Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Mathematical finance

Tamás Badics

University of Pannonia

2012

I/1 - Requirements

- a home assignment (20%)
- test papers (2) 80%

evaluation:

0 – 50%: one (fail)
50% – 60%: two
60% – 70%: three
70% – 80%: four
80% – 100%: five

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/2 - Aims (of mathematical finance AND the course)

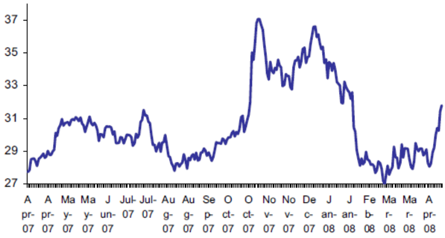
Aims

- Modelling financial markets mathematically
- pricing derivatives

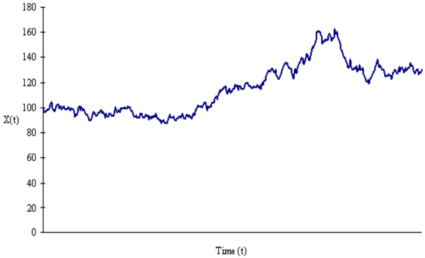
Not aims

- pricing stocks or bonds
- predict the future prices of stocks
- telling how to beat the market

I/3 - The problem of random-like movements in mathematics



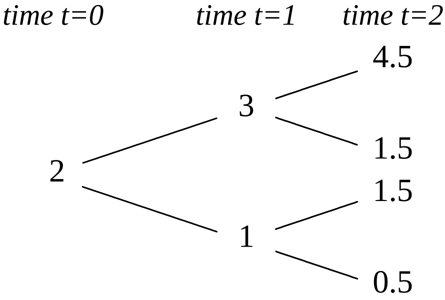
Microsoft stock chart



Wiener Proocess

Robert Brown 1827
Albert Einstein 1905
Norbert Wiener 1923

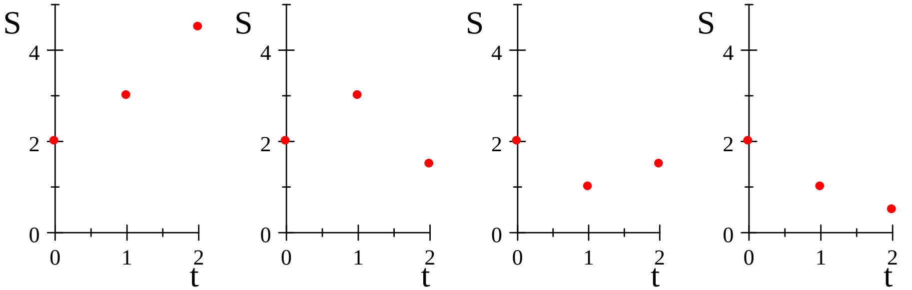
I/4 - A simple stochastic process



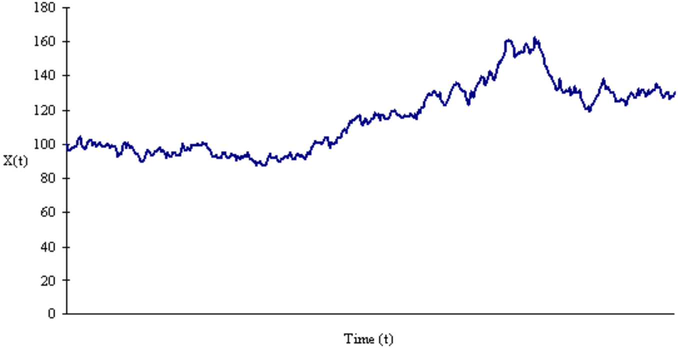
the sequence S_0, S_1, S_2, S_3,..is a *stochastic process*, where
$S_{t+1} = 1.5S_t$ with a probability of $1/2$
$S_{t+1} = 0.5S_t$ with a probability of $1/2$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/5 - Trajectories of the previous process



I/6 - A trajectory of Wiener-process



Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/7 - European call option on a stock I.

a contract between two parties:

- buyer
- seller

Definition

The call option gives the buyer the right to buy the specified amount of stock for the specified price at the specified future date.

other terms:

- owner
- writer
- expiry date, exercise date, maturity
- strike price, exercise price
- underlying asset, fundamental security

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/8 - European call option on a stock II.

A call option is determined by:

- expiry date
- an amount of the underlying asset
- strike price

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/9 - Example (a single period model)

Suppose that in the market there is a riskfree bond with zero interest rate and a risky asset: a stock. The table shows the evolution of the price of a stock. Imagine an option with strike price of 3?

	BOND	STOCK	OPTION FOR THE STOCK (strike price = 3€)	
INITIAL PRICE	2€	2€	?	
GOOD WEATHER	2€	4€	1€	PAYOFFS
BAD WEATHER	2€	1€	0€	

What is the price of the above option?

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/10 - Arbitrage and no-arbitrage

The no-arbitrage principle

Definition

It is said that there is no arbitrage possibility (NA) if there is no way for a trader to make a profit without risk

Reasons:

- principle of scarcity
- *NA* is a necessary condition of a general equilibrium
- fundamental principle of equilibrium

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/11 - No-arbitrage pricing: an example

Question: Is it possible that the price of the option is 0.3€?

	BOND	STOCK	OPTION FOR THE STOCK (strike price = 3€)	
INITIAL PRICE	2€	2€	0.3€	
GOOD WEATHER	2€	4€	1€	PAYOFFS
BAD WEATHER	2€	1€	0€	

Arbitrage strategy: buy 1 bond and 6 options and sell it as 2 stocks

	2 STOCKS	1 BOND + 6 OPTION
INITIAL INVESTMENT	4€	2 + 6×0.3 = 3.8€
GOOD WEATHER (payoff)	8€	2 + 6 = 8€
BAD WEATHER (payoff)	2€	2 + 6×0 = 2€

I/12 - Course objectives revisited

- the precise definition of arbitrage
- a characterization of arbitrage-free models
- the mathematics neded to handle more realistic models
- a simple pricing technics

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Single-period model:
introduction

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/14 - The single period model

- initial date $t = 0$ and a terminal date $t = 1$
- a finite sample space $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\}$ where the elements of Ω should be thought of as the possible states of the world
- A probability measure $\mathbf{P}$ on Ω
- An N dimensional process $S = \{S(0), S(1)\}$ where

$$S(0) = (S_1(0), ...S_n(0), ..., S_N(0)),$$

$$S(1) = (S_1(1), ...S_n(1), ..., S_N(1))$$

  and $S_n(0) > 0$ for all n, and $S_n(1) \geq 0$ for all n
- A real valued process $B = \{B_0, B_1\}$ where $B_0 = 1$ and $B_1 > 0$, which, in most models, is deterministic where $B_1 = 1 + r$ with some $0 < r < 1$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/15 - Trading strategy

A trading strategy is an $N+1$ dimensional vector $H = (H_0, ..., H_n, ..., H_N)$ represents the amounts the investor holds from the securities.

- H_0 : is the number of euros invested in the savings account,
- H_n : is the number of units of security n held between times 0 and 1. (may be positive or negative)

An example:
$H_0 = -3$ means borrowing 3 dollars.
If $n > 0$ and $H_n = -3$ means selling short 3 units from security n.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

I/16 - An example

There is three securities: a bond, a stock and an option:

	BOND	STOCK	OPTION FOR THE STOCK (strike price = 3€)	
INITIAL PRICE	2€	2€	0.3€	
GOOD WEATHER	2€	4€	1€	PAYOFFS
BAD WEATHER	2€	1€	0€	

$B_0 = 2,\ B_1 = 2$
$S_1(0) = 2,\ S_1(1)(\omega_1) = 4,\ S_1(1)(\omega_2) = 1$
$S_2(0) = 0.3,\ S_2(1)(\omega_1) = 1,\ S_2(1)(\omega_2) = 0$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Arbitrage strategy: buy 1 bond and 6 options and sell it as 2 stocks

	2 STOCKS	1 BOND + 6 OPTION
INITIAL INVESTMENT	4€	2 + 6×0.3 = 3.8€
GOOD WEATHER (payoff)	8€	2 + 6 = 8€
BAD WEATHER (payoff)	2€	2 + 6×0 = 2€

In this case, the trading strategy:
$H = (1, -2, 6)$, that is $H_0 = 1$, $H_1 = -2$, $H_2 = 6$

II/1 - Value process

Value proces $V = \{V_0, V_1\}$ describes the total value of the investor's portfolio in each point of time. That is

$$V_t \equiv H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t), \qquad t \in \{0, 1\}. \tag{1}$$

If we want to emphasize that the value process belongs to the strategy H, we use the notation $V^H = \{V_0^H, V_1^H\}$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/2 - An example

Let's give the value proces of the earlier trading strategy $H = (1, -2, 6)$!

