kimondjuk, és annak levezetését mint módszert tudjuk alkalmazni. A fent elmondottak alapján tehát a tétel bizonyítása fontosabb mint maga az állítás. Hangsúlyozzuk tehát, hogy az implicit függvény módszernél nem az implicit függvény tételt alkalmazzuk, csupán a láncszabályt, és az alább ismertetett implicit függvény tétel $a)$ része csak a módszer alkalmazhatóságának feltételeit adja meg. A módszer előnye, hogy egyenletrendszerekre is könnyen alkalmazható, de az implicit függvény tétellel ellentétben nem igényli a vektorétékű függvények deriváltjának és ezzel együtt a mátrixaritmetika használatát. Az MRS láncszabállyal való kiszámításáról ld. még: Varian 4. fejezet függelék.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Ezen a ponton egy lehetséges jelölésbeli zavarra hívjuk fel a figyelmet. Vegyük észre, hogy itt is, akárcsak a láncszabály bizonyításánál, az újonan bevezetett z függvény $\frac{dz}{dx}(x)$ deriváltja megegyezik az $U(x, y(x))$ függvény x szerinti teljes deriváltjával, amit $\frac{dU(x,y(x))}{dx}$-szel jelölhetünk, és a példában szereplő$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y(x))$ parciális derivált az U függvény első változó szerinti parciális deriváltjának $(x, y(x))$ helyen vett helyettesítési értéke. A z függvényt valójában azért vezettük be, mert el akartuk kerülni a teljes derivált használatát, de mivel az irodalomban a fogalmat gyakran használják ezért foglalkoznunk kell vele. Tételezzük fel, hogy az U függvényünk háromváltozós, és bevezetjük a $z(x, y) = U(x, y(x), z(y))$ kétváltozós függvényt. Ennek $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ parciális deriváltja megegyezik az $U(x, y(x), z(y))$ függvény x szerinti teljes parciális deriváltjával, amit már $\frac{\partial U(x,y(x),z(y))}{\partial x}$ módon jelölünk. Ez viszont jelölheti az U függvény első változó szerinti parciális deriváltjának $(x, y(x), z(y))$ helyen vett helyettesítési értékét is. Ilyen esetekben tehát a jelölés megfelelő értelmezése a szövegösszefüggésből derülhet ki.

6.2 IMPLICIT MÓDON MEGADOTT EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

A fenti példában láttuk, hogy az $y(x)$ függvényt implicit módon meghatározta az $U(x, y) \equiv 4$ egyenlet. *Implicit függvény* alatt tehát egyenlettel, vagy egyenletrendszerrel megadott függvényt értünk.

Példa Az $x\sqrt{y} = 2$ egyenlet implicit módon meghatározza azt az

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvényt, melyre teljesül, hogy

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x\sqrt{y(x)} = 2.$$

Ez a függvény explicit módon az $y(x) = \frac{4}{x^2}$ képlettel adható meg.

Példa Az $e^{xy^2} - 2x - 4y = 2$ egyenlettel implicit módon megadott $y(x)$ függvény nem írható fel explicit alakban.

Definíció Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és $c \in R_F$ tetszőleges. Az $y : H \longrightarrow \mathbb{R}$ $(H \subseteq \mathbb{R}^n)$ függvény eleget tesz az $F(\mathbf{x}, y) = c$ implicit megadásnak, ha $\forall \mathbf{x} \in H$ esetén $(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) \in X$ és $F(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) = c$.

Tétel (Komparatív statika alaptétele, implicit függvény tétel) Tegyük fel, hogy $X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, és (x_0, y_0) legyen X belső pontja. Legyen $F : X \to \mathbb{R}$, parciálisan differenciálható függvény, és a parciális deriváltjai folytonosak (x_0, y_0) egy környezetében, $F(x_0, y_0) = c$, valamint $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$. Ekkor

a) létezik $U \subseteq \mathbb{R}$ környezete x_0-nak, és $V \subseteq \mathbb{R}$ környezete y_0-nak, valamint egy $y : U \to V$ folytonosan differenciálható függvény, melyre teljesül, hogy $y(x_0) = y_0$, valamint az $y : U \to V$ függvény eleget tesz az $F(x, y) = c$ implicit megadásnak

b) az y függvény x_0-beli deriváltjára teljesül, hogy:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y(x_0))}$$

Megjegyzés[k] Tegyük fel, hogy az $y : H \longrightarrow \mathbb{R}$ $(H \subseteq \mathbb{R})$ függvény eleget tesz az $F(x,y) = c$ implicit megadásnak, azaz $\forall x \in H$ esetén $(x, y(x)) \in X$ és $F(x, y(x)) = c$. F-nek a c függvényértékhez tartozó szintvonala: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = c\}$. Az $y(x)$ függvény grafikonja: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = y(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = c\}$. Tehát az F függvény c függvényértékhez tartozó szintvonala egybeesik $y(x)$ gráfjával, így az F függvény c függvényértékhez tartozó szintvonalán az x abszcisszájú pont ordinátája: $y(x)$. Ebből az következik, hogy az F függvény c függvényértékhez tartozó szintvonalának meredeksége az $(x, y(x))$ pontban $y\prime(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}$.

Feladat Írjuk fel az $x\sqrt{y} = 2$ egyenlettel implicit módon megadott $y(x)$ függvény deriváltját az $x_0 = 1$ pontban!

Feladat Tegyük fel, hogy az $y(x)$ függvényt implicit módon megadja az $e^{xy^2} - 2x - 4y = 2$ egyenlet!
a) Számítsuk ki $y(0)$ értékét!
b) Számítsuk ki $y\prime(0)$ értékét!

Feladat Az előző feladat eredményét felhasználva, mekkora az $F(x,y) = e^{xy^2} - 2x - 4y$ függvény $k = 2$ értékhez tartozó szintvonalának meredeksége?

Példa ld: S-H: 16.9. példa és 16.10. példa.

6.3 IMPLICIT MÓDON MEGADOTT KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY PARCIÁLIS DERIVÁLTJAI

Tétel (Komparatív statika alaptétele, Implicit függvény tétel) Tegyük fel, hogy $X \subseteq \mathbb{R}^3$, és (x_0, y_0, z_0) legyen X belső pontja . Legyen $F : X \to \mathbb{R}$, parciálisan differenciálható függvény, és a parciális deriváltjai folytonosak (x_0, y_0, z_0) egy környezetében, $F(x_0, y_0, z_0) = c$, valamint $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$. Ekkor

a) létezik $U \subseteq \mathbb{R}^2$ környezete (x_0, y_0)-nak, és $V \subseteq \mathbb{R}$ környezete z_0-nak, valamint egy $z : U \to V$ minden változója szerint folytonosan parciálisan differenciálható függvény, melyre teljesül, hogy $z(x_0, y_0) = z_0$, valamint a $z : U \to V$ függvény eleget tesz az $F(x, y, z) = c$ implicit megadásnak

b) az z függvény (x_0, y_0)-beli parciális deriváltjaira teljesül, hogy:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z(x_0, y_0))}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z(x_0, y_0))}.$$

Bizonyítás a) nem bizonyítjuk
b) Legyen $u : H \longrightarrow \mathbb{R}$ az F és z függvényekből képzett összetett függvény, melyre teljesül, hogy

$$\forall (x,y) \in H\text{-ra } u(x,y) = F(x, y, z(x,y)).$$

A láncszabályt erre az összetett függvényre alkalmazva:

$$\forall (x,y) \in H\text{-ra } \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x,y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y). \qquad (**)$$

Mivel $\forall (x,y) \in H$-ra $u(x,y) = F(x,y,z(x,y)) = c$, azért $u(x,y)$ konstans függvény, így

$$\forall (x,y) \in H\text{-ra } \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Ebből és $(**)$-ból

$$\forall x \in H\text{-ra } 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,y).$$

következik, így mivel $\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z(x_0,y_0))}.$$

Megjegyzés[k] Tegyük fel, hogy a $z : H \longrightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}^2$) függvény eleget tesz az $F(x,y,z) = c$ implicit megadásnak, azaz $\forall (x,y) \in H$ esetén $(x,y,z(x,y)) \in X$ és $F(x,y,z(x,y)) = c$. F-nek a c függvényértékhez tartozó szinthalmaza: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = c\}$. A $z(x,y)$ függvény grafikonja: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z(x,y)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = c\}$. Tehát az F függvény c függvényértékhez tartozó szinthalmaza egybeesik $z(x,y)$ gráfjával.

Tétel A fentiekkel analóg feltételek mellett, ha $z(x_1,x_2,...,x_n)$ az $F(x_1,x_2,...,x_n,z(x_1,x_2,...,x_n)) = c$ egyenlettel implicit módon megadott függvény, akkor

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x_{01},x_{02},...,x_{0n}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_{01},x_{02},...,x_{0n},z(x_{01},x_{02},...,x_{0n}))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_{01},x_{02},...,x_{0n},z(x_{01},x_{02},...,x_{0n}))}.$$

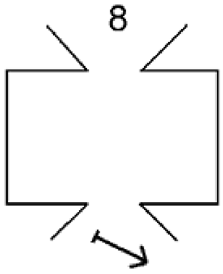
Példa Az $y(x,w)$ függvényt implicit módon definiálja az $f(x,y,w) = y^3x^2 + w^3 + yxw - 3 = 0$ egyenlet az $(1,1,1)$ pont egy környezetében. Számítsuk ki az $\frac{\partial y}{\partial x}$ parciális derivált értékét az $(1,1,1)$ pontban.

Megoldás A fenti képlet alapján

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,w) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x,w),w)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x,w),w)} = \frac{2y^3x + yw}{3y^2x^2 + xw},$$

vagyis $\frac{\partial y}{\partial x}(1,1) = -\frac{3}{4}$.

Csökkenő helyettesítési határarány A mikroökonómiában csökkenő helyettesítési határarány alatt azt értjük, hogy a jószágtérben bármely közömbösségi görbe mentén jobbra haladva, a közömbösségi görbe meredekségének abszolutértéke csökken. Ez nem ekvivalens azzal a kritériummal, hogy az $|MRS|$ x növekedésével csökken. Felmerül tehát a kérdés, hogy negatív meredekségű közömbösségi görbék esetén a csökkenő helyettesítési határarány feltevése, vajon milyen megszorításokat



5:

eredményez $\frac{\partial MRS}{\partial x}$ és $\frac{\partial MRS}{\partial y}$ -ra vonatkozólag? Rögzítsünk egy u valós számot, és legyen $y(x)$ az $U(x,y) = u$ egyenlet által meghatározott implicit függvény. Nyilván $\frac{dy(x)}{dx} = MRS(x, y(x))$. Ekkor a helyettesítés csökkenő határaránya éppen azt mondja ki, hogy a $z(x) = MRS(x, y(x))$ (negatív értékeket felvevő) függvény abszolut értéke csökkenő, vagyis $\frac{\partial z(x)}{\partial x} > 0$. A láncszabály és az implicit-függvény-tétel felhasználásával adódik, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial MRS}{\partial x} + \frac{\partial MRS}{\partial y} MRS > 0.$$

Nyilván az állítás megfordítása is igaz, vagyis ha a határhasznok mindenhol pozitívak, és mindenhol teljesül a fenti egyenlőtlenség, akkor a preferenciarendezés szigorúan konvex, vagyis teljesül a csökkenő helyettesítési határarány feltevése.

Feladat Lássuk be, hogy a $\frac{\partial MRS}{\partial x} + \frac{\partial MRS}{\partial y} MRS > 0$ feltétel pozitív határhasznok esetén a hasznosság függvény első és másodrendű deriváltjaival felírva az $U_x U_y U_{xy} > \frac{U_x^2 U_{yy} + U_y^2 U_{xx}}{2}$ ekvivalens (és szimmetrikus) alakba is írható!

7 VEKTORÉRTÉKŰ FÜGGVÉNYEK

7.1 A LÁNCSZABÁLY ÁLTALÁNOS ESETE

Sajnálatos módon a fent ismertetett láncszabályok, és az implicit függvények deriváltjait megadó képletek némelyike igencsak bonyolult. Ahogy láttuk, a láncszabály megjegyzését és alkalmazását némileg megkönnyítette a deriváltak vektorokkal való reprezentálása. Ebben a fejezetben az ott megkezdett úton egy kicsit továbblépünk, és látni fogjuk, hogy a lineáris algebrában megtanult mátrixműveletek alkalmazása lehetővé teszi számunkra, hogy a fenti formulákat egyszerűen megjegyezhető alakra hozzuk. Látni fogjuk, hogy a láncszabály legáltalánosabb alakjában formailag teljesen megegyezik az analízisből tanult egyváltozós valósértékű összetett függvények deriválásának szabályával, csak a benne szereplő változók alatt vektorokat, derivált helyett pedig a derivált mátrixát kell érteni. Hasonlóképpen, az implicit függvény-tétel általános esete ugyanúgy néz ki mint a mikroökonómiából ismert MRS-re vonatkozó képlet, csak parciális derivált helyett ismét a derivált mátrixot írva.

Definíció Az $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ $(x_1,x_2,...,x_p)\mapsto(y_1,y_2,...,y_n)$ függvény koordinátafüggvényei azok az $f_i:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ függvények, melyekre $f_i(x_1,x_2,...,x_p)=y_i$, $(i=1,2,...,n)$.

Megállapodás A továbbiakban f_i-vel az f függvény i-edik koordinátafüggvényét fogjuk jelölni.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ A továbbiakban szeretnénk bevezetni a többváltozós függvények deriváltjának fogalmát. Mint látni fogjuk az egyváltozós függvény deriváltjának fogalma csak kis módosítással alkalmazható. Itt a fő problémát az okozza, hogy többváltozós esetben a differenciahányados definiálásánál vektorral kellene osztanunk, ami nem értelmezhető. Ez némileg megnehezíti a differenciálhányados értelmezését.

Definíció Az $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ $(x_1,x_2,...,x_p)\mapsto(y_1,y_2,...,y_n)$ függvény deriváltja az $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^p$ pontban az a $Df(\mathbf{x}_0):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, melyre $\lim\limits_{|\mathbf{t}|\to 0}\frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{t})-f(\mathbf{x}_0)-Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{t}|}{|\mathbf{t}|}=0$ (ahol tetszőleges $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m$ esetén $|\mathbf{z}|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(z_i)^2}$).

Tétel (vektorértékű függvény deriváltjának mátrix reprezentációja) Legyen az $f:X\to\mathbb{R}^n$ $(x_1,x_2,...,x_p)\mapsto(y_1,y_2,...,y_n)$ fügvény differenciálható $X\subseteq\mathbb{R}^p$ belsejében, és legyen $\mathbf{x}_0\in X$ az X-nek belső pontja. Az f függvény deriváltjának mátrixa (Jacobi mátrix) az $\mathbf{x}_0$ pontban, az az $(n\times p)$-s mátrix, melynek i-edik sorában és j-edik oszlopában a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ parciális derivált $\mathbf{x}_0$-beli értéke áll, ahol f_i-vel az f függvény i-edik koordinátafüggvényét jelöljük.

A továbbiakban a $Df(\mathbf{x}_0)$ szimbólum jelöli magát a definícióban szereplő lineáris leképezést és a leképezéshez tartozó mátrixot is.

Elékeztető (mátrixok szorzása) Először definiáljuk egy sorvektor és egy oszlopvektor szorzatát a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

legyen

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3}\end{bmatrix}\text{ és }B=\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{2,1} & b_{2,2}\\ b_{3,1} & b_{3,2}\end{bmatrix}$$

Ekkor az

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{2,1} & b_{2,2}\\ b_{3,1} & b_{3,2}\end{bmatrix}$$

szorzatmátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában, az A mátrix i-edik sorából álló vektor, és a B

mátrix j-edik oszlopából álló vektorok szorzata áll. A szorzatmátrix ekkor egy 4×2 -es mátrix:

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \\ c_{4,1} & c_{4,2} \end{bmatrix}$$

Melynek pl. a második sorban, és első oszlopban álló eleme:

$$c_{2,1} = \begin{pmatrix} a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{pmatrix}.$$

A szorzási szabály megjegyzését segíti az alábbi ábra, amely a szorzatmátrix $c_{2,1}$ elemének kiszámítását szemlélteti:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \boxed{a_{2,1}} & \boxed{a_{2,2}} & \boxed{a_{2,3}} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{b_{1,1}} & b_{1,2} \\ \boxed{b_{2,1}} & b_{2,2} \\ \boxed{b_{3,1}} & b_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ \boxed{c_{2,1}} & c_{2,2} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \\ c_{4,1} & c_{4,2} \end{bmatrix}$$

Lássunk egy egyszerű példát:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 6+1\cdot 8 & 0\cdot 7+1\cdot 9 \\ 2\cdot 6+3\cdot 8 & 2\cdot 7+3\cdot 9 \\ 4\cdot 6+5\cdot 8 & 4\cdot 7+5\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{bmatrix}.$$

A mátrixok szorzásának szabályával kapcsolatban ld még: S-H: 382. oldal, 12.19. példa.

Tétel (Láncszabály) Legyen az $f : X \to \mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, ..., x_p) \mapsto (y_1, y_2, ..., y_n)$ függvény differenciálható $X \subset \mathbb{R}^p$ belsejében, a $g : Y \to \mathbb{R}^m$ $(y_1, y_2, ..., y_n) \mapsto (z_1, z_2, ..., z_m)$ legyen differenciálható $Y \subset \mathbb{R}^n$ belsejében, és tegyük fel, hogy $R_f \subseteq Y$. Legyen $\mathbf{x}_0 \in X$ az X belső pontja, és $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in Y$ az Y belső pontja. Ekkor az $F = g \circ f$ differenciálható $\mathbf{x}_0$-ban, és a $DF(\mathbf{x}_0)$ Jacobi-mátrix a g és f függvények Jacobi-mátrixának szorzata, vagyis $DF(\mathbf{x}_0) = Dg(\mathbf{y}_0) \cdot Df(\mathbf{x}_0) = Dg(f(\mathbf{x}_0)) \cdot Df(\mathbf{x}_0)$.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Az egyváltozós, de vektorértékű függvények koordinátafüggvényeit eddig is oszlopvektorba, a többváltozós függvények parciális deriváltjait pedig sorvektorba rendeztük. Ez az az eljárás azonban részben a képletek vizuális memorizálását, részben az egyváltozós analízissel való analógia felismerését szolgálta, és nem mondtuk meg, milyen értelemben tekinthetők ezek a vektorok deriváltaknak. Vegyük észre, hogy a láncszabály korábbi alakjaival ellentétben, itt – a lineáris algebra apparátusának hála – nem csak felismerhetővé vált az egyváltozós- és a többváltozós összetett függvény deriválási szabályai közti analógia, de azt is beláttuk, hogy az eddigiekben használt, fent említett oszlop és sorvektorok valóban a fenti értelemben deriváltaknak tekinthetők, pontosabban a derivált leképezések mátrix reprezentációjának. Látszólag egyszerűbb lett volna, ha már az kezdettől fogva ezeket a vektorokat neveztük volna deriváltaknak, és később nem egy leképezésként definiáltuk volna a deriváltat, hanem a leképezés mátrixaként. Ez is járható út lenne, de ebben az esetben viszont, a lineáris algebra aparátusának hatékony használatának érdekében, mindenképpen be kellene vezetni a derivált mátrixhoz tartozó leképezés fogalmát, vagyis az egyváltozós esettel való szorosabb analógián túl nem nyernénk semmit, másrészt a szakirodalomban az itt követett eljárás terjedt el.

Feladat Számítsuk ki a $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(x,y) \mapsto (xy, x^2y, y)$ és $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(u,v,w) \mapsto (u-v, uv-w)$ függvények Jacobi-mátrixait (x,y) és (u,v,w) függvényében. Valamint számítsuk ki $F \circ G$ összetett függvény a Jacobi-mátrixát a láncszabály segítségével (x,y) függvényében.

