RESOLUTION

Principe

➢ La méthode de résolution de Robinson est plus rapide, simple et se généralise aux formules du calcul des prédicats du 1er ordre : c'est un algorithme simple de démonstration automatique

➢ Elle évite le recours au **m.p.** qui est un mécanisme de démonstration lent et fastidieux dans la plupart des cas

➢ Une fois, la (les) formule(s) donnée(s) sont mises sous forme clausale, le mécanisme de résolution consiste alors à déduire la clause vide (sans littéral) à partir de ces clauses

RESOLUTION

Principe

➢On se donne un ensemble $\{A_1,\ldots,A_n\}$ de fbf du calcul propositionnel et on cherche à savoir s'il est satisfaisable ou non

➢La procédure naturelle et simple qui consiste à faire la table de vérité de $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ puis à regarder s'il y a au moins un V dans la colonne principale de cette table , assure d'obtenir une réponse en un temps fini.

➢Toutefois, ce temps de calcul est de l'ordre de 2^n, où n est le nombre d'atomes intervenant dans les A_i.

RESOLUTION

EXERCICE

Soit le système formel RSV défini par :

- $\Sigma_{RSV} = \{p_0, p_1, \ldots.., p_n, \ldots.\} \cup \{\rceil, v\}$
- F_{RSV} =ensemble de toutes les clauses construites à partir des pi, toutes les clauses sont supposées sans répétitions de littéraux. La clause n'ayant aucun littéral est notée $\boxed{?}$ et n'est satisfaite par aucune interprétation.
- $A_{RSV} = \varnothing$
- $R_{RSV} = \{res\}$

Résolution : A V B , ¬B V C |-- A V C

$$f \vee p_i,\ g \vee \rceil p_i \;|\!\!-\!\!-_{res}\; f \vee g$$

RESOLUTION

Modus ponens : A, A→B |--B

Modus tollens : Si ⌉B et A→B |-- ⌉A

Enchaînement : A→B , B→C |-- A→ C

EXERCICE

1°/ $p_0 \vee p_1 \vee p_2$, $\rceil p_0 \vee p_1 \vee p_2$, $\rceil p_1 \vee p_2$ |--- p_2 ?

2°/ $p_0 \vee p_1$, $p_0 \vee \rceil p_1$, $\rceil p_0 \vee p_1$, $\rceil p_0 \vee \rceil p_1$ |--- $\boxed{?}$?

3°/ Y a-t-il une relation entre la relation «res » et les chainages avant et arrière

4°/ Comparer le système formel Σ_{RSV} et le calcul propositionnel

5°/ Montrer que si F_1 $|\text{--}_{res}$ C alors $F_1 \models C$

RESOLUTION

EXERCICE

$p_0 v p_1 v p_2$, $\neg p_0 v p_1 v p_2$, $\neg p_1 v p_2$ |--- p_2 ?

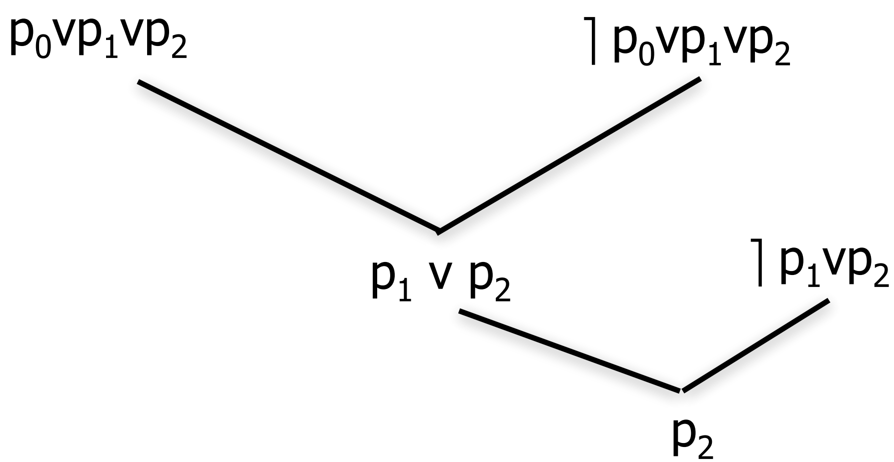
f1 : $p_0 v p_1 v p_2$ (Hypothèse)

f2 : $\neg p_0 v p_1 v p_2$ (Hypothèse)

f3 : p_1 v p_2 (res avec f1 et f2)

f4 : $\neg p_1 v p_2$ (Hypothèse)

f5 : p_2 (res avec f3 et f4)



Arbre de dérivation associé à la déduction

RESOLUTION

EXERCICE

$$p_0 v p_1 \, , \, p_0 v \neg p_1 \, , \neg p_0 v p_1 \, , \, \neg p_0 v \neg p_1 \mid\!\text{---} \ \boxed{?}$$

f1 : $p_0 v \ p_1$ (Hypothèse)

f2 : $p_0 v \neg p_1$ (Hypothèse)

