Pénzügyi matematika
Folytonos időparaméterű modellek

Badics Tamás

Veszprém 2013. szeptember 30.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Wiener-folyamat és sztochasztikus integrál

1.1. A nyereményfolyamat mint Stieltjes-integrál

A továbbiakban feltesszük, hogy az értékpapírok árfolyamatát egy folytonos időparaméterű S sztochasztikus folyamat írja le. Feltesszük, hogy a befektetők minden időpillanatban kereskedhetnek, vagyis a H kereskedési stratégia is egy folytonos időparaméterű folyamat. Az hogy ezek a folyamatok *folytonos időparaméterű* ek, egészen pontosan azt jelenti, hogy az S és H folyamatok mindegyike, egy a teljes $\Omega \times [0, T]$ Descartes szorzaton értelmezett valós értékű függvény[1]. Ha az argumentumokat is jelölni akarjuk, akkor használni fogjuk az $S(\omega, t)$ és $H(\omega, t)$ valamint az $S^\omega(t)$ és $H^\omega(t)$ jelöléseket, az $S(t)$ és $H(t)$ valószínűségi változókra, és magukra a sztochasztikus folyamatokra pedig az S_t és H_t jelöléseket is. Rögzítsünk egy $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ filtrációt, és tegyük fel, hogy minden t-re az $S(t)$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_t$-mérhető, vagyis az S folyamat a filtrációra nézve *adaptált*. Rögzített ω-esetén az $S(\omega, t)$ egy valós értékű függvény, amit az S sztochasztikus folyamat ω-kimenetelhez tartozó *trajektóriájá*nak nevezünk.

Első lépésként vizsgáljuk, meg, hogy ilyen esetben hogyan számítható ki a nyereményfolyamat. Induljunk ki a diszkrét idejű definícióból. Diszkrét esetben a *nyereményfolyamat*ot a

$$G^H(t) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{j=0}^{N} H_j(s)(S_j(s) - S_j(s-1)) \quad t = 1, ..., T$$

képlettel definiáltuk, ahol H_j és S_j folyamatok csak a $t = 1, 2, 3, ..., T.$ időpontokban

[1] Ha csak annyit mondunk hogy egy sztochasztikus folyamat folytonos, akkor mi ez alatt – mint azt később látni fogjuk – azt értjük, hogy a folyamat trajektóriái folytonosak, bár a szakirodalomban ha ez nem okoz félreértést a folytonos folyamatot néha a folytonos időparaméterű, vagyis nem diszkrét folyamatokra is haználják, pl. a folytonos Markov-lánc kifejezés arra utal, hogy a sztochasztikus folyamat értékkészlete diszkrét, de az időparaméter folytonos. A szintén használatos *folytonos modell* kifejezéssel viszont általában a „folytonos időparaméterű” értelemben találkozhatunk.

vannak értelmezve. Itt az összegzést kimenetenként kellett elvégezni, vagyis a $G^H(t)$ valószínűségi változó ω kimenetelhez tartozó értéke

$$G^H(t,\omega) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{j=0}^{N} H_j^{\omega}(s)(S_j^{\omega}(s) - S_j^{\omega}(s-1)) \quad t = 1, ..., T.$$

Vegyük észre, hogy ez utóbbi kifejezés a szumma jelek felcserélésével a

$$G^H(t,\omega) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{s=1}^{t} H_j^{\omega}(s)(S_j^{\omega}(s) - S_j^{\omega}(s-1)) \quad t = 1, ..., T$$

alakba is írható, hiszen véges sok tag esetén az összegzés sorrendje mindig felcserélhető. Próbáljuk meg értelmezni a

$$\sum_{s=1}^{t} H_j^{\omega}(s)(S_j^{\omega}(s) - S_j^{\omega}(s-1))$$

kifejezést. Vegyük észre, hogy – eltekintve attól az apróságtól, hogy a képletben valószínűségi változók szerepelnek – ez éppen a $\sum_{s=1}^{t} H_j^{\omega}(s)\mathbf{1}_{[s-1,s)}$ lépcsős függvény S_j^{ω} szerinti Lebesgue–Stieltjes-integrálja. Mértékelméletből ugyanis tudjuk, hogy ha S_j egy korlátosváltozású $[0,t]$-n értelmezett valós értékű függvény volna, akkor ez a kiterjesztési tétel miatt (ld.:[10] 2.90. tétel) egyértelműen meghatározna a számegyenes borelmérhető részhalmazain egy olyan μ mértéket, ami minden $[a,b)$ intervallumhoz a $\mu([a,b)) = S_j^{\omega}(b) - S_j^{\omega}(a)$ értéket rendeli. Ekkor az $[s-1,s)$ halmaz S_j^{ω} függvény által generált Lebesgue–Stieltjes-mérték szerinti mértéke éppen $S_j^{\omega}(s) - S_j^{\omega}(s-1)$, ezért a fenti lépcsős függvény ezen mérték szerinti integrálja a $[0,t)$ intervallumon, nyilván éppen a

$$\int_0^t H_j^{\omega}(s)dS_j^{\omega}(s) = \sum_{s=1}^{t} H_j^{\omega}(s)(S_j^{\omega}(s) - S_j^{\omega}(s-1))$$

kifejezés, ami tehát a fenti lépcsősfüggvény S_j szerinti Lebesgue–Stieltjes-integrálja.

A diszkrét idejű eredményeink nyilván úgy is interpretálhatóak, hogy az S és H folyamatok folytonos időparaméterű folyamatok, vagyis S és H folyamatok a teljes $\Omega \times [0,T]$ Descartes szorzaton értelmezve vannak, de kereskedés csak a $t = 1, 2, 3, ...$időpillanatokban folyik. Ebben az esetben minden s egész szám esetén, az S_j folyamat $[s-1,s)$ időintervallumok belső pontjaiban felvett értékei nyilván érdektelenek, hiszen az $s-1$ és s időpontok közti árakon úgysem folyik kereskedés, és ugyanezen oknál fogva a H folyamat az $s-1$ és s időpontok között konstans, vagyis teljesül a $H_j = \sum_{s=1}^{t} H_j^{\omega}(s)\mathbf{1}_{[s-1,s)}$ azonosság. Ekkor, a fenti gondolatmenet alapján, a nyereményfolyamat a

$$G^H(t,\omega) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{s=1}^{t} H_j^\omega(s)(S_j^\omega(s) - S_j^\omega(s-1)) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j^\omega(s) dS_j^\omega(s)$$

alakba írható, vagyis röviden

$$G^H(t) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j(s) dS_j(s), \tag{1.1}$$

ahol az integrál trajektóriánként kell venni. De vajon működik-e általános esetben a trajektóriánként vett integrál, vagyis a

$$G^H(t,\omega) = \left(\sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j(s) dS_j(s) \right)(\omega) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j^\omega(s) dS_j^\omega(s)$$

definíció? Belátható, hogy általános esetben az S folyamat nem feltétlenül korlátosváltozású[2], ezért a trajektoriánként vett integrál nem feltétlenül értelmezhető. Ez részben rosszhír, hiszen egy értelmes integrálfogalom felépítésekor lényegében a nulláról kell indulnunk, másrészt jóhír, mert nem kell emlékeznünk a valós analízisben megtanult integrálási szabályokra, és speciális függvények integráljaira, hiszen a sztochasztikus integrál elméletében ezeknek úgysem vennénk hasznát. Azok számára akiknek rossz emlékei vannak a valós analízisbeli integrálok kiszámítására használatos számtalan módszerrel kapcsolatban, további jóhír, – és valójában ez teszi szerethetővé a sztochasztikus analízist – hogy a sztochasztikus integrálszámítás elmélete igen nagyrészt abból áll, hogy hogyan tudjuk definiálni az integrált a különféle folyamatosztályokra, és igen kevés számú integrált fogunk konkrétan kiszámolni. A továbbiakban pontosan definiáljuk a Wiener-folyamatot, és látni fogjuk, hogy annak trajektóriái nem korlátosváltozásúak, ezért a trajektóriánként vett integrál nem értelmezhető, viszont értelmezhető a Wiener-folyamat szerinti ún. sztochasztikus integrál.

1.2. A Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrál

A Wiener-folyamat a teljesen véletlenszerű, ún. Brown-mozgás matematikai leírására szolgál[3]. A továbbiakban megadjuk a Wiener-folyamat precíz matematikai definícióját,

[2] Ld.: 32. oldal, 58 definíció

[3] A teljesen véletlenszerű mozgás első leírása Robert Brown skót botanikus nevéhez fűződik, aki 1827-ben figyelte azt meg vízben lebegő pollenrészecskék mozgását tanulmányozva. A mozgás első matematikai leírása Bacheliertől (1900) és A. Einsteintől (1905) származik, de csak 1923-ban N. Wienernek sikerült

majd definiáljuk a Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrált.

1. Definíció. *Legyen adott egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező, és egy* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *filtráció, ahol* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. *Az* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*-re adaptált* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *sztochasztikus folyamatot Wiener-folyamatnak nevezzük, ha*
1. majdnem minden $\omega \in \Omega$ *esetén a* $t \mapsto W(t)(\omega)$ *leképezés folytonos,*
2. $W(0) = 0$ *m.m.*
3. ha $s \leq t$, *akkor* $W(t) - W(s)$ *normális eloszlású,* $t - s$ *varianciájú,* 0 *várható értékű, és független az* $\mathcal{F}_s$ σ*-algebrától.*

Megmutatható, hogy a Wiener-folyamat trajektóriái egy valószínűséggel seholsem differenciálhatóak, és egy valószínűséggel nem korlátosváltozásúak[4].

2. Definíció. *Legyen adott egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező, és egy* $\{\mathcal{F}_t\}_{T\geq t\geq 0}$ *filtráció. Egy* M *folytonos idejű sztochasztikus folyamat az adott filtrációra és valószínűségi mértékre vonatkozóan martingál, ha adaptált, minden* $t \leq T$ *-re* $\mathbf{E}(|M(t)|) < \infty$, *valamint minden* $s < t$*-re teljesül az*

$$\mathbf{E}(M(t) \mid \mathcal{F}_s) = M(s).$$

azonosság.[5]

Belátható, hogy a Wiener-folyamat martingál.

Rögzítsünk egy egy $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ filtrációt. Legyen

$$H(t) = H(0) + \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\omega)\, \mathbf{1}_{(t_i, t_{i-1}]}$$

ahol $0 = t_0 < t_1 < ..... < t_n = T$, és H_i $\mathcal{F}_i$ mérhető. Az ilyen alakú folyamatokat *egyszerű folyamatok*nak nevezzük. Vegyük észre, hogy a H_i-re megfogalmazott mérhetőségi megkötés pontosan azt jelenti, hogy az egyszerű folyamat adaptált a filtrációra.

bebizonyítani, hogy az Einstein által adott definíció nem vezet ellentmondásra, vagyis a Wiener-folyamat valóban létezik. A pénzügytan szempontjából Bachelier munkássága azért érdekes, mert ő már az értékpapírok véletlen ármozgását próbálta modellezni, de az ő – egyébként kevésbé elegáns – konstrukciójáról kortársai nem vettek tudomást, és így munkássága lényegében csak a 60-as években vált ismertté, és így a Wiener-folyamat pénzügyekben való alkalmazása is csak a 60-as ések végén – Paul Samuelson hatására – terjedt el. A lognormális modell első alkalmazása is Samuelson nevéhez köthető, ezt hívjuk ma úgy hogy Black-Scholes-modell.