	BOND	STOCK	OPTION FOR THE STOCK (strike price = 3€)	
INITIAL PRICE	2€	2€	0.3€	
GOOD WEATHER	2€	4€	1€	PAYOFFS
BAD WEATHER	2€	1€	0€	

$V_0 = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 6 \cdot 0.3 = -0.2$ (initial investment)
$V_1(\omega_1) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 0$ (price of the portfolio when the weather is good)
$V_1(\omega_2) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 0$ (price of the portfolio when the weather is bad)

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/3 - Matrix multiplication I

Product of a row and a column

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/4 - Matrix multiplication II

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \boxed{a_{2,1}} & \boxed{a_{2,2}} & \boxed{a_{2,3}} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{b_{1,1}} & b_{1,2} \\ \boxed{b_{2,1}} & b_{2,2} \\ \boxed{b_{3,1}} & b_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ \boxed{c_{2,1}} & c_{2,2} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \\ c_{4,1} & c_{4,2} \end{pmatrix}$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/5 - Matrix multiplication III

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 6 + 1\cdot 8 & 0\cdot 7 + 1\cdot 9 \\ 2\cdot 6 + 3\cdot 8 & 2\cdot 7 + 3\cdot 9 \\ 4\cdot 6 + 5\cdot 8 & 4\cdot 7 + 5\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{pmatrix}$$

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/6 - Matrix equation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 36 \\ 64 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a + 2b + 7c &= 8 \\ 2a + 3b + 4c &= 36 \\ a + 9b + 4c &= 64 \end{aligned}$$

The above matrix is called the coefficient matrix of the simultaneous-equation system.

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/7 - Solution of the matrix equation

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

If the coefficient matrix is a nonsingular square matrix, then the solution can be obtained by premultiplying both sides of the equation by the inverse of the coefficient matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 36 \\ 64 \end{pmatrix}$$

which yields

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 36 \\ 64 \end{pmatrix}$$

During the course you don't have to know anything about the concept and calculation of the inverse matrix, because the calculations will be finished by a mathematical sofware. The only thing you have to know is, that there exist a matrix, premultiplying by which the right hand side of the equation system we obtain the solution!
From the above aplications it can be seen that the beauty of the matrix algebra (among others) lies in the fact that by means of it you can treat equation systems as if they were simple equations and treat matrixes as if they were numbers.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/9 - Time t=1 asset prices

$$A = \begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \dots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \dots & S_N(1)(\omega_K) \end{pmatrix}$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/10 - Time t=1 asset prices in our example

	BOND	STOCK	OPTION FOR THE STOCK (strike price = 3€)	
INITIAL PRICE	2€	2€	0.3€	
GOOD WEATHER	2€	4€	1€	PAYOFFS
BAD WEATHER	2€	1€	0€	

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II/11 - Value proces: matrix notation

The value process for $t = 0$:

$$V_0 = \begin{pmatrix} B_0 & S_1(0) & \dots & S_N(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

for $t = 1$:

$$\begin{pmatrix} V_1(\omega_1) \\ V_1(\omega_2) \\ \vdots \\ V_1(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \dots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \dots & S_N(1)(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix}$$

II/12 - An example

In our earlier example:

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -0.2$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II/13 - Gain Process

Let $\Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$ and $\Delta B = B_1 - B_0$.

Gain process:

$$G \equiv H_0 \Delta B + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n$$

If $B_1 = 1 + r$, then

$$G \equiv H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n$$

II/14 - Gain process & Value process

$$V_1 = V_0 + G.$$

Proof.

$$V_0 + G =$$

$$= \underbrace{H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)}_{V_0} + \underbrace{H_0 \Delta B + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n}_{G} =$$

$$= \underbrace{H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)}_{V_0} + \underbrace{H_0 \left(B_1 - B_0\right) + \sum_{n=1}^{N} H_n \left(S_n(1) - S_n(0)\right)}_{G} =$$

$$= H_0 B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) = V_1$$

$\square$

II/15 - Discounting

Let $S_n^*(t) \equiv S_n(t)/B_t$, $n = 1, ..., N$; $t = 0, 1$.

Discounted price process:

$$S_t^* = (S_1^*(t), ...S_n^*(t), ..., S_N^*(t))$$

Discounted value process:

$$V_t^* \equiv H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t) \tag{2}$$

Discounted gain process:

$$G^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^* \tag{3}$$

Where $\Delta S_n^* = S_n^*(1) - S_n^*(0)$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/16 - Time t=1 discounted asset prices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1)(\omega_1) & \dots & S_N^*(1)(\omega_1) \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_2) & & S_N^*(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_K) & \dots & S_N^*(1)(\omega_K) \end{pmatrix}$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/17 - Two simple corollaries:

$$V_t^* = V_t \,/\, B_t \qquad t = 1, 2 \tag{4}$$

$$V_1^* = V_0^* + G^* \tag{5}$$

Proof.

$$\frac{V_t}{B_t} = \frac{H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t)}{B_t} = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n \frac{S_n(t)}{B_t} =$$

$$= H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t) = V_t^*$$

□

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
V_1=V_0+G
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/18 - Discounted value proces: matrix notation

The discounted value process for $t = 0$:

$$V_0^* = \begin{pmatrix} 1 & S_1^*(0) & \dots & S_N^*(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

for $t = 1$:

$$\begin{pmatrix} V_1^*(\omega_1) \\ V_1^*(\omega_2) \\ \vdots \\ V_1^*(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1)(\omega_1) & \dots & S_N^*(1)(\omega_1) \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_2) & & S_N^*(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_K) & \dots & S_N^*(1)(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix}$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/19 - Arbitrage

Definition

In a model there exists arbitrage if there exists a trading strategy H for which the following statements hold:

1. $V_0 = 0$,
2. $V_1 \geq 0$ for all $\omega \in \Omega$
3. $\mathbf{E}\left(V_1\right) > 0$.

Because $B_1 > 0$ therefore the next statements are obvious:

Theorem

There exsists arbitrage if and only if there exists a trading strategy H satisfying

1. $V_0^* = 0$,

2.$V_1^* \geq 0$ *for all* $\omega \in \Omega$

3. $\mathbf{E}\left(V_1^*\right) > 0$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

II/20 - An example

In our earlier example let $H = (1.1, -2, 6)$.
Then

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

II/21 - Home assignment:

Prove the statement that there exists an arbitrage if and only if there exists a strategy H, for which

1. $G^* \geq 0$ for all $\omega \in \Omega$ and
2. $\mathbf{E}\left(G^*\right) > 0$.

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/1 - Risk-neutral probability I

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Definition

A probability measure $\mathbf{Q}$ on Ω is risk-neutral probability, if

1. $\mathbf{Q}(\omega) > 0$ for all $\omega \in \Omega$ and
2. $\mathbf{E_Q}(S_n^*(1)) = S_n^*(0)$, $n = 1, 2, \ldots N$.

Note: The 2. assumption has the form of: $\mathbf{E_Q}(\Delta S_n^*) = 0$, $n = 1, 2, \ldots N$.

Proof: Because $\mathbf{E_Q}(S_n^*(0)) = S_n^*(0)$, from 2.:

$$0 = \mathbf{E_Q}(S_n^*(1)) - S_n^*(0) = \mathbf{E_Q}(S_n^*(1)) - \mathbf{E_Q}\left(S_n^*(0)\right) = \mathbf{E_Q}\left(S_n^*(1) - S_n^*(0)\right) = \mathbf{E_Q}(\Delta S_n^*)$$

III/2 - Risk-neutral probability II

Because $\mathbf{Q}(\omega_1) + \mathbf{Q}(\omega_2) + \ldots + \mathbf{Q}(\omega_K) = 1$, assumption 2. in the definition of the risk-neutral probability is of the form of

$$\left(1, S_1^*(0), \ldots S_N^*(0)\right) =$$

$$\left(\mathbf{Q}(\omega_1), \ldots \mathbf{Q}(\omega_K)\right) \begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1)(\omega_1) & \ldots & S_N^*(1)(\omega_1) \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_2) & & S_N^*(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_K) & \ldots & S_N^*(1)(\omega_K) \end{pmatrix}$$

If b denotes the vector $\left(1, S_1^*(0), \ldots S_N^*(0)\right)$ and $\mathbf{D}$ denotes the above matrix, then the risk-neutral probabilities are just those solutions of the equation

$$x\mathbf{D} = b \tag{6}$$

the coordinates of which are positive..