7.2 KOMPARATÍV STATIKA II.*

7.2.1 Komparatív statika alaptétele*

Tétel (Komparatív statika alaptétele, implicit függvény tétel) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ egy környezetében, $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$, valamint $D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ invertálható. Ekkor létezik $U \subseteq \mathbb{R}^p$ környezete $\mathbf{x}_0$-nak, és $V \subseteq \mathbb{R}^n$ környezete $\mathbf{y}_0$-nak, valamint egy $g : U \to V$ folytonosan differenciálható függvény, melyre teljesül, hogy
a) $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$,
b) $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ minden $\mathbf{x} \in U$ esetén,
c) a g függvény $\mathbf{x}_0$-beli deriváltjára teljesül, hogy: $Dg(\mathbf{x}_0) = -\left[D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\right]^{-1} \cdot D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Megjegyzés[k] A többváltozós vektorértékű függvények folytonos differenciálhatósága nem triviális fogalom, ennek részleteibe nem kívánunk belemenni, viszont a fogalmat, a tétel egyszerűbb alakban való kimondása érdekében nem kívántuk mellőzni. A tétel alkalmazásához elég anyit tudni, hogy egy vektorértékű többváltozós függvény pontosan akkor folytonosan differenciálható egy nyílt H halmazon, ha mindegyik koordinátafüggvényének mindegyik parciális deriváltja létezik, és azok folytonosak H-n. A probléma bonyolultságát jelzi, hogy az említett parciális deriváltak egy rögzített pontbeli folytonosságából nem követezik a függvény adott pontbeli folytonos differenciálhatósága.

Megjegyzés[m] A fenti formula előnye a könnyű megjegyezhetőség, hiszen ha vektorok helyett skalárokat írunk az f argumentumába, akkor a kétváltozós függvényre vonatkozó implicit függvény deriválási szabályát kapjuk, ami viszont az $MRS = -\frac{MU_x}{MU_y}$ képletével való analógia miatt szintén könnyen megjegyezhető, hiszen ez a képlet remélhetőleg mindenkinek, már mikroökonómia tanulmányainak elején a kisujjában van. A közgazdasági alkalmazásokban a tétel fenti formája nem túlságosan praktikus, mert általában a $Dg(\mathbf{x}_0)$ mátrixnak csak az egyik elemére vagyunk kiváncsiak, ehhez pedig felesleges kiszámolni a $[D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]^{-1}$ inverzmátrixot, ami önmagában is fáradtságos feladat lehet. Ezt a problémát orvosolja a következő formula, ami a fenti alakból a $D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ mátrixxal való balról való szorzással, valamint a mátrixszorzás szabályainak alkalmazásával egyszerűen kapható. A gyakorlati alkalmazásokban általában ezt használjuk:

Következmény $D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \cdot Dg(\mathbf{x}_0) = -D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, ahol $D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ $(n \times n)$-es, $Dg(\mathbf{x}_0)$ és $D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ pedig $(n \times p)$-s mátrix.

Ekkor a mátrixszorzás szabályaiból:

$$\left[\quad D_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \quad \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial g_n(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\partial x_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

Ahol az egyenlet bal oldalán található oszlopvektor a $Dg(\mathbf{x}_0)$ mátrixának, a jobb oldalon található oszlopvektor a $-D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ mátrixának i-edik oszlopa.

Megjegyzés$^{\text{m}}$ Ez a mátrixegyenlet valójában egy egyszerű lineáris egyenletrendszer, ahol a $\frac{\partial g_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$ parciális deriváltak az ismeretlenek, és ez az egyenletrendszer már középiskolás eszközökkel megoldható.

Megjegyzés$^{\text{m}}$ A közgazdasági alkalmazásokban $\mathbf{x}$ az exogén változók vektora, $\mathbf{y}$ az endogén változók vektora, $\frac{\partial g_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$ az a multiplikátor, amely megmutatja, hogy közelítőleg mennyivel tér el az endogén változó vektorának j-edik elemének új egyensúlyi értéke az $(\mathbf{y}_0)_j$ kezdeti egyensúlyi értékéhez képest, ha az exogén változók vektorának i-edik eleme egységnyivel megváltozik.

Megjegyzés$^{\text{m}}$ $\frac{\partial g_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$ értéke valamely konkrét (i, j) kombinációra a lineáris algebrából ismert Crémer-szabály felhasználásával könnyebben meghatározható (ez lényegében a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy mátrixszámításon alapuló módszere), de erre az implicit függvény tétel alkalmazásához nincs feltétlenül szükség, a fenti tétel alkalmazásához a lineáris algebrából elegendő a mátrixok szorzásának szabályát ismerni.

Feladat Tekintsük az alábbi paraméteres egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + y^3 &= 3 \\ x^3y + by^2 - 1 &= a. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy az egyenletrendszernek az $a = 1$ és $b = 1$ paraméterértékek mellett megoldása: $x = 1$, $y = 1$. Tegyük fel, hogy $a = 1$ és $b = 1$. Az a paraméter egységnyi megváltozásának hatására közelítőleg mennyit változik az egyenletrendszer y változóra vonatkozó megoldása?

Megoldás Alkalmazzuk az implicit függvény tételt az

$$f(a, b, x, y) = \left(ax^2 + bxy + y^3 - 3, x^3y + by^2 - 1 - a\right)$$

vektorértékű függvényre. A függvény koordinátafüggvényei:

$$\begin{aligned} f_1(a, b, x, y) &= ax^2 + bxy + y^3 - 3 \\ f_2(a, b, x, y) &= x^3y + by^2 - 1 - a \end{aligned}$$

Írjuk fel a függvény (x, y) vektorra vonatkozó deriváltjának

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Jacobi-mátrixát:

$$\begin{bmatrix} 2ax + by & bx + 3y^2 \\ 3x^2y & x^3 + 2by \end{bmatrix}.$$

Ez az $(1, 1, 1, 1)$ helyen:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ez a mátrix invertálható, ezért léteznek az $(1,1)$ pont valamely környezetében az

$$f(a,b,x,y)=0$$

egyenletrendszer által implicit módon meghatározott $x(a,b)$ és $y(a,b)$ függvények, tehát alkalmazható az implicit függvény tétel. Mivel

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial a}\\ \frac{\partial f_2}{\partial a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2\\ -1\end{bmatrix}$$

ami az $(1,1,1,1)$ helyen:

$$\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},$$

ezért felírhatjuk az

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 3 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial x(1,1)}{\partial a}\\ \frac{\partial y(1,1)}{\partial a}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

egyenletrendszert. Ennek megoldása $\frac{\partial x(1,1)}{\partial a}=\frac{7}{3}$ és $\frac{\partial y(1,1)}{\partial a}=-2$, vagyis a keresett érték a -2.

7.2.2 Implicit függvény módszer*

A közgazdasági tankönyvek egy része a komparatív statikai vizsgálatok elvégzésekor egyáltalán nem hivatkozik az implicitfüggvény tételre. Tudnunk kell azonban, hogy az ezzel ekvivalens módszerek használatának a feltételeit is az implicit függvény tétel adja meg. Az alább ismertetett módszer lényege, hogy nem használjuk az implicit függvény deriválási szabályát, hanem minden egyes alkalommal levezetjük azt a szóbanforgó speciális esetre. Elsőre talán furcsán hangzik, de a középszintű tankönyvekben talán ez a leggyakrabban használt módszer. Lássunk erre egy egyszerűsített – de a korábbi eredményekkel való könnyű összevethetőség végett – általánosan megfogalmazott példát. Tegyük fel, hogy $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható függvényre és $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$ pontra teljesülnek az implicit függvény tétel feltételei, és hogy $\mathbf{x}_0$ egy környezetében léteznek az

$$\begin{aligned}f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)&=0\\ f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)&=0\\ f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)&=0\end{aligned}$$

egyenletrendszer által implicit módon meghatározott $y_1^*(x_1,x_2)$, $y_2^*(x_1,x_2)$ és $y_3^*(x_1,x_2)$ folytonosan differenciálható függvények, melyek azt mutatják, hogy hogyan függ a fenti egyenletrendszer y_1^*,y_2^* és y_3^* megoldása az (x_1,x_2) vektortól. Határozzuk meg a $\frac{\partial y_1^*(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ deriváltat az $\mathbf{x}_0$ pontban! Helyettesítsük be ezeket a függvényeket az egyenletrendszerünkbe.

$$\begin{aligned}f_1(x_1,x_2,y_1^*(x_1,x_2),y_2^*(x_1,x_2),y_3^*(x_1,x_2))&\equiv 0\\ f_2(x_1,x_2,y_1^*(x_1,x_2),y_2^*(x_1,x_2),y_3^*(x_1,x_2))&\equiv 0\\ f_3(x_1,x_2,y_1^*(x_1,x_2),y_2^*(x_1,x_2),y_3^*(x_1,x_2))&\equiv 0\end{aligned}$$

Itt az egyenlőség helyett szereplő három vonal az azonosság jele, ami azt fejezi ki, hogy az egyenlőség az x_1 és x_2 változók minden értékére teljesül, vagyis a bal oldalak, mint x_1 és x_2 függvényei azonosak az azonosan 0 függvénnyel. Mivel a két oldalon szereplő függvények azonosak, ezért a deriváltjuk is ugyanaz, tehát lederiválhatjuk parciálisan a két oldalt x_1 szerint, és az így kapott deriváltak is megegyeznek $\mathbf{x}_0$ pontban. A láncszabály alkalmazásával tehát:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} &= 0\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_3}\frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} &= 0\\
\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\frac{\partial f_3}{\partial y_1}\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_3}{\partial y_2}\frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_3}{\partial y_3}\frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} &= 0
\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial y_3}\frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_3}{\partial y_1}\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_3}{\partial y_2}\frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}+\frac{\partial f_3}{\partial y_3}\frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} &= -\frac{\partial f_3}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer az $\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$ és $\frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$ ismeretlenekre már könnyen megoldható.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ A fenti egyenletrendszert mátrix alakban felírva:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial y_2^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial y_3^*(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\end{bmatrix}$$

Vagyis éppen az implicit függvény tétel fenti következményét vezettük le.

7.2.3 Differenciálok módszere*

A most ismertetett módszer alkalmazásának feltételei a fentivel azonosak. Ennek a módszernek az előnye az implicit függvény módszerrel szemben, hogy a helyes használatához sok esetben nem kell ismerni a láncszabályt. Induljunk ki ismét a fenti

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) &= 0\\
f_2(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) &= 0\\
f_3(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszerből, és jelöljük most egyszerűen minden i-re $y_i(x_1,x_2)$-vel az előző módszernél tárgyalt implicit függvényeket. Definiáljuk egy tetszőleges n-változós $f(x_1,x_2,x_3,...x_n)$ függvény df-el jelölt ún. differenciálját a következőképpen:

$$df=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}dx_3+...+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n.$$

Vegyük észre, hogy ez a definíció kissé homályos, hiszen nem mondtuk meg mit jelent például a dx_1 szimbólum. Interpretálhatjuk pl. úgy a df és dx_i szimbólumokat, mint a függvényérték, illetve változók "végtelen kis" megváltozása, vagy úgy hogy minden változóról feltesszük, hogy az időnek függvénye, ily módon a dx_i az $x_i(t)$ idő szerinti deriváltjának a rövidítése, df pedig az idő szerinti teljes derivált. Ezek az interpretációk támpontot jelentenek pl. a fenti definíció intuitív elfogadásához, és a módszer egyes lépéseinek megjegyzéséhez, de mint látni fogjuk, a módszer használata, és a módszer helyességének megértése szempontjából ezeknek az interpretációknak nincs jelentősége. Ne nagyon rágódjunk tehát az itt használt szimbólumok jelentésén, próbáljuk intuitív módon kezelni őket, és koncentráljunk magára az eljárásra, ahogy ezeket a szimbólumokat kezeljük. Bár a differenciálnak létezik precíz matematikai definíciója, mi a módszer egyes lépéseinek indoklásában – ahogy a módszer használói is általában – nem erre, hanem az olvasó intuíciójára alapozunk. Elég azt belátnunk, hogy ez a módszer szükségszerűen a fenti egzaktabb módszerrel kapottal azonos eredményre vezet. Ezt az alábbiakban be is bizonyítjuk.

Tegyük fel hogy most is $\frac{\partial y_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$ és $\frac{\partial y_3(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$ értékekre vagyunk kiváncsiak. Vegyük az egyenletrendszer differenciáljait, vagyis $i = 1, 2, 3$ esetén:

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}dy_2\frac{\partial f_i}{\partial y_3}dy_3.$$

Írjuk fel a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3}dy_3 &= 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3}dy_3 &= 0 \\
\frac{\partial f_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y_3}dy_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Ezt a lépést, ha nagyon akarjuk, interpretálhatjuk a következőképpen: feltételezzük hogy x_i megváltozása esetén az y_i változók olyan módon változnak, hogy a fenti

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2, y_1, y_2, y_3) &= 0 \\
f_2(x_1,x_2, y_1, y_2, y_3) &= 0 \\
f_3(x_1,x_2, y_1, y_2, y_3) &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszert ismét kielégítik a változók új értékei, ezért feltehető, hogy $df_i = 0$ minden i-re.

De a változókat az idő függvényének tekinve interpretálhatjuk úgy is, hogy feltételezzük: az egyensúly az idő minden pillanatában fennáll, ezért a fenti egyenletrendszer minden egyenlete t szerint azonosság, tehát vehetjük mindkét oldal t szerinti deriváltját, ami a jobb oldal esetén nulla.

Mivel csak x_1 változásának az y_i változók egyensúlyi értékére vonatkozó hatására vagyunk kiváncsiak, ezért feltehető, hogy $dx_2 = 0$. Vagyis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3}dy_3 &= 0 \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3}dy_3 &= 0 \\
\frac{\partial f_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y_3}dy_3 &= 0,
\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3}dy_3 &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 \\
\frac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_3}dy_3 &= -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 \\
\frac{\partial f_3}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}dy_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y_3}dy_3 &= -\frac{\partial f_3}{\partial x_1}dx_1.
\end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszerben a dy_i-t és a dx_1-et változóként, illetve paraméterként kezeljük, ezért oszthatunk minden egyenletet dx_1-gyel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_3}\frac{dy_3}{dx_1} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_3}\frac{dy_3}{dx_1} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f_3}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \frac{\partial f_3}{\partial y_3}\frac{dy_3}{dx_1} &= -\frac{\partial f_3}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

Tekintsük a $\frac{dy_i}{dx_1}$ szimbólumokat ismeretleneknek, és oldjuk meg az egyenletrendszert!

Ugyanakkor az $y_i(x_1,x_2)$ implicit függvény differenciálja

$$dy_i = \frac{\partial y_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2}dx_2$$

ahol $dx_2 = 0$, vagyis minden i-re, $dy_i = \frac{\partial y_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}dx_1$, amiből $\frac{\partial y_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} = \frac{dy_i}{dx_1}$, vagyis a fenti egyenletrendszer megoldásával valóban a keresett $\frac{\partial y_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}$ parciális deriváltakat kaptuk meg.

A két módszer ekvivalenciája ezek után már nyilvánvaló, hiszen $\frac{dy_i}{dx_1}$ ismeretlenekkel a fenti egyenletrendszer paraméterei ugyanazok mint az implicit differenciálás módszerével kapott egyenletrendszer paraméterei, tehát a megoldások meg kell hogy egyezzenek.

Előfordulhat, hogy a módszer alkalmazása során pl. egy $f(x,y)g(x,y)$, vagy $f(x,y)/g(x,y)$ alakú függvény totális differenciálját kell kiszámolnunk, és az eredményt f és g parciális deriváltjai segítségével kívánjuk kifejezni. Ezt a láncszabály segítségével a definíció alapján könnyen megtehetjük. Ahogy azonban említettük, a módszer egyik vonzereje abban áll, hogy nem kell tudni hozzá a láncszabályt. Erre az esetre gondolva, meg szokás adni a következő szabályokat:

$d(f+g) = df + dg, \quad d(fg) = (df)\,g + f\,(dg), \quad df(g) = f'(g)\,dg, \quad d\frac{f}{g} = \frac{(df)g - f(dg)}{g^2}.$

Megjegyzés[k] A dx és hasonló ún. infinitezimális mennyiségekkel való számolásnak létezik többféle szigorú megalapozása is. Az egyik, az elsősorban Cauchy, Riemann, és Weierstrass által a 19. században szilárd alapokra fektetett és az oktatásban is szokásosan elterjedt ún. sztenderd analízisen alapul. Egy másik pedig az 1960-as években Abraham Robinson által kidolgozott ún. nem-sztenderd analízisen. Ez utóbbi a differenciál- és integrálelméletet nem a Weierstrassék által használt határértékfogalomra építik, hanem a valós számoknak egy olyan kiterjesztéséből indul ki, amely tartalmaz infinitezimális számokat. Ezek olyan számok, amelyek nem feltétlenül azonosak a nullával, de minden valós számnál kisebbek, és minden negatív számnál nagyobbak. A nem-sztenderd analízis tehát nem a határértékfogalmon, hanem a Newton és Leibnitz által a 17. században is használt infinitezimális mennyiségek precíz definícióján alapul.

Feladat Oldjuk meg az előző feladatot az implicit függvény módszerrel!

Megoldás Tegyük fel, hogy léteznek az $y_1(x_1, x_2)$ és $y_2(x_1, x_2)$ implicit függvények az x_0 valamely környezetében, melyekre minden x_1 és x_2 értékek esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - y_1(x_1, x_2) + y_2(x_1, x_2)\, y_1(x_1, x_2) &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + y_1(x_1, x_2) - 4y_2(x_1, x_2) &= -3, \end{aligned}$$

vagyis írhatjuk hogy

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - y_1(x_1, x_2) + y_2(x_1, x_2)\, y_1(x_1, x_2) &\equiv 0 \\ x_1 - 2x_2 + y_1(x_1, x_2) - 4y_2(x_1, x_2) &\equiv -3. \end{aligned}$$

Mivel az azonosságok mindkét oldalát deriválva újból azonosságot kapunk, deriváljuk parciálisan x_1 szerint mindkét azonosság mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{\partial y_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} y_1(x_1, x_2) + y_2(x_1, x_2) \frac{\partial y_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} &\equiv 0 \\ 1 + \frac{\partial y_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} - 4\frac{\partial y_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Behelyettesítve a konkrét $\mathbf{x}_0$ és $y_1(\mathbf{x}_0)$, $y_2(\mathbf{x}_0)$ értékeket:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{\partial y_1(0,0)}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2(0,0)}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1(0,0)}{\partial x_1} &= 0 \\ 1 + \frac{\partial y_1(0,0)}{\partial x_1} - 4\frac{\partial y_2(0,0)}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned}$$

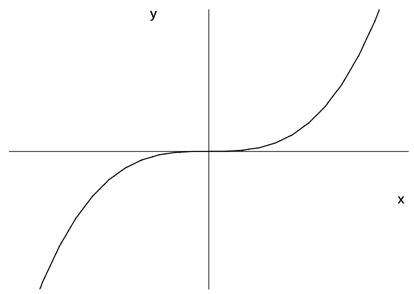
vagyis

$$\begin{aligned} 3 + \frac{\partial y_2(0,0)}{\partial x_1} &= 0 \\ 1 + \frac{\partial y_1(0,0)}{\partial x_1} - 4\frac{\partial y_2(0,0)}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned}$$

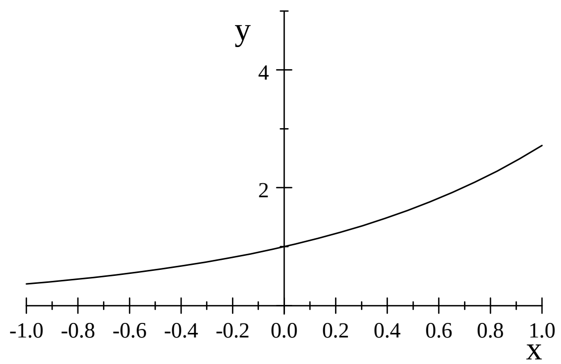
Az egyenletrendszer megoldása ismét: $\frac{\partial y_1(0,0)}{\partial x_1} = -13$ és $\frac{\partial y_2(0,0)}{\partial x_1} = -3$.

8 TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKEI

Említettük, hogy a zárt intervallumon értelmezett egyváltozós differenciálható függvények körében a zérus derivált nem szükséges feltétele a szélsőértéknek. Pl. az $[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ függvény maximuma e, és ebben a pontban a derivált pozitív. Ld.: alábbi ábra.