[4] Időnként azt mondjuk, hogy a trajektóriái sehol sem differenciálhatóak, és nem korlátosváltozásúak. Ez nem számít túlzott hanyagságnak, mert azon folyamatok között, melyeknek a trajektóriái egy valószínűséggel ugyanazok nem tudunk különbséget tenni. Ezekre azt mondjuk, *megkülönböztethetetlenek.*

[5] Valójában még meg szokás követelni, hogy *reguláris* legyen, vagyis hogy minden trajektóriája jobbról folytonos, és rendelkezik baloldali határértékkel. Mivel azonban mi a továbbiakban kizárólag folytonos trajektóriájú folyamatokra kívánjuk alkalmazni a fogalmat, ezért ez a tulajdonság mindig automatikusan teljesülni fog.

3. Definíció. *Legyen adott egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező, és egy* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *filtráció. A filtrációra adaptált* H *egyszerű folyamat* $W(t)$ *Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrálja alatt a*

$$\int_0^t H(s)\,dW(s) = \sum_{0\leq i\leq n-1} H_i\left(W(t_{i+1}\wedge t) - W(t_i \wedge t)\right)$$

folyamatot értjük. (Itt $a\wedge b$*-vel a* $\min\{a;b\}$ *kifejezést jelöltük.)*

Belátható, hogy ha H egy egyszerű folyamat, akkor a $\int_0^t H(s)\,dW(s)$ sztochasztikus folyamat martingál.

Ha H egy olyan adaptált folyamat, melyre $\mathbf{E}\left(\int\limits_0^T H^2(s)ds\right) < \infty$.[6] Ekkor létezik az egyszerű folyamatoknak egy H_n sorozata, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int\limits_0^T (H(s) - H_n(s))^2\,ds\right) = 0.$$

A tétel egy fontos következménye, hogy minden, a fenti tételnek elegettevő H folyamatnak létezik a W Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrálja, amit a közelítősorozat elemeinek $\int_0^t H_n(s)\,dW(s)$ integráljai egyértelműen meghatároznak. A lényeget a következő tételben foglalhatjuk össze:

4. Tétel. *Legyen* $\mathcal{H}$ *azon adaptált,* $[0,T]$*-on értelmezett* X *folyamatok halmaza, melyekre* $\mathbf{E}\left(\int\limits_0^T X^2(t)dt\right) < \infty$, $W(t)$ *pedig egy Wiener-folyamat a* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *filtráción. Ekkor létezik a* $\mathcal{H}$*-n értelmezett, és a* $[0,T]$*-on értelmezett martingálok terébe képező* I *lineáris leképezés, amelyre teljesül, hogy minden* H *egyszerű folyamat esetén*

$$I(H)_t = \int_0^t H(s)\,dW(s),$$

továbbá teljesül az ún. Itô-izometria, vagyis minden $H \in \mathcal{H}$*-ra, ha* $t < T$,

$$\mathbf{E}\left((I(H)_t)^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^t H^2(s)\,ds\right),$$

továbbá ha H_n *az egyszerű folyamatoknak egy olyan sorozata, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int\limits_0^T (H(s) - H_n(s))^2\,ds\right) = 0.$$

[6] Vegyük észre, hogy itt az integrandus egy sztochasztikus folyamat, vagyis ez már egy sztochasztikus integrál. Mivel azonban az integrátor korlátosváltozású, és egy adaptált folyamat trajektóriája mindig Lebesgue-mérhető, ezért ez az integrál mindig trajektóriánként vett integrálként értelmezhető.

akkor minden t-re

$$\int_0^t H_n(s)\, dW(s) \xrightarrow{L^2(\mathbf{P})} I(H)_t .$$

5. Definíció. *A fenti tétel alapján létező $I(H)$ sztochasztikus folyamatot a H folyamat W Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integráljának nevezzük.*

A tétel bizonyítása megtalálható [6] 144. oldalán, illetve az utólsó állítás ugyanezen könyv (6.4) sorának következménye. Ld.: még: [3] valamint [13]: Corollary 3.1.8.

1.3. A kvadratikus variáció és kovariáció

A sztochasztikus analízis talán legfontosabb fogalma a kvadratikus variáció és kovariáció. Bár a fogalom a valós függvényekre is definiálható, a valós analízisben ez a fogalom nem játszik szerepet, hiszen a folytonos és korlátosváltozású függvények kvadratikus variációja zérus. Mint azt látni fogjuk, a sztochasztikus integrálokra vonatkozó integrálási szabályok – eltekintve attól a ténytől hogy sztochasztikus folyamatokra vonatkoznak – legtöbbször formailag csak abban különböznek a valós analízis megfelelő integrálási szabályaitól, hogy tartalmaznak egy (vagy több) kvadratikus kovariációs tagot.

6. Definíció. *Rögzítsünk egy $[0,T]$ intervallumot, ezen egy X és egy Y sztochasztikus folyamatot, egy $t < T$ időpontot, és minden n-re legyen a véges $(t_k^{(n)})$ sorozat a a $[0,t]$ intervallum egy véges felosztása, valamint legyen $\pi_{t_k^{(n)}} = \max_i \left\{ t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \right\}$. Ekkor, ha a*

$$Q_n = \sum_k \left(X\left(t_k^{(n)}\right) - X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right) \left(Y\left(t_k^{(n)}\right) - Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

valószínűségi változókból álló sorozat sztochasztikusan konvergens[7]*, akkor a $\lim_{n\longrightarrow\infty} Q_n$ határértéket az X és az Y folyamat kvadratikus kovariációjának nevezzük, és $[X,Y](t)$-vel jelöljük.*

Az $[X,Y](t)$ nyilván, ammennyiben létezik, általános estben maga is egy sztochasztikus folyamat. Látni fogjuk, hogy pl. egy Wiener folyamat önmagával vett kvadratikus kovariációja létezik, és az egy determinisztikus folyamat. A továbbiakban azonban a Wiener-folyamatnál általánosabb folyamatokra is szeretnénk használni a fogalmat. De vajon milyen X és Y folyamatok esetén létezik a kvadratikus kovariáció? Ahhoz hogy erre válaszolhassunk, be kell vezetnünk néhány fogalmat.

7. Definíció. *Azokat a folyamatokat, melyeknek minden trajektóriája véges változású*[8]*, véges változású folyamatoknak nevezzük*[9]*.*

[7] Ld.: 33. oldal, 63 definíció.

[8] Ld.: Függelék.

[9] Mivel a továbbiakban mindig véges időhorizonton gondolkodunk, ezért véges változású helyett gyakran korlátos változásút mondunk.

8. Definíció. *Egy sztochasztikus folyamatról azt mondjuk hogy folytonos, ha minden trajektóriája folytonos.*

9. Definíció. *Az olyan sztochasztikus folyamatokat, amelyek előállnak egy végesváltozású, folytonos, adaptált folyamat és egy folytonos lokális martingál*[10] *összegeként, folytonos szemimartingáloknak nevezzük.*

Ez utóbbi folyamatosztály különösen fontos lesz számunkra, ugyanis a későbbiekben kizárólag csak folytonos szemimartingál eszközárfolyamatokkal fogunk foglalkozni. Most már rátérhetünk a kvadratikus kovariáció létezésének problémájára.

10. Tétel. *Tetszőleges X és Y folytonos szemimartingálok esetén az $[X, Y](t)$ kvadratikus kovariáció létezik, az egy végesváltozású folyamat, sőt, létezik egy folytonos verziója.*

A fenti definíció értelmében, a kvadratikus kovariáció minden t-re csak nullmértékű halmaz erejéig meghatározott, vagyis a fenti definíció értelmében még nem egyértelmű. Előző tételünk tehát arról szól, hogy megmutatható, hogy tetszőleges folytonos szemimartingál esetén minden t-re az $[X, Y](t)$ értékét meg lehet úgy választani, hogy a kapott folyamat folytonos legyen. Valójában mindig erre a verzióra gondolunk, amikor kvadratikus kovariációról beszélünk.[11]

11. Tétel. *Tetszőleges X, Y és Z folytonos szemimartingálok, valamint α és β valós számok esetén*

$$[\alpha X + \beta Y, Z](t) = \alpha [X, Z](t) + \beta [Y, Z](t).$$

valamint

$$[X, Y](0) = 0.$$

A kvadratikus kovariáció nyilván szimmetrikus, vagyis $[X, Y] = [Y, X]$, ezért a fenti tétel alapján a kvadratikus kovariáció egy szimmetrikus bilineáris leképezés.

12. Definíció. *Az $[X, X](t)$ folyamatot az X sztochasztikus folyamat kvadratikus variációjának nevezzük, és $[X](t)$-vel jelöljük.*

[10] Ld.: 34. oldal, 66 definíció.

[11] A nullmértékű halmazokkal való foglalatoskodás talán szőrszálhasogatásnak tűnik, azonban ebben az esetben ez komoly problémát okoz. Itt ugyanis a t minden értékéhez tartozik egy nullmértékű halmaz. Ha minden t-re nulmértékű halmazon változtatunk a folyamat értékén, az így kapott folyamat már nem feltétlenül lesz megkülönböztethetetlen az eredetitől, hiszen kontinium sok nullmértékű halmaz uniója nem feltétlenül nullmértékű. Ez tehát egy alapvető különbség a diszkrét- és a folytonos időparaméteres elmélet között. Mivel a sztochasztikus folyamatokat gyakran a kvadratikus kovariáció mintájára időpontonként kivánjuk definiálni valamilyen valószínűségi változókat tartalmazó tér elemeiként, amik ezért nullmértékű halmaz erejéig vannak meghatározva, vagy eleve csak mint ekvivalencia osztályok léteznek, ezért az ebből összerakott folytonos idejű folyamat már nem lesz egyértelmű. Ahhoz hogy – nullmértékű halmaztól eltekintve – egyértelműen tudjuk a sztochasztikus folyamatokat definiálni, mindig megköteéseket kell tennünk a definíciókban a trajektóriák topológiai viselkedésére vonatkozóan is. Ezt a célt szolgálja a regularitás fogalma is.

A definíció alapján könnyen belátható, az alábbi tétel (ld.: [11] 2.31 example):

13. Tétel. *Ha X egy véges változású folyamat, és Y egy folytonos szemimartingál, akkor $[X, Y] = 0$.*

Ennek és 11. tételnek a következménye az alábbi állítás(ld.: [11] 2.26 example):

14. Tétel. *Ha X egy folytonos szemimartingál és $X = L + V$ ahol L egy folytonos lokális martingál és V egy véges változású folyamat, akkor $[X] = [L]$.*

Bizonyítás Mivel X folytonos szemimartingál

$$[X] = [X, X] = [L + V, L + V]\,.$$

A kvadratikus kovariáció linearitása miatt azonban

$$[L + V, L + V]\,. = [L, L + V] + [V, L + V] = [L, L] + [L, V] + [V, L] + [V, V]\,.$$

Mivel V is és L is folytonos szemimartingál, felhasználva 13 tételt, kapjuk hogy $[L, V] = [V, L] = [V, V] = 0$, amiből a bizonyítandó állítás már következik.