III/3 - Fundamental Theorem of Asset Pricing (FTAP) I

Theorem (Fundamental Theorem of Asset Pricing)

In a single period, finite dimensional financial market there is no arbitrage if and only if there exists a risk-neutral probability measure.

III/4 - Proof of the FTAP

We prove only the trivial direction of the theorem. That is, we prove that the existence of the risk-neutral probability implies the no-arbitrage condition.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Proof: Assume that there is a risk-neutral probability $\mathbf{Q}$

- Let $\mathbf{A}$ be the matrix of the terminal date price of the securities and $\mathbf{D}$ be the matrix of the terminal date discounted price of the securities and

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Proof: Assume that there is a risk-neutral probability $\mathbf{Q}$

- Let $\mathbf{A}$ be the matrix of the terminal date price of the securities and $\mathbf{D}$ be the matrix of the terminal date discounted price of the securities and
- Let $b = (1, S_1^*(0), \ldots S_N^*(0)) = (1, S_1(0), \ldots S_N(0))$

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Proof: Assume that there is a risk-neutral probability $\mathbf{Q}$

- Let $\mathbf{A}$ be the matrix of the terminal date price of the securities and $\mathbf{D}$ be the matrix of the terminal date discounted price of the securities and
- Let $b = (1, S_1^*(0), ...S_N^*(0)) = (1, S_1(0), ...S_N(0))$
- Then $b = \mathbf{QD}$

Math finance

T. Badics

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Proof: Assume that there is a risk-neutral probability $\mathbf{Q}$

- Let $\mathbf{A}$ be the matrix of the terminal date price of the securities and $\mathbf{D}$ be the matrix of the terminal date discounted price of the securities and
- Let $b = \left(1, S_1^*\left(0\right), ...S_N^*\left(0\right)\right) = \left(1, S_1\left(0\right), ...S_N\left(0\right)\right)$
- Then $b = \mathbf{QD}$
- Let the column vector H be an arbitrage strategy (that is a strategy included in the definition of the arbitrage), so $bH = 0$ and all the coordinates of $V_1^H = \mathbf{A}H$ so the coordinates of $V_1^{H*} = \begin{pmatrix} V_1^{H*}\left(\omega_1\right) \\ . \\ . \\ V_1^{H*}\left(\omega_K\right) \end{pmatrix} = \mathbf{D}H$ are non-negative and at least one is strictly positive.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Proof: Assume that there is a risk-neutral probability $\mathbf{Q}$

- Let $\mathbf{A}$ be the matrix of the terminal date price of the securities and $\mathbf{D}$ be the matrix of the terminal date discounted price of the securities and
- Let $b = \left(1, S_1^*\left(0\right), ...S_N^*\left(0\right)\right) = \left(1, S_1\left(0\right), ...S_N\left(0\right)\right)$
- Then $b = \mathbf{QD}$
- Let the column vector H be an arbitrage strategy (that is a strategy included in the definition of the arbitrage), so $bH = 0$ and all the coordinates of $V_1^H = \mathbf{A}H$ so the coordinates of $V_1^{H*} = \begin{pmatrix} V_1^{H*}\left(\omega_1\right) \\ . \\ . \\ V_1^{H*}\left(\omega_K\right) \end{pmatrix} = \mathbf{D}H$ are non-negative and at least one is strictly positive.
- $b = \mathbf{QD}$ implies that $bH = \mathbf{QD}H$

Math finance

T. Badics

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Proof: Assume that there is a risk-neutral probability $\mathbf{Q}$

- Let $\mathbf{A}$ be the matrix of the terminal date price of the securities and $\mathbf{D}$ be the matrix of the terminal date discounted price of the securities and
- Let $b = (1, S_1^*(0), \ldots S_N^*(0)) = (1, S_1(0), \ldots S_N(0))$
- Then $b = \mathbf{QD}$
- Let the column vector H be an arbitrage strategy (that is a strategy included in the definition of the arbitrage), so $bH = 0$ and all the coordinates of $V_1^H = \mathbf{A}H$ so the coordinates of $V_1^{H*} = \begin{pmatrix} V_1^{H*}(\omega_1) \\ . \\ . \\ V_1^{H*}(\omega_K) \end{pmatrix} = \mathbf{D}H$ are non-negative and at least one is strictly positive.
- $b = \mathbf{QD}$ implies that $bH = \mathbf{QD}H$
- The above two rows imply that $\mathbf{QD}H = 0$.

- Because all the elements of $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, ...q_K)$ is positive and all the $q_n V_1^{H*}(\omega_n)$, the product

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}H) = (q_1, q_2, ...q_K) \begin{pmatrix} V_1^{H*}(\omega_1) \\ . \\ . \\ V_1^{H*}(\omega_K) \end{pmatrix} =$$

$$= q_1 V_1^{H*}(\omega_1) + q_2 V_1^{H*}(\omega_2) + ...q_K V_1^{H*}(\omega_K)$$

must be positive, that is we reach a contradiction with the assumption that there is an arbitrage, proving that the existence of risk-neutral probability imply the non-existence of arbitrage.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/7 - Example 1.

Let $K = 3$ and $N = 2$, $r = 0$, $S_1(0) = 5$, $S_2(0) = 10$, $B(0) = 1$. The time $t = 1$ asset prices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Prove that there exists arbitrage possibility.

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/8 - Solution I.

We know, that there is no arbitrage possibility if and only if there exists a risk-neutral probability. Let us solve this equation:

$$(q_1, q_2, q_3)\begin{pmatrix}1 & 6 & 12\\ 1 & 6 & 8\\ 1 & 4 & 8\end{pmatrix} = (1, 5, 10)\,,$$

Notice, that this equation states that the expected value of time $t = 1$ prices of each security with respect to the measure q_1, q_2 and q_3 equals their initial price.

III/9 - Solution II

Producing both sides of the equation by the inverse of the time $t = 1$ asset price matrix from the right hand side:

$$(q_1, q_2, q_3) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = (1, 5, 10) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1},$$

that is we obtain:

$$(q_1, q_2, q_3) = (1, 5, 10) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/10 - Solution III

www.scilab.org

scilab 5.3

entering a matrix A: A=[1,6,12
1,6,8
1,4,8]
(rows are separated by the mark ";" (semicolon) or an "enter", elements of a row are separated by the mark "," (comma) or "space".

some basic commands:

multiplication (matrixes or numbers): A*B
multiplication of each of the element of matrix A by a number c: A*c or c*A
computation of A^{-1} : inv(A)
computation of BA^{-1} : B/A
computation of $A^{-1}B$: A\B

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/11 - Solution IV

```
->A=[1,6,12
->1,6,8
->1,4,8]
A =
1. 6. 12.
1. 6. 8.
1. 4. 8.
->b=[1,5,10]
b =
1. 5. 10.
->b/A
ans =
0.5 0. 0.5
```

As the solution of the above simultaneous-equation system is unique, therefore there is no risk-neutral probability, as the coordinates of the risk-neutral probability are positive by definition. That is we reach a contradiction with the assumption that there is no arbitrage.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
V_1=V_0+G
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/12 - Exercise 2

Assume that in the market there is a risk-free security and two risky securities. Assume that $r = 0$, and the prices of the risky securities are the following:

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$
1	4	8	6	3
2	7	10	8	4

1. Is there any arbitrage in the market?
2. Determine the gain process G^H of the strategy $H = (0, 2, -1.5)$!
3. Give a trading strategy H^1, the gain process of which is the same as before, but the initial investment of which is zero!

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/13 - Solution I

1. The matrix of the time $t = 1$ asset prices and discounted asset prices is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

If there exist risk-neutral probability, it will satisfay the equality

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Postmultiplying both sides of the above equation by the inverse of the matrix A we obtain:

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/14 - Solution II

```
->A=[1 8 10
->1 6 8
->1 3 4]
A =
1. 8. 10.
1. 6. 8.
1. 3. 4.
->b=[1 4 7]
b =
1. 4. 7.
->q=b/A
q =
- 2.5 4.5 - 1.
```

Because the solution of the matrix equation is unique, and the cordinates of the solution are not positive, there is no risk-neutral probability, therefore there exist arbitrage by the FTAP.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/15 - Solution III

2. Let's use the formula

$$V_1 = V_0 + G.$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/16 - Solution IV

```
–>H=[3
–>2
–>-1.5]
H =
3.
2.
- 1.5
–>V0=b*H
V0 =
0.5
–>V1=A*H
V1 =
4.
3.
3.
–>G=V1-V0
```

```
G =
3.5
2.5
2.5
```


Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

III/17 - Solution V

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

3. It should be noticed that $r = 0$ therefore the price process is identical to the discounted price process, that is $V_1 = V_1^*$ and $G = G^*$, so, as seen, the gain process doesn't depend on the value of H_0. So it is enough to modify the value of H_0 so that V_0 let be zero. That is, the solution is $H^1 = (2.5, 2, -1.5)$.