6: 7.2. ábra



7.1. ábra

Viszont tudjuk, hogy egy korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit. Látni fogjuk, hogy ez több dimenzió esetén is így van. Analízis tanulmányainkból azt is tudjuk, hogy a zérus derivált nem is elégséges feltétele a szélsőértéknek, még akkor sem, ha az értelmezési tartomény nyílt. Példaként elég csak az $y = x^3$ függvényre gondolnunk. Ld.: alábbi ábra.

Ennek a függvénynek az $x = 0$ helyen *nyeregpontja* van. Egyváltozós esetben pl. a második derivált szigorú negativitása biztosítja a maximum létezését. Látni fogjuk, hogy többváltozós esetben a feltétel egy kicsit bonyolultabb.

Ebben a fejezetben elsősorban a nyílt halmazon értelmezett függvények szélsőértékeivel, azok létezésének feltételeivel fogunk foglalkozni. A zárt halmazon való optomalizálás speciális eseteivel a feltételes szélsőértékszámítás című fejezetekben fogunk foglalkozni.

8.1 ALAPFOGALMAK

Definíció Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény globális maximumhelye, ha $\forall \mathbf{x} \in X$-re $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú globális maximumhelye, ha $\forall \mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ esetén $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény lokális maximumhelye, ha $\exists r > 0$, hogy $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, r)$ esetén $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú lokális maximumhelye, ha $\exists r > 0$, hogy $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, r) \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ esetén $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény globális minimumhelye, ha $\forall \mathbf{x} \in X$-re $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú globális minimumhelye, ha $\forall \mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ esetén $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény lokális minimumhelye, ha $\exists r > 0$, hogy $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, r)$ esetén $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú lokális minimumhelye, ha $\exists r > 0$, hogy $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, r) \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ esetén $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Szemléletesen:

$\mathbf{x}^*$ az f függvény globális maximumhelye, ha f értéke sehol sem nagyobb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú globális maximumhelye, ha f értéke az $\mathbf{x}^*$-tól különböző pontokban mindenhol kisebb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény lokális maximumhelye, ha $\mathbf{x}^*$-nak van olyan környezete, melyben f értéke nem nagyobb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú lokális maximumhelye, ha $\mathbf{x}^*$-nak van olyan környezete, melyben az $\mathbf{x}^*$-tól különböző pontokban f értéke kisebb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény globális minimumhelye, ha f értéke sehol sem kisebb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú globális minimumhelye, ha f értéke az $\mathbf{x}^*$-tól különböző pontokban mindenhol nagyobb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény lokális minimumhelye, ha $\mathbf{x}^*$-nak van olyan környezete, melyben f értéke nem kisebb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

$\mathbf{x}^*$ az f függvény szigorú lokális minimumhelye, ha $\mathbf{x}^*$-nak van olyan környezete, melyben az $\mathbf{x}^*$-tól különböző pontokban f értéke nagyobb $f(\mathbf{x}^*)$-nál.

Következmény Ha $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális maximumhelye, akkor $\mathbf{x}^*$ az f függvény lokális maximumhelye.

Ha $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális minimumhelye, akkor $\mathbf{x}^*$ az f függvény lokális minimumhelye.

Definíció Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$.

Az f függvény maximum értéke, vagy maximuma $f(\mathbf{x}^*)$, ha $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális maximumhelye.

Az f függvény minimum értéke, vagy minimuma $f(\mathbf{x}^*)$, ha $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális minimumhelye.

$\mathbf{x}^*$ az f globális szélsőértékhelye, ha $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális maximumhelye, vagy globális minimumhelye. Ekkor $f(\mathbf{x}^*)$ az f globális szélsőértéke.

$\mathbf{x}^*$ az f lokális szélsőértékhelye, ha $\mathbf{x}^*$ az f függvény lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye. Ekkor $f(\mathbf{x}^*)$ az f lokális szélsőértéke.

Tétel Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ olyan hogy $R_f \subseteq Y$, és legyen $F : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Képezzük a

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F(f(x))$$

összetett függvényt. Ekkor

(1) ha F monoton növekvő és $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális maximumhelye, akkor $\mathbf{x}^*$ a g függvény globális maximumhelye.

(2) ha F szigorúan monoton növekvő, akkor $\mathbf{x}^*$ az f függvénynek pontosan akkor globális maximumhelye, ha $\mathbf{x}^*$ a g függvény globális maximumhelye.

(3) ha F monoton növekvő és $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális minimumhelye, akkor $\mathbf{x}^*$ a g függvény globális minimumhelye.

(4) ha F szigorúan monoton növekvő, akkor $\mathbf{x}^*$ az f függvénynek pontosan akkor globális minimumhelye, ha $\mathbf{x}^*$ a g függvény globális minimumhelye.

Bizonyítás (1) $\mathbf{x}^*$ az f globális maximumhelye $\iff \forall \mathbf{x} \in X$-re $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*) \overset{F \text{ monoton növekvő}}{\Longrightarrow} \forall \mathbf{x} \in X$-re $F(f(\mathbf{x})) \leq F(f(\mathbf{x}^*)) \overset{g \text{ definíciója}}{\iff} \forall \mathbf{x} \in X$-re $g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}^*) \iff \mathbf{x}^*$ a g globális maximumhelye.

(2) $\mathbf{x}^*$ az f globális maximumhelye $\iff \forall \mathbf{x} \in X$-re $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*) \overset{F \text{ szigorúan monoton növekvő}}{\iff} \forall \mathbf{x} \in X$-re $F(f(\mathbf{x})) \leq F(f(\mathbf{x}^*)) \overset{g \text{ definíciója}}{\iff} \forall \mathbf{x} \in X$-re $g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}^*) \iff \mathbf{x}^*$ a g globális maximumhelye.

(3), (4) hf

Tétel (Weierstrass) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f-nek létezik globális maximumhelye és globális minimumhelye.

Megjegyzés$^{\mathbf{m}}$ Korlátos halmaz alatt olyan halmazt értünk, amely az origó valamely véges sugarú környezetében helyezkedik el.

Megjegyzés$^{\mathbf{m}}$ Ha Weierstrass tételének valamelyik feltétele nem teljesül, akkor nem feltétlenül létezik a függvénynek mindkét globális szélsőértékhelye. Ráadásul ezek a feltételek elégséges, de nem szükséges feltételek.

Példa zárt, de nem korlátos halmazon értelmezett folytonos függvényre, melynek nem létezik mindkét globális szélsőértékhelye:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Ennek az f függvénynek $(0, 0)$ globális minimumhelye, de f-nek nem létezik globális maximumhelye. Ld. 1. ábra.

Példa korlátos, de nem zárt halmazon értelmezett folytonos függvényre, melynek nem létezik mindkét globális szélsőértékhelye:

$$f : \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Ennek az f függvénynek $(0, 0)$ globális minimumhelye, de f-nek nem létezik globális maximumhelye.

Példa korlátos és zárt halmazon értelmezett, de nem folytonos függvényre, melynek nem létezik mindkét globális szélsőértékhelye:

$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \mathrm{tg} x & \text{, ha } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{, ha } x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$$

Ennek az f függvénynek nem létezik se globális minimumhelye, se globális maximumhelye.

Példa olyan függvényre, amely nem elégíti ki Weierstrass tételének feltételeit, de létezik minkét globális szélsőértékhelye:

$$f : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \sin x.$$

Ennek az f függvénynek $\forall y \in \mathbb{R}$ esetén $\left(-\frac{\pi}{2}, y\right)$ globális minimumhelye és $\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ globális maximumhelye.

8.2 FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKHELYE AZ ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY BELSŐ PONTJÁBAN

8.2.1 I. Szükséges feltételek

Ha egy függvényre teljesülnek Weierstrass tételének feltételei, akkor biztosak lehetünk benne, hogy létezik mindkét globális szélsőértékhelye. Hogyan kereshetjük meg ezeket adott függvény esetén? Egy f függvény globális szélsőértékhelye az f értelmezési tartományának vagy belső pontja, vagy határpontja lehet. A következő tétel arra az estre vonatkozik, amikor a szélsőértékhely D_f belső pontja.

Tétel (globális szélsőértékhely elsőrendű szükséges feltételei) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^* \in X$ belső pontja X-nek, és tegyük fel, hogy f minden változója szerint parciálisan differenciálható $\mathbf{x}^*$-ban. Ekkor ha $\mathbf{x}^*$ globális szélsőértékhelye f-nek, akkor minden $i \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0$.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}^*$ az f függvény globális maximumhelye. Legyen $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tetszőleges, a továbbiakban rögzített, és legyen $g(x_i)$ az f-nek az $\mathbf{x}^*$-on áthaladó i-edik parciális függvénye, azaz

$$\forall x_i \in D_g \quad g(x_i) = f\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\right),$$

ekkor

$$D_g = \left\{x_i \in \mathbb{R} : \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\right) \in X\right\} \qquad (*)$$

A bizonyítás a következő három lépésből áll:

1. megmutatjuk, hogy mivel $\mathbf{x}^*$ belső pontja X-nek, azért x_i^* belső pontja D_g-nek,
2. belátjuk, hogy mivel $\mathbf{x}^*$ globális maximumhelye f-nek, azért x_i^* globális maximumhelye g-nek,
3. az egyváltozós g függvényre vonatkozó elsőrendű feltétel alkalmazásával belátjuk, hogy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0$.

1. Feltevés szerint $\mathbf{x}^*$ belső pontja X-nek, azaz

$$\exists \varepsilon > 0 \quad B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \subseteq X. \qquad (**)$$

A továbbiakban rögzítsük ezt az ε-t. Lássuk be hogy ekkor

$$B(x_i^*, \varepsilon) \subseteq D_g, \qquad (***)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy x_i^* belső pontja D_g-nek. Ezt a tartalmazást, következőképpen láthatjuk be. A $(**)$ sorból következik, hogy $\forall x_i \in B(x_i^*, \varepsilon)$ esetén

$$d(x_i, x_i^*) = |x_i - x_i^*| < \varepsilon,$$

ezért $\forall x_i \in B(x_i^*, \varepsilon)$ esetén ha $\mathbf{y} = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\right)$, akkor

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) = \sqrt{0 + ...0 + (x_i - x_i^*)^2 + 0... + 0} = |x_i - x_i^*| < \varepsilon,$$

vagyis $\mathbf{y} = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\right) \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \subseteq X$, vagyis $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*\right) \in X$ és ez $\forall x_i \in B(x_i^*, \varepsilon)$ esetén teljesül, ezért $(*)$ miatt

$$B(x_i^*, \varepsilon) \subseteq D_g.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha $\mathbf{x}^*$ belső pontja X-nek, akkor x_i^* belső pontja D_g-nek.

2. Feltevés szerint $\mathbf{x}^*$ globális maximumhelye f-nek, azaz $\forall \mathbf{x} \in X$-re $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$, amiből következik, hogy

$$\forall x_i \in D_g\text{-re } g(x_i) = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*) \leq f(\mathbf{x}^*) = g(x_i^*),$$

így x_i^* globális maximumhelye g-nek.

3. Mivel az x_i^* belső pontja D_g-nek és globális maximumhelye g-nek, azért az egyváltozós g függvényre vonatkozó elsőrendű feltételből $g\prime(x_i^*) = 0$ következik. Ebből felhasználva, hogy az f i-edik parciális deriváltja $\mathbf{x}^*$-ban megegyezik az $\mathbf{x}^*$-on áthaladó parciális függvényének (g-nek) az x_i^*-beli deriváltjával (azaz $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = g\prime(x_i^*)$), az következik, hogy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0$.

Példa ld.: S-H: 17.2. példa.

Defoníció Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^* \in X$. $\mathbf{x}^*$ az f függvény stacionárius pontja, ha minden $i \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0$.

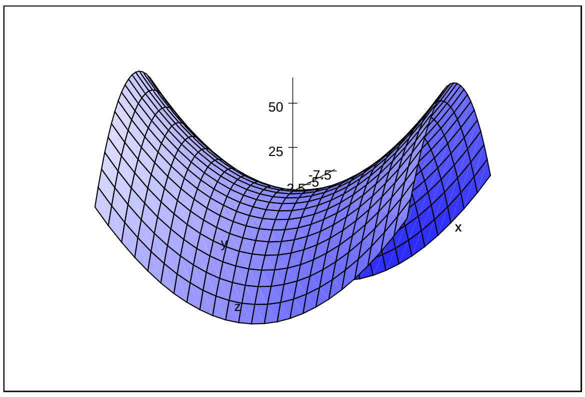
Példa ld.: S-H: 17.3. példa.

Megjegyzés$^{\mathrm{m}}$ Tehát úgy is fogalmazhatunk, hogy ha a fenti tétel feltételeinek megfelelő f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja globális szélsőértékhely, akkor ez a pont az f stacionárius pontja.

Igaz-e, hogy ha $\mathbf{x}^*$ az f stacionárius pontja, akkor (lokális vagy globális) szélsőértékhely is? Nem, ellenpélda az egyváltozós függvények köréből: $f(x) = x^3$, $x^* = 0$.

Definíció Egy függvény értelmezési tartományának egy pontját a függvény nyeregpontjának nevezzük, ha az, az adott függvénynek stacionárius pontja, de nem lokális szélsőértékhelye.

Példa $f(x, y) = x^2 - y^2$



7.3. ábra

Következmény Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x^*, y^*) \in X$ az X belső pontja, amely f-nek stacionárius pontja, azaz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0.$$

Ekkor (x^*, y^*) f-nek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye, vagy nyeregpontja.

8.2.2 II. Elégséges feltételek

Az alábbi gondolatmenet következő tételünk előkészítését szolgálja.

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x^*, y^*) \in X$ az X belső pontja. Ha (x^*, y^*) lokális maximumhelye f-nek, akkor x^* a $g(x) = f(x, y^*)$ parciális függvény lokális maximumhelye, és y^* a $h(y) = f(x^*, y)$ parciális függvény lokális maximumhelye, ráadásul x^* belső pontja D_g-nek és y^* belső pontja D_h-nak. Az egyváltozós g, illetve h parciális függvényre vonatkozó első- és másodrendű szükséges feltételek:

$$x^* \text{ a } g \text{ lokális maximumhelye} \implies g'(x^*) = 0,\ g''(x^*) \leq 0,$$

$$y^* \text{ a } h \text{ lokális maximumhelye} \implies h'(y^*) = 0,\ h''(y^*) \leq 0.$$

Ebből, felhasználva az f parciális deriváltjai és a parciális függvények deriváltjai közötti kapcsolatot a következő szükséges feltételeket kapjuk:

$$(x^*, y^*) \text{ lokális maximumhelye } f\text{-nek} \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \text{ és} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) \leq 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) \leq 0. \end{cases}$$

Vajon megadható-e a másodrendő deriváltak segítségével, a szélsőérték egy elégséges feltétele? Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x^*, y^*) \in X$ az X belső pontja, és legyenek $g(x) = f(x, y^*)$ és $h(y) = f(x^*, y)$ az f függvény (x^*, y^*)-on áthaladó parciális függvényei. Az egyváltozós g, illetve h parciális függvények szélsőértékhelyeire vonatkozó első- és másodrendű elégséges feltételek:

$$g'(x^*) = 0,\ g''(x^*) < 0 \implies x^* \text{ a } g \text{ lokális maximumhelye},$$

$$h'(y^*) = 0,\ h''(y^*) < 0 \implies y^* \text{ a } h \text{ lokális maximumhelye}.$$

Vajon abból, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) < 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) < 0,$$

következik-e, hogy (x^*, y^*) az f lokális maximumhelye? A következő példában látni fogjuk, hogy a válasz: nem, azaz

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \text{ és} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) < 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) < 0. \end{array} \right\} \not\Rightarrow (x^*, y^*) \text{ lokális maximumhelye } f\text{-nek}.$$

Példa Legyen f a következő kétváltozós függvény:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto 3xy - x^2 - y^2,$$

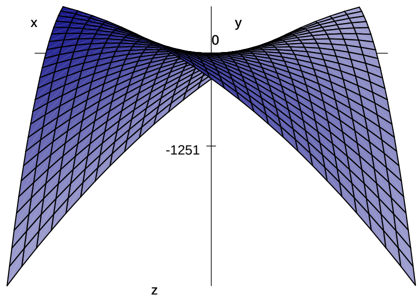
és legyen $(x^*, y^*) = (0, 0)$. Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \text{ és } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2 < 0,$$

ezért 0 lokális maximumhelye mindkét parciális függvénynek. Megmutatjuk, hogy $(0,0)$ nem lokális maximumhelye f-nek. Vizsgáljuk meg az f függvény viselkedését az $x=y$ egyenes mentén!

$$f(x,x) = 3xx - x^2 - x^2 = x^2,$$

így 0 minimumhelye a $g(x)=f(x,x)$ függvénynek. Ld.: alábbi ábra.



7.4. ábra

Tétel (lokális szélsőérték elégséges feltételei) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek első- és másodrendű parciális deriváltjai folytonosak, és legyen $(x^*,y^*) \in X$ az X olyan belső pontja, amely f-nek stacionárius pontja. Ekkor

(1) Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) < 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*)\right)^2 > 0$, akkor (x^*,y^*) az f lokális maximumhelye.

(2) Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) > 0$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*)\right)^2 > 0$, akkor (x^*,y^*) az f lokális minimumhelye.

(3) Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*)\right)^2 < 0$, akkor (x^*,y^*) az f nyeregpontja.

(4) Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*)\right)^2 = 0$, akkor (x^*,y^*) az f lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye, vagy nyeregpontja.

Definíció Az f kétváltozós függvény (x^*,y^*) pontbeli másodrendű parciális deriváltjaiból álló

$$D^2 f(x^*,y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) \end{bmatrix}$$

mátrixot az f függvény (x^*,y^*) pontbeli *Hesse-mátrixának* nevezzük.

Megjegyzés[m] Vegyük észre, hogy a fenti tételben szereplő

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*,y^*) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*,y^*) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*,y^*)\right)^2$$

kifejezés, valójában a Hesse-mátrix determinánsa.

Megjegyzés* A fenti tétel könnyen bizonyítható a Taylor-formula maradéktagjának egyik változója szerinti teljes négyzetté alakításával. Belátható ugyanis, hogy a stacionárius pontra felírt formulában a fent felsorolt első három esetben a maradéktag rendre negatív, pozitív illetve "előjelet vált", vagyis a függvény gráfja rendre a stacionárius pontbeli érintősík alat, felett helyezkedik el, ill. metszi az síkot.

Példa ld: S-H: 17.7. példa.

Feladat Legyen $f(x, y) = ax^2 + by^2 + c$, ahol a, b, és c valós paraméterek, valamint tudjuk, hogy a és b ellentétes előjelűek. Mutassuk meg, hogy az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van és az nyeregpont.

Megoldás $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2ax$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2by$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2b$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$. Az

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2ax = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2by = 0 \end{aligned}$$

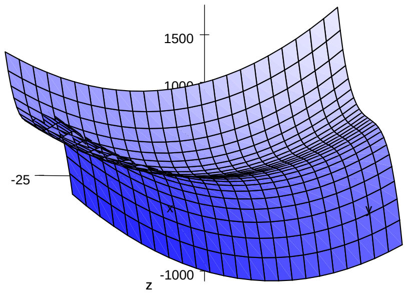
egyenletrendszert megoldva kapjuk hogy a függvény stacionárius pontja: $(x, y) = (0, 0)$. A Hesse-mátrix determinánsa: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)\right)^2 = 4ab - 0 = 4ab$. Mivel a feltevés szerint a és b ellentétes előjelűek, vagyis $ab < 0$, ezért $4ab < 0$, tehát a fenti tétel alapján a $(0, 0)$ pont a függvény nyeregpontja.

Feladat Osztályozzuk $f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 + 1$ függvény stacionárius pontjait.

Megoldás $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 24x^2 + 2y - 6x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 48x - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2$. Az

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 24x^2 + 2y - 6x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x + 2y = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert megoldva kapjuk hogy a függvény stacionárius pontjai: $(x_1, y_1) = (0, 0)$ és $(x_2, y_2) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Az első pont esetén $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)\right)^2 = -12 - 4 = -16 < 0$, tehát a $(0, 0)$, pont a függvény nyeregpontja. A második pont esetén $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 10 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 2 > 0$, és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})\right)^2 = 20 - 2 = 18 > 0$, tehát az $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ pont az f függvény minimum helye. Ld. alábbi. ábra.