□

Továbbá meglepő módon, igaz a következő állítás:

15. Tétel. *Ha W egy Wiener folyamat, akkor $[W]\,(t) = t$.*

16. Tétel (Lévy-féle karakterizációs tétel). *Ha W egy olyan folytonos lokális martingál, melyre $W(0) = 0$ és $[W]\,(t) = t$, akkor W egy Wiener-folyamat.*

1.4. A sztochasztikus integrál kiterjesztése és Itô-folyamat

A sztochasztikus integrál fogalma kiterjeszthető folytonos lokális martingálokra, sőt folytonos szemimartingálokra is. Megmutatható, hogy egy M folytonos lokális martingál szerint minden olyan H progresszíven mérhető[12] folyamat integrálható, melyre

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T H^2(t)d\,[M]\right) < \infty.$$

Egy H folyamat S folytonos szemimartingál szerinti integrálja úgy definiálható, hogy H-t külön-külön integráljuk a végesváltozású és a lokális martingál összetevő szerint, majd

[12] Egy folyamat *progresszíven mérhető*, ha minden t-re az $\Omega \times [0, t]$-re megszorított folyamat mérhető az $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, t])$ σ-algebra szerint.

a két integrálfolyamatot összeadjuk. Mint már említettük, egy adaptált folyamat trajektóriája mindig Lebesgue-mérhető, ezért egy adaptált folyamat korlátosváltozású integrátor szerinti integrálja mindig trajektóriánként vett integrálként értelmezhető. Az $\int_0^t H(s)dS(s)$ sztochasztikus integrál folyamatot a továbbiakban $\int HdS$-el vagy $H \bullet S$-el vagy $(H \bullet S)(t)$-vel fogjuk jelölni. A sztochasztikus integrálok kiszámításánál hasznosak lesznek az alábbi számolási szabályok, melyek szemimartingál integrátorokra mindig teljesülnek, feltéve hogy a bennük szereplő integrálok léteznek. (ld.: [12], Proposition 2.73.):

1. $\int Yd(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 \int YdX_1 + \alpha_2 \int YdX_2$ és $\int \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 dX = \alpha_1 \int Y_1 dX + \alpha_2 \int Y_2 dX$
2. $\int Xd\left(\int YdZ\right) = \int XYdZ$
3. $\left[\int XdY, Z\right] = \int Xd[Y,Z]$
4. Ha egy X folyamat folytonos lokális martingál, akkor $\int YdX$ is folytonos lokális martingál,
5. Ha X folyamat végesváltozású, akkor $\int YdX$ is végesváltozású.
6. Ha X folyamat folytonos, akkor $\int YdX$ is folytonos

Az 1. tulajdonságra a továbbiakban mint a sztochasztikus integrál bilinearitási tulajdonságára fogunk hivatkozni. A 2. és a 3. tulajdonság egy triviális következménye, hogy $\left[\int XdY\right] = \int X^2 d[Y]$. Vegyük észre, hogy a 2. tulajdonság a mértékelméletből ismert láncszabály egy újabb megjelenési formája (ld.: függelék).

17. Definíció. *Legyen adott egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, és egy $\{\mathcal{F}_t\}_{T \geq t \geq 0}$ filtráció, és egy ezen értelmezett $W(t)$ Wiener-folyamat. Ekkor egy valós értékű X_t folyamatot Itô-folyamatnak nevezünk, ha*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t N_s dW_s$$

alakban írható, ahol X_0 F_0-mérhető, K és N adaptáltak, melyekre teljesül hogy $\int_0^T |K_s|\, ds < \infty$ m.m., és $\int_0^T |N_s|\, dW_s < \infty$ m.m..

Az Itô-folyamat nyilván folytonos szemimartingál melynek $\int_0^t K_s ds$ a folytonos korlátos változású része és $\int_0^t N_s dW_s$ a folytonos lokális martingál része.

18. Tétel (Itô-formula folytonos szemimartingálra). *Legyen $U \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz, és az X_t egy U-beli értékeket felvevő folytonos szemimartingál, valamint f egy az U-halmazon kétszer folytonosan differenciálható valós értékű függvény Ekkor*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d[X]_s .$$

A bizonyítást ld.: [12]: Proposition 6.2. Abban az esetben, ha az X_t szemimartingál egy Itô-folyamat, az X_t szerinti valamint a $[X]_t$ szerinti integrálok megadhatók W_t szerinti és az időparaméter szerinti integrálok alakjában, vagyis teljesül a következő tétel.

19. Tétel (Itô-formula Itô-folyamatra). *Legyen X_t egy Itô-folyamat az*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t N_s dW_s$$

reprezentációval, és legyen f egy kétszer folytonosan deriválható függvény. Ekkor a fenti tétel feltételei mellet,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) N_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) N_s^2 ds.$$

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a $\int_0^t f'(X_s) dX_s$ fenti értelmezése következik az integrál fenti tulajdonságaiból. A sztochasztikus integrál bilinearitásából és az integrál 2. tulajdonságából ugyanis következik, hogy bármely X Itô-folyamat szerint integrálható H folyamat X-szerinti integrálja

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s K_s ds + \int_0^t H_s N_s dW_s, .$$

ezért

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) N_s dW_s$$

Az 14 tételből és a kvadratikus kovariáció tulajdonságaiból továbbá következik, hogy

$$[X]_t = \left[\int N dW\right]_t = \int_0^t N_s^2 ds,$$

ezért ismét felhasználva az integrál 2. tulajdonságát, következik, hogy

$$\int_0^t f''(X_s) d[X]_s = \int_0^t f''(X_s) N_s^2 ds.$$

□

20. Tétel (Parciális integrálási formula). *Legyenek X és Y folytonos szemimartingálok. Ekkor*

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X dY + \int_0^t Y dX + [X, Y](t).$$

Ld.: [12]: proposition 2.28. Valójában a többdimenziós folyamatokról szóló Itô-formula ([12]: Proposition 6.2) egyszerű következménye.[13]

21. Definíció. *Egy olyan $W : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ n-dimenziós folyamatot, melynek minden $W_i(\omega,t)$ koordinátája egy (egy dimenziós) Wiener-folyamat, és a $W_i(\omega,t)$ folyamatok függetlenek, n-dimenziós Wiener-folyamatnak nevezzük.*

A továbbiakban kiterjesztjük az integrált többdimeziós Wiener-folyamat integrátorokra is. Ennek célja azonban csupán a jelölés leegyszerűsítése, hiszen ilyenkor az integrált minden esetben koordinátánként számítjuk, és az eredményt a végén vektorba rendezzük. Legyen tehát

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

egy $n \times m$-es mátrix, melynek $v_{ij}(\omega,t)$ kordinátái olyan sztochasztikus folyamatok, melyek Wiener-folyamat szerint integrálhatóak a fenti értelemben. Ekkor a v mátrix $W = (W_1, ...W_n)$ n-dimenziós Wiener-folyamat szerinti $\int_0^t v(s)dW(s)$ integrálja alatt azt az $m \times 1$ es mátrixot (oszlopvektort) értjük, amelynek i-edik komponense

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^t v_{ij}(s)dW_j(s).$$

Használni fogjuk még a

$$\int_0^t v dW = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \int_0^t v_{1j}(s)dW_j(s) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \int_0^t v_{mj}(s)dW_j(s) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ \vdots \\ dW_n \end{pmatrix}$$

jelölést is. Ismét hangsúlyozzuk, hogy itt csak egy jelölésről van szó, és ugyanet a mátrix jelölést alkalmazhatjuk tetszőleges sztochasztikus folyamat integrátorra és mátrix integrandusra. Ennek a jelölésnek a felhasználásával definiálhatjuk az n-dimenziós Itô-folyamatot.

[13] Egy kis magyarázat az elnevezéshez. Legyenek F és G korlátosváltozású, differenciálható (így folytonos) függvények. Belátható, hogy ebben az esetben a fenti parciális integrálási formula éppen a valós analízisből ismert parciális integrálási formulát adja. Valóban, a Newton–Leibnitz-szabály szerint $F(t) - F(0) = \int_0^t F'(x)dx$, ezért a láncszabály alapján (ld.: Függelék,32. oldal, 61. tétel) $\int_0^t GdF = \int_0^t GF'dx$, és hasonlóan $\int_0^t FdG = \int_0^t FG'dx$. Ezekkel a helyettesítésekkel, és figyelembe véve hogy 13. tétel alapján $[F,G] = 0$, éppen a valós analízis parciális integrálási formuláját kapjuk. Hasolóan belátható hogy az Itô-formula a helyettesítéses integrál formulájának az általánosítása, ugyanis ha X egy differenciálható és korlátosváltozású függvény, akkor az előbbiek alapján $X(t) - X(0) = \int_0^t X'(s)ds$, és $[X] = 0$, ezért az Itô-formula ebben az esetben szintén az integrál 2. számú tulajdonsága alapján (vagyis a láncszabály alapján) $f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\,dX_s = \int_0^t f'(X_s)\,X'(s)ds$, ami éppen az analízisből ismert helyettesítéses integrálási formula.

22. Definíció. *Legyen adott egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező, és egy* $\{\mathcal{F}_t\}_{T \geq t \geq 0}$ *filtráció, és egy ezen értelmezett* $W(t)$ n*-dimenziós Wiener-folyamat. Ekkor egy* $\mathbb{R}^n$ *értékű* $X(t)$ *folyamatot* n*-dimenziós Itô-folyamatnak nevezünk, ha*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t N(s)dW(s)$$

alakban írható, ahol X_0 $\mathcal{F}_0$*-mérhető,* K *egy* n*-dimenziós folyamat, melynek koordináta folyamatai adaptáltak (röviden: adaptált), mindegyik koordináta folyamatára teljesül hogy* $\int_0^T |K_i(s)| \, ds < \infty$ *m.m, és* N *egy adaptált* $m \times n$*-es mátrix értékű folyamat melynek mindegyik komponensére teljesül, hogy* $\int_0^T |N_{ij}(s)| \, dW(s) < \infty$ *m.m.*

1.5. Sztochasztikus differenciálegyenletek

A sztochasztikus folyamatok sajnos általános esetben nem differenciálhatók, ennek ellenére a sztochasztikus folyamatokkkal összefüggésben használni fogjuk a valós analízisben és a közgazdaságtanban megszokott differenciál jelölésmódot és a differenciál egyenlet kifejezést. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy e-mögött a jelölésmód mögött valójában mindig sztochasztikus integrálok állnak, éppen ezért a differenciálokra vonatkozó számolási szabályok minden esetben a sztochasztikus integrálra megfogalmazott tulajdonságok következményei.