III/18 - Solution VI

```
-->H1=[2.5
-->2
-->-1.5]
H1 =
2.5
2.
- 1.5
-->V0=b*H1
V0 =
0.
-->V1=A*H1
V1 =
3.5
2.5
2.5
```

```
-->G=V1-V0
G =
3.5
2.5
2.5
```


Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/1 - Contingent Claims

A *contingent claim* is a random variable $X(\omega) \in \mathbb{R}^K$ representing a payoff at $t = 1$. You can think of a contingent claim as a contract that a buyer and a seller make at time $t = 0$. The seller of the contract is obligated to pay the buyer amount $X(\omega)$ at time $t = 1$ if $\omega \in \Omega$ turns out to be the true state of the world.

IV/2 - Example

An option is a contingent claim, as the payoff of an option depends on the state of the world.

We use the notation $f^+$for the function $\max\{0, f\}$. Then the payoff of the call option with strike price e for one unit of a security with price process S_1 is

$$X = (S_1(1) - e)^+ ,$$

and the payoff of the put option with the same parameters is

$$X = (e - S_1(1))^+ .$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/3 - Arbitrage-free price of a contingent claim

Definition

The arbitrage-free price of a contingent claim X is the price p which at $t = 0$ doesn't result in an arbitrage profit.

More pricisely, it means that extending the model by a security with price process (p, X), the extended model remains arbitrage-free.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/4 - Attainable contingent claims

Definition

A contingent claim X is attainable (or marketable) if there is a trading strategy H for which $V_1^H = X$. (then we say that H replicates X or H generates X.)

That is, in matrix notation a contingent claim X is attainable if and only if, there is a trading strategy H for which

$$\begin{pmatrix} X(\omega_1) \\ X(\omega_2) \\ \vdots \\ X(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \dots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \dots & S_N(1)(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

IV/5 - Valuation of attainable contingent claims

Theorem

In an arbitrage-free finite dimensional financial market, the arbitrage-free price of any attainable contingent claim X at $t = 0$ is exactly V_0, and this price is independent of the choice of the trading strategy.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/6 - Proof I

Proof. First of all, we will see that the value V_0 is independent of the choice of the trading strategy. We will apply a proof by contradiction.

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/7 - Proof II

- Assume that for the two different strategies $\widetilde{H}$ and $\widehat{H}$ the equalities $V_1^{\widetilde{H}} = V_1^{\widehat{H}} = X$ hold for all $\omega \in \Omega$, but $V_0^{\widetilde{H}} \neq V_0^{\widehat{H}}$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/7 - Proof II

- Assume that for the two different strategies $\widetilde{H}$ and $\widehat{H}$ the equalities $V_1^{\widetilde{H}} = V_1^{\widehat{H}} = X$ hold for all $\omega \in \Omega$, but $V_0^{\widetilde{H}} \neq V_0^{\widehat{H}}$.
- We can assume, without loss of generality, that $V_0^{\widetilde{H}} < V_0^{\widehat{H}}$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/7 - Proof II

- Assume that for the two different strategies $\widetilde{H}$ and $\widehat{H}$ the equalities $V_1^{\widetilde{H}} = V_1^{\widehat{H}} = X$ hold for all $\omega \in \Omega$, but $V_0^{\widetilde{H}} \neq V_0^{\widehat{H}}$.
- We can assume, without loss of generality, that $V_0^{\widetilde{H}} < V_0^{\widehat{H}}$.
- Then, obviously, $V_1^{\widetilde{H}*} = V_1^{\widehat{H}*}$ for all $\omega \in \Omega$ and $V_0^{\widetilde{H}*} < V_0^{\widehat{H}*}$,

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/7 - Proof II

- Assume that for the two different strategies $\widetilde{H}$ and $\widehat{H}$ the equalities $V_1^{\widetilde{H}} = V_1^{\widehat{H}} = X$ hold for all $\omega \in \Omega$, but $V_0^{\widetilde{H}} \neq V_0^{\widehat{H}}$.
- We can assume, without loss of generality, that $V_0^{\widetilde{H}} < V_0^{\widehat{H}}$.
- Then, obviously, $V_1^{\widetilde{H}*} = V_1^{\widehat{H}*}$ for all $\omega \in \Omega$ and $V_0^{\widetilde{H}*} < V_0^{\widehat{H}*}$,
- Because $V_1^{\widetilde{H}*} = V_0^{\widetilde{H}*} + G^{\widetilde{H}*}$ and $V_1^{\widehat{H}*} = V_0^{\widehat{H}*} + G^{\widehat{H}*}$ (see: (5)), we obtain that $G^{\widetilde{H}*} > G^{\widehat{H}*}$ for all $\omega \in \Omega$.

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/7 - Proof II

- Assume that for the two different strategies $\widetilde{H}$ and $\widehat{H}$ the equalities $V_1^{\widetilde{H}} = V_1^{\widehat{H}} = X$ hold for all $\omega \in \Omega$, but $V_0^{\widetilde{H}} \neq V_0^{\widehat{H}}$.
- We can assume, without loss of generality, that $V_0^{\widetilde{H}} < V_0^{\widehat{H}}$.
- Then, obviously, $V_1^{\widetilde{H}*} = V_1^{\widehat{H}*}$ for all $\omega \in \Omega$ and $V_0^{\widetilde{H}*} < V_0^{\widehat{H}*}$,
- Because $V_1^{\widetilde{H}*} = V_0^{\widetilde{H}*} + G^{\widetilde{H}*}$ and $V_1^{\widehat{H}*} = V_0^{\widehat{H}*} + G^{\widehat{H}*}$ (see: (5)), we obtain that $G^{\widetilde{H}*} > G^{\widehat{H}*}$ for all $\omega \in \Omega$.
- Let's define a new trading strategy H by $H_n = \widetilde{H}_n - \widehat{H}_n$ for all $n > 0$ and $H_0 = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0)$.

IV/7 - Proof II

- Assume that for the two different strategies $\widetilde{H}$ and $\widehat{H}$ the equalities $V_1^{\widetilde{H}} = V_1^{\widehat{H}} = X$ hold for all $\omega \in \Omega$, but $V_0^{\widetilde{H}} \neq V_0^{\widehat{H}}$.
- We can assume, without loss of generality, that $V_0^{\widetilde{H}} < V_0^{\widehat{H}}$.
- Then, obviously, $V_1^{\widetilde{H}*} = V_1^{\widehat{H}*}$ for all $\omega \in \Omega$ and $V_0^{\widetilde{H}*} < V_0^{\widehat{H}*}$,
- Because $V_1^{\widetilde{H}*} = V_0^{\widetilde{H}*} + G^{\widetilde{H}*}$ and $V_1^{\widehat{H}*} = V_0^{\widehat{H}*} + G^{\widehat{H}*}$ (see: (5)), we obtain that $G^{\widetilde{H}*} > G^{\widehat{H}*}$ for all $\omega \in \Omega$.
- Let's define a new trading strategy H by $H_n = \widetilde{H}_n - \widehat{H}_n$ for all $n > 0$ and $H_0 = -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0)$.
- Then, as $G^{\widetilde{H} \pm \widehat{H}*} = G^{\widetilde{H}*} \pm G^{\widehat{H}*}$ the value of G^{H*} doesn't depend on the value of H_0, it holds that $G^{H*} = G^{\widetilde{H}*} - G^{\widehat{H}*} > 0$ for all $\omega \in \Omega$ (see: (3)),

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/8 - Proof III

- On the other hand, using the identity $V_t^{\widetilde{H}\pm\widehat{H}*} = V_t^{\widetilde{H}*} \pm V_t^{\widehat{H}*}$ and the definition of V_0^{H*} (see: (2)) we get that $V_0^{H*} = 0$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

IV/8 - Proof III

- On the other hand, using the identity $V_t^{\widetilde{H} \pm \widehat{H}*} = V_t^{\widetilde{H}*} \pm V_t^{\widehat{H}*}$ and the definition of V_0^{H*} (see: (2)) we get that $V_0^{H*} = 0$.
- If so, as $G^{H*} > 0$, we get that by using (5) $V_1^{H*} > 0$ for all $\omega \in \Omega$, that is, H is an arbitrage strategy, which is a contradiction.