7.5. ábra

Feladat Osztályozzuk az alábbi függvény stacionárius pontjait:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{27},$$

ahol x és y egyike sem nulla.

Megoldás

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy-(x+y)y}{x^2y^2} + \frac{y}{27} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{27},$$

és hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{27}.$$

Az

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{27} &= 0 \\ -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{27} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert megoldva kapjuk a függvény stacionárius pontjait. Az egyenleteket átrendezve:

$$\begin{aligned} x^2y &= 27 \\ xy^2 &= 27, \end{aligned}$$

Az első egyenletből a másodikat kivonva, és szorzattá alakítva:

$$xy(x-y) = 0.$$

Mivel x és y egyike sem nulla, ezért $x = y$ amit a fenti egyenletek valamelyikébe helyettesítve kapjuk, hogy $x = y = 3$. Az egyetlen stacionárius pont tehát a $(3,3)$ pont. Mivel $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}$, és $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{27}$, ezért a Hesse-mátrix a $(3,3)$ pontban

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{27} \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa pozitív, valamint $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ és $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ értéke a $(3,3)$ pontban $\frac{2}{27}$ vagyis pozítív, ezért az f függvénynek a $(3,3)$ pont minimumhelye.

Feladat Osztályozzuk az alábbi függvény stacionárius pontjait:

$$f(x,y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$$

Eredmény $(0,0)$ és $(0,4)$ inflexiós pont, $(1,2)$ lokális minimum.

8.3 KONVEXITÁS ÉS SZÉLSŐÉRTÉK

Definíció $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, ha

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \ \forall \lambda \in [0,1] \text{ esetén } \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in X.$$

Példa Konvex halmazok $\mathbb{R}^n$-ben: $\varnothing$, $\mathbb{R}^n$, az egyelemű halmazok, ε-sugarú környezetek, stb.

Példa ld: S-H: 17.11. példa.

Állítás Legyen I tetszőleges indexhalmaz. Ekkor

$$\text{ha } \forall i \in I \quad A_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ konvex} \implies \bigcap_{i \in I} A_i \text{ konvex.}$$

Bizonyítás Legyenek $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} A_i$ és $\lambda \in [0,1]$ tetszőlegesek, a továbbiakban rögzítettek. Mivel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} A_i$, ebből az következik, hogy

$$\forall i \in I \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_i$$

ebből mivel minden A_i konvex halmaz, azért

$$\forall i \in I \quad \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in A_i,$$

így teljesül, hogy

$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Definíció Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ n-változós függvény.

f konvex függvény, ha $X = D_f$ konvex halmaz és $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \forall \lambda \in [0,1]$ esetén $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$.

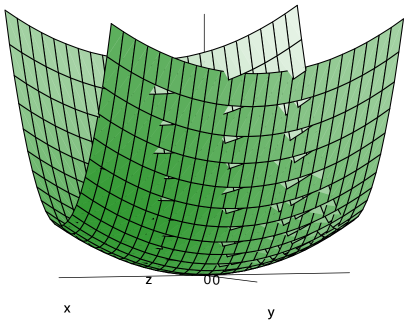
f szigorúan konvex függvény, ha $X = D_f$ konvex halmaz és $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ $\forall \lambda \in]0,1[$ esetén $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$.

f konkáv függvény, ha $X = D_f$ konvex halmaz és $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \forall \lambda \in [0,1]$ esetén $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$.

f szigorúan konkáv függvény, ha $X = D_f$ konvex halmaz és $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ $\forall \lambda \in]0,1[$ esetén $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) > \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$.

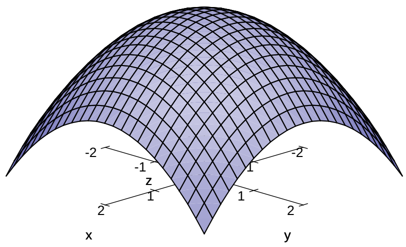
Következmény f konvex függvény $\iff$ $(-f)$ konkáv függvény.

Példa Példa szigorúan konvex függvényre. Az $\mathbb{R}^2$-en értelmezett $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ függvény szigorúan konvex.



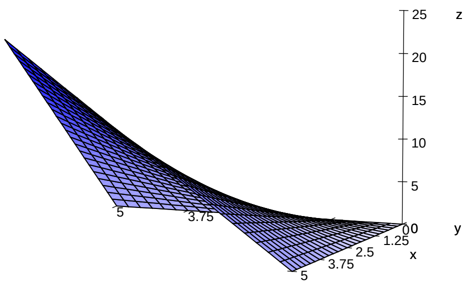
7.6. ábra

Példa Példa szigorúan konkáv függvényre, az $\mathbb{R}^2$-en értelmezett $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ függvény.



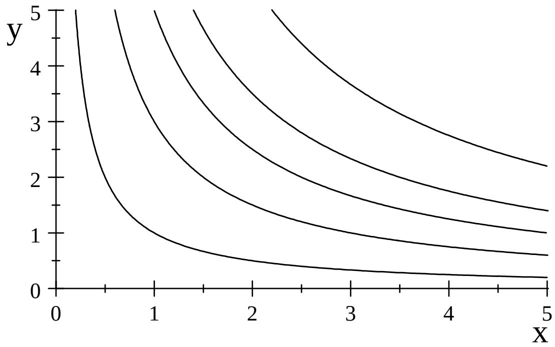
7.7. ábra

Példa A mikroökonómiában gyakran használt, a nemnegatív síknegyeden értelmezett $U(x, y) = xy$ hasznosság-függvény se nem konvex, se nem konkáv. Ld. alábbi ábra.



7.8. ábra

A helyettesítés csökkenő határaránya azonban ebben az esetben is teljesül, ugyanis a függvény szinthalmazai, vagyis a közömbösségi görbék ebben az esetben is kovexek, ld.: alábbi ábra. Konkáv függvény esetén ez mindig teljesül.



7.9. ábra

Tétel Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ minden változója szerint folytonosan parciálisan differenciálható függvény, és legyen $\mathbf{x}^* \in X$ az értelmezési tartomány belső pontja. Ekkor

(1) ha f konkáv, akkor

$$\mathbf{x}^* \text{ az } f \text{ globális maximumhelye} \iff \mathbf{x}^* \text{ az } f \text{ stacionárius pontja,}$$

(2) ha f konvex, akkor

$$\mathbf{x}^* \text{ az } f \text{ globális minimumhelye} \iff \mathbf{x}^* \text{ az } f \text{ stacionárius pontja.}$$

9 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁS I.

Zárt halmazon való maximalizálás (minimalizálás) Eddigi módszereink a függvények szélsőértékhelyeinek megkeresésére leginkább akkor célravezetőek, ha a függvény nyílt halmazon van értelmezve, vagy legalábbis előre tudjuk, hogy a szélsőértékhely az értelmezési tartomány belső pontja. Vegyük például az egyváltozós esetet. Egy zárt intervallumon értelmezett egyváltozós függvény esetében a szélsőértékhelyeknek két típusa képzelhető el. Az értelmezési tartomány belső pontja, vagy határpontja. A fentiek alapján abban az esetben, ha a szélsőértékhely határpont, akkor ez nem lesz feltétlenül a maximalizálandó (minimalizálandó) függvény stacionárius pontja. Így hát az eddigi módszereket figyelembevéve megállapíthatjuk, hogy egy zárt intervallumon értelmezett egyváltozós függvény maximumhelyének megkeresése a következőképpen történhet. Megkeressük a szóbanforgó függvény stacionárius pontjait, majd kiszámoljuk ezekben a pontokban a függvény helyettesítési értékét, és összehasonlítjuk a függvénynek, az értelmezési tartomány végpontjaiban vett helyettesítési értékeivel. Ahol a legmagasabb (legalacsonyabb) a függvényérték, ott lesz a maximumhely (minimumhely). Többváltozós függvények zárt halmazon való maximalizálására azonban az eddigi módszereink nem alkalmazhatóak, hiszen már a legegyszerűbb esetben is (amikor az értelmezési tartomány több pontból álló "összefüggő" halmaz) az értelmezési tartomány határa végtelensok pontból áll, ezért a fenti – fügvényértékek összehasonlításán alapuló – eljárás véges sok lépésben nem érhet véget. Ahogy látni fogjuk, a közgazdaságtanban azonban legtöbbször nem nyílt halmazon maximalizálunk (minimalizálunk), ezért szükség van eddigi módszereink továbbfejlesztésére. A továbbiakban kizárólag ezzel a témával fogunk foglakozni.

9.1 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁS – A KORLÁTOZÓ FELTÉTEL EGYENLET

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in R_g$. Az f függvény $g(\mathbf{x}) = c$ korlát melletti feltételes maximumfeladata általános alakban:

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

Az f függvény $g(\mathbf{x}) = c$ korlát melletti feltételes minimumfeladata általános alakban:

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

Célfüggvény: f, korlát: $g(\mathbf{x}) = c$, ha $\mathbf{x}^*$ a feladat megoldása, akkor $f(\mathbf{x}^*)$ az optimális célfüggvényérték.

Az egyenlettel korlátozott feltételes szélsőértékszámítási feladat megoldásának módszerei:

1. a korlátból valamelyik változó kifejezése (ha ez lehetséges) és behelyettesítése a célfüggvénybe, így a probléma visszavezetése feltétel nélküli szélsőértékszámítási feladatra,
2. érintési feltétellel (ha ez célhoz vezet),
3. Lagrange módszerével.

Tétel (Lagrange) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ minden változójuk szerint parciálisan differenciálható függvények, melyeknek a parciális deriváltjai folytonosak, $\mathbf{x}^* \in X$ az X belső pontja, $c \in R_g$. Tegyük fel, hogy $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*)$ legalább egy i-re nem zérus. Ha $\mathbf{x}^*$ az f-nek a $g(\mathbf{x}) = c$ feltétel melletti szélsőértékhelye, akkor $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, melyre $\mathbf{x}^*$ stacionárius pontja az $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda [g(\mathbf{x}) - c]$ függvénynek.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \neq 0$. Ekkor az implicit-függvény-tétel alapján a $g(\mathbf{x}) = c$ egyenlet implicit módon definiálja az $x_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ függvényt $(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)$ egy környezetében.

Legyen $\mathbf{x}^*$ az f-nek a $g(\mathbf{x}) = c$ feltétel melletti szélsőértékhelye. Ekkor $(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)$ szélsőértékhelye a $h(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}))$ $(n-1)$-változós függvénynek, vagyis

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}\text{-re } \frac{\partial h}{\partial x_i}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*\right) = 0. \qquad (*)$$

A láncszabályt alkalmazva, $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$-re

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1})) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1})) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\end{aligned}$$

Ebből és $(*)$-ból:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*, x_n(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)\right) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*, x_n(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*)\right) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*\right),\end{aligned}$$

azaz

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*\right). \qquad (**)$$

A $\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*\right)$ derivált az implicit módon adott függvények deriválási szabálya alapján kapható, felhasználva, hogy feltevés szerint $\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \neq 0$:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*\right) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*, x_n\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*\right))}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*, x_n\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_{n-1}^*\right))} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)}.$$

Ezt $(**)$-ba behelyettesítve: $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$-re

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)},$$

amiből átrendezéssel adódik, hogy $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$-re

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*). \qquad (***)$$

Legyen λ a következő hányados:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)}.$$

Ekkor az $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda\left[g(\mathbf{x}) - c\right]$ függvény i-edik változó szerinti parciális deriváltja $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$-re:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Felhasználva $(***)$-ot:

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}\text{-re } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = 0,$$

azaz $\mathbf{x}^*$ stacionárius pontja az $\mathcal{L}$ függvénynek.

Megjegyzés[k] Az $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda\left[g(\mathbf{x}) - c\right]$ függvény a

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases} \quad \text{illetve} \quad \begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = c \end{cases}$$

feladat Lagrange-függvénye, λ a Lagrange szorzó.

Útmutató a Lagrange-módszer alkalmazásához (kétváltozós eset) A

$$\begin{cases} \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases} \quad \text{illetve} \quad \begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

feladatokat, a fenti tétel alapján tehát, feltéve hogy a módszer valóban alkalmazható, a következő módon oldjuk meg:

1. Felírjuk a $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda\left[g(x,y) - c\right]$ Lagrange-függvényt.
2. Parciálisan deriváljuk $\mathcal{L}(x,y)$ függvényt x és y változók szerint, majd azokat egyenlővé tesszük nullával.
3. A 2. pontban kapott egyenlethez még hozzávesszük a korlátozó feltétel egyenletét, és megoldjuk az így kapott

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= c \end{aligned}$$

egyenletrendszert x, y és λ ismeretlenekre.

Példa ld.: S-H: 18.3. példa és 18.4. példa.

Feladat 18.2 fejezet gyakorlatai.

Feladat Keressük az $f(x,y) = 2x + y$ függvény maximumát a $g(x,y) = x^2 + y^2 = 4$ feltétel mellett!

Megoldás Először ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Lagrange-tétel feltételei. Első lépésben mutassuk meg, hogy létezik a problémának megoldása. Azon pontok halmaza a síkon, amelyek kielégítik az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletet, korlátos és zárt halmaz, – hiszen folytonos függvény szinthalmaza zárt – ezért a Weierstrass-tétel szerint a folytonos f függvény ezen a halmazon felveszi a maximumát, tehát a maximumproblémának létezik megoldása. Jelöljük ezt (x^*, y^*)-gal. Most ellenőrizzük, hogy a Lagrange-tétel többi feltétele teljesül-e! Mindkét függvény értelmezési tartománya az egész sík, ennek pedig a feltétel melletti szélsőértékhely belső pontja. Az is igaz, hogy $\frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x}$ vagy $\frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}$ nem nulla. Ha ugyanis mindkettő nulla, azaz $2x^* = 0$ és $2y^* = 0$, akkor $(x^*, y^*) = (0,0)$ lenne, de ez lehetetlen, mert a $(0,0)$ pont nem elégíti ki az $x^2 + y^2 = 4$ korlátozó feltételt. Ezzel beláttuk, hogy az optimumban nem lehet $\frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x}$ és $\frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}$ mindegyike nulla. Tehát a Lagrange-tétel feltételei teljesülnek.

Ezért létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy az (x^*, y^*) pont az $\mathcal{L}(x,y) = 2x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ Lagrange-függvénynek stacionárius pontja.

Vagyis:
I. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = 2 - 2\lambda x = 0$
II. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0.$
Továbbá teljesül hogy
III. $x^2 + y^2 = 4$
I. -ből $x = \frac{1}{\lambda}$, és II. -ből $y = \frac{1}{2\lambda}$ vagyis $x = 2y$. Ezt III. -ba helyettesítve: $5y^2 = 4$, vagyis $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, és $x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$. Ebből a két lehetséges megoldás: $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ és $(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$. A célfüggvény értéke az első pont esetén nagyobb tehát a maximumprobléma megoldása a $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ pont.

Feladat Keressük az $f(x,y) = 2x + y$ függvény maximumát a $g(x,y) = e^x + e^y = 3$ feltétel mellett, ahol az f és a g függvények értelmezési tartománya a $[-2\ln 3, \ln 3] \times [-2\ln 3, \ln 3]$ zárt halmaz!

Megoldás Mivel e^x és e^y pozitívak, ezért nyilván minden, a $e^x + e^y = 3$ feltételnek eleget tevő helyen $x < \ln 3$ és $y < \ln 3$, ezért a feltételes maximumhelyen $2x + y < 3\ln 3$. Ha x vagy y valamelyike egyenlő lenne a feltételes maximumhelyen $-2\ln 3$-al, akkor az x -re és y-ra vonatkozó előbbi becslés alapján $2x + y < 0$, vagyis a feltételes maximumérték negatív lenne, ami lehetetlen, hiszen pl az $(x,y) = (\ln\frac{3}{2}, \ln\frac{3}{2})$ hely megfelel a $e^x + e^y = 3$ feltételnek és a célfügvény itt pozitív éréket vesz fel, tehát a feltételes maximumérték is pozitív kell legyen. Ezek szerint a feltételes maximumhely eleme a $(-2\ln 3, \ln 3) \times (-2\ln 3, \ln 3)$ nyílt halmaznak, vagyis az f és a g függvények értelmezési tartományának belső pontja. Mivel az $e^x + e^y = 3$ feltételnek eleget tevő $\mathbb{R}^2$-beli pontok halmaza zárt, ezért enek a halmaznak a $[-2\ln 3, \ln 3] \times [-2\ln 3, \ln 3]$ halmazzal való metszete is zárt, ezért a Weierstrass-tétel szerint a folytonos f függvény ezen a halmazon felveszi a maximumát, tehát a maximumproblémának létezik megoldása. Jelöljük ezt $(x^*, y^*)-$ gal. Az is igaz, hogy $\frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x}$ vagy $\frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial y}$ nem nulla, ugyanis mindkettő nyílván pozítív. Tehát a Lagrange-tétel feltételei teljesülnek.

Ekkor tehát létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy az (x^*, y^*) pont az $\mathcal{L}(x,y) = 2x + y - \lambda(e^x + e^y - 3)$ Lagrange-függvénynek stacionárius pontja.

Vagyis:
I. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = 2 - \lambda e^x = 0$
II. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = 1 - \lambda e^y = 0.$
Továbbá teljesül hogy
III. $e^x + e^y = 3$
I. -ből $x = \ln\frac{2}{\lambda}$, és II. -ből $y = \ln\frac{1}{\lambda}$. Ezt III. -ba helyettesítve: $e^{\ln\frac{2}{\lambda}} + e^{\ln\frac{1}{\lambda}} = 3$, vagyis $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = 3$, vagyis $\lambda = 1$. Ebből a megoldás: $(\ln 2, 0)$.

Példa Tekintsük a mikroökonómia egyik jólismert haszonmaximalizálási problémáját. Maximalizáljuk az $U(x,y) = x^a y^{1-a}$ ($x \geq 0$ és $y \geq 0$) hasznossági függvényt a $p_x x + p_y y = m$ feltétel mellett, ahol $p_x > 0$, $p_y > 0$, és $m > 0$ paraméterek.

Megoldás A maximum létezik, mivel a megoldást elegendő ($x \geq 0$ és $y \geq 0$ miatt) a költségvetési egyenes nemnegatív síknegyedbe eső szakaszán keresni, ez pedig korlátos és zárt halmaz, és a Weierstrass-tétel miatt a folytonos $U(x,y)$ függvény itt felveszi a maximumát. Ha (x^*, y^*) megoldása az optimumproblémának, akkor x^* és y^* egyike sem nulla, hiszen ennél bármely pozitív x^* és y^* kombináció magasabb hasznosságot eredményez. Ezért feltehető hogy az $U(x,y)$ és $g(x,y) = p_x x + p_y y$ függvények értelmezési tartománya az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\ ,\ y > 0\}$ nyílt halmaz, aminek tehát az

(x^*, y^*) pont szükségképpen belső pontja. Mivel minden (x, y)-ra $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = p_x$, és $p_x > 0$, ezért $\frac{\partial g(x^*,y^*)}{\partial x} > 0$, vagyis a Lagrange-tétel feltételei teljesülnek.

A Lagrange függvény: $\mathcal{L}(x, y) = x^a y^{1-a} - \lambda(p_x x + p_y y - m)$. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ll} I. & \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = a x^{a-1} y^{1-a} - \lambda p_x = 0 \\ II. & \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = (1-a) x^a y^{-a} - \lambda p_y = 0 \\ III. & p_x x + p_y y = m \end{array}$$

Ahol I. és II. azt fejezi ki, hogy az optimális megoldás stacionárius pontja a $\mathcal{L}(x, y)$ Lagrange függvénynek.

Az egyenletrendszer megoldása: $\lambda = (\frac{a}{p_x})^a (\frac{1-a}{p_y})^{1-a}$, $x = \frac{am}{p_x}$, $y = \frac{(1-a)m}{p_y}$.