23. Definíció. *Legyen adott egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mező, és egy* $\{\mathcal{F}_t\}_{T \geq t \geq 0}$ *filtráció, és egy ezen értelmezett* $W(t)$ n*-dimenziós Wiener-folyamat. Legyenek továbbá* $f(x,t)$ *és* $\sigma(x,t)$ *az* $\mathbb{R}^n \times [0,T]$*-n értelmezett* $m \times n$*-es mátrix értékű, mérhető leképezések, és* ξ *legyen egy* $\mathcal{F}_0$ *mérhető valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy az* X_t *folyamat kielégíti az*

$$dX_t = f(X_s, s)ds + \sigma(X_s, s)dW_s \tag{1.2}$$

ún. sztochasztikus differenciálegyenletet az $X_0 = \xi$ *kezdeti feltétellel, ha az*

$$\int_0^t f(X_s, s)ds \qquad \text{és} \qquad \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$$

integrálok jóldefiniáltak, és

$$X_t = \xi + \int_0^t f(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s. \tag{1.3}$$

Ekkor az (1.2) kifejezést a *sztochasztikus differenciálegyenlet differenciál alakjá*nak, (1.3)-t pedig a *sztochasztikus differenciálegyenlet integrál alakjá*nak nevezzük.

2. fejezet

Folytonos idejű eszközárazás

2.1. A pénzpiac modellje

A továbbiakban feltesszük hogy a pénzpiacon egy kockázatmentes és egy kockáztos értékpapírral kereskednek. A pénzpiac megadásához rögzítsünk egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt, egy $\{\mathcal{F}_t\}_{T\geq t\geq 0}$ filtrációt, és egy a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{T\geq t\geq 0})$ filtrált téren értelmezett $W(t)$ Wiener-folyamatot. A kockázatmentes értékpapír árfolyamatát jelöljük S_0-al, a kockázatos értékpapír árfolyamatát pedig S_1-el. Az S_0 sztochasztikus folyamatról tegyük fel,hogy

$$S_0(t) = S_0(0) \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\},$$

ahol $S_0(0) = 1$, és $r(t)$ egy progresszíven mérhető sztochasztikus folyamat, melyre majdnem biztosan teljesül, hogy $\int_0^T |r(t)|\, ds < \infty$. A kockázatos értékpapír S_1 árfolyamatáról feltesszük hogy

$$S_1(t) = S_1(0) \exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds\right\}, \tag{2.1}$$

ahol $b(t)$ és $\sigma(t)$ progresszíven mérhető sztochasztikus folyamatok, továbbá a σ ún. *volatilitási folyamatra* majdnem biztosan teljesül, hogy $\int_0^T \sigma^2(t)ds < \infty$. valamint a $b(t)$ ún. *várható hozam folymat*ra majdnem biztosan teljesül, hogy $\int_0^T |b(t)|\, ds < \infty$.

Abban az esetben ha az $r(t)$, $b(t)$ és $\sigma(t)$ folyamatok konstansok, a híres *Black–Scholes-modell*hez jutunk. Belátható, hogy ebben az utóbbi esetben a részvényárfolyam eloszlása minden időpontban lognormális, ezért ezt a modellt *lognormális-modell*nek is nevezik.

24. Tétel. *A fent definiált S_0 és S_1 folyamatok kielégítik az*

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt \tag{2.2}$$

valamint a

$$dS_1(t) = S_1(t)\left[b(t)dt + \sigma(t)dW(t)\right] \tag{2.3}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, továbbá S_0 és S_1 folyamatok folytonos szemimartingálok.

Bizonyítás Nyilván elegendő az S_1-re vonatkozó állítást bizonyítani, mivelhogy $\sigma(t) = 0$ és $b(t) = r(t)$ esetén éppen 2.2 differenciálegyenletet kapjuk. Áttérve a sztochasztikus differenciálegyenlet integrál alakjára, tehát keressük a

$$S_1(t) - S_1(0) = \int_0^t S_1(s)b(s)ds + \int_0^t S_1(s)\sigma(s)dW(s) \tag{2.4}$$

sztochasztikus differenciálegyenlet megoldását. Alkalmazva az Itô-formulát az $f = \ln$ függvényre és az S_1 folyamatra, kapjuk hogy

$$\ln\left(S_1(t)\right) - \ln\left(S_1(0)\right) = \int_0^t \frac{1}{S_1(s)} dS_1(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{S_1^2(s)} d\left[S_1(s)\right]. \tag{2.5}$$

Először számítsuk ki a jobb oldalon szereplő első integrált. Mivel az integrál az integrátorban lineáris ezért az S_1 2.4-beli alakját és a sztochasztikus integrál 2. számú tulajdonságát felhasználva ez éppen

$$\int_0^t \frac{1}{S_1(s)} d\left(\int_0^s S_1(u)b(u)du\right) + \int_0^t \frac{1}{S_1(s)} d\left(\int_0^s S_1(u)\sigma(u)dW(u)\right).$$

A sztochasztikus integrál 2. számú tulajdonságát felhasználva ez utóbbi

$$\begin{gathered}\int_0^t \frac{1}{S_1(s)} S_1(s)b(s)ds + \int_0^t \frac{1}{S_1(s)} S_1(s)\sigma(s)dW(s) = \\ \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s).\end{gathered} \tag{2.6}$$

Mivel 2.4 sor és 14 tétel alapján

$$\left[S_1\right](t) = \left[\int S_1\sigma dW\right](t) = \int_0^t S_1^2\sigma^2 d\left[W\right] = \int_0^t S_1^2(s)\sigma^2(s)ds,$$

ezért 2.5 sor jobboldalának második integrálja, ismét az integrál második tulajdonságát használva éppen

$$\int_0^t \frac{-1}{S_1^2(s)} S_1^2(s)\sigma^2(s)ds = -\int_0^t \sigma^2(s)ds. \tag{2.7}$$

Az 2.6 és 2.7 sorok alapján kapjuk, hogy

$$\ln\left(S_1(t)\right) - \ln\left(S_1(0)\right) = \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds.$$

Ekkor mindkét oldalnak véve az e-alapú exponenciális függvénnyel való kompozícióját, éppen az 2.1 összefüggést kapjuk az S_1 folyamatra, vagyis a szóbanforgó folyamat valóban kielégíti a 2.3 sztochasztikus differenciálegyenletet.

Mivel 2.4 kifejezésben az integrál 4., 5. és 6. tulajdonsága miatt az első integrál egy folytonos végesváltozású folyamat, a második pedig egy folytonos lokális martingál, ezért S_1 folytonos szemimartingál.

□

Formálisan átrendezve 2.2 sort a

$$\frac{\frac{dS_0(t)}{dt}}{S_0(t)} = r(t)$$

kifejezéshez juthatunk,[1] ami éppen azt mutatja, hogy az $r(t)$ éppen az S_0 t-beli pillanatnyi növekedési rátája, amit a kötvény *pillanatnyi hozam*ának is nevezünk. Ezen a ponton az olvasóban jogosan merül fel a kérdés, hogy amennyiben a kockázatmentes kötvény $r(t)$ pillanatnyi hozama maga is egy sztochasztikus folyamat, a kockázatmentes kötvény milyen értelemben tekinthető kockázatmentesnek. Erre a kérdésre egy matematikailag nem túl precíz érveléssel próbálunk meg válaszolni. Próbáljuk meg „formálisan” meghatározni az S_0 és S_1 folyamatok pillanatnyi hozamát, vagyis a növekedési rátáját a t időpillanatban. Az S_0 esetében a ez éppen $r(t)$ ami a feltételek szerint egy $\mathcal{F}_t$ mérhető valószínűségi változó[2], ami azt jelenti, hogy a pillanatnyi kamatláb a t időpontban ismert, hiszen az$\mathcal{F}_t$ azokat az eseményeket tartalmazza, amelyek bekövetkezése t-ben eldönthető. Az S_1 folyamatról azonban ez nem mondható el, ugyanis ha megpróbálnánk az S_0 hoz hasonló alakra hozni, valami ilyesmit kapnánk:

$$S_1(t) = S_1(0)\exp\left\{\int_0^t \left[\sigma(s)\frac{dW(s)}{ds} + b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right] ds\right\}.$$

Ezzel az a probléma, hogy a $\frac{dW(s)}{ds}$ derivált nem létezik, hiszen tudjuk, hogy a Wiener-folyamat sehol sem differenciálható, de ha létezik is a $\frac{dW(s)}{ds}$ valamilyen értelemben az nem $\mathcal{F}_t$ mérhető. Kicsit precízebben fogalmazva azt is mondhatjuk, hogy a W Wiener-folyamat szerinti integrált nem tudjuk egy adaptált folyamat idő szerinti integráljaként előállítani.

[1] Hangsúlyozzuk, hogy ez csak a szimbólumokkal való bűvészkedés, aminek trajektóriánként differenciálható folyamatokra va értelme.

[2] Mivel $r(t)$ progresszíven mérhető, ezért adaptált is.

Ha elő tudnánk, akkor az S_1 folyamatot a

$$S_1(t) = S_1(0) \exp\left\{\int_0^t z(s)ds\right\}$$

alakban tudnánk előállítani, ahol $z(t)$ szintén egy adaptált folyamat, vagyis ekkor a részvény pillanatnyi hozama minden t-ben ismert lenne. Ez viszont a sztochasztikus integrál 5. tulajdonsága miatt azt jelentené, hogy $\int_0^t z(s)ds$ és ezért S_1 is végesváltozású folyamat lenne, ami ellentmondás. Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy a fenti modellben a kötvény pillanatnyi hozama ismert, de a részvényé nem. Ez utóbbi ugyanis egy furcsa $\frac{dW(s)}{ds}$ „véletlen tagot" tartalmaz, amit eddigi eszközeinkkel nem igen tudunk precízen definiálni. Ezt szokás *fehér zajnak* is nevezni[3].

2.2. Feladatok

25. Exercise. *Legyen Z egy folytonos szemimartingál. Bizonyítsa be, hogy az*

$$E = \exp\left\{Z - Z(0) - \frac{1}{2}[Z]\right\}$$

folyamat kielégíti az $E = 1 + \int EdZ$ sztochasztikus differenciálegyenletet. (Útmutatás: alkalmazzuk a 24. tétel bizonyításának gondolatmenetét.)

26. Exercise. *Az előző gyakorlat eredményét felhasználva adjunk új bizonyítást a 24. tételre.*

27. Exercise. *Tegyük fel, hogy X egy folytonos lokális martingál, és α egy tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az*

$$\exp\left(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}[X]\right)$$

folyamat szintén egy folytonos lokális martingál. (útmutatás: alkalmazzuk az Itô-formulát az $f = \exp$ függvényre és az $\alpha X - \frac{\alpha^2}{2}[X]$ folyamatra.)

28. Exercise. *Az előző feladat felhasználásával mutassa be, hogy az*

$$S_1(t) = S_1(0) \exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW(s) + \int_0^t b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds\right\}$$

folyamat felírható egy kockázatmentes eszköz árfolyamatának, és egy lokális martingálnak a szorzataként.

[3] A fehér zaj pontos matematikai definíciójához szükségünk lenne az ún. általánosított függvény, másnéven disztribúció fogalmára. Ld.: [14]: Chapter 6.

