

Zadanie 1.

a) Jako że w każdym węźle mamy wskaźnik zbalansowania danego poddrzewa, wiemy które z poddrzew, lewe czy prawe jest wyższe (-1 prawe wyższe, 1 lewe wyższe, 0 takie same). Jeżeli oba poddrzewa są takie same to wybieramy dowolne z nich. W przeciwnym przypadku wypadku wybieramy niższe oraz schodzimy do jego korzenia, algorytm wykonujemy tak długo aż nie napotkamy na liść. Wysokość drzewa to będzie liczba przejść z węzła do węzła a złożoność algorytmu jest proporcjonalna czasowo do wysokości drzewa oraz stała pamięciowo.

b) Wysokość to będzie $n-1$ czyli 2020. Ponieważ każdy kolejny wkładany klucz, będzie jako jedyny większy od korzenia i będzie jego jedynym prawym synem. Po wykonaniu operacji splay na nowo włożonym wierzchołku drzewo degeneruje się do listy, bo wcześniejszy korzeń staje się lewym synem nowo włożonego wierzchołka, a prawego syna nie ma.

c) Zakładam, że węzłów zewnętrznych nie wliczamy do sumy węzłów, ani długości ścieżki. W przypadku gdy wliczamy rozumowania jest analogiczne.

Zauważmy, że wstawienie węzła czerwonego powoduje, że liczba węzłów w danym poddrzewie się podwaja. Więc im wyżej postawimy węzeł czerwony tym więcej węzłów otrzymamy.

Z tego wynika, że najwięcej węzłów otrzymamy kiedy węzeł czerwony będzie synem korzenia, jego obaj synowie będą drzewami pełnymi i mieli wysokość $h-2$, a drugi syn korzenia będzie drzewem pełnym o wysokości $h-1$. Węzłów wtedy będzie:

$$1 + 1 + 2 * (2^{(h-2 + 1)} - 1) + 2^{(h-1+1)} - 1 = 2 * 2^{(h-1)} + 2^{(h)} = 2^{(h+1)}.$$

Za to najmniej węzłów będzie jak węzeł czerwony będzie doczepiony jako liść do drzewa pełnego o wysokości $h-1$ złożonego z samych czarnych węzłów. Wtedy węzłów będzie:

$$2^{(h-1+1)} - 1 + 1 = 2^h.$$