Az alábbi példák azt bizonyítják, hogy a Lagrange-tétel kimondásában szereplő feltételek nem hagyhatók el.

Példa Alkalmazható-e a következő optimumprobléma megoldására a Lagrange-módszer:

$$\begin{cases} \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 + y^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Megoldás Ekkor a Lagrange-függvény $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x - 1)$. Az

$$\begin{array}{ll} I. & \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \\ II. & \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = 2y = 0 \\ III. & x = 1 \end{array}$$

egyenletrendszer megoldása $(x, y, \lambda) = (1, 0, 2)$, azonban vegyük észre, hogy ez nem megoldása a fenti maximumproblémának. A Lagrange-tétel itt azért nem alkalmazható, mert a problémának egyáltalán nincs megoldása, hiszen az $x = 1$ feltétel mellett a célfüggvény felülről nem korlátos, márpedig a megoldás létezése a Lagrange-tétel egyik feltétele.

Példa Alkalmazható-e a következő optimumprobléma megoldására a Lagrange-módszer:

$$\begin{cases} \min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 + y \\ y^3 = 0 \end{cases}$$

Megoldás Ekkor a Lagrange-függvény $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y - \lambda y^3$. Az

$$\begin{array}{ll} I. & \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = 2x = 0 \\ II. & \frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = 1 - 3\lambda y^2 = 0 \\ III. & y^3 = 0 \end{array}$$

egyenletrendszernek azonban nincs megoldása. Azonban könnyen látható, hogy a célfüggvény adott feltétel melleti minimumhelye a $(0, 0)$ pont. Vajon a Lagrange-tétel melyik feltétele nem teljesül?

Feladat Keressük az $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 2y$ függvény minimumát a $g(x,y) = x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ feltétel mellett, ahol az f és a g függvények értelmezési tartománya a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmaz.

Eredmények $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Feladat Keressük az $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 2y$ függvény minimumát a $g(x,y) = 2x + y = 1$ feltétel mellett, ahol az f és a g függvények értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

Eredmények $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

Feladat Oldjuk meg az alábbi feltételes szélsőértékszámítási-problémát:

$$\begin{cases} \min\limits_{x>0, y>0} x + y \\ x + \frac{1}{x} = y \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy a Lagrange-módszer valóban alkalmazható!

Eredmény $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$

A Lagrange-szorzó közgazdasági jelentése A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a kétváltozós célfüggvények esetére szorítkozunk, de az eredmények n-változós esetre általánosíthatóak. A

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} f(x,y) \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

feltételes szélsőértékszámítási feladat megoldása függ a korlátban szerplő c paraméter értékétől. Megvizsgáljuk, hogy differenciálható célfüggvény esetén hogyan változik a célfüggvény optimális értéke a c értékének változásával. Tegyük fel, hogy a c paraméter minden értékére egyértelműen létezik a fenti feltételes szélsőértékszámítási feladatnak megoldása. Jelölje $x^*(c)$ és $y^*(c)$ a feladat megoldását a c adott értékére. Ez azt jelenti, hogy a

$$x^* : R_g \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad y^* : R_g \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvényekre teljesül, hogy

$$\forall c \in R_g \quad f\left(x^*(c), y^*(c)\right) = \max_{x,y,g(x,y)=c} f(x,y).$$

Tegyük fel, hogy az $x^*(c)$ és $y^*(c)$ függvények differenciálhatóak, és legyen f^* az a függvény, amely c minden lehetséges értékéhez az f célfüggvény adott c melletti optimális értékét rendeli:

$$f^* : R_g \longrightarrow \mathbb{R} \quad c \mapsto f\left(x^*(c), y^*(c)\right).$$

Ennek az f^* függvénynek a neve: *optimumérték-függvény*, vagy egyszerűen *értékfüggvény*. Végül rendelje a

$$\lambda : R_g \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvény a c paraméter lehetséges értékeihez azt Lagrange-szorzót, mellyel adott c mellett a feladat optimális megoldása egyúttal a Lagrange függvény stacionárius pontja.

Azt akarjuk meghatározni, hogy hogyan változik a célfüggvény optimális értéke a c értékének változásával. Ehhez tekintsük az $f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$ optimumérték-függvény deriváltját! Alkalmazzuk először a láncszabályt!

$$\text{Lagrange tétele} \implies$$
$$\implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*,y^*)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x^*,y^*)=0 \implies$$
$$\implies \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) \text{ és } \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*)$$

$$\begin{aligned}
\frac{df^*}{dc}(c) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(c),y^*(c))\cdot\frac{dx^*}{dc}(c)+\frac{\partial f}{\partial y}(x^*(c),y^*(c))\cdot\frac{dy^*}{dc}(c) \quad \overset{\downarrow}{=} \\
&= \lambda(c)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(c),y^*(c))\cdot\frac{dx^*}{dc}(c)+\lambda(c)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x^*(c),y^*(c))\cdot\frac{dy^*}{dc}(c) = \\
&= \lambda(c)\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(c),y^*(c))\cdot\frac{dx^*}{dc}(c)+\frac{\partial g}{\partial y}(x^*(c),y^*(c))\cdot\frac{dy^*}{dc}(c)\right] \underset{\text{láncszabály}}{\underset{\uparrow}{=}} \\
&= \lambda(c)\cdot\frac{dg}{dc}(x^*(c),y^*(c)) \quad \underset{g(x^*(c),y^*(c))\equiv c \implies \frac{dg}{dc}(x^*(c),y^*(c))\equiv 1}{\underset{\uparrow}{=}} \quad \lambda(c).
\end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{df^*}{dc}(c) = \lambda(c).$$

Emiatt a Lagrange-szorzót a közgazdasági alkalmazásokban szokás árnyékárnak nevezni.

Példa A fogyasztó optimumfeladata:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} U(x,y) \\ p_x x + p_y y = m \end{cases}$$

m jövedelem mellett az optimális kosár: $(x^*(m), y^*(m))$ (a jövedelem-ajánlati görbe egy pontja), a célfüggvény optimális értéke: $U(x^*(m), y^*(m))$. A fenti eredményt alkalmazva:

$$\begin{aligned}
\lambda(m) &= \frac{dU}{dm}(x^*(m),y^*(m)) = \lim_{\Delta m \longrightarrow 0}\frac{U(x^*(m+\Delta m),y^*(m+\Delta m)) - U(x^*(m),y^*(m))}{\Delta m} \approx \\
&\approx U(x^*(m+1),y^*(m+1)) - U(x^*(m),y^*(m)),
\end{aligned}$$

azaz körülbelül λ-val nő a fogyasztó hasznossága, ha a jövedelem egy kis egységgel növekszik.

9.2 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS – A KORLÁTOZÓ FELTÉTEL EGYENLETRENDSZER

Tétel (Lagrange) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és $g_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ minden változójuk szerint parciálisan differenciálható függvények, melyeknek a parciális deriváltjai folytonosak, $\mathbf{x}^* \in X$ az X belső pontja, $c_1 \in R_{g_1}$ és $c_2 \in R_{g_2}$. Tegyük fel, hogy a $(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*), ..., \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*))$ és $(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*), ..., \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*))$ vektorok lineárisan függetlenek. Ha $\mathbf{x}^*$ az f-nek a $g_1(\mathbf{x}) = c_1$ és $g_2(\mathbf{x}) = c_2$ feltételek melletti szélsőértékhelye, akkor $\exists\lambda_1 \in \mathbb{R}$ és $\exists\lambda_2 \in \mathbb{R}$, hogy $\mathbf{x}^*$ stacionárius pontja az $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1[g_1(\mathbf{x}) - c_1] - \lambda_2[g_2(\mathbf{x}) - c_2]$ függvénynek.

Feladat S-H. 18. 5 fejezet gyakorlatai.

Feladat Tekintsük a következő problémát:

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

Megoldás Az $x^2+y^2+z^2=1$ egyenletet kielégítő pontok halmaza (gömbfelület) korlátos és zárt halmaz $\mathbb{R}^3$-ban, ha ezt metsszük az $x-y-z=1$ egyenletű síkkal, akkor ez a metszet szintén korlátos és zárt halmaz. A Weierstrass-tétel miatt az $f(x,y,z)=x+y+z$ folytonos függvény ezen a halmazon felveszi a minimumát. Ekkor a Lagrange függvény:

$$\mathcal{L}(x,y,z)=x+y+z-\lambda_1\left[x^2+y^2+z^2-1\right]-\lambda_2\left[x-y-z-1\right].$$

Az (x^*,y^*,z^*) optimumhely ennek stacionárius pontja, ezért keressük az alábbi egyenletrendszer megoldását:

$$\begin{array}{ll} I. & \frac{\partial\mathcal{L}(x,y,z)}{\partial x}=1-2\lambda_1 x-\lambda_2=0 \\ II. & \frac{\partial\mathcal{L}(x,y,z)}{\partial y}=1-2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ III. & \frac{\partial\mathcal{L}(x,y,z)}{\partial z}=1-2\lambda_1 z+\lambda_2=0 \\ IV. & x^2+y^2+z^2=1 \\ V. & x-y-z=1 \end{array}$$

II.-t kivonva III.-ból: $2\lambda_1(y-z)=0$. Ekkor vagy $\lambda_1=0$, vagy $y-z=0$. Az előbbi nem lehetséges, mert ekkor I.-ből $\lambda_2=1$ és II.-ből $\lambda_2=-1$ ami ellentmondás, tehát $y-z=0$, vagyis $y=z$. Ebből és V.-ből $x-2y=1$, vagyis $x=2y+1$, ezt IV.-be helyettesítve $6y^2+4y=0$. Ennek megoldása $y_1=0$ és $y_2=-\frac{2}{3}$.

A megoldások tehát: $(1,0,0)$ és $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$. Az ezekhez a pontokhoz tartozó függvényértékek: $f(1,0,0)=1$ és $f(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})=-\frac{5}{3}$. Annak belátásához, hogy a feltételes szélsőérték-számítási problémánk megoldása a $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ pont, még be kell látni, hogy az optimumban a $(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*),\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*),...,\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*))$ és $(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*),\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*),...,\frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*))$ vektorok, vagyis esetünkben a $(2x^*,2y^*,2z^*)$ és a $(1,-1,-1)$ vektorok lineárisan függetlenek. Ha ez nem így volna, létezne egy $\lambda\in\mathbb{R}$ melyre teljesül, hogy az egyik vektor a másik λ-szorosa, vagyis $(\lambda 2x^*,\lambda 2y^*,\lambda 2z^*)=(1,-1,-1)$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda 2x^*=1$, $\lambda 2y^*=-1$ és $\lambda 2z^*=-1$. Ebből: $x^*=\frac{1}{2\lambda}$, $y^*=-\frac{1}{2\lambda}$ és $z^*=-\frac{1}{2\lambda}$. Ezt V. -be helyettesítve $\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{2\lambda}=1$, amiből $\lambda=\frac{3}{2}$. Amiből $x^*=\frac{1}{3}$, $y^*=-\frac{1}{3}$ és $z^*=-\frac{1}{3}$, de ez nem elégíti ki a IV. egyenletet. Tehát az adott korlátozó feltételek mellett nincs olyan pont amelyre az $(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*),\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*),...,\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*))$ és $(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*),\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*),...,\frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*))$ vektorok lineárisan összefüggőek lennének, tehát az optimumban is teljesül a kívánt lineáris függetlenség, ebből pedig következik hogy a kapott $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ pont valóban megoldása a problémánknak. Vegyük észre, hogy a $(\frac{\partial g_1}{\partial x_1},\frac{\partial g_1}{\partial x_2},...,\frac{\partial g_1}{\partial x_n})$ és $(\frac{\partial g_2}{\partial x_1},\frac{\partial g_2}{\partial x_2},...,\frac{\partial g_2}{\partial x_n})$ vektorok függetlenségét nem a $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ pontban kell ellenőrizni, hiszen elképzelhető lenne, hogy az optimumban nem teljesül a függetlenség, és ekkor a Lagrange-módszerrel kapott $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ hármas nem feltétlenül szolgáltatna megoldást az optimumproblémánkra, hiába teljesülne ott a szóbanforgó függetlenség.

Feladat Tegyük fel, hogy a

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} 2x^2+y^2+z^2 \\ 2x+3y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

feltételes szélsőérték-problémának létezik megoldása. Bizonyítsa be, hogy a Lagrange-módszer alkalmazható a probléma megoldására. Keresse meg a megoldást a Lagrange-módszer segítégével!

Eredmény $(\frac{1}{12}, \frac{3}{20}, \frac{23}{60})$

Feladat Próbálja meg szemléletesen belátni, hogy a fenti problémának valóban létezik megoldása. Próbálja meg térben alkalmazni a mikroökonómiában gyakran alkalmazott grafikus gondolatmenetet: az $f(x, y, z) = 2x^2+y^2+z^2$ függvény szinthalmazai, az origo körüli, x-tengely mentén lapított gömbök, a feltételben szereplő két egyenlet pedig a térben egy-egy síkot határoz meg, melyek metszete egy egyenes.

Feladat Tegyük fel, hogy a

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} 2x + y + z \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

feltételes szélsőérték-problémának létezik megoldása. Bizonyítsa be, hogy a Lagrange-módszer alkalmazható a probléma megoldására. Keresse meg a megoldást a Lagrange-módszer segítségével!

Eredmény $(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2})$

10 KOMPARATÍV STATIKA III.

10.1 BURKOLÓ-TÉTEL, AVAGY A SZÉLSŐÉRTÉK PARAMÉTERTŐL VALÓ FÜGGÉSE

Az edigiekben vizsgált

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} f(x, y) \\ g(x, y) = c \end{cases}$$

feltételes szélsőértékszámítási feladat speciális esete a

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} f(x, y, r) \\ g(x, y, r) = 0 \end{cases}$$

paraméteres szélsőérték-számítási feladatnak. Ennek a paraméteres szélsőérték-számítási feladatnak a megoldása során az r paraméter adott értékéhez keressük az (x, y) azon értékét, amely a korlát mellett maximalizálja a célfüggvény értékét. A paraméteres szélsőérték-számítási feladatok általános alakjai:

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \qquad \text{illetve} \qquad \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \\ g_j(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 0 \qquad j = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$. Megvizsgáljuk, hogy ezek megoldása, pontosabban az f függvény maximum értéke hogyan függ a paraméter(ek) értékétől.

10.1.1 A paraméteres feltétel nélküli szélsőérték-számítási feladat

Tekintsük a

$$\max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r})$$

feladatot, ahol $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} \in R \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : X \times R \longrightarrow \mathbb{R}$ minden változója szerint parciálisan differenciálható $(n+k)$-változós függvény, melynek a parciális deriváltjai is folytonosak.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{r}$ paraméter minden egyes értékére egyértelműen létezik $f(\mathbf{x},\mathbf{r})$-et maximalizáló $\mathbf{x}$, azaz

$$\forall \mathbf{r} \in R\text{-re } \exists! \mathbf{x}^* \in X, \text{ hogy } f(\mathbf{x}^*,\mathbf{r}) = \max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r}).$$

Ekkor értelmezhető egy $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ függvény, amely az $\mathbf{r}$ paraméter minden egyes értékéhez az ilyen tulajdonságú $\mathbf{x}$-et rendeli:

$$\mathbf{x}^* : R \longrightarrow X \qquad \mathbf{r} \mapsto \arg\max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r}),$$

azaz

$$\forall \mathbf{r} \in R\text{-re } f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}) = \max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r}).$$

Értékfüggvény, vagy optimumérték-függvény:

$$f^* : R \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbf{r} \mapsto f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}),$$

azaz

$$\forall \mathbf{r} \in R\text{-re } f^*(\mathbf{r}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}) = \max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r}).$$

Tétel (burkolótétel, vagy burkológörbe-tétel) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $R \subseteq \mathbb{R}^k$, $f : X \times R \longrightarrow \mathbb{R}$ minden változója szerint parciálisan differenciálható $(n+k)$-változós függvény, melynek a parciális deriváltjai is folytonosak. Ha $f^* : R \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény a

$$\max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r})$$

feladat értékfüggvénye, és létezik az $\mathbf{x}^* : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ függvény, mely a szélsőérték-számítási feladat megoldását rendeli az $\mathbf{r}$ paraméter minden lehetséges értékéhez, és teljesül, hogy $\forall j \in \{1,2,...,n\}$-re $x_j^*(\mathbf{r})$ differenciálható k-változós, valós értékű függvény, melynek a parciális deriváltjai is folytonosak (ahol $x_j^*(\mathbf{r})$ az $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ koordinátafüggvénye, azaz $\mathbf{x}^*(\mathbf{r}) = (x_1^*(\mathbf{r}), x_2^*(\mathbf{r}), ..., x_n^*(\mathbf{r}))$), akkor

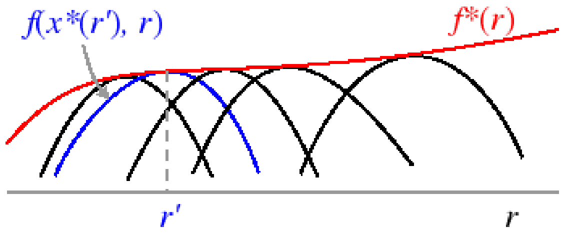
$$\forall \mathbf{r} \in R \text{ esetén } \frac{\partial f^*}{\partial r_i}(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r_i}(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}).$$

Bizonyítás Alkalmazzuk a láncszabályt az f^* függvény i-edik változója szerinti parciális deriváltjának kiszámításához:

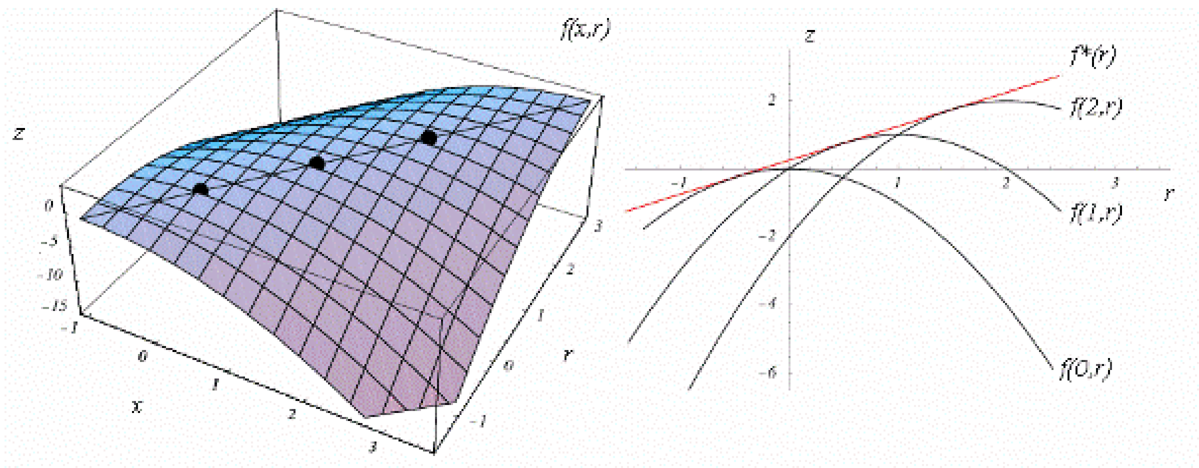
$$\frac{\partial f^*}{\partial r_i}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r})}_{\substack{0, \text{ mert } \mathbf{x}^*(\mathbf{r})\text{-ben} \\ f(\cdot,\mathbf{r}) \text{ maximális} \\ \text{(elsőrendű feltétel)}}} \cdot \frac{dx_j^*}{dr_i}(\mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial r_i}(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}).$$

Így

$$\forall \mathbf{r} \in R \text{ esetén } \frac{\partial f^*}{\partial r_i}(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r_i}(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}).$$



7: 9.1. ábra



8: 9.2. ábra

Megjegyzés[m] A burkoló elnevezést a következő gondolatmenet indokolja. Az $f^*(\mathbf{r})$ függvény minden $\mathbf{x}$-re nem kisebb $f(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ függvényértéknél, és egy rögzített $\mathbf{r}$ esetén $f^*(\mathbf{r})$ definíció szerint éppen $f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}), \mathbf{r})$ -rel egyenlő. Szemléletesen szólva az $f^*(\mathbf{r})$, gráfja az $\{f(\mathbf{x}, \mathbf{r}) : \mathbf{x} \in X\}$ függvények gráfjainak felső burkolója. Az alábbi ábra valós x és r érték esetére, vagyis $n = k = 1$ esetre vonatkozik.