29. Exercise. *Tegyük fel, hogy X egy folytonos lokális martingál. Bizonyítsa be, hogy $X^2 - [X]$ lokális martingál.*

2.3. Önfinanszírozó portfóliók

Ennek a fejezetnek az eredményeit meglehetősen általános esetben is könnyű bizonyítani, ezért most ideiglenesen feltesszük, hogy nem kettő, hanem $N+1$-számú értékpapírral kereskednek a pénzpiacon, és az árfolyamat folytonos szemimartingál. A továbbiakban legyen S egy rögzített $\mathbb{R}^{N+1}$-beli értékeket felvevő $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ filtráció szerinti folytonos szemimartingál. Tekintsük a $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ filtrált térrel és az $S = (S_0, ..., S_d)$ $N+1$-dimenziós folytonos szemimartingállal jellemezhető pénzpiacot. Jelölje a $H = (H_0, ..., H_N)$ előrejelezhető S szerint integrálható folyamat a befektető kereskedési stratégiáját.

Legyen

$$V^H(t) = \sum_{j=0}^{N} H_j(t) S_j(t) \tag{2.8}$$

a H kereskedési stratégiához tartozó *értékfolyamat*, ami a H stratégia által meghatározott portfolió t-edik időpillanatbeli piaci áraként interpretálható. Tegyük fel, hogy minden j-re a H_j stratégia az S_j szerint integrálható. Ekkor definiáljuk a H kereskedési stratégia *nyereményfolyamat*át a

$$G^H(t) = \sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j(s) dS_j(s)$$

kifejezéssel. Ahogy azt a 1.1 fejezetben megmutattuk, ez a definíció 1.1 sor alapján éppen összhangban van a diszkrét esetre definiált nyereményfolyamattal. Mivel folytonos esetben a kereskedés bármely két időpontja között létezik egy harmadik kereskedési időpont, ezért az önfinanszírozóság diszkrét időparaméterű alakjának[4] nincs egy nyilvánvaló folytonos idejű analogiája, ezért folytonos esetben egy kicsit másképpen járunk el. Emlékezzünk, hogy a diszkrét esetben egy H kereskedési stratégia pontosan akkor volt önfinanszírozó, ha teljesült rá a

$$V^H(t) = V^H(0) + G^H(t) \quad t = 1, ..., T. \tag{2.9}$$

azonosság. Mivel ebben a képletben mind az értékfolyamat mind a nyereményfolyamat folytonos kereskedésre is definiálható, ezért kézenfekvőnek tűnik, hogy folytonos esetben az önfinanszírozóságnak ezt a tulajdonságát használjuk definícióként. Ennek megfelelően

[4] Minden kereskedési időpont esetén, a portfoliónak, a közvetlenül a kereskedés előtti értéke megegyezik a portfóliónak, a közvetlenül a kereskedés utáni értékével. Vagyis mindig annyi pénzt fektetünk az új portfolióba, amennyiért a régit eladtuk, vagyis nem vonunk ki tőkét a dinamikusan kiigazított portfoliónkból, és nem adunk hozzá.

tehát azt mondjuk, hogy a H stratégia önfinanszírozó, ha

$$V^H(t) = V^H(0) + \sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j(s) dS_j(s), \tag{2.10}$$

ahol $\int_0^t H_j(s)dS_j(s)$-el a H_j folyamat S_j-szerinti sztochasztikus integrálját jelöljük.

2.4. Ármérce invariancia

Csakúgy mint a diszkrét modellben, a folytonos időhorizont esetén is szeretnénk elvégezni a diszkontálást, aminek a mi szempontunkból a legfontosabb oka, hogy a diszkrét esethez hasonló módon szeretnénk megszabadulni az önfinanszírozóság feltételének explicit szerepeltetésétől. Ennek érdekében a folytonos esetben is be kell látnunk, hogy egy az eredeti árfolyamokra nézve önfinanszírozó stratégia a diszkontálás elvégzése után is önfinanszírozó marad, vagyis teljesül az ármérce invariancia.

A diszkrét esetben a kockázatmentes bankszámlapénzt tekintettük ármércének. Szeretnénk azonban hangsúlyozni, hogy a diszkontálást tetszőleges portfolió vagy nem kereskedett értékpapír hozama szerint is el lehet végezni.[5]

Az ármérce invariancia alábbi, folytonos szemimartingálokra vonatkozó kifejtése N. El Karoui, H. Geman és J. C. Rochet [5] íráson alapul.

Először tegyük fel, hogy S pozitív $N+1$ dimenziós folytonos szemimartingál, és képezzük az $S^* = (S_0^*, ..., S_N^*)$ *diszkontált árfolyamat*ot, ahol $S_j^* = S_j S_0^{-1}$. Az Itô-formula egy következménye hogy S_0^{-1} folyamat szintén szemimartingál. Legyen

$$V^{H*} = \sum_{j=0}^{N} H_j S_j^* = V^H S_0^{-1} \tag{2.11}$$

a diszkontált értékfolyamat. Azt akarjuk belátni, hogy teljesül az *ármérce invariancia*, vagyis ha valamely $H = (H_0, H_1, H_2, ..., H_N)$ stratégia S-re nézve önfinanszírozó, akkor a H stratégia S^*-ra nézve is önfinanszírozó marad, vagyis teljesül a

$$V^{H*}(t) = V^{H*}(0) + G^{H*}(t) \tag{2.12}$$

[5] Az ármérce invarianciának ez az általános megfogalmazása és bizonyítása tudomásunk szerint Duffie [4] nevéhez köthető, aki az állítást Itô-folyamatokra bizonyítja. Folytonos szemimartingálokra N. El Karoui, H. Geman és J. C. Rochet [5] bizonyítják, a tétel nem feltétlenül folytonos szemimartingál modellekre vonatkozó alakja megtalálható Shiryaev [15]-ban arra az esetre, amikor az ármérce folyamat korlátos változású és előrejelezhető, végül általános szemimartingál ármérce esetére ld.: F. Jamshidian [8].

egyenlőség, ahol

$$G^{H*}(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^t H_j dS_j^*$$

az ún. *diszkontált nyereményfolyamat*[6]. A parciális integrálás formulája szerint tetszőleges j-re

$$S_j^*(t) - S_j^*(0) = \int_0^t S_0^{-1}(s) dS_j(s) + \int_0^t S_j(s) dS_0^{-1}(s) + \left[S_j, S_0^{-1}\right](t) \tag{2.13}$$

valamint V^H és S_0^{-1} folyamatokra ismét felhasználva a parciális integrálás formuláját

$$V^{H*}(t) - V^{H*}(0) = V^H S_0^{-1}(t) - V^H S_0^{-1}(0) = \tag{2.14}$$

$$\int_0^t S_0^{-1}(s) dV^H(s) + \int_0^t V^H(s) dS_0^{-1}(s) + \left[V^H, S_0^{-1}\right](t).$$

A (2.10) sor alapján utóbbi a

$$V^{H*}(t) - V^{H*}(0) =$$

$$\int_0^t S_0^{-1}(s) d\left(\sum_{j=0}^{N} \int_0^s H_j dS_j\right) + \int_0^t V^H(s) dS_0^{-1}(s) + \left[\sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j dS_j, S_0^{-1}\right](t).$$

alakba írható. Itt az első tag esetében használjuk fel, hogy a sztochasztikus integrál lineáris az integrátorban, az utolsó tagban pedig azt hogy a kvadratikus kovariáció egy bilineáris leképezés, valamint használjuk a $\int X d\left(\int Y dZ\right) = \int XY dZ$ és $\left[\int X dY, Z\right] = \int X d\left[Y, Z\right]$ integrálási szabályokat, és kapjuk, hogy

$$V^{H*}(t) - V^{H*}(0) = \tag{2.15}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \int_0^t S_0^{-1}(s) H_j(s) dS_j(s) + \int_0^t V^H(s) dS_0^{-1}(s) + \sum_{j=0}^{N} \int_0^t H_j(s) d\left[S_j, S_0^{-1}\right](s)$$

alakba írható. A fenti egyenlőség jobb oldalának középső tagjában használjuk fel, hogy $V^H(s) = \sum_{j=0}^{N} H_j(s) S_j(s)$. Ez utóbbit felhasználva tehát (2.15) a

$$V^{H*}(t) - V^{H*}(0) =$$

[6] Vegyük észre, hogy itt az összegzés nem 0-tól, hanem $j = 1$-től indul, hiszen az S_1^* folyamat a konstans 1 folyamat, ezért a $\int_0^t H_1 dS_1^*$ sztochasztikus integrálfolyamata azonosan zérus.

$$\sum_{j=0}^{N}\left(\int_0^t S_0^{-1}(s)H_j(s)dS_j(s)+\int_0^t H_j(s)S_j(s)dS_0^{-1}(s)+\int_0^t H_j(s)d\left[S_j,S_0^{-1}\right](s)\right) \quad (2.16)$$

alakba írható.

Vegyük észre, hogy a $\int Xd\left(\int YdZ\right)=\int XYdZ$ integrálási szabály felhasználásával, itt a zárójelen belüli kifejezés az

$$\int_0^t H_j(s)d\left(\int_0^s S_0^{-1}(u)dS_j(u)\right)+\int_0^t H_j(s)d\left(\int_0^s S_j(u)dS_0^{-1}(u)\right)+\int_0^t H_j(s)d\left[S_j,S_0^{-1}\right](s)$$

alakba írható, ami az integrátor szerinti linearitás miatt éppen

$$\int_0^t H_j(s)d\left(\int_0^s S_0^{-1}(u)dS_j(u)+\int_0^s S_j(u)dS_0^{-1}(u)+\left[S_j,S_0^{-1}\right](s)\right)$$

alakba írható, ami (2.13) sor alapján éppen a H_j folyamat S_j^* szerinti integrálja, vagyis teljesül, hogy

$$V^{H*}(t)-V^{H*}(0)=\sum_{j=0}^{N}\int_0^t H_j dS_j^*=\sum_{j=1}^{N}\int_0^t H_j dS_j^*, \quad (2.17)$$

és ezzel bizonyítottuk hogy a valóban teljesül a (2.12) azonosság, tehát a H stratégia a diszkontált értékfolyamat szerint is önfinanszírozó marad. Természetesen itt is igaz, hogy az S_0^* folyamat a konstans 1 folyamat, ezért (2.17) kifejezésben az összegzést elegendő $j=1$-től kezdve elvégezni.

2.5. Az arbitrázsmentesség fogalma

Csakúgy mint diszkrét a diszkrét idejű modellek esetén, a folytonos esetben is megmutatható, hogy egy alkalmas arbitrázsmentességi feltétel biztosítja egyfajta "ekvivalens martingálmérték" létezését, vagyis ebben az esetben is bizonyítható a pénzügyi eszközök árazásának alapétele. Ennek tárgyalása azonban a folytonos esetben meglehetősen sok időt igényelne, ezért e-helyen csak az arbitrázsmentesség értelmezésével kapcsolatos főbb eltérésekre szeretnénk felhívni a figyelmet.