Preliminary

Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model

The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Tegyük fel, hogy $V_1^H = X$, és az X követelés ára $p > V_0^H$. Ekkor az X feltételes követelés $t = 0$-beli eladása, majd a H portfolió megvásárlása egy arbitrázs lehetőség, hiszen ezzel a $t = 0$-ban $p - V_0$ hasznot realizálhatunk, ugyanakkor a második periódusban pedig az X értékű kötelezettségünket éppen teljesíteni tudjuk, a H portfoliónk eladásával. Ha a $t = 0$ ban szerzett $p - V_0^H$ összegért a $t = 0$-ban kockázatmentes kötvényt vásárolunk, akkor összességében zérus befektetéssel egy olyan portfoliót vásárolunk meg, melynek $t = 1$-beli eladásával minden kimenetel esetén pozitív összeghez jutunk, tehát ez egy arbitrázslehetőség lenne, ami ellentmond az arbitrázsmentesség feltevésének.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Tegyük most fel, hogy $V_1^H = X$, és az X követelés ára $p < V_0^H$. Ekkor a $t = 0$-ban együttesen megvásárolva a $-H$ portfoliót és az X követelést, továbbá ezzel egyidőben $V_0^H - p$ összeget kockázatmentes kötvénybe fektetve a $t = 0$ beli kiadásunk $-V_0^H + p + V_0^H - p = 0$, ugyanakkor biztos $t = 1$ beli $\left(V_0^H - p\right)(1 + r)$ jövedelemhez jutunk, hiszen a $-H$ stratégia éppen X kötelezettséget jelent számunkra, amit a megvásárolt X feltételes követelés segítségével éppen teljesíthetünk.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a bizonyítás mindhárom részének az az alapötlete, hogy először összeállítunk egy negatív kezdeti értékű portfoliót aminek a végső kifizetése zérus, majd úgy módosítjuk a kereskedési stratégiát, hogy ezen felül éppen annyi pénzt fektetünk a kockázatmentes kötvénybe, hogy az eredményül kapott stratégia zérus kezdeti értékű legyen. Az utólagosan kockázatmentes kötvénybe fektetett pénz pozitív kifizetést biztosít a következő periódusban, ezért ez egy arbitrázs.

Feladat: Igazoljuk a fenti bizonyításban már felhasznált tényt, hogy bármely $\widetilde{H}$ és $\widehat{H}$ stratégiákra $G^{\widetilde{H}+\widehat{H}} = G^{\widetilde{H}} + G^{\widehat{H}}$ és $V_t^{\widetilde{H}+\widehat{H}} = V_t^{\widetilde{H}} + V_t^{\widehat{H}}$ valamint $G^{\widetilde{H}+\widehat{H}*} = G^{\widetilde{H}*} + G^{\widehat{H}*}$ és $V_t^{\widetilde{H}+\widehat{H}*} = V_t^{\widetilde{H}*} + V_t^{\widehat{H}*}$.

A kockázatsemleges értékelés elve

Tétel (Kockázatsemleges értékelés elve)

Tegyük fel, hogy teljesül az arbitrázsmentesség feltétele. Ekkor egy replikálható X *feltételes követelés* $t = 0$*-beli arbitrázsmentes ára* $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(X \,/\, B_1\right)$*, ahol* $\mathbf{Q}$ *egy tetszőleges kockázatsemleges valószínűség.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely H kereskedési stratégi előállítja az X feltételes követelést és $\mathbf{Q}$ egy tetszőleges kockázatsemleges mérték. Ekkor a H-hoz tartozó V_t értékfolyamatra egyrészt $V_1 / B_1 = X / B_1$ másrészt felhasználva hogy V_1 definíciója szerint

$$\begin{pmatrix} V_1(\omega_1) \\ V_1(\omega_2) \\ \vdots \\ V_1(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \dots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \dots & S_N(1)(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

ezért

$$\begin{pmatrix} V_1(\omega_1)/B_1 \\ V_1(\omega_2)/B_1 \\ \vdots \\ V_1(\omega_K)/B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1)(\omega_1) & \dots & S_N^*(1)(\omega_1) \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_2) & & S_N^*(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_K) & \dots & S_N^*(1)(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

amiből

$$\left(\mathbf{Q}(\omega_1),\ldots\mathbf{Q}(\omega_K)\right)\begin{pmatrix} V_1(\omega_1)/B_1 \\ V_1(\omega_2)/B_1 \\ \vdots \\ V_1(\omega_K)/B_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\mathbf{Q}(\omega_1),\ldots\mathbf{Q}(\omega_K)\right)\begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1)(\omega_1) & \ldots & S_N^*(1)(\omega_1) \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_2) & & S_N^*(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_1^*(1)(\omega_K) & \ldots & S_N^*(1)(\omega_K) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\left(\mathbf{Q}(\omega_1),\ldots\mathbf{Q}(\omega_K)\right)\begin{pmatrix} V_1(\omega_1)/B_1 \\ V_1(\omega_2)/B_1 \\ \vdots \\ V_1(\omega_K)/B_1 \end{pmatrix} = \left(1, S_1^*(0),\ldots S_N^*(0)\right)\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

vagyis $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(V_1/B_1\right) = V_0$.

3. Példa

Tegyük fel, hogy a $r = 0$, továbbá adottak a következő adatok:

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$
1	6	6	8	4
2	10	13	9	8

Létezik-e ekvivalens martingálmérték, és replikálható-e az egyes számú kockázatos értékpapír egy egységére vonatkozó 5 lehívási árfolyamú call opció? Mekkora indulótőke szükséges ehhez, illetve mekkora az opció kifizetésének, a martingálmértékre vonatkozó várhatóértéke?

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Emlékezzünk, hogy egy X feltételes követelés replikálható, ha létezik egy H kereskedési stratégia, melyre $V_1^H = X$ vagyis ugyanez mátrix jelöléssel, azt jelenti, hogy egy H kereskedési stratégiára teljesül, hogy

$$\begin{pmatrix} X(\omega_1) \\ X(\omega_2) \\ \vdots \\ X(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \dots & S_N(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) & & S_N(1)(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \dots & S_N(1)(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{pmatrix},$$

az opciónk kifizetése $o = (S_1(1) - 5)^+ = (1, 3, 0)'$ vagyis a stratégia meghatározásához meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert.

A megoldás
$H_0 = -2,222222, \;\; H_1 = 0,777778, \;\; H_2 = -0,111111.$
Ebből

$$V_0 = (1,6,10) \cdot \begin{pmatrix} -0,2222222 \\ 0,7777778 \\ -0,1111111 \end{pmatrix} = 1,33333$$

A kockázatsemleges mérték az alábbi egyenletrendszer megoldása

$$(1,6,10) = (q_1, q_2, q_3) \begin{pmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

vagyis $(q_1, q_2, q_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$, az opció kifizetésének e-szerinti várható értéke

$$(1/3, 1/3, 1/3) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,333333.$$

```
-->A=[1,6,13
-->1,8,9
-->1,4,8]
A =
1. 6. 13.
1. 8. 9.
1. 4. 8.
-->o=[1
-->3
-->0]
o =
1.
3.
0.
-->H=A\o
H =
- 2.2222222
0.7777778
- 0.1111111
-->[1,6,10]*H
ans =
1.3333333
-->Q=[1,6,10]/A
Q =
column 1 to 2
0.3333333 0.3333333
column 3
0.3333333
-->Q*o
ans =
1.3333333
```


Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Teljes és nemteljes piacok

Definíció

Egy pénzpiaci modellt teljesnek nevezünk, ha minden feltételes követelés előállítható valamely kereskedési stratégia segítségével.

Jelölés

Jelöljük $\mathbb{M}$-el a modell összes kockázatsemleges valószínűségeinek halmazát.