Itt a feketével jelölt konkáv görbék adott x-hez tartozó $f(x, r)$ görbéket jelölik. Az r' esetén tehát $f^*(r')$ éppen $f(x^*(r'), r')$-vel egyezik meg, valamint a burkoló-tétel alapján $\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*(r'), r')}{\partial r}$. Mivel $f^*(r) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x, r)$ ezért nyilván minden x esetén az $f(x, r)$ görbék az $f^*(r)$ görbe alatt helyezkednek el, és adott r esetén $f(x^*(r), r) = f^*(r)$ ezért azt mondjuk, hogy az $f^*(r)$ az $\{f(x, r) \mid x \in \mathbb{R}\}$ görbesereg felső burkolója.

Az alábbi ábra alapján látható, mi köze van az említett görbeseregnek és a burkológörbének az f függvény gráfjához. Az $f^*(r)$ görbe az f gráfján elhelyezkedő pontok (r, z) síkra való vetületeinek felső határoló görbéje, míg pl. az $f(2, r)$ görbe az $x = 2$ sík f gráfjával való metszetének ugyanezen síkra való vetülete.

10.1.2 A paraméteres feltételes szélsőérték-számítási feladat

Tekintsük a

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r}) \\ g_j(\mathbf{x},\mathbf{r}) = 0 \qquad j = 1,2,...,m \end{cases}$$

feladatot, ahol $\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} \in R \subseteq \mathbb{R}^k$, valamint $\forall j \in \{1,2,...,m\}$-re $g_j : X \times R \longrightarrow \mathbb{R}$ és $f : X \times R \longrightarrow \mathbb{R}$ minden változójuk szerint parciálisan differenciálható $(n+k)$-változós függvények.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{r}$ paraméter minden egyes értékére egyértelműen létezik a fenti szélsőérték-feladatnak megoldása, azaz

$$\forall \mathbf{r} \in R\text{-re } \exists! \mathbf{x}^* \in X, \text{ hogy } f(\mathbf{x}^*,\mathbf{r}) = \max_{\substack{\mathbf{x}\in X,\\ g_j(\mathbf{x},\mathbf{r})=0,\\ j=1,2,...,m}} f(\mathbf{x},\mathbf{r}).$$

Ekkor értelmezhető egy $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ függvény, amely az $\mathbf{r}$ paraméter minden egyes értékéhez az ilyen tulajdonságú $\mathbf{x}$-et rendeli:

$$\mathbf{x}^* : R \longrightarrow X \qquad \mathbf{r} \mapsto \operatorname*{arg\,max}_{\substack{\mathbf{x}\in X,\ g_j(\mathbf{x},\mathbf{r})=0,\\ j=1,2,...,m}} f(\mathbf{x},\mathbf{r}).$$

Értékfüggvény, vagy optimumérték-függvény:

$$f^* : R \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbf{r} \mapsto f(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}).$$

Tétel (Burkolótétel, vagy burkológörbe-tétel) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $R \subseteq \mathbb{R}^k$, $\forall j \in \{1,2,...,m\}$-re $g_j : X \times R \longrightarrow \mathbb{R}$ és $f : X \times R \longrightarrow \mathbb{R}$ minden változójuk szerint parciálisan differenciálható $(n+k)$-változós, valós értékű függvények, melyeknek a parciális deriváltjai folytonosak. Ha az $f^* : R \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény a

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r}) \\ g_j(\mathbf{x},\mathbf{r}) = 0 \qquad j = 1,2,...,m \end{cases}$$

feladat értékfüggvénye, és létezik az $\mathbf{x}^* : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ függvény, mely a szélsőérték-számítási feladat megoldását rendeli az $\mathbf{r}$ paraméter minden lehetséges értékéhez, $\lambda^* : R \longrightarrow \mathbb{R}^m$ pedig adott $\mathbf{r}$ -hez az azt multiplikátorokból álló vektort, mellyel a megoldás a Lagrange-függvény stacionárius pontja, és teljesül, hogy $\forall j \in \{1,2,...,n\}$-re $x_j^*(\mathbf{r})$ minden változója szerint parciálisan differenciálható k változós függvény, melyeknek a parciális deriváltjai folytonosak, (ahol $x_j^*(\mathbf{r})$ az $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ koordinátafüggvénye, azaz $\mathbf{x}^*(\mathbf{r}) = (x_1^*(\mathbf{r}), x_2^*(\mathbf{r}), ..., x_n^*(\mathbf{r})))$, akkor

$$\forall \mathbf{r} \in R \text{ esetén } \frac{\partial f^*}{\partial r_i}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i}(\mathbf{x}^*(\mathbf{r}),\mathbf{r}),$$

ahol $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{r}) = f(\mathbf{x},\mathbf{r}) - \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x},\mathbf{r})$ a feltételes szélsőérték-számítási feladat Lagrange-függvénye.

Bizonyítás Sydsæter-Hammond 639–640. old.

Feladat Tudjuk, hogy ha a c paraméter értéke 1, akkor a

$$\begin{cases} \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} 2x + cy \\ e^{cx} + e^{cy} = 3 \end{cases}$$

probléma megoldása $(x^*,y^*) = (\ln 2, 0)$, a $\lambda = 1$ Lagrange-multiplikátorral. A c egy marginális egységnyi növekedésének hatására mennyivel változik a feladat optimumértéke?

Feladat Vezesse le a burkolótételből a Lagrange-szorzó közgazdasági jelentését!

10.2 A SZÉLSŐÉRTÉKHELY PARAMÉTERTŐL VALÓ FÜGGÉSE*

Az eddigiekben vizsgált

$$\max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x},\mathbf{r})$$

paraméteres szélsőérték-számítási feladatban a paraméter különböző értékeihez, mint láttuk különböző szélsőértékek tartoznak. A szélsőértékhely paramétertől való függését az $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ függvény írja le. A maximalizálandó függvény szélsőértéke a burkológörbe tétel szerint csak az f függvény r_i szerinti parciális deriváltjaitól függ, és nem függ attól, hogy az $\mathbf{r}$ megváltozása, hogyan hat $\mathbf{x}^*$ ra, holott az $\mathbf{x}$ változó explicite szerepel az f argumentumában. Ennek okán tehát $\frac{\partial f^*}{\partial r_i}(\mathbf{r})$ kiszámításához $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ függvény parciális deriváltjainak kiszámítására nem volt szükség. A legtöbb komparatív statikai vizsgálat célja azonban éppen $\mathbf{x}^*(\mathbf{r})$ valamely parciális deriváltjának meghatározása. A probléma megoldásához már minden eszköz a kezünkben van, ezért itt megelégszünk néhány mintafeladat bemutatásával anélkül, hogy új állítást fogalmaznánk meg.

Feladat Jelöljük $x^*(c)$-vel azt a függvényt, ami a c paraméter minden értékéhez az $g(x,y) = x^2+2xc+c^2+y^2$ függvény minimumhelyének x koordinátáját rendeli. Számítsuk ki a $\frac{dx^*}{dc}$ deriváltat. (A kapott érték nyilván azt mutatja, hogy közelítőleg mennyivel változik a g függvény minimumhelyének x koordinátája ha a c (egy kis) egységnyivel növekszik.)

Megoldás A szélsőérték szükséges és elégséges feltétele:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= 0 \text{ és} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} 2x+2c &= 0 \text{ és} \\ 2y &= 0. \end{aligned}$$

Legyen $f(c,x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2c \\ 2y \end{pmatrix}$. Ekkor az

$$f(c,x,y) = 0$$

egyenlet implicit módon meghatározza az $x^*(c)$ függvényt. Alkalmazva tehát az implicit függvény tételt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx^*}{dc} \\ \frac{dy^*}{dc} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial c} \end{bmatrix},$$

vagyis

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx^*}{dc} \\ \frac{dy^*}{dc} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

amiből tehát $\frac{dx^*}{dc} = -1$.

Példa Tekintsük ismét a mikroökonómia egyik szokásos haszonmaximalizálási problémáját. Maximalizáljuk az $U(x,y) = x^a y^{1-a}$ ($x \geq 0$ és $y \geq 0$) hasznossági függvényt a $p_x x + p_y y = m$ feltétel mellett, ahol $p_x > 0$, $p_y > 0$, és $m > 0$. Legyen (x^*, y^*) megoldása az optimumproblémának. Számítsuk ki $\frac{\partial x^*}{\partial m}$ értéket, vagyis közelítőleg menyivel változik az x jószágból a keresett mennyiség, ha az m jövedelem egységnyivel változik?

Megoldás Egy korábbi feladatból tudjuk, hogy a maximum létezik, a feladat Lagrange függvénye: $\mathcal{L}(x,y) = x^a y^{1-a} - \lambda(p_x x + p_y y - m)$, és az (x^*, y^*) megoldás kielégíti az

$$\begin{array}{rc} I. & a x^{a-1} y^{1-a} - \lambda p_x = 0 \\ II. & b x^a y^{-a} - \lambda p_y = 0 \\ III. & p_x x + p_y y = m \end{array}$$

egyenletrendszert valamely λ-val. Ne feledkezzünk meg arról, hogy most λ értéke is függ az m paraméter értékétől.

Legyen tehát

$$f(p_x, p_y, m, x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} a x^{a-1} y^{1-a} - \lambda p_x \\ b x^a y^{-a} - \lambda p_y \\ p_x x + p_y y - m \end{pmatrix},$$

ekkor az $f(p_x, p_y, m, x, y, \lambda) = 0$ egyenlet implicit módon meghatározza az $x^*(m)$ függvényt, ezért az $\frac{\partial x^*}{\partial m}$ derivált az implicit függvény tétel segítségével egyszerűen meghatározható:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial m} \\ \frac{\partial y^*}{\partial m} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial m} \end{bmatrix}.$$

Ahol az f koordinátafüggvényeinek parciális deriváltjait is a $(p_x, p_y, m, x^*, y^*, \lambda^*)$ helyen kell venni. Mivel a továbbiakban minden derivált a $(p_x, p_y, m, x^*, y^*, \lambda^*)$ pontra vonatkozik, ezért a jelölés egyszerűsítése végett hagyjuk el a * indexeket.

A parciális deriváltakat ebbe behelyettesítve:

$$\begin{bmatrix} a(a-1)x^{a-2}y^{1-a} & a x^{a-1}(1-a)\, y^{-a} & -p_x \\ b a x^{a-1} y^{-a} & -a b x^a y^{-a-1} & -p_y \\ p_x & p_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ahol természetesen az x, y és λ változók is az optimális x^*, y^* és λ^* optimális értékeket jelölő csillagozott megfelelőik rövidítései. (A csillagozott változók valójában a fenti I-III-mal jelölt egyenletrendszer megoldásai.) A fenti egyenletrendszert mátrixok nélkül felírva:

$$\begin{aligned} a(a-1)x^{a-2}y^{1-a}\frac{\partial x}{\partial m} + a x^{a-1}(1-a)\, y^{-a}\frac{\partial y}{\partial m} - p_x \frac{\partial \lambda}{\partial m} &= 0 \\ b a x^{a-1} y^{-a}\frac{\partial x}{\partial m} - a b x^a y^{-a-1}\frac{\partial y}{\partial m} - p_y \frac{\partial \lambda}{\partial m} &= 0 \\ p_x \frac{\partial x}{\partial m} + p_y \frac{\partial y}{\partial m} &= 1 \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}
\frac{p_y}{p_x}a(a-1)x^{a-2}y^{1-a}\frac{\partial x}{\partial m}+\frac{p_y}{p_x}ax^{a-1}(1-a)\,y^{-a}\frac{\partial y}{\partial m}-p_y\frac{\partial \lambda}{\partial m} &= 0\\
bax^{a-1}y^{-a}\frac{\partial x}{\partial m}-abx^{a}y^{-a-1}\frac{\partial y}{\partial m}-p_y\frac{\partial \lambda}{\partial m} &= 0\\
p_x\frac{\partial x}{\partial m}+p_y\frac{\partial y}{\partial m} &= 1
\end{aligned}$$

Az első és a második egyenlet különbsége:

$$\left(\frac{p_y}{p_x}a(a-1)x^{a-2}y^{1-a}-bax^{a-1}y^{-a}\right)\frac{\partial x}{\partial m}+\left(\frac{p_y}{p_x}ax^{a-1}(1-a)\,y^{-a}+abx^{a}y^{-a-1}\right)\frac{\partial y}{\partial m}=0.$$

Ez az egyenlet a harmadik egyenlettel már egy kétismeretlenes egyenletrendszert alkot:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p_y}{p_x}a(a-1)x^{a-2}y^{1-a}-bax^{a-1}y^{-a}\right)\frac{\partial x}{\partial m}+\left(\frac{p_y}{p_x}ax^{a-1}(1-a)\,y^{-a}+abx^{a}y^{-a-1}\right)\frac{\partial y}{\partial m} &= 0\\
p_x\frac{\partial x}{\partial m}+p_y\frac{\partial y}{\partial m} &= 1.
\end{aligned}$$

Ezt $\frac{\partial x}{\partial m}$-re megoldva:

$$\frac{\partial x}{\partial m}=\frac{\frac{p_y}{p_x}ax^{a-1}(1-a)\,y^{-a}+abx^{a}y^{-a-1}}{\left(\frac{p_y}{p_x}a(a-1)x^{a-2}y^{1-a}-bax^{a-1}y^{-a}\right)p_y-\left(\frac{p_y}{p_x}ax^{a-1}(1-a)\,y^{-a}+abx^{a}y^{-a-1}\right)p_x}$$

11 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS II.

11.1 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS – A KORLÁTOZÓ FELTÉTEL EGYENLŐTLENSÉG RENDSZER

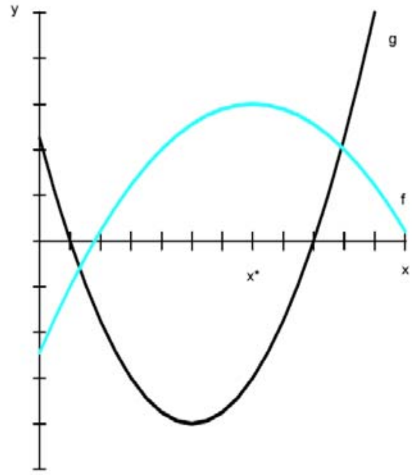
11.1.1 Egyváltozós, egyenlőtlenséggel korlátozott szélsőérték-számítási feladat

A feladat:

$$\begin{cases}\max\limits_{x} f(x)\\ g(x)\le 0\end{cases}$$

ahol $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ és $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ egyváltozós differenciálható függvények.

Az $\{x: g(x)\le 0\}$ halmazt szokás *megengedhető-*, *lehetséges-*, vagy *megvalósítható halmaz*nak nevezni. Célunk annak belátása, hogy a feltételes szélsőértékhely ebben az esetben is stacionárius pontja lesz a Lagrange-függvénynek. A probléma bonyolultsága miatt azonban a Lagrange-módszerrel ellentétben itt a szükséges feltétel általánosabb levezetésére nem vállalkozhatunk, egyváltozós függvény esetére talán elég meggyőző lesz az alábbi szemléletes okfejtés. Egy érdekes eltérés a Lagrange-módszerhez képest, hogy itt a multiplikátorok értéke nem lehet negatív. Mint látni fogjuk, ez azzal magyarázható, hogy a $g(x)=0$ egyenlőség feltétel $g(x)\le 0$ alakú egyenlőtlenséggé alakítása esetén – ami a Lagrange-függvényt nyilván nem érinti – a $g(x)=0$ feltétel melleti x^*optimumhely az esetek egy részében nem lesz megoldása a $g(x)\le 0$ feltétel melletti problémának, mert a megengedett



9: 10.1. ábra

halmaz belsejében a célfüggvény magasabb értéket is felvehet, ezzel együtt nyilván az ilyen típusú x^*-okhoz tartozó multiplikátorok is kiesnek a vizsgálódás köréből.

A fenti feladat Lagrange-függvénye tehát: $\mathcal{L}(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Jelölje x^* a feladat megoldását.

A következő esetek fordulhatnak elő:

1. $g(x^*) < 0$ (az optimumban a feltétel nem effektív, vagy inaktív, vagy laza)
ekkor x^* f-nek feltétel nélküli lokális maximumhelye $\Longrightarrow$ $f\prime(x^*) = 0$.
$f\prime(x^*) = 0$ és $g(x^*) < 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ esetén $\mathcal{L}\prime(x^*) = f\prime(x^*) - \lambda g\prime(x^*) = 0$.

2. $g(x^*) = 0$ (az optimumban a feltétel effektív, vagy aktív, vagy kötött)
ekkor a következő három aleset fordulhat elő:

2a. $g(x^*) = 0$ és $f\prime(x^*) = 0$. Ekkor $\lambda = 0$ esetén $\mathcal{L}\prime(x^*) = f\prime(x^*) - \lambda g\prime(x^*) = 0$.

2b. $[f\prime(x^*) > 0$ és $g\prime(x^*) > 0]$ vagy $[f\prime(x^*) < 0$ és $g\prime(x^*) < 0]$. Ekkor $\exists! \lambda > 0$, hogy $\mathcal{L}\prime(x^*) = f\prime(x^*) - \lambda g\prime(x^*) = 0$.

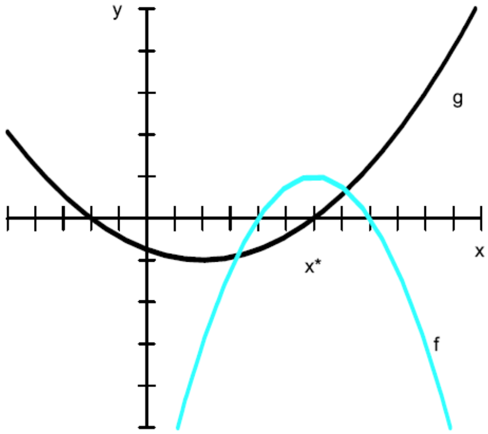
2c. $f\prime(x^*) \neq 0$ és $g\prime(x^*) = 0$. Ekkor $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{L}\prime(x^*) = f\prime(x^*) - \lambda g\prime(x^*) \neq 0$, vagyis akárhogy választjuk meg a λ-t, a Lagrange-függvénynek nem lesz stacionárius pontja a feltételes szélsőértékhely. Az ilyen eseteket a regularitási feltételek zárják ki.

Könnyen látható, hogy $[f\prime(x^*) > 0$ és $g\prime(x^*) < 0]$ illetve $[f\prime(x^*) < 0$ és $g\prime(x^*) > 0]$ esetek nem fordulhatnak elő, mert ekkor az x^* nem lehetne optimum, – pl. az első esetben valamely $\widehat{x} > x^*$ helyen a célfüggvény értéke nagyobb lesz, mint az x^* helyen – ezért a fent felsorolt esetek, az összes elképzelhető esetet kimerítik.

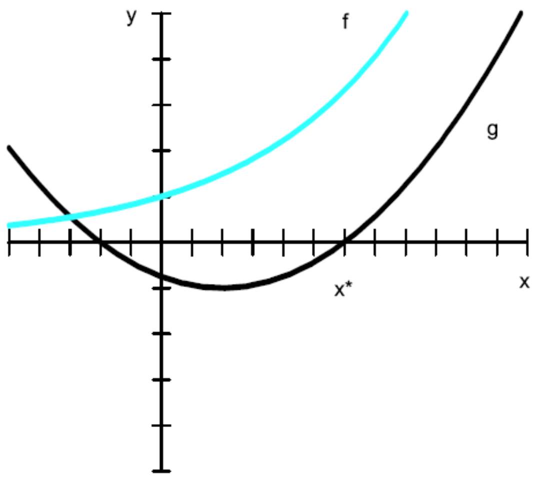
Regularitási feltétel Többféle alakja létezik, ezek közül hármat adunk meg:

1. g szigorúan konvex és az $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq 0\}$ halmaznak van belső pontja.
2. g konvex és létezik egy $\overline{x} \in \mathbb{R}$ melyre $g(x) < 0$.
3. Ha $g(x^*) = 0$, akkor $g\prime(x^*) \neq 0$.