Első megközelítésben definiálhatjuk úgy az arbitrázslehetőséget, hogy az egy olyan $H=(H_0,...,H_N)$ zérus kezdővagyonnal megvalósítható, S szerint integrálható önfinanszírozó stratégia, melyre $V^H(T)\geq 0$, és $\mathbf{E}(V^H(T))>0$. Utóbbi két egyenlőtlenség (2.11) sor alapján pontosan akkor teljesül, ha $V^{H*}(T)\geq 0$, és $\mathbf{E}(V^{H*}(T))>0$, ez pedig, mivel $V^H(0)=0$, a (2.17) és (2.12) sorok alapján pontosan azt jelenti, hogy létezik a – $(H_0,...,H_N)$-ból a H_0 koordináta elhagyásával kapott – $(H_1,...,H_N)$ stratégia, melyre $\sum_{j=1}^N\int_0^t H_j dS_j^*\geq 0$, és amelyre $\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^N\int_0^t H_j dS_j^*\right)>0$. Vagyis azt kaptuk, hogy az ármérceinvariancia segítségével az arbitrázslehetőség az önfinanszírozóságra való hivatkozás nélkül is definiálható, hiszen mint láttuk, a diszkontált nyereményfolyamat nem függ a H_0 folyamattól, de a H_0 folyamatot $(H_1, ..., H_N)$ és az önfinanszírozóság feltétele egyértelműen meghatározza. Sajnos a folytonos idejű pénzpiacok esetén ez az arbitrázsdefiníció nem biztosítja az martingálmérték létezését, ugyanis az ún. duplázási stratégia léte miatt a legtöbb közgazdaságtanilag releváns folytonosidejű modellben a fenti értelemben létezik arbitrázs, ezért az arbitrázs definíciójában csak azokat a stratégiákat engedjük meg, amelyek korlátos erőforrásokra támaszkodnak, vagyis amelyekhez létezik egy δ valós szám, hogy az adott kereskedési stratégia diszkontált értékfolyamata majdnem biztosan nagyobb mint δ. Az ilyen tulajdonságú kereskedési stratégiákat *megengedett kereskedési stratégiáknak* nevezzük.

30. Definíció. *Azt modjuk, hogy az S^* diszkontált árfolyamattal megadott modell arbitrázsmentes, ha nemlétezik olyan H megengedett kereskedési stratégia melyre $G^{H*}(T) \geq 0$, és $\mathbf{E}(G^{H*}(T)) > 0$.*

A továbbiakban pontosan meghatározzuk, hogy a 2.1 alfejezetben definiált modell paramétereinek milyen szükséges feltételeknek kell eleget tenni ahhoz, hogy biztosan létezzen ekvivalens martingálmérték, és látni fogjuk, hogy az így kapott modell a fenti értelemben már arbitrázsmentes. A Wiener-folyamatokon alapuló szokásos tankönyvi megközelítésnek egy további érdekessége, hogy a martingálmérték létezésének bizonyítása nem a diszkrét esetben szokásos szeparáción, hanem az ún. Girsanov-transzformáción alapul.

2.6. Girsanov transzformáció*

Ebben az alfejezetben, kimondjuk az elmélet kulcs állítását, a Girsanov tételt, de a továbbiakban erre nem fogunk építeni

31. Tétel (Girsanov-transzformáció Wiener folyamatokra). *Tegyük fel, hogy W_t Wiener-folyamat a $\mathbf{P}$ mérték szerint. Ha*

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds\right)\right) < \infty\,,$$

akkor a

$$W^0(t) = W(t) + \int_0^t \theta(s)ds$$

folyamat Wiener-folyamat a $[0,T]$*-n a*

$$\mathbf{Q}(A)=\int\limits_A \exp\left\{-\int\limits_0^T \theta(s)dW(s)-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \theta^2(s)ds\right\}d\mathbf{P}$$

módon definiált mérték szerint.

A tétel áttekinthetősége és könnyebb megjegyezhetősége érdekében érdemes ezen a ponton néhány jelölést bevezetni. Ha a μ és λ mértékek esetén létezik olyan Z függvény hogy $\mu(A)=\int\limits_A Z(\omega)d\lambda$, minden A mérhető halmazra, akkor a Z függvényt a μ mérték λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltjának nevezzük és $d\mu/d\lambda$-vel jelöljük. Ezzel a jelöléssel tehát a tétel azt állítja, hogy a $\mathbf{Q}$ mérték $\mathbf{P}$-re vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}=\exp\left\{-\int\limits_0^T \theta(s)dW(s)-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \theta^2(s)ds\right\}.$$

Vegyük észre, hogy ha bevezetjük az

$$L=-\int\limits_0^T \theta(s)dW(s)$$

jelölést, akkor a kvadratikus kovariáció 3. tulajdonsága alapján az exponenciális függvény argumentumában éppen az $L-[L]/2$ folyamat T-beli értéke áll, vagyis

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}=\exp\left\{L-[L]/2\right\},$$

továbbá

$$W^0=W-[W,L].$$

Általánosan is megfogalmazható az alábbi igen egyszerű állítás.

32. Tétel (Girszanov-transzformáció). *Ha* L *egy tetszőleges folytonos lokális martingál a* $\mathbf{P}$ *mérték szerint, akkor az*

$$\widehat{M}=M-[M,L]$$

folyamat egy lokális martingál a

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}=\exp\left\{L-[L]/2\right\}$$

módon definiált $\mathbf{Q}$ *mérték szerint.*

A fenti tétel tehát nagyban megkönnyíti az előző tétel megjegyzését, de nem helyettesíti, hiszen egyenlőre nem tudunk semmit arról, hogy egy lokális martingál mikor lesz Wiener folyamat. Ezt a problémánkat megoldja a következő két tétel.

33. Tétel (Novikov feltétel). *Ha L egy folytonos lokális martingál a véges vagy végtelen $[0, T]$ intervallumon, és*

$$E(\exp(\frac{1}{2}[L](T))) < \infty,$$

akkor $\exp\{L - [L]/2\}$ *egy martingál a* $[0, T]$ *intervallumon.*

Hasznos még a következő tétel.

34. Tétel (A Wiener-folyamat Lévy-féle karakterizációja). *Ha egy L folytonos lokális martingálra teljesül hogy $L(0) = 0$, és $[L](t) = t$, akkor L egy Wiener-folyamat.*

2.7. Ekvivalens martingálmérték

A pénzpiac modellje legyen olyan, ahogyan a 2.1 alfejezetben definiáltuk, vagyis tegyük fel, hogy egy S_0 kockázatmentes, és egy S_1kockázatos értékpapírral kereskednek a piacon, melyek árfolyamatát a

$$dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt$$

és a

$$dS_1(t) = S_1(t)\left[b(t)dt + \sigma(t)dW(t)\right]$$

sztochasztikus differenciálegyenletek határozzák meg, ahol W a $\mathbf{P}$ mértékre vonatkozóan Wiener-folyamat. Tegyük fel, hogy a $\sigma(t)$ folyamat majdnem biztosan pozitív, és a

$$\theta(t) = (b(t) - r(t))/\sigma(t)$$

módon definiált folyamatra teljesül, hogy majdnem biztosan

$$\int_0^T \theta^2(s)ds < \infty,$$

valamint hogy

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds\right)\right) < \infty\,.$$

Legyen

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds\right\},$$

és definiáljuk a $\mathbf{Q}$ mértéket a

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A Z(T) d\mathbf{P},\ \forall A \in \mathcal{F}_T$$

módon, és tegyük fel, hogy teljesül a

$$\mathbf{E_Q}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(s)ds\right)\right) < \infty$$

feltétel. A fenti feltételeknek elegettevő pénzpiaci modellt a továbbiakban *sztenderd modellnek nevezzük.* Az itt definiált θ folyamatot szokás a *kockázat piaci ár*ának is nevezni. Ennek magyarázata a következő. Emlékezzünk a (2.4) képletre, miszerint

$$S_1(t) - S_1(0) = \int_0^t S_1(s)b(s)ds + \int_0^t S_1(s)\sigma(s)dW(s).$$

Mindkét oldal várható értékét véve, és figyelembe véve hogy a Wiener folyamat szerinti integrált martingálként definiáltuk, vagyis

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t S_1(s)\sigma(s)dW(s)\right) = 0,$$

kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}\left(S_1(t)\right) = S_1(0) + \mathbf{E}\left(\int_0^t S_1(s)b(s)ds\right),$$

mi alapján $S_1(t)$ várható hozama megegyezik egy $b(t)$ pillanatnyi hozamú kockázatmentes befektetés várható hozamával. Emiatt a $b(t)$ folyamatot a befektetés várható pillanatnyi hozamának nevezzük, és így a θ definíciójában szereplő $b(t) - r(t)$ különbség éppen a kockázatos értékpapír *kockázati prémium*ával egyezik meg. Mivel a σ volatilitás az értékpapír kockázatánk egy mérőszáma ezért a kettő hányadosa bizonyos értelemben a kockázat egységére jutó kockázati prémiumot mutatja.

Belátható (ld.: [9] 12. o.: Theorem 4.2 , 17. o.: Remark 5.2., 22. o.: Proposition 6.2., 24. o.: Theorem 6.6.) hogy a sztenderd modell teljes, továbbá igaz az alábbi állítás:

35. Tétel. *A sztenderd modell arbitrázsmentes, és a diszkontált árfolyamat martingál a* $\mathbf{Q}$ *mértékre vonatkozóan, valamint minden olyan* X $\mathcal{F}_T$*-mérhető* t*-beli feltételes követelés esetén, melyre*

$$\mathbf{E_Q}\left(\frac{|X|}{S_0(T)}\right) < \infty,$$

létezik egy olyan $\mathbf{E_Q}\left(X/S_0(T)\right)$ *indulóvagyon segítségével megvalósítható* H *stratégia, melyre* *egyrészt*

$$V^H(T) = X,$$

másrészt teljesül, hogy a

$$G^{H*}(t) = \int_0^t H_1(s) dS_1^*(s) \tag{2.18}$$

diszkontált nyereményfolyamat martingál.

2.8. A kockázatsemleges értékelés elve

Amennyiben az ekvivalens martingálmérték létezik, a kockázatsemleges értékelés elve minden nehézség nélkül kiterjeszthető a folytonos kereskedés esetére is.

36. Tétel (kockázatsemleges értékelés elve). *A sztenderd modellben az ekvivalens martingálmértéket jelöljük* $\mathbf{Q}$*-val Ekkor egy olyan* X $\mathcal{F}_T$*-mérhető feltételes követelés arbitrázsmentes ára a* t *időpontban, melyre teljesül a*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{|X|}{S_0(T)}\right) < \infty$$

feltétel, éppen

$$p_X(t) = S_0(t)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{X}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Bizonyítás A fenti tétel alapján létezik a H stratégia, ami replikálja az X kifizetést, és amelyre 2.18. kifejezés martingál. Ekkor a diszkrét idejű modellből megismert arbitrázsmegfontolások alapján[7] nyilván $p_X(t) = V^H(t)$ kell hogy legyen. Ekkor, az árméree invariancia tulajdonság miatt $V^{H*}(t) = G^{H*}(t) + V^{H*}(0)$, továbbá felhasználva hogy $G^{H*}(t)$, ezért $V^{H*}(t)$ martingál $\mathbf{Q}$-szerint, kapjuk hogy

$$\begin{aligned} p_X(t) &= V^H(t) = S_0(t)V^{H*}(t) = S_0(t)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(V^{H*}(T) \mid \mathcal{F}_t\right) = S_0(t)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{V^H(T)}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ & S_0(t)\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{X}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

□

[7] Az X nyilván nem feltétlenül replikálható megengedett stratégiával, ezért a figyelmes olvasóban felmerülhet, hogy ebben az esetben az arbitrázs kizárása nem vezet eredményre. Ez valóban így van, de szerencsére a sztenderd modell abban az esetben is arbitrázsmentes marad, ha az arbitrázsmentesség definíciójában nem a megengedett stratégiákra hanem azokra a stratégiákra szorítkozunk melyekre a $G^{H*}(t)$ folyamat martingál. Előző tételünk alapján az X replikálható ilyen tulajdonságú kereskedési stratégiával. Ld. pl Hunt–Kennedy (2004) 161. oldal, és Bingham–Kiesel (1998) 177. oldal Theorem 6.1.3 és Theorem 6.1.4 és 180. oldal Theorem 6.15.