Tétel

Egy arbitrázsmentes pénzpiaci modell pontosan akkor teljes, ha az $\mathbb{M}$ halmaz egy elemű.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathbb{M}$ egy elemű. Ez azt jelenti, hogy egyrészt az arbitrázsmentesség miatt a (6) egyenlet megoldható, másrészt megoldása a pozitív számok körében egyértelmű. Ekkor az $\mathbf{A}$ mátrix rangja N. Tegyük fel ugyanis, hogy a rangja kissebb N-nél. Lineáris algebrából tudjuk, hogy ekkor az egyenletrendszer egyik ismeretlenje szabadon megválasztható. Ekkor tehát van egy kockázatsemleges valószínűség ami ennek az egyenletnek megoldása. Az egyik kimenet valószínűségét elegendően kis mértékben megváltoztatva a megoldásvektor többi eleme csak annyit változik, hogy még mindig pozitív elemekből áljon a megoldásvektor, vagyis nem lehetne egyértelmű a megoldás, vagyis ellentmondásra jutottunk, ezért az $\mathbf{A}$ mátrix rangja N . Ekkor azonban az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa nem zérus, ezért bármely X kifizetés esetén az

$$\mathbf{A}H = X$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, vagyis minden feltételes követelés replikálható.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Ez az irány másféleképpen is bizonyítható: Ha az (6) egyenlet a pozitív számok körében egyértelműen megoldható, akkor az $x\mathbf{A} = 0$ egyenletnek nincs zérustól különböző megoldása. Ha ugyanis lenne, és ha q pozitív megoldása az (6) egyenletnek akkor elegendően kis ε valós szám esetén a $q + \varepsilon x$ is pozitív megoldása (6) egyenletnek (ezt behelyettesítéssel és a mátrixal való szorzás disztributivitásának felhasználásával ellenőrizhetjük), ami ellentmondás. Tehát az $x\mathbf{A} = 0$ egyenletnek nincs zérustól különböző megoldása, amiből következik hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sorrangja N (ez azért igaz, mert a sorok lineárisan összefüggősége pontosan azt jelenti hogy van nemtriviális megoldása a homogén egyenletrendszernek, vagyis pontosan akkor lineárisan függetlenek a sorok, ha csak triviális megoldása van a homogén egyenletrendszernek), ezért a determinánsa nemzérus. Ekkor viszont bármely X kifizetés esetén az

$$\mathbf{A}H = X$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, vagyis minden feltételes követelés replikálható.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Tegyük most fel, hogy minden követelés replikálható. Legyen $e_1 = (1, 0, 0..., 0) \in \mathbb{R}^K$. Mivel ez a feltételes követelés replikálható, ezért $\mathbf{E_Q}\left(e_1 / B_1\right)$ értéke minden $\mathbb{M}$ beli $\mathbf{Q} = (q_1, ...q_K)$ mértékre azonos. Jelöljük ezt a közös értéket b-vel. Ekkor $b = \mathbf{E_Q}\left(e_1 / B_1\right) = q_1 / B_1$, amiből minden $\mathbb{M}$ beli $\mathbf{Q}$-ra $q_1 = bB_1$. Hasonlóképpen bebizonyítható, hogy az $\mathbb{M}$-beli mértékek minden koordinátája azonos, vagyis $\mathbb{M}$ egy elemű. $\square$

Nemteljes esetben a nem replikálható követelések árazása nem oldható meg a preferenciák felhasználása nélkül, ebben az esetben arbitrázsmegfontolásokkal csupán a lehetséges árak egy intervalluma határozható meg.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Szuperreplikálás

Rögzítsünk egy tetszőleges (kétperiódusos, véges állapotterű) arbitrázsmentes modellt, és legyen X egy tetszőleges feltételes követelés. Legyen

$$V_+(X) = \inf \{ \mathbf{E_Q}(Y/B_1) \mid Y \geq X,\ Y \text{ replikálható követelés} \}.$$

$$V_-(X) = \sup \{ \mathbf{E_Q}(Y/B_1) \mid Y \leq X,\ Y \text{ replikálható követelés} \}.$$

ahol $\mathbf{Q}$ egy tetszőleges kockázatsemleges valószínűség.

Tétel

A fenti infimum létezik és az X követelés arbitrázsmentes ára nem haladhatja meg $V_+(X)$-et, és nem lehet kissebb mint V_-.

Tétel

Egy arbitrázsmentes piacon teljesülnek az alábbi azonosságok

$$V_+(X) = \sup\left\{\mathbf{E_Q}(X/B_1) \mid \mathbf{Q} \in \mathbb{M}\right\}$$

$$V_-(X) = \inf\left\{\mathbf{E_Q}(X/B_1) \mid \mathbf{Q} \in \mathbb{M}\right\}.$$

Preliminary
- Random movement
- Trajectories
- Call option
- Example
- No-arbitrage principle
- Course objectives

Single-period model
- The Financial Market
- Trading strategy
- II/1 - Value process
- Matrix algebra
- Value pr. matrix not.
- Gain Process
- $V_1=V_0+G$
- Discounting
- $V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
- Arbitrage
- Risk-neutral probability
- Fundamental theorem
- Example 1.
- Exercise 2
- Contingent Claims
- Attainable contingent claims
- Valuation of attainable contingent claims
- Teljes és nemteljes piacok
- Szuperreplikálás
- Put-call paritás

4. Példa

Tegyük fel, hogy a $r = 0$, továbbá adottak a következő adatok:

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$
1	10	20	15	7,7
2	5	6	6	4

Létezik-e ekvivalens martingálmérték?

5. Példa

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Tegyük fel, hogy a kockázatmentes kötvény 20%-os biztos hozammal rendelkezik, továbbá adottak a következő adatok:

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$
1	8.75	6	9	12
2	12.75	9	12	18

Létezik-e ekvivalens martingálmérték? Replikálható-e a kettes számú kockázatos értékpapír egy egységére vonatkozó 10 lehívási árfolyamú call opció? Mi lesz az arbitrázsmentes ára ennek az opciónak?
megoldás: $q = (0.1,\ 0.3,\ 0.6)$, 4.5

6. Példa

Adja meg azon kifizetések halmazát az előző feladatban definiált modellben, melyek zérus kiinduló vagyon segítségével replikálhatóak! Milyen alakzatot határoz meg ez a halmaz? Adja meg ez utóbbi halmazra merőleges vektorok halmazát!

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

7. Példa

Tegyük fel, hogy egy pénzpiacon egy 25%-os biztos hozammal rendelkező kötvénnyel, továbbá két kockázatos értékpapírral lehet kereskedni, melyeknek árfolyamatait a következő táblázat tartalmazza.

n	$S_n(0)$	$S_n(1)(\omega_1)$	$S_n(1)(\omega_2)$	$S_n(1)(\omega_3)$
1	12.8	10	10	20
2	16	10	15	25

Tegyük fel, hogy egy befektető két egység kockázatmentes kötvényt, egy egység egyes számú értékpapírt, és három egység kettes számú értékpapírt vásárol. Adja meg ezen kereskedési stratégia értékfolyamatát, és diszkontált értékfolyamatát! A fenti modellben létezik-e ekvivalens martingálmérték, és replikálható-e a kettes számú kockázatos értékpapír egy egységére vonatkozó 12 lehívási árfolyamú put opció és call opció? Mi lesz az arbitrázsmentes ára ezeknek az opcióknak?

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Megoldás:
a call opció ára 6.72, a put opció ára 0.32 $q = (0.2, 0.2, 0.6)$,

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Put-call paritás

Tétel

Egy modellben a $(S_1(1) - e)^+$ *call opció pontosan akkor replikálható, ha az ennek megfelelő* $(e - S_1(1))^+$ *put opció replikálható.*

Bizonyítás: Használjuk fel, hogy tetszőleges f függvényre $f^+ - (-f)^+ = f$.

Tétel

Ha az n-edik értékpapír egységére vonatkozó, e lehívási árfolyamú call opció replikálható, akkor ennek $t = 0$*-beli c ára és ugyanezen lehívási árfolyamú put opció p ára között fennáll a következő összefüggés:*

$$c - p = S_n(0) - e/(1 + r).$$

Bizonyítás: A kockázatsemleges értékelés elve alapján

$$c - p = \mathbf{E_Q}\left(\left((S_n(1) - e)^+ - (e - S_n(1))^+\right)/B_1\right) =$$
$$\mathbf{E_Q}\left((S_n(1) - e)/B_1\right) = \mathbf{E_Q}\left(S_n(1)/B_1\right) - \mathbf{E_Q}\left(e/B_1\right) =$$
$$S_n(0) - e/(1 + r)$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

8. Példa

Ellenőrizzük, hogy az előző példában megadott opciókra teljesül-e a put-call paritás!