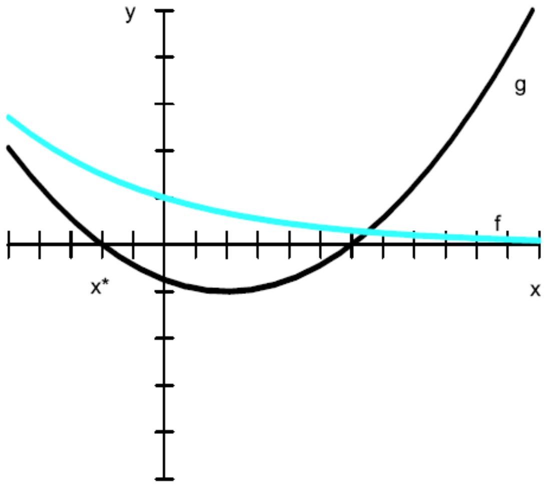
Ha x^* a fenti egyenlőtlenséggel korlátozott szélsőértékszámítási feladat megoldása, és x^*-ban a regularitási feltétel valamelyik alakja teljesül, akkor a 2c. eset nem fordulhat elő, így létezik olyan nemnegatív λ, melyre a Lagrange-függvény deriváltja az optimumban (x^*-ban) zérus. Továbbá a



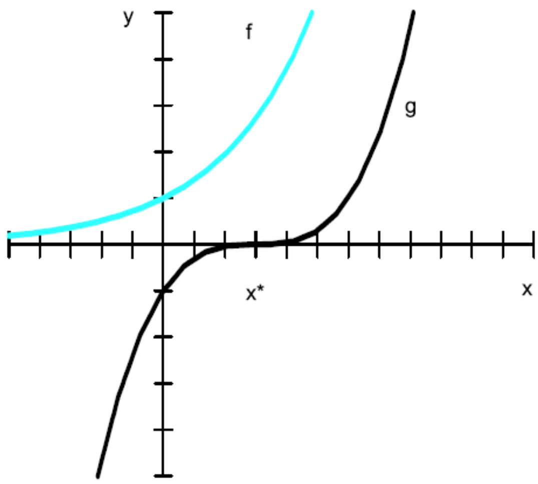
10: 10.2. ábra



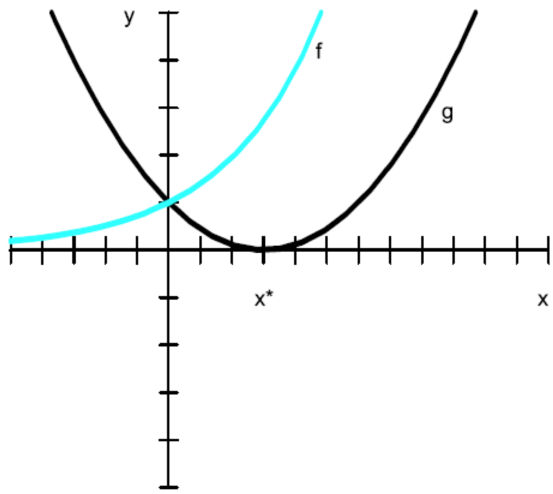
11: 10.3. ábra



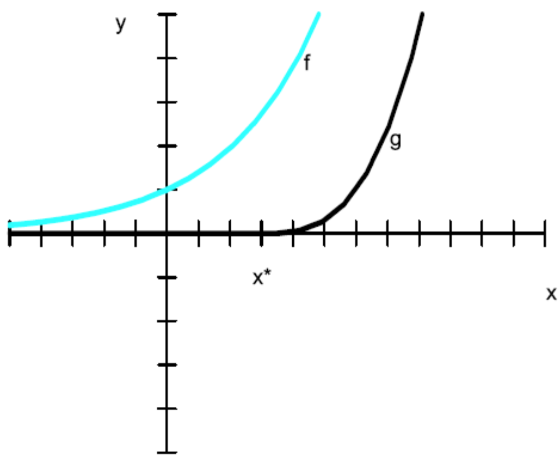
12: 10.4. ábra



13: 10.5. ábra



14: 10.6. ábra



15: 10.7. ábra

fenti esetek számbavétele alapján könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a λ vagy $g(x^*)$ közül az egyik mindig zérus. Erről szól a következő tétel.

Tétel (Kuhn-Tucker-féle szükséges feltételek) Legyenek $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ egyváltozós differenciálható függvények. Ha x^* megoldása a

$$\begin{cases} \max\limits_x f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

feladatnak és x^*-ban teljesül a regularitási feltétel valamelyik alakja, akkor

$$\begin{aligned} \exists\lambda &\geq 0, \text{ hogy } f\prime(x^*) = \lambda g\prime(x^*), \text{ és} \\ \lambda &= 0, \text{ ha } g(x^*) < 0. \end{aligned}$$

Megjegyzés[k] A fenti tételben szereplő λ neve: Kuhn-Tucker-szorzó. A Kuhn-Tucker szorzóra vonatkozó feltétel neve: komplementaritási feltétel.

Komplementaritási feltétel Két ekvivalens felírási módja:
1. $\lambda \geq 0$, és $\lambda = 0$, ha $g(x^*) < 0$.
2. $\lambda \geq 0$, és $\lambda g(x^*) = 0$.

Feladat Tekintsük az alábbi problémát:

$$\begin{cases} \max\limits_x \pi(x) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

A fenti tétel alapján lássuk be, hogy a megoldásra teljesül, hogy $\pi'(x^*) \leq 0$, valamint $x^*\pi'(x^*) = 0$. Lássuk be, hogy ez valójában ekvivalens a Kuhn-Tucker feltételekkel.

Tétel* (Kuhn-Tucker-féle elégséges feltételek) Legyen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konkáv és $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex differenciálható függvény, és legyen $x^* \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha

$$g(x^*) \leq 0 \text{ és } \exists\lambda \geq 0, \text{ hogy } f\prime(x^*) = \lambda g\prime(x^*) \text{ és } \lambda g(x^*) = 0,$$

akkor x^* megoldása a

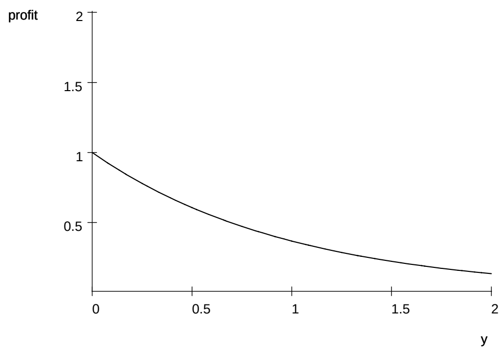
$$\begin{cases} \max\limits_x f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

feladatnak.

11.1.2 Profitmaximalizálás

A profitmaximum kiszámításánal gyakori hiba, hogy automatikusan alkalmazzuk az $MC(y) = MR(y)$ feltételt, de figyelmen kívül hagyjuk az üzembezárási pontot, tehát nem ellenőrizzük azt, hogy $y = 0$ esetén nem magasabb-e a profit. Matematikailag a problémát az okozza, hogy nem nyílt halmazon, hanem $[0, \infty)$ intervallumon maximalizálunk, ezért a profit függvény deriváltja nem mindig nulla a maximumhelyen, vagyis ami ezzel ekvivalens, a határköltség nem feltétlenül egyenlő a határbevétellel. Mint látni fogjuk, valójában csak annyit állíthatunk, hogy a profitmaximumban $MC(y) \geq MR(y)$.

Az alábbi ábra egy lehetséges profitfüggvényt ábrázol.



10.8. ábra

Mint látható, ebben az esetben a profitmaximum $y = 0$, és itt a profitfüggvény deriváltja $\pi'(0) = MR(0) - MC(0) < 0$.

Tekintsük tehát az alábbi feladatot:

$$\begin{cases} \max\limits_y yp(y) - c(y) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

vagyis

$$\begin{cases} \max\limits_y yp(y) - c(y) \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}(y) = yp(y) - c(y) + \lambda y$

A Kuhn-Tucker-feltételek:

1. $MR(y) - MC(y) + \lambda = 0$
2. $\lambda \geq 0$
3. $\lambda y = 0$

Ebből 1. és 2. miatt: $MC(y) - MR(y) = \lambda$ és így $MC(y) \geq MR(y)$, és 3. miatt $(MC(y) - MR(y))\, y = 0$.

Tehát a profitmaximumban szükségképpen teljesül, hogy

1. $MC(y) \geq MR(y)$
2. $(MC(y) - MR(y))\, y = 0$

Ennek alapján a profitmaximum meghatározása következő lépésekből áll. Megvizsgáljuk, hogy mely y esetén teljesül, hogy $MC(y) - MR(y) = 0$. Jelöljük ezt az értéket y'-vel. Legtöbb esetben ez lesz a feladat megoldása, de ebben csak akkor lehetünk biztosak, ha meggyőződünk arról, hogy $y = 0$ érték esetén kisebb a profit, mint az imént kapott y' esetén. Az 1. feltétel segítségével a legtöbb esetben az $y = 0$ érték úgy is kizárható, hogy belátjuk hogy nem teljesül az $MC(0) \geq MR(0)$ feltétel. Ez polinom függvények esetén könnyebben ellenőrizhető mint a profitok kiszámítása, hiszen eggyel alacsonyabb fokú függvénybe kell behelyettesíteni.

11.1.3 Többváltozós, egyenlőtlenség-rendszerrel korlátozott szélsőérték-számítási feladat

A feladat:

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., k \end{cases}$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ és minden $i \in \{1, 2, ..., k\}$ esetén $g_i : \mathbb{R}^n \supseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ n-változós függvények.

Azon vektorok halmazát, amelyek az összes korlátozó feltételt kielégítik, szokás *megengedhető-*, *lehetséges-*, vagy *megvalósítható halmaznak* nevezni.

A feladat Lagrange-függvénye: $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$.

Jelölje $\mathbf{x}^*$ a feladat megoldását.

Regularitási feltétel Többféle alakja létezik, ezek közül hármat adunk meg:

1. Minden $i \in \{1, 2, ..., k\}$ esetén g_i szigorúan konvex és az $\{\mathbf{x} \in X \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ minden $i \in \{1, 2, ..., k\}$-ra$\}$ halmaznak van belső pontja.

2. Minden $i \in \{1, 2, ..., k\}$ esetén g_i konvex és létezik egy $\overline{\mathbf{x}} \in X$ melyre minden $i \in \{1, 2, ..., k\}$ esetén $g_i(\overline{\mathbf{x}}) < 0$.

3. Az effektív korlátokban szereplő g_i függvények gradiensei, az optimumban lineárisan függetlenek.

Ha $\mathbf{x}^*$ a fenti egyenlőtlenséggel korlátozott szélsőérték-számítási feladat megoldása, és $\mathbf{x}^*$-ban a regularitási feltétel valamelyik alakja teljesül, akkor léteznek olyan nemnegatív λ_i-k, melyekre az optimumban ($\mathbf{x}^*$-ban) a Lagrange-függvény minden parciális deriváltja zérus. Erről szól a következő tétel.

Tétel (Kuhn-Tucker-féle szükséges feltételek) Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nyílt halmaz, és legyenek $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és minden $i \in \{1, 2, ..., k\}$ esetén $g_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, n-változós függvények, melyeknek léteznek az összes parciális deriváltjai, és azok folytonosak. Ha $\mathbf{x}^*$ megoldása a

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., k \end{cases}$$

feladatnak és $\mathbf{x}^*$-ban teljesül a regularitási feltétel valamelyik alakja, akkor

$$\begin{aligned} \forall i &\in \{1, 2, ..., k\}\text{-ra } \exists \lambda_i \geq 0, \text{ hogy} \\ \forall j &\in \{1, 2, ..., n\}\text{-re } \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*), \text{ és} \\ \forall i &\in \{1, 2, ..., k\}\text{-ra } \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0. \end{aligned}$$

Definíció (Komplementaritási feltétel) A fenti tételben szereplő $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$-ra $\lambda \geq 0$, és $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ feltételt komplementaritási feltételnek nevezzük.

Megjegyzés[k] A komplementaritási feltétel egy másik lehetséges alakja :

$\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$-ra $\lambda_i \geq 0$, és $\lambda_i = 0$, ha $g_i(\mathbf{x}^*) < 0$.

Megjegyzés[m] Vegyük észre, hogy a tételben szereplő $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$-re $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)$ feltétel valójában azt jelenti, hogy $\mathbf{x}^*$ stacionárius pontja a Lagrange-függvénynek.

Definíció (Kuhn-Tucker feltételek) A $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, 2, ..., k$ és $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ $j \in \{1, 2, ..., n\}$ valamint a komplementaritási feltételek együttesét szokás Kuhn-Tucker feltételeknek nevezni.

Tétel *(Kuhn-Tucker-féle elégséges feltételek) Legyen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konkáv, és minden $i \in \{1, 2, ..., k\}$ esetén $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény, melyeknek léteznek az összes parciális deriváltjai, és azok folytonosak, és legyen $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ha

$$\begin{aligned}
\forall i &\in \{1, 2, ..., k\}\text{-ra } g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \text{ valamint} \\
\forall i &\in \{1, 2, ..., k\}\text{-ra } \exists \lambda_i \geq 0, \text{ hogy} \\
\forall j &\in \{1, 2, ..., n\}\text{-re } \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \text{ és} \\
\forall i &\in \{1, 2, ..., k\} - \text{ra } \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0,
\end{aligned}$$

akkor $\mathbf{x}^*$ megoldása a

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., k \end{cases}$$

feladatnak.

Példa ld: S-H: 18.17. példa és 18.19. példa.

Feladat Tegyük fel, hogy az alábbi probléma megoldására alkalmazható a Kuhn-Tucker-módszer, és oldjuk meg a feladatot.

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} x + y \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Megoldás A Lagrange függvény:

$$\mathcal{L}(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

A Kuhn-Tucker-feltételek:

I. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0$

II. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0$

III. $\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$

IV. $\lambda \geq 0$

V. $x^2 + y^2 \leq 1$

Ahol I-II. annak a feltétele, hogy (x, y) a Lagrange-függvény stacionárius pontja. A III -IV. a komplementaritási feltételek. Az V. feltétel a szélsőértékfeladat korlátozó feltétele.

Az alábbi eseteket különböztetjük meg:

1. $\lambda = 0$
2. $\lambda \neq 0$

Az 1. esetben I. alapján $1 = 0$, ami ellentmondás. Ezek szerint $\lambda \neq 0$, amiből III. alapján $x^2+y^2-1 = 0$. Ebbe behelyettesítve az I-II.-ből adódó $x = y = \frac{1}{2\lambda}$ értékeket: $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0$, amit megoldva: $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, amiből $x = y = \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vagyis az optimumprobléma megoldása az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pont.

Feladat * Bizonyítsuk be, hogy a fenti probléma megoldására valóban alkalmazható a Kuhn-Tucker-tétel valamelyik alakja!

Feladat Tegyük fel, hogy az alábbi probléma megoldására alkalmazható a Kuhn-Tucker-módszer, és oldjuk meg a feladatot.

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} y - x \\ e^x \le y \end{cases}$$

Megoldás A feladatot az alábbi formába írhatjuk:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} -y + x \\ e^x - y \le 0 \end{cases}$$

A Lagrange függvény:

$$\mathcal{L}(x, y) = -y + x - \lambda(e^x - y)$$

A Kuhn-Tucker-feltételek:

I. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = 1 - \lambda e^x = 0$

II. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = -1 + \lambda = 0$

III. $\lambda(e^x - y) = 0$

IV. $\lambda \ge 0$

V. $e^x - y \le 0.$

Ennek a rendszernek a megoldása: $x = 0$, $y = 1$, $\lambda = 1$, vagyis az optimumprobléma megoldása az $(0, 1)$ pont.

Feladat Bizonyítsuk be, hogy a fenti probléma megoldására valóban alkalmazható a Kuhn-Tucker-tétel valamelyik alakja.

Feladat Tegyük fel, hogy az alábbi probléma megoldására alkalmazható a Kuhn-Tucker-módszer, és oldjuk meg a feladatot.

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} y - x \\ (x+1)^2 - 1 \le y \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Eredmény $(0, 0)$

Az alábbi példák azt bizonyítják, hogy a Kuhn-Tucker-tétel kimondásában szereplő feltételek nem hagyhatók el.

Példa Alkalmazható-e a Kuhn-Tucker-féle szükséges feltétel az alábbi problémára:

$$\begin{cases} \max\limits_{x} f(x) = x \\ g(x) = x^2 \le 0 \end{cases}$$

Példa Alkalmazható-e a Kuhn-Tucker-féle szükséges feltétel az alábbi problémára:

$$\begin{cases} \max\limits_{x} f(x) = x \\ g(x) \leq 0 \end{cases},$$

ahol

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \geq 0 \\ x^2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$$

Feladat

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} y - x^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás A feladat ekvivalens az alábbival:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} y - x^2 \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ -x \leq 0 \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

Az $f(x,y) = y - x^2$ függvény a konkáv $(x,y) \mapsto y$ és a szintén konkáv $(x,y) \mapsto -x^2$ függvény összege, ezért maga $f(x,y)$ is konkáv. Továbbá a korlátokban szereplő $(x,y) \mapsto -x$ és $(x,y) \mapsto -y$ függvények konvexek. Tehát, ha valamely (x^*, y^*) kombináció eleget tesz Kuhn-Tucker feltételeknek, akkor az optimum Kuhn-Tucker-féle elégséges feltételeiről szóló tétel miatt (x^*, y^*) valóban az optimális megoldás.

A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,y) &= y - x^2 - \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) - \lambda_2(-x) - \lambda_3(-y) = \\ & \quad y - x^2 - \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2 x + \lambda_3 y. \end{aligned}$$

A Kuhn-Tucker feltételek:

I. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = -2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$

II. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_3 = 0$

III. $\lambda_1(x^2 + y^2 - 1) = 0$

IV. $-\lambda_2 x = 0$

V. $-\lambda_3 y = 0$

VI. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

VII. $x^2 + y^2 \leq 1$

IX. $x \geq 0$

X. $y \geq 0$

Ahol I-II. annak a feltétele, hogy (x,y) a Lagrange-függvény stacionárius pontja. A III -VI. a komplementaritási feltételek. A VII-X. feltételek a szélsőérték feladat korlátozó feltételei.

Az alábbi eseteket különböztetjük meg:

1. $y = 0$
2. $x \neq 0$ és y$\neq 0$

3. $x = 0$ és y$\neq 0$.

Ezek az esetek nyilván kimerítik az összes elképzelhető esetet.

Az 1. esetben II. -ből következik hogy $\lambda_3 = -1$, ami ellentmondásra vezet VI. miatt.

A 2. esetben IV. és V. -ból következik,hogy $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ezért I. $\Longrightarrow$ $x(1+\lambda_1) = 0$. Mivel $x \neq 0$ ezért $\lambda_1 = -1$, ami ellentmondásra vezet VI. miatt.

A 3. esetben $\lambda_1 \neq 0$, különben II. -ből következik hogy $\lambda_3 = -1$, ami ellentmondásra vezet VI. miatt. Ekkor viszont III. -ból következik hogy $x^2+y^2-1 = 0$. Ebből, $x = 0$ -ból és X.-ből következik, hogy $y = 1$. Ezek után még be kell látnunk, hogy létezik olyan λ_1, λ_2 és λ_3 melyekkel együtt az $x = 0$, és $y = 1$ valóban kielégítik az I.-X. feltételeket. Mivel $x = 0$,ezért I.-ből $\lambda_2 = 0$. V.-ből $\lambda_3 = 0$, ezért II.-ből $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Behelyettesítéssel belátható, hogy a kapott $x = 0$, $y = 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ kombináció valóban kielégíti az I-X. feltételeket, tehát az optimális megoldás az $(x^*, y^*) = (0, 1)$ kombináció.