2.9. Tőzsdén kívüli határidős ügylet

37. Tétel. *A sztenderd modellben az ekvivalens martingálmértéket jelöljük* $\mathbf{Q}$*-val Ekkor egy olyan* X $\mathcal{F}_T$*-mérhető feltételes követelés tőzsdén kívüli* T*-határidős ára a* t *időpontban, melyre teljesül a*

$$\mathbf{E_Q}\left(\frac{|X|}{S_0(T)}\right) < \infty$$

feltétel, éppen

$$o_X(t) = \frac{\mathbf{E_Q}\left(\frac{X}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right)}{\mathbf{E_Q}\left(\frac{1}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right)}$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a határidős szerződés eladója, (aki rövid pozícióban van) a T időpontbeli q összegű készpénzért cserébe a T időpontban leszállítja a szerződés vevőjének az X feltételes követelést (vagyis az ennek megfelelő kifizetésű vagyoneszközt). A szerződést akkor kötik meg, a t időpontban, ha az ügylet kifizetése zérus. A kockázatsemleges értékelés formulája alapján a szerződés vevőjének értékelése

$$S_0(t)\mathbf{E_Q}\left(\frac{X-q}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Ezt 0-val egyenlővé téve, és a q-t kifejezve kapjuk a fenti eredményt.

□

38. Következmény. *A sztenderd modellben az* S_1 *árfolyamatú részvény tőzsdén kívüli* T*-határidős ára a* t *időpontban*

$$o_{S_1(T)}(t) = \frac{S_1(t)/S_0(t)}{\mathbf{E_Q}\left(1/S_0(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}$$

Bizonyítás Alkalmazzuk a fenti tételt $X = S_1(T)$ feltételes követelésre, és használjuk ki, hogy a $S_1(t)/S_0(t)$ folyamat $\mathbf{Q}$-martingál:

$$o_{S_1(T)}(t) = \frac{\mathbf{E_Q}\left(S_1(T)/S_0(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}{\mathbf{E_Q}\left(1/S_0(T) \mid \mathcal{F}_t\right)} = \frac{S_1(t)/S_0(t)}{\mathbf{E_Q}\left(1/S_0(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}.$$

□

Ennek az állításnak egy triviális következménye az alábbi állítás:

39. Következmény. *H egy sztenderd modellben a kockázatmentes értékpapír árfolyamata determinisztikus, akkor az* S_1 *árfolyamatú részvény tőzsdén kívüli* T*-határidős ára a* t *időpontban*

$$o_{S_1(T)}(t) = S_0(T)S_1(t)/S_0(t)$$

2.10. Feladatok

40. Exercise. *Mutassuk meg, hogy az $\overline{S} = S_1(t)/S_0(t)$ diszkontált árfolyamat kielégíti az*

$$d\overline{S}(t) = \overline{S}(t)\left[(b(t) - r)dt + \sigma(t)dW(t)\right]$$

sztochasztikus differenciálegyenletet a P valószínűségi mérték mellett.

41. Exercise. *Határozzuk meg a B–S-modellben a $\mathbf{Q}$ kockázatmentes valószínűséget, vagyis határozzuk meg azt a Z függvényt, melyre $\mathbf{Q}(A) = \int\limits_A Z(T)d\mathbf{P}$, minden $A \in \mathcal{F}_T$-re! Ezt a Z függvényt a $\mathbf{Q}$ mérték $\mathbf{P}$-re vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltjának nevezzük és $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$-vel jelöljük.*

42. Exercise. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ mérték szerint a W folyamat egy Wiener-folyamat és legyen $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = e^{W-t/2}$. Adjunk meg egy olyan folyamatot W segítségével, ami a $\mathbf{Q}$ mérték szerint Wiener-folyamat! Bizonyítsuk be az ito-formulával is, hogy a kapott folyamat (lokális) martingál!*

43. Exercise. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ mérték szerint a W folyamat egy Wiener-folyamat és legyen $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = e^{W-t}$. Adjunk meg egy olyan folyamatot W segítségével, ami a $\mathbf{Q}$ mérték szerint Wiener-folyamat! Bizonyítsuk be az ito-formulával is, hogy a kapott folyamat (lokális) martingál!*

44. Exercise. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ mérték szerint a W folyamat egy Wiener-folyamat. Adjuk meg azt a valószínűséget ami szerint a $\widehat{W} = W(t) - \int_0^t W(s)ds$ folyamat egy lokális martingál!*

45. Exercise. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ mérték szerint a W folyamat egy Wiener-folyamat, és legyen X egy olyan folyamat melyre $\int_0^t X(s)ds$ létezik. Adjuk meg azt a $\mathbf{Q}$ valószínűséget ami szerint a $\widehat{W}(t) = W(t) - \int_0^t X(s)ds$ folyamat egy Wiener folyamat! Adja meg a $\xi = W(t) - \int_0^t X(s)ds$ valószínűségi változó $\mathbf{Q}$-szerinti és $\mathbf{P}$-szerinti várható értékét! Függenek-e ezek az X folyamattól?*

46. Exercise. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ mérték szerint a W folyamat egy Wiener-folyamat, és legyen X egy olyan folyamat melyre $\int_0^t X(s)ds$ létezik. Fejezze ki X segítségével a $\mathbf{P}(W(t) - \int_0^t X(s)ds \leq 0)$ valószínűséget!*

47. Exercise. *Tekintsük kiinduló modellnek a B–S-modell diszkontált árfolyamatait, vagyis a $(S_1(t)/S_0(t), 1)$ árfolyamattal leírt modellt a $\mathbf{Q}$ kockázatmentes valószínűség mellett (vagyis tekintsük a Q-t tényleges valószínűségnek). Írjunk fel egy olyan differenciálegyenletet, amit kielégít ez az árfolyamat a $\mathbf{Q}$ kockázatmentes valószínűségre vonatkozóan. Az Ito-formula segítséégével is bizonyítsuk be, hogy a folyamat tényleg megoldása az egyenletnek!*

48. Exercise. *Milyen differenciál egyenletet elégít ki az eredeti $S_1(t)$ árfolyamat a $\mathbf{Q}$ kockázatmentes valószínűségre vonatkozóan? A mértékcserével változik-e a folyamat driftje és volatilitása?*

49. Exercise. *Tekintsük ismét kiinduló modellnek a B–S-modell diszkontált árfolyamatait, vagyis a $(S_1(t)/S_0(t), 1)$ árfolyamattal leírt modellt a $\mathbf{Q}$ kockázatmentes valószínűség mellett. Határozzuk meg a $S_1(t)/S_0(t)$ folyamathoz mint ármércéhez tartozó $\mathbf{R}$ kockázatmentes valószínűséget.*

50. Exercise. *Tegyük fel, hogy a B–S-modellben kereskednek a szokásos két értékpapíron kívül külföldi kötvényekkel, melynek kockázatmentes kamatlába konstans r^* és a külföldi valuta egy egységének X árfolyamata az eredeti mérték mellett kielégíti a $dX = X(\alpha dt + \beta dw)$ differenciálegyenletet. Írja fel a külföldi kötvények hazai pénznemben kifejezett S_2 árfolyamatát és diszkontált árfolyamatát. Tegyük fel, hogy a modell arbitrázsmentes, és a kockázatsemleges valószínűség megegyezik az eredeti modell kockázatmentes valószínűségével. Adja meg azt a differenciálegyenletet, aminek a Q mérték mellett megoldása az S_2!*

51. Exercise. *A fenti modellben milyen paraméterektől függ az $r - r^*$ különbség?*

52. Exercise. *A Girszanov transzformáció általános alakja segítségével, és felhasználva az (40) feladat eredményét, mutassa meg, hogy a $\overline{S} = S_1(t)/S_0(t)$ jelölést alkalmazva az $M = \int_0^t \sigma \overline{S} dW$ Girszanov transzformáltja a*

$$L = -\int_0^t \theta(s) dW(s)$$

lokális martingál szerint, éppen $\overline{S}(t) - \overline{S}(0)$! Vagyis a diszkontált árfolyamat lokális martingál részének Girszanov-transzformáltja éppen maga a diszkontált árfolyamat.

3. fejezet

Kamatlábmodellek

53. Definíció. *A T időpontban lejáró elemi kötvény az az eszköz, ami a T időpontban 1-et fizet.*

A kockázatsemleges értékelés elvének, valamint az $S_0(t) = \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}$ összefüggésnek nyilvánvaló következménye az alábbi tétel.

54. Tétel. *A sztenderd modellben az elemi kötvény ára a $t \in [0, T]$ időpontban*

$$B(t,T) = S_0(t)\mathbf{E_Q}\left(\frac{1}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E_Q}\left(\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Ennek az állításnak és 38. tételnek triviális következménye az alábbi:

55. Következmény. *A sztenderd modellben az S_1 árfolyamatú részvény tőzsdén kívüli T-határidős ára a t időpontban*

$$o_{S_1(T)}(t) = \frac{S_1(t)}{B(t,T)}$$

Sőt, általánosan igaz a következő tétel.

56. Tétel. *A sztenderd modellben az X $\mathcal{F}_T$-mérhető feltételes követelés tőzsdén kívüli T-határidős ára a t időpontban*

$$o_X(t) = \frac{p_X(t)}{B(t,T)}.$$

Azokat a modelleket, amelyek feltételezik hogy a befektetők kereskedhetnek a T lejáratú elemi kötvényekkel, *hozamgörbe (term structure*[1]*) modell*eknek szokás nevezni. A hozamgörbe modellekben tehát eleve feltételezzük, hogy végtelensok értékpapírral kereskednek

[1] Valójában a term structure kifejezést szokás *lejárati szerkezet*nek is fordítani, mégis leggyakrabban ezeket a modelleket magyarul hozamgörbe-modelleknek nevezik, vagyis a magyar szakirodalom legtöbbször nem tesz különbséget a "yield curve model" és a "term structure model" kifejezések között, holott ezek tartalma különböző.

a gazdaság szereplői, ezen értékpapírok árfolyamata azonban egymástól nem független, sőt a sztenderd modellben valójában a kockázatos és a kockázatmentes értékppapír segítségével ezen értékpapírok replikálhatóak, hiszen ez a modell teljes. A hozamgörbe modellekben tehát vizsgálható, hogy milyen összefüggés van a különféle lejáratú elemi kötvények árfolyamata közt, milyen tulajdonságoknak kell eleget tenni egy arbitrázsmentes kötvénypiacnak. Ez utóbbi kérdés azért fontos számunkra, mert az elemi kötvények ára a picon ténylegesen megfigelhető, ezért a modell kalibrálása szempontjából kézenfekvő volna, ha a hozamgörbe modell megadásánál már eleve az elemi kötvények árfolyamatát specifikálnánk. Vizsgálható továbbá, hogy hogyan fejezhető ki a különféle kamatderivatívák ára az elemi kötvények segítségével ill. az a kérdés hogy vajon kifejezhető-e az elemi kötvények ára a kockázatmentes értékpapír árfolyamatát meghatározó pillanatnyi kamatláb segítségével. Legelőször ez utóbbi kérdéssel foglalkozunk.