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

9. példa

Tegyük fel, hogy egy pénzpiaci modellben a kimenetelek száma kettő, a kockázatmentes kamatláb zérus és csak egyetlen kockázatos értékpapírral lehet kereskedni. Az árfolyamatot a

$$\begin{pmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) \\ B_1(\omega_2) & S_1(1)(\omega_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

mátrix adja meg, valamint legyen $S_1(0) = 6$. Ábrázolja egy közös derékszögű koordinátarendszerben a

$$\mathbb{W} \equiv \left\{ X \in \mathbb{R}^K \mid X = G^* \text{ valamely } H \text{ kereskedési stratégiára} \right\}$$

halmazt, az ekvivalens martingálmértéket, az

$$\mathbb{A} \equiv \left\{ X \in \mathbb{R}^K \mid X \geq 0 \text{ és } X \neq 0 \right\}$$

és a

$$\mathbb{W}^{\perp} \equiv \left\{ X \in \mathbb{R}^K \mid X \cdot Y = 0 \text{ minden } X \in \mathbb{W} \right\}$$

halmazokat. Mutassa meg, hogy a $(-4, 8)$ kifizetés $\mathbb{W}$-beli,

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Pénzpiac több periódus esetén

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Alapfogalmak I

Legyen X egy tetszőleges halmaz. Az X halmaz bizonyos részhalmazaiból álló $\mathfrak{M}$ halmazt *σ-algebrának* nevezzük, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

1. $X \in \mathfrak{M}$,
2. $A \in \mathfrak{M}$ esetén $A^C \in \mathfrak{M}$,
3. Legyen $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, ahol $A_i \in \mathfrak{M}$ minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén. Ekkor $A \in \mathfrak{M}$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Alapfogalmak II

Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt, ahol

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\},$$

és minden esemény $\mathbf{P}$ szerinti valószínűsége pozitív. Rögzítsünk egy $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,...,T\}}$ ún. filtrációt. A filtrációt képező $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ σ-algebrák azokat az eseményeket tartalmazzák, melyek bekövetkezése avagy be nem következése a t időpontban rendelkezésre álló információk alapján eldönthető. A filtrációra teljesül hogy minden $s < t$ esetén $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ami azt fejezi ki hogy amit a megfigyelők az s időpontban tudnak, azt a t időpontban is tudják, vagyis nem felejtenek. Ekkor egy $X(t)$, $t = 0, 1, ..., T$ sztochasztikus folyamatot *martingálnak* nevezünk, ha minden $s < t$-re teljesül, hogy $\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s)$.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Példa I

Tegyük fel, hogy egy pénzpiacon egyetlen kockázatmentes kötvénnyel, és egyetlen kockázatos értékpapírral kereskednek. Tegyük fel, hogy a befektetők az összes információjukat onnan szerzik, hogy megfigyelik a kockázatos értékpapír árát. Adja meg a befektetők információs struktúráját, ha az árfolyam alakulása a következő:

Preliminary

Random movement

Trajectories

Call option

Example

No-arbitrage principle

Course objectives

Single-period model

The Financial Market

Trading strategy

II/1 - Value process

Matrix algebra

Value pr. matrix not.

Gain Process

$V_1 = V_0 + G$

Discounting

$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$

Arbitrage

Risk-neutral probability

Fundamental theorem

Example 1.

Exercise 2

Contingent Claims

Attainable contingent claims

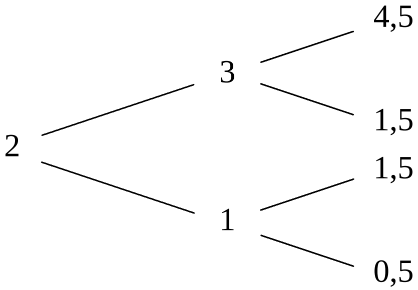
Valuation of attainable contingent claims

Teljes és nemteljes piacok

Szuperreplikálás

Put-call paritás

Példa II



Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Tegyük fel, hogy a befektetők a $t = 0, 1, ..., T$ diszkrét időpillanatokban $N + 1$ darab kockázatos értékpapírral kereskedhetnek, vagyis nemlétezik kockázatmentes befektetés. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt, ahol

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\},$$

és minden esemény $\mathbf{P}$ szerinti valószínűsége pozitív. Rögzítsünk egy $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,...,T\}}$ ún. filtrációt. Legyen $S = (S_0, ..., S_N)$ és jelölje $S_j(t)$ a j-edik értékpapír t-edik időpontbeli árát, feltesszük hogy $S_j(t)$ a rögzített filtrációra nézve adaptált, vagyis hogy minden t időpontban $S_j(t)$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_t$ mérhető, valamint minden t-re $S_j(t) > 0$. Jelölje $H(t) = \{H_0(t), ..., H_N(t)\}$ a befektető kereskedési stratégiáját, vagyis azt a sztochasztikus folyamatot, melynek j-edik koordinátája azt mutatja meg, hogy a befektető hány egység értékpapírral rendelkezik a $[t - 1, t)$ időintervallumban. Mivel a befektető a $H(t)$ portfolió összetételéről a $t - 1$ időpontban dönt ezért $H(t)$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
V_1=V_0+G
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

nyilván $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető, amit úgy mondunk, hogy a $H(t)$ folyamat előrejelezhető.

A továbbiakban értékfolyamatnak nevezzük a

$$V^H(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N} H_j(t+1)S_j(t) & t = 0 \\ \sum_{j=0}^{N} H_j(t)S_j(t) & t = 1, ..., T \end{cases}$$

folyamatot. Mivel kereskedés csak a $t = 1, ..., T$ diszkrét időpontokban folyhat, ezért a $V^H(t)$ értéke éppen azt mutatja meg, hogy mekkora a befektető kereskedés előtt tartott portfoliójának piaci értéke a t-edik időpontban. Vegyük észre, hogy a $t = 0$-ban azért kell eltérően definiálnunk, az értékfolyamatot, mert a $t = 0$-ban nem beszélhetünk kereskedés előtti portfolióról. Ennek megfelelően $V^H(0)$ a befektető induló vagyonaként interpretálható.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1=V_0+G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Eddig nem zártuk ki annak lehetőségét, hogy a befektető menet közben a portfoliójából pénzt vonjon ki avagy ahhoz pénzt adjon hozzá, ezért $V^H(t)$ értéke elvileg különbözhet a közvetlenül a t-edik időpontbeli kereskedés utáni $\sum_{j=0}^{N} H_j(t+1)S_j(t)$ értéktől[1]. Ha ennek lehetőségét kizárjuk, vagyis érvényes a

$$\sum_{j=0}^{N} H_j(t)S_j(t) = \sum_{j=0}^{N} H_j(t+1)S_j(t) \quad t = 1, ..., T-1$$

vagyis a

$$\sum_{j=0}^{N} (H_j(t+1) - H_j(t))S_j(t) = \sum_{j=0}^{N} \Delta H_j(t)S_j(t) = 0 \quad (7)$$

egyenlőség, akkor önfinanszírozó portfólióról beszélünk.

[1] Ezért nem definiálhattuk az értékfolyamatot egységesen minden t-re a $\sum_{j=0}^{N} H_j(t+1)X_j(t)$ folyamatként.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

A továbbiakban nyereményfolyamatnak nevezzük a

$$G^H(t) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{j=0}^{N} H_j(s)(S_j(s) - S_j(s-1)) \quad t = 1, ..., T \quad (8)$$

folyamatot, ami a H kereskedési stratégiát követő befektető 0 és t időpontok közötti kumulált nyereségét mutatja. Egyszerű algebrai átalakításokkal belátható, hogy egy portfolió pontosan akkor önfinanszírozó ha

$$V^H(t) = V^H(0) + G^H(t) \quad t = 1, ..., T. \quad (9)$$

Ennek bizonyításához csak fel kell bontanunk (8)-beli kifejezésben a zárójeleket, és alkalmaznunk (7) feltételt.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives

Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Feltesszük, hogy a 0-adik értékpapír árfolyamata szigorúan pozitív, és a továbbiakban ezt az értékpapírt tekintsük ármércének. Vezessük tehát be az $S_j^* = S_j / S_0$ jelölést. Ekkor diszkontált értékfolyamatnak nevezzük a

$$V^{H*}(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N} H_j(t+1) S_j^*(t) & t = 0 \\ \sum_{j=0}^{N} H_j(t) S_j^*(t) & t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

folyamatot, valamint diszkontált nyereményfolyamatnak nevezzük a

$$G^{H*}(t) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{j=0}^{N} H_j(s) (S_j^*(s) - S_j^*(s-1))$$

folyamatot.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Ekkor egyszerű algebrai átalakítással belátható, hogy

$$V^{H*}(t) = V^H(t)/S_0(t), \;\; t = 0, 1, 2, ..., T. \qquad (10)$$

Vegyük észre, hogy itt $S_0^*(s)$ a konstans 1 folyamat, ezért a fenti összegzésnél a $j = 0$-hoz tartozó tag elhagyható, vagyis

$$G^{H*}(t) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{j=1}^{N} H_j(s)(S_j^*(s) - S_j^*(s-1)), \qquad (11)$$

más szóval, a nyereményfolyamat kiszámításához az ármérce értékpapír mennyiségének ismeretére nincs szükség. Sőt, tetszőleges W indulóvagyon és tetszőleges előrejelezhető $H' = \{H_1(t), ..., H_N(t)\}$ sztochasztikus folyamat az (7) egyenlőség révén már egyértelműen meghatároz egy olyan $H = \{H_0(t), ..., H_N(t)\}$ önfinanszírozó kereskedési stratégiát melyre $V^H(0) = W$.