Feladat (Tankönyv 18.8 alfejezet 2.a. gyakorlata)

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} \frac{1}{2}x - y \\ x + e^{-x} \leq y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás Írjuk a feladatot a szokásos

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} \frac{1}{2}x - y \\ x + e^{-x} - y \leq 0 \\ -x \leq 0 \end{cases}$$

alakba. A célfüggvény itt is konkáv függvények összege, tehát konkáv, a korlátban szereplő függvények pedig konvex függvények összegei, ezért maguk is konvexek. Tehát ismét alkalmazható az optimum Kuhn-Tucker-féle elégséges feltételeiről szóló tétel. A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y) &= \frac{1}{2}x - y - \lambda_1(x + e^{-x} - y) - \lambda_2(-x) = \\ & \frac{1}{2}x - y - \lambda_1(x + e^{-x} - y) + \lambda_2 x. \end{aligned}$$

A Kuhn-Tucker feltételek:

I. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2} - \lambda_1 + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 = 0$

II. $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = -1 + \lambda_1 = 0$

III. $\lambda_1(x + e^{-x} - y) = 0$

IV. $-\lambda_2 x = 0$

V. $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

VI. $x + e^{-x} - y \leq 0$

VII. $-x \leq 0$

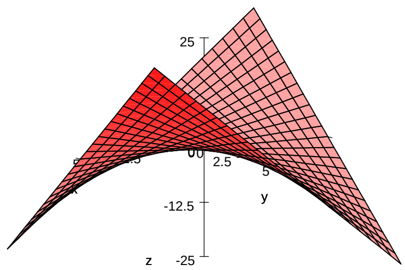
Két esetet különböztetünk meg

1. $x = 0$
2. $x \neq 0$

Az 1. esetben II. -ből $\lambda_1 = 1$, ezért I. -ből $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ ami ellentmond a komplementaritási feltételeknek.

A 2. esetben szintén II. -ből $\lambda_1 = 1$ és IV. -ből $\lambda_2 = 0$. Ezeket I-be helyettesítve kapjuk: $x = \ln 2$, és III. -ból $y = \ln 2 + \frac{1}{2}$. Ezek az értékek valóban kielégítik a Kuhn-Tucker feltételeket, tehát az optimális megoldás az $(x^*, y^*) = (\ln 2, \ln 2 + \frac{1}{2})$ pont.

Útmutatás a Kuhn-Tucker-módszer alkalmazásához A fenti feladatnál az optimum megkeresésénél az optimum Kuhn-Tucker-féle elégséges feltételeiről szóló tételt használtuk. Ennek feltétele, hogy a célfüggvény konkáv legyen, ami nem mindig teljesül, másrészt egy többváltozós függvényről eldönteni, hogy konkáv-e nem mindig egyszerű feladat. A többváltozós függvény konkavitásának részleteibe nem kívánunk belemenni. Ha egy maximalizációs probléma célfüggvényéről nem tudjuk, hogy konkáv-e, de tudjuk hogy az optimum valóban létezik, akkor az optimum Kuhn-Tucker-féle szükséges feltételeiről szóló tételből tudjuk, hogy a regularitási feltétel teljesülése esetén a Kuhn-Tucker feltételeknek eleget tevő pont valóban az optimális megoldás, ha csak egy ilyen pont van, illetve ha több, akkor az optimális megoldás ezen pontok közül kerül ki. Lásd a következő feladatot: itt a közgazdaságtanban gyakran használatos $U(x, y) = xy$ függvény nem konkáv. Ld. 10.9. ábra. (A pozitív síknegyedre megszorított függvény gráfját ld. az 1.4 ábrán.)



10.9. ábra

Feladat Ismét tekintsük az ismert fogyasztói optimumfeladatot, ahol $U(x, y) = xy$ fügvény a fogyasztó hasznossági függvénye, és a jószágok árai $p_x = p_y = 1$,a jövedelem nagysága pedig 1. Mi az optimális fogyasztás?

Megoldás Az optimumprobléma tehát a következő:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} xy \\ x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Az $U(x, y) = xy$ célfüggvény folytonos, és az

$$\begin{aligned} x + y &\leq 1 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenség rendszer egy nemüres, korlátos, zárt halmazt határoz meg a síkon, ezért a Weierstrass-tétel miatt a feladatnak létezik optimális megoldása. Érdemes a fenti problémát ismét a szokásos

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} xy \\ x+y-1 \le 0 \\ -x \le 0 \\ -y \le 0 \end{cases}$$

alakba írni. A korlátban szereplő g_i függvények nyilván konvexek, és létezik olyan $(\bar{x},\bar{y})$ melyre teljesül hogy $\bar{x}+\bar{y}-1<0$, $-\bar{x}<0$, valamint $-\bar{y}<0$ (pl. $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ ilyen), tehát teljesül a regularitási feltétel 2. alakja. Alkalmazható tehát az optimum Kuhn-Tucker-féle szükséges feltételeiről szóló tétel, vagyis az optimum alkalmas multiplikátorokkal stacionárius pontja az $\mathcal{L}(x,y)=xy-\lambda_1(x+y-1)+\lambda_2 x+\lambda_3 y$ Lagrange-függvénynek, azaz:

I. $\frac{\partial\mathcal{L}(x,y)}{\partial x}=y-\lambda_1+\lambda_2=0$

II. $\frac{\partial\mathcal{L}(x,y)}{\partial y}=x-\lambda_1+\lambda_3=0,$

valamint az optimumban teljesülnek a komplementaritási feltételek:

III. $\lambda_1(x+y-1)=0$

IV. $-\lambda_2 x=0$

V. $-\lambda_3 y=0$

VI. $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ge 0$

Továbbá teljesülnie kell az optimumfeladat eredeti korlátainak:

VII. $x+y-1\le 0$

IX. $-x\le 0$

X. $-y\le 0$

Az alábbi eseteket különböztetjük meg:

1. $x\neq 0$ és y$\neq 0$
2. x vagy y valamelyike nulla.

Az 1. esetben IV. és V. alapján $\lambda_2=\lambda_3=0$, ezért I. és II. -ből $x=y=\lambda_1$ így a feltételek szerint $\lambda_1\neq 0$. Ekkor III. alapján $x+y-1=0$, ebből pedig $x=y$ miatt $x=y=\lambda_1=\frac{1}{2}$. Ez valóban kielégíti az I.-X. feltételeket, és itt a célfüggvény értéke $U(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

A második esetben a célfüggvény értéke nulla, ezért még ha léteznek is olyan multiplikátorok melyekkel $(x,y,\lambda_1,\lambda_2)$ kielégíti az I.-X. feltételeket, az optimális megoldás az $U(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}>0$ egyenlőtlenség miatt csakis az 1. pontban kapott $(x^*,y^*)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ kombináció lehet.

Feladat

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} -x-y \\ x^2+y^2\le 1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Melyik korlát effektív?

Megoldás A feladatot írjuk át a következő ekvivalens alakba:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,y} x+y \\ x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Nyilván a korlátban szereplő $(x,y) \mapsto x^2+y^2-1$, $(x,y) \mapsto -x$ és $(x,y) \mapsto -y$ függvények konvexek, és létezik olyan $(\widehat{x},\widehat{y})$ amelyre teljesül hogy $\widehat{x}^2+\widehat{y}^2-1<0$, $-\widehat{x}<0$ valamint $-\widehat{y}<0$ (pl. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ilyen), tehát teljesül a regularitási feltétel 2. alakja. Alkalmazható tehát az optimum Kuhn-Tucker-féle szükséges feltételeiről szóló tétel.

A Lagrange-függvény: $\mathcal{L}(x,y)=x+y-\lambda_1(x^2+y^2-1)+\lambda_2 x+\lambda_3 y$.

Tehát oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszert:

I. $\frac{\partial\mathcal{L}(x,y)}{\partial x}=1-2\lambda_1 x+\lambda_2=0$

II. $\frac{\partial\mathcal{L}(x,y)}{\partial y}=1-2\lambda_1 y+\lambda_3=0$

III. $\lambda_1(x^2+y^2-1)=0$

IV. $-\lambda_2 x=0$

V. $-\lambda_3 y=0$

VI. $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \geq 0$

VII. $x^2+y^2 \leq 1$

IX. $x \geq 0$

X. $y \geq 0$

Némi számolás után kapjuk, hogy ezeket a feltételeket csak az $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ kombináció elégíti ki (a $\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2=\lambda_3=0$ multiplikátorokkal) tehát ez lesz az optimális megoldás.

További gyakorló feladatok: A tankönyv 18.8 alfejezetének kidolgozott példái és gyakorlatai.

12 KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSOK

12.1 PREFERENCIÁK REPREZENTÁLHATÓSÁGA

A fogyasztói elméletben fontos, hogy a fogyasztók preferenciáit képesek legyünk, differenciálható, de legalábbis folytonos hasznossági-függvénnyel reprezentálni. Ekkor az adott jószágkosárhoz képest szigorúan preferált kosarak halmaza nyílt kell hogy legyen $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0\}$-ban. Tekintsük pl. az x, y jószágtéren a lexikografikus rendezést, mint preferenciarendezést. Ez azt jelenti, hogy

$$(x^1,y^1) \preceq (x^2,y^2) \iff (x^1=x^2 \text{ és } y^1\leq y^2) \text{ vagy } x^1<x^2.$$

Vajon reprezentálható-e ez a preferenciarendezés folytonos hasznossági függvénnyel? Könnyen belátható, hogy nem. Ehhez elegendő azt belátni, hogy van olyan kosár, hogy az ahhoz képest szigorúan preferált kosarak halmaza nem nyílt $\mathbb{R}^2_+$-ban. Lássuk be, hogy az $(1,1)$ kosárhoz képest szigorúan preferált kosarak A halmaza nem nyílt $\mathbb{R}^2_+$-ban. Ezt úgy láthatjuk be, hogy megmutatjuk, hogy van olyan pontja az A halmaznak, ami nem belső pontja A-nak (ne feletsük el, hogy itt a belső pontot $\mathbb{R}^2_+$-beli ε-sugarú környezetekkel kell definiálni). Az $(1,2)$ nyilván a halmazhoz tartozik, és megmutatható, hogy nem belső pont. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Az $(1,2)$ pont bármilyen kis sugarú B környezetéhez megadható egy α szám, hogy az $(1-\alpha,2)$ benne van ebben a B környezetben.

A lexikografikus rendezés definíciójából következik, hogy bármely pozitív α esetén, az $(1-\alpha, 2)$ és ezért az annál bővebb B környezet nincs benne az $(1,1)$ kosárhoz képest szigorúan preferált kosarak halmazában. Mivel tehát az $(1,2)$ pontnak nincs olyan környezete, ami benne van az $(1,1)$ kosárhoz képest szigorúan preferált kosarak halmazában, ezért az $(1,2)$ nem belső pontja ennek a halmaznak.

12.2 A KERESLET TÖRVÉNYÉNEK SLUTSKY-FELBONTÁSTÓL FÜGGETLEN BIZONYÍTÁSA*

Példa (A kereslet törvénye) Legyen a fogyasztó szokásos optimumfeladata:

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} U(x_1,x_2) \\ p_{x_1}x_1 + p_{x_2}x_2 = m \end{cases}$$

Továbbá tegyük fel, hogy érvényes a helyettesítés csökkenő határaránya. Bizonyítsuk be, hogy az (x_1, x_2) fogyasztói optimumra teljesül, hogy ha $\frac{\partial x_2}{\partial m} > 0$ akkor $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} < 0$, vagyis minden normál jószág közönséges.

Bizonyítás Induljunk ki a fogyasztói optimum alábbi feltételéből:

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 - m &= 0 \\ MRS(x_1,x_2) + \frac{p_1}{p_2} &= 0 \end{aligned}$$

Legyen tehát

$$f(p_1,p_2,m,x_1,x_2) = \begin{pmatrix} p_1x_1 + p_2x_2 - m \\ MRS(x_1,x_2) + \frac{p_1}{p_2} \end{pmatrix},$$

és az implicit függvény tétel segítségével határozzuk meg a $\frac{\partial x_2}{\partial m}$ és $\frac{\partial x_2}{\partial p_2}$ értékeket. Az implicit függvény tétel következménye alapján:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m} \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \end{bmatrix}.$$

Ahol f_1 -el és f_2 vel jelöltük f függvény koordinátafüggvényeit. Ebbe behelyettesítve a konkrét parciális deriváltakat:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ \frac{\partial MRS}{\partial x_1} & \frac{\partial MRS}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial m} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ \frac{\partial MRS}{\partial x_1} & \frac{\partial MRS}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{p_1}{p_2^2} \end{bmatrix}$$

Az első egyenletrendszert megoldva könnyen látható, hogy

$$\frac{\partial x_2}{\partial m} = \frac{-\frac{\partial MRS}{\partial x_1}}{p_1\frac{\partial MRS}{\partial x_2} - p_2\frac{\partial MRS}{\partial x_1}}.$$

Vezessük be az $A = p_1 \frac{\partial MRS}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial MRS}{\partial x_1}$ jelölést. Ekkor

$$\frac{\partial x_2}{\partial m} = \frac{-\frac{\partial MRS}{\partial x_1}}{A}$$

Tegyük fel hogy beláttuk, hogy $A < 0$. Ekkor mivel a feltételek szerint $\frac{\partial x_2}{\partial m} > 0$, ezért $\frac{\partial MRS}{\partial x_1} > 0$.

A második egyenletrendszert megoldva

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_2} = \frac{\frac{p_1^2}{p_2^2} + x_2 \frac{\partial MRS}{\partial x_1}}{A},$$

vagyis felhasználva az A előjelére vonatkozó feltevésünket és az ebből kapott egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} < 0$. Tehát elegendő belátnunk, hogy $A < 0$. Mivel a helyettesítés csökkenő határarányát még nem használtuk fel, ezért célszerűnek látszik ebből kiindulnunk. Tegyük fel, hogy az optimumban a hasznosság értéke u, és $x_2(x_1)$ az $U(x_1, x_2) = u$ által meghatározott implicit függvény. Nyilván $\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = MRS(x_1, x_2(x_1))$. Ekkor a helyettesítés csökkenő határaránya éppen azt mondja ki, hogy a $z(x_1) = MRS(x_1, x_2(x_1))$ (negatív értékeket felvevő) függvény abszolutértéke csökkenő, vagyis $\frac{\partial z(x_1)}{\partial x_1} > 0$. Az optimumban tehát

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial MRS}{\partial x_1} + \frac{\partial MRS}{\partial x_2} MRS = \frac{\partial MRS}{\partial x_1} - \frac{\partial MRS}{\partial x_2} \frac{p_1}{p_2} > 0,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $A < 0$.

12.3 HOSSZÚ TÁVÚ ÉS RÖVID TÁVÚ KÖLTSÉGGÖRBÉK

Jelöljük $c_L(y)$-al egy vállalat hoszú távú költségfüggvényét. Ez alatt azt értjük, hogy egy tőkét és munkát felhasználó vállalatnak. minden y kibocsátás esetén módjában áll mind a felhasznált munka (l) és tőke (k) mennyiségét változtatni, és úgy megválasztani, hogy a rögzített y kibocsátás mellett a költsége minimális legyen. Ezt a minimális költséget jelöli $c_L(y)$. Ha a felhasznált tőke mennyiségét egy bizonyos k szinten rögzítjük, akkor az ehhez a tőkemennyiséghez és y kibocsátáshoz tartozó minimális költséget $c_S(y, k)$-vel jelöljük. Ennek egy adott k-hoz tartozó parciális függvényét, az adott k tőkeállományhoz tartozó rövidtávú költséggörbének nevezzük. Ekkor nyilván $c_L(y) = \min_{k \in \mathbb{R}} c_S(y, k)$, vagyis $c_L(y)$ a $\{c_S(y, k) : k \in \mathbb{R}\}$ függvények alsó burkolója, hiszen $c_L(y)$ függvény minden k-ra kisebb $c_S(y, k)$ függvényértéknél, és egy rögzített y esetén $c_L(y)$ definíció szerint éppen $c_S(y, k^*(y))$-al egyenlő. Más szavakkal: a hosszú távú költségfüggvény a rövid távú költségfüggvények alsó burkolója. Mivel $c_L(y)$ éppen a

$$\min_{k \in \mathbb{R}} c_S(y, k)$$

feladat értékfüggvénye, ezért a burkolótétel alapján $\frac{dc_L(y)}{dy} = \frac{\partial c_S(y, k^*)}{\partial y}$.

13 BIBLIOGRÁFIAI ÚTMUTATÓ

A tananyag nagy része gyakorló példákkal megtalálható Sydsaeter-Hammond: *Matematika közgazdászoknak* (AULA), valamint Alpha C. Chiang: *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (Third Edition, McGraw-Hill, 1984, Auckland) tankönyvekben. Mélyebb eredmények – de még mindig közgazdászok számára érthető módon – találhatók az Akira Takayama: *Analytical Methods in Economics* (Harvester Wheatsheaf, 1994), Akira Takayama: *Mathematical Economics* (Cambridge University Press, 1985 2nd edition) és Angel de la Fuente: Mathematical Methods and Models for Economists (Cambridge University Press 1999) könyvekben. A feltételeles szélsőértékszámítás és a komparatív statika mikroökonómiai alkalmazásaira Hal R. Varian: *Mikroökonómia középfokon* és Hal R. Varian: *Microeconomic Analysis* (W. W. Norton & Company, New York) és Jehle, G. A. – P. J. Reny: *Advanced Microeconomic Theory* (Addison Wesley, 2001) könyvekben találhatunk példákat.

Tárgymutató

érintősík, 16
értékfüggvény, 63, 67, 69

alsó szinthalmaz, 23
azonosság, 5

belső pont, 19
burkolótétel
  feltétel nélküli, 67
  feltételes, 69

De-Morgan azonosság, 23
derivált
  n-változós vektorértékű függvényé, 37
  parciális, 14
    n-változós függvényé, 15
derivált mátrix reprezentációja, 37
Descartes szorzat, 5
differenciálok módszere, 42

elégséges feltétel, 5
elsőfokon homogén, 28
euklideszi távolság, 18
Euler-tétel, 28

függvény
  valós értékű, kétváltozós, 6
  valós értékű, n-változós, 6
felső szinthalmaz, 24
folytonosság
  -fogalma, 23
  -topológikus jellemzése, 23

gráf (függvényé), 6
gradiens, 16

határpont, 19
Hesse-mátrix, 52
hosszú távú költséggörbe, 88

implicit függvény, 33
implicit függvény módszer, 41
implicit függvény tétel
  általános, 39
  háromváltozós függvényre, 34
  kétváltozós függvényre, 33
implicit megadás, 33

Jacobi mátrix, 37

k-adfokon homogén, 29
környezet
  epszilon sugarú, 19
  környezet, 19
külső pont, 19
komparatív statika alaptétele
  általános eset, 39
  speciális eset, 33, 34
konkáv függvény, 55
konvex függvény, 55
konvex halmaz, 55
koordinátafüggvény, 28, 37
korlátos halmaz, 48
Kuhn-Tucker-feltételek, 79
Kuhn-Tucker-tétel
  elégséges feltétel, 80
  szükséges feltétel, 79

láncszabály
  álltalános, 38
  kétváltozós függvényre, 27, 29
Lagrange-tétel
  egyenlet feltétel, 58
  egyenletrendszer korlát, 64
lehetséges halmaz, 79

másodrendű parciális derivált, 16
mátrixok szorzása, 37
maximum érték, 47
maximumhely
  globális, 46
  lokális, 46
megvalósítható halmaz, 79
minimum érték, 47
minimumhely
  globális, 46
  lokális, 46

nyílt halmaz
  nyílt halmaz, 19
  relatív nyílt, 20

nyeregpont, 50

parciális derivált
  elsőrendű, 14
  másodrendű, 16
parciális függvény, 9

rövid távú költséggörbe, 88
regularitási feltétel
  egyváltozós eset, 73
regularitási feltételek
  többváltozós eset, 79
relatív nyílt, 20
rendezett pár, 5

stacionárius pont, 50
szükséges feltétel, 5
szintfelület, 7
szinthalmaz
  alsó, 23
  felső, 24
  kétváltozós függvényé, 6
  n-változós függvényé, 7, 8
szintvonal, 6
szintvonal meredeksége, 34

Taylor-formula, 18
teljes derivált, 27
topológiai tulajdonság, 19

Weierstrass-tétel, 48

Young-tétel, 24

zárt halmaz, 19