Vegyük észre, hogy determinisztikus kamatláb modell esetén

$$\begin{aligned} B(t,T) &= S_0(t)\mathbf{E_Q}\left(\frac{1}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E_Q}\left(\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\} \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}, \end{aligned}$$

sőt minden $T^* < T$ esetén $B(t,T^*) = \exp\left\{-\int_t^{T^*} r(s)ds\right\}$ vagyis a különféle lejáratú elemi kötvények árfolyamatát – és így a hozamgörbét – a kamatlábfolyamat egyértelműen meghatározza. Mivel azonban sztochasztikus kamatlábmodell esetén $B(t,T^*)$ képletében szerepel a martingálmérték is ezért általános esetben a kamatláb folyamat már nem határozza meg a teljes hozamgörbét.

57. Tétel. *A* $\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} = \frac{\frac{1}{S_0(T)}}{\mathbf{E_Q}\left(\frac{1}{S_0(T)}\right)} = \frac{S_0(0)}{S_0(T)B(0,T)}$ *módon definiált, és forward mértéknek nevezett mérték éppen a* $B(t,T)$ *ármércéhez tartozó martingálmérték.*

Bizonyítás Jelöljük $\Lambda(t)$-vel a $\mathbf{E_Q}\left(\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right)$ Radon–Nikodym folyamatot. Ekkor

$$\Lambda(t) = \mathbf{E_Q}\left(\frac{S_0(0)}{S_0(T)B(0,T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{S_0(0)}{S_0(t)B(0,T)}\mathbf{E_Q}\left(\frac{S_0(t)}{S_0(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{S_0(0)B(t,T)}{S_0(t)B(0,T)}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{S_0(0)B(t,T)}{S_0(t)B(0,T)} \cdot \left(\frac{B(t,T)}{S_0(t)}\right)^{-1}$$

egy konstans folyamat ezért ez egy $\mathbf{Q}$ martingál, ezért $\left(\frac{B(t,T)}{S_0(t)}\right)^{-1} = \frac{S_0(t)}{B(t,T)}$ egy $\mathbf{Q}_T$ martingál[2]. Mivel egy teljes modellben a martingálmérték egyértelmű, ez csak akkor lehet-

[2]Ha Λ a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$-hez tartozó Radon–Nikodym folyamat, vagyis a $\Lambda(t)$=$\mathbf{E_Q}\left(\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right)$ folyamat. Ekkor egy L adaptált jobbról foyltonos folyamat pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha $L\Lambda$ martingál a $\mathbf{P}$

séges, ha $\mathbf{Q}_T$ éppen a $B(t,T)$ ármércéhez tartozó martingálmérték, de azt is könnyen beláthatjuk, hogy $S_1(t)/B(t,T)$ is $\mathbf{Q}_T$ martingál, és akkor a martingálmérték egyértelműségére nem kell hivatkoznunk. Az előző gondolatmenet szerint ugyanis $S_1(t)/B(t,T)$ pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}_T$ alatt, ha $\frac{S_1(t)}{B(t,T)} \cdot \frac{S_0(0)B(t,T)}{S_0(t)B(0,T)} = \frac{S_1(t)}{S_0(t)} \cdot \frac{S_0(0)}{B(0,T)}$ martingál a $\mathbf{P}$ alatt. Ez viszont teljesül, mert $\frac{S_1(t)}{S_0(t)}$ egy $\mathbf{Q}$ martingál és $\frac{S_0(0)}{B(0,T)}$ konstans.[3]

alatt. (Medvegyev: 3.69 tétel)

[3]Ezt az ún. Bayes-formula segítségével is be lehet bizonyítani. Általánosan is elmondható, és a fenti módszer, vagy pedig a Bayes-formula segítségével bizonyítható, hogy ha $D(t)$ egy pozitív $\mathbf{Q}$ martingál a $[0,T]$ szakaszon, vagyis az $\overline{S}_1$ diszkontált folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ szerint, és $\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} = \frac{D(T)}{D(0)}$, akkor az $\overline{S}_1/D$ és $1/D$ folyamatok martingálok $\mathbf{Q}_T$ szerint. Ld.: Medvegyev 4.11. Állítás.

4. fejezet

Függelék

4.1. Néhány mértékelméleti összefüggés

58. Definíció. *Egy I intervallumon értelmezett F függvény korlátosváltozású, ha a*

$$Var(F) = \sup\left\{\sum |F(x_k) - F(x_{k-1})|\right\}$$

elsőrendű variáció, ahol a szuprémumot az I intervallum összes elképzelhető véges felosztása szerint kell venni, véges.

59. Definíció. *Egy függvény végesváltozású, ha minden korlátos intervallumon korlátosváltozású.*

60. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy jobbról folytonos, korlátos változású függvény. Ekkor Létezik egy olyan μ mérték az $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazain, melyre teljesül hogy minden $[a, b)$ intervallum esetén*

$$\mu([a, b)) = f(b) - f(a).$$

61. Tétel (Láncszabály). *Legyen f egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren értelmezett valós értékű mérhető függvény. Ekkor Az $\mathcal{A}$-n értelmezett*

$$\phi(E) = \int_E f d\mu$$

függvény mérték a $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren, és minden valósértékű, mérhető g függvényre

$$\int_\Omega g d\phi = \int_\Omega f g d\mu.$$

62. Következmény. *Ha a fenti tételben μ a számegyenes Lebesgue-mértéke, és f egy* *valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, továbbá*

$$F(t) = \int_{(-\infty,t]} f d\mu$$

az eloszlásfüggvény, akkor egy g függvény F szerinti Stieltjes-integrálja az

$$\int g dF = \int g f d\mu$$

alakba írható.

63. Definíció (Sztochasztikus konvergencia). *A valószínűségi változók f_n sorozatáról azt mondjuk hogy sztochasztikusan tart az f valószínűségi változóhoz, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbf{P}\left(|f_n - f| > \varepsilon\right) = 0.$$

4.2. A Feltételes várhatóérték és néhány tulajdonsága

64. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ egy szigmaalgebra és $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó. Ekkor az ξ változó $\mathcal{A}$-ra vonatkozó feltételes várható értékének nevezzük azt az $\mathbf{E}\left[\xi \mid \mathcal{A}\right]$-vel jelölt kiterjesztett valós szám értékű $\mathcal{A}$-mérhető függvényt, melyre minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra teljesül, hogy*

$$\int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}\left[\xi \mid \mathcal{A}\right] d\mathbf{P}$$

Legyen adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, és ezen egy ξ valószínűségi változó.

1. Ha $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ két σ-algebra melyre $\mathcal{A} \supset \mathcal{F} \supset \mathcal{G}$ teljesül, akkor $\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right) \mid \mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{G}\right)$, amennyiben a két feltételes várhatóérték létezik.

2. Ha η egy $\mathcal{F}$ mérhető valószínűségi változó, akkor $\mathbf{E}\left(\eta\xi \mid \mathcal{F}\right) = \eta\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}\right)$.

4.3. Kiegészítések a sztochasztikus folyamatok elméletéhez*

A sztochasztikus folyamatok elméletének egyik legfontosabb fogalma a megállási idő. A megállási idő általában egy olyan esemény bekövetkezésének idejét írja le, melynek bekövetkezése vagy be nem következése minden időpontban egyértelműen eldönthető. Ennek megfelelően megállási idő alatt a következőt értjük.

65. Definíció. *Egy $\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvényt az $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,\infty)}$ filtrációra vonatkozó megállási időnek nevezünk, ha minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Legyen τ egy megállási idő. A továbbiakban $X^{\tau}(t,\omega)$-val jelöljük, és *megállított folyamatnak* nevezzük az $X(\min\{\tau, t\}, \omega)$ folyamatot. Ez tehát egy olyan sztochasztikus folyamat, amelynek egy rögzített ω érték esetén az $X^{\tau}_{\omega}(t)$ trajektóriái azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy $X^{\tau}_{\omega}(t)$ értéke $t \leq \tau$ esetén megegyezik $X(t,\omega)$-vel, $t > \tau$ esetén pedig $X(\tau(\omega), \omega)$-val. A pénzügytanban fontos szerepet játszanak a martingál fogalmának különféle általánosításai. Ezek közül a legfontosabb a lokális martingál fogalma.

66. Definíció. *Egy X folyamatot lokális martingálnak nevezünk, ha létezik egy megállási időkből álló monoton növekvő (τ_n) sorozat, melyre majdnem biztosan $\tau_n \to \infty$, és amelyre teljesül hogy minden n-re az $X^{\tau_n}(t) - X^{\tau_n}(0)$ folyamat martingál.*

A fentivel analóg módon definiálható a lokálisan korlátos folyamat fogalma.

67. Definíció. *Egy X folyamatról azt mondjuk hogy lokálisan korlátos, ha létezik egy megállási időkből álló monoton növekvő (τ_n) sorozat, melyre majdnem biztosan $\tau_n \to \infty$, és amelyre teljesül hogy minden n-re az X^{τ_n} folyamat martingál.*

68. Definíció. *Egy X folyamat szemimartingál, ha előállítható egy lokális martingál és egy jobbról reguláris, adaptált és minden korlátos intervallumon korlátos változású folyamat összegeként.*

Irodalomjegyzék

[1] Bajeux-Besnainou, I. – Portrait, R.: The Numeraire Porfolio: A New Perspective on Financial Theory, The European Journal of Finance, 3 (1997), 291–309.

[2] Bingham, N. H. – Kiesel, R.: Risk-Neutral Valuation, Springer-Verlag, London, 1998

[3] Björk, T.: Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press, New York, 2009

[4] Duffie, D.: Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, 1992

[5] El Karoui, N. – Geman, H. – Rochet, J. C.: Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing, Journal of Applied Probability 32 (1995), 443–458.

[6] Elliott, R. J.– Kopp, P. E.: Mathematics of Financial Market, Springer-Verlag, Berlin, 2005

[7] Hunt, P. J. – Kennedy, J. E.: Financial Derivatives in Theory and Practice, Wiley Series in Probability and Statistics, New York, 2004

[8] Jamshidian, F: Numeraire Invariance and Application to Option Pricing and Hedging, MPRA Paper, No. 7167, February 2008

[9] Karatzas, I. – Shreve, S.: *Methods of Mathematical finance*, Springer-Verlag, New-York, 1998

[10] Medvegyev Péter: *Valószínűségszámítás*, Aula, Budapest, 2002

[11] Medvegyev P: Sztochasztikus Analízis, Typotex, Budapest, 2004

[12] Medvegyev P.: Stochastic Integration Theory, Oxford University Press, New York, 2007

[13] Øksendal, B.: Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer, Berlin, 2000

[14] Rudin, W.: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York,1991

[15] A. N. Shiryaev: Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory, World Scientific, Singapore, 2001

Tárgymutató