A H' stratégiának ez a reprezentációja nagyban leegyszerűsíti a modell kezelhetőségét, hiszen a H' stratégiával kapcsolatban az önfinanszírozóság feltételét nem kell alkalmaznunk. A továbbiakban szükségünk lesz arra a tényre, hogy egy önfinanszírozó kereskedési stratégia, a diszkontált folyamatra vonatkozóan is önfinanszírozó marad. Mivel önfinanszírozó portfóliók esetén nyilván érvényes a

$$\sum_{j=0}^{N} \Delta H_j(t) S_j^*(t) = 0 \tag{12}$$

feltétel, ezért a korábbihoz hasonló egyszerű algebrai átalakításokkal belátható, hogy a H stratégia pontosan akkor önfinanszírozó, ha

$$V^{H*}(t) = V^{H*}(0) + G^{H*}(t) \quad t = 1, ..., T, \tag{13}$$

vagyis ha $\{H_0(t), ..., H_N(t)\}$ az eredeti S folyamatra vonatkozóan önfinanszírozó volt, akkor $\{H_1(t), ..., H_N(t)\}$ az S^* diszkontált folyamatra vonatkozóan is önfinanszírozó marad, vagyis teljesül az ún. *ármérce-invariancia*.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
V_1=V_0+G
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Definíció

Egy önfinanszírozó H kereskedési stratégiát arbitrázsnak nevezünk, ha $V^H(0) = 0$, $V^H(T) \geq 0$, *és* $\mathbf{E}(V^H(T)) > 0$.

A $V^{H*}(t) = V^H(t)/S_0(t)$ azonosság nyilvánvaló következménye a következő állítás.

Tétel

Egy pénzpiacra az alábbi állítások ekvivalensek:
1. Létezik arbitrázs,
2. Létezik egy H önfinanszírozó kereskedési stratégia, melyre $V^{H*}(0) = 0$, $V^{H*}(T) \geq 0$, *és* $\mathbf{E}(V^{H*}(T)) > 0$,
3. Létezik egy H önfinanszírozó kereskedési stratégia, melyre $G^{H*}(T) \geq 0$, *és* $\mathbf{E}(G^{H*}(T)) > 0$.

Bizonyítás Az 1. és 2. ekvivalenciája a (10) azonosság következménye, a 2. $\Longrightarrow$ 3. implikáció az árméerce invariancia, valamint az önfinanszírozóság (13)-beli ekvivalens megfogalmazásának következménye. A 3. $\Longrightarrow$ 2.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
V_1=V_0+G
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

implikáció bizonyításához tegyük fel, hogy $H(t) = (H_0(t), H_1(t), \ldots H_N(t))$-re teljesül a 3. feltétel. Ekkor a $\widetilde{H}(t) = (H_0(t) - V^{H*}(0)/S_0(0), H_1(t), \ldots H_N(t))$ stratégiára nyilván $V^{\widetilde{H}*}(0) = 0$, és mivel $G^{\widetilde{H}*}(T)$ értékét nem befolyásolja a 0-dik értékpapírból tartott mennyiség, ezért $G^{\widetilde{H}*}(T) = G^{H*}(T)$, ezért $V^{\widetilde{H}*}(T) = V^{\widetilde{H}*}(0) + G^{\widetilde{H}*}(T) = G^{H*}(T)$ amiből valóban következik, hogy $V^{\widetilde{H}*}(T) \geq 0$, és $\mathbf{E}(V^{\widetilde{H}*}(T)) > 0$. □

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Definíció

Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ *egy végesen generált mértéktér, ahol* $\mathcal{F} = P(\Omega)$. *A* $\mathbf{P}_1$ *és* $\mathbf{P}_2$ $\mathcal{F}$*-en értelmezett valószínűségi mértékekről azt mondjuk hogy ekvivalensek, ha bármely* $\omega \in \Omega$ *esetén* $\mathbf{P}_1 > 0$ *pontosan akkor teljesül ha* $\mathbf{P}_2 > 0$.

Ezek után már kimondhatjuk az alaptételt diszkrét időparaméter és végesen generált valószínűségi mezők esetére.

Tétel (A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele)

A

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,1,\ldots,T\}}, \mathbf{P})$$

filtrált térrel, és az adaptált $S(t)$ *folyamattal jellemezhető pénzpiacon pontosan akkor nincs arbitrázs, ha létezik egy a* $\mathbf{P}$*-vel ekvivalens* $\mathbf{Q}$ *valószínűségi mérték melyre vonatkozóan a diszkontált* S^* *folyamat martingál.*

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Tetszőleges Ω-n értelmezett ξ valószínűségi változóra a $\xi \geq 0$, és $\mathbf{E}(\xi) > 0$ feltétel úgy is megfogalmazható, hogy $\xi \in \mathbb{R}_+^S \setminus \{0\}$, ezért felhasználva az önfinanszírozó kereskedési stratégiák fenti reprezentációját, a fenti tétel következménye az alábbi állítás.

Tétel

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,\dots,T\}}, \mathbf{P}, S)$ *által meghatározott pénzpiacon akkor létezik arbitrázs, ha létezik egy előrejelezhető* $\{H_1(t), \dots, H_N(t)\}$ *folyamat, melyre teljesül, hogy*

$$\sum_{s=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} H_j(s)(S_j^*(s) - S_j^*(s-1)) \in \mathbb{R}_+^K \setminus \{0\} .$$

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t/B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás

Bevezetve a

$$K = \left\{ \sum_{s=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} H_j(s)(S_j^*(s) - S_j^*(s-1)) \mid H \text{ előrejelezhető stratégia} \right\} \tag{14}$$

jelölést a fenti tétel pontosan azt mondja, hogy véges dimenzió esetén az arbitrázsmentesség ekvivalens a

$$K \cap \left(\mathbb{R}_+^K \setminus \{0\}\right) = \emptyset,$$

vagyis a

$$K \cap \mathbb{R}_+^K = \{0\}$$

feltétellel.

A fentieket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a diszkontálás elvégzésének valódi oka az, hogy szeretnénk megszabadulni az önfinanszírozóság feltételének explicit szerepeltetésétől. Mivel az ármérce szerepét betöltő – megállapodásunk szerint a 0-dik – értékpapírból tartott mennyiség a többi értékpapírból tartott mennyiségből az önfinanszírozóság feltételének felhasználásával meghatározható, ezért természetesen a kereskedési stratégia megadásához az ármérce értékpapír mennységének megadására nincs szükség. Ekkor az önfinanszírozóság feltételét csak a portfolió kifizetésének meghatározásakor kell felhasználnunk. A diszkontálás elvégzése esetén azonban a kereskedés során az ármérce értékpapíron nem képződik nyereség, hiszen annak éréke diszkontálás után konstans 1, ezért a nyeremény diszkontált értéke az önfinanszírozóság felhasználása nélkül kiszámítható, így az arbitrázs fogalma a diszkontált árfolyamatokból kiindulva az önfinanszírozóságra való hivatkozás nélkül definiálható.

Preliminary
Random movement
Trajectories
Call option
Example
No-arbitrage principle
Course objectives
Single-period model
The Financial Market
Trading strategy
II/1 - Value process
Matrix algebra
Value pr. matrix not.
Gain Process
$V_1 = V_0 + G$
Discounting
$V_t^* = V_t / B_t$, $V_1^* = V_0^* + G^*$
Arbitrage
Risk-neutral probability
Fundamental theorem
Example 1.
Exercise 2
Contingent Claims
Attainable contingent claims
Valuation of attainable contingent claims
Teljes és nemteljes piacok
Szuperreplikálás
Put-call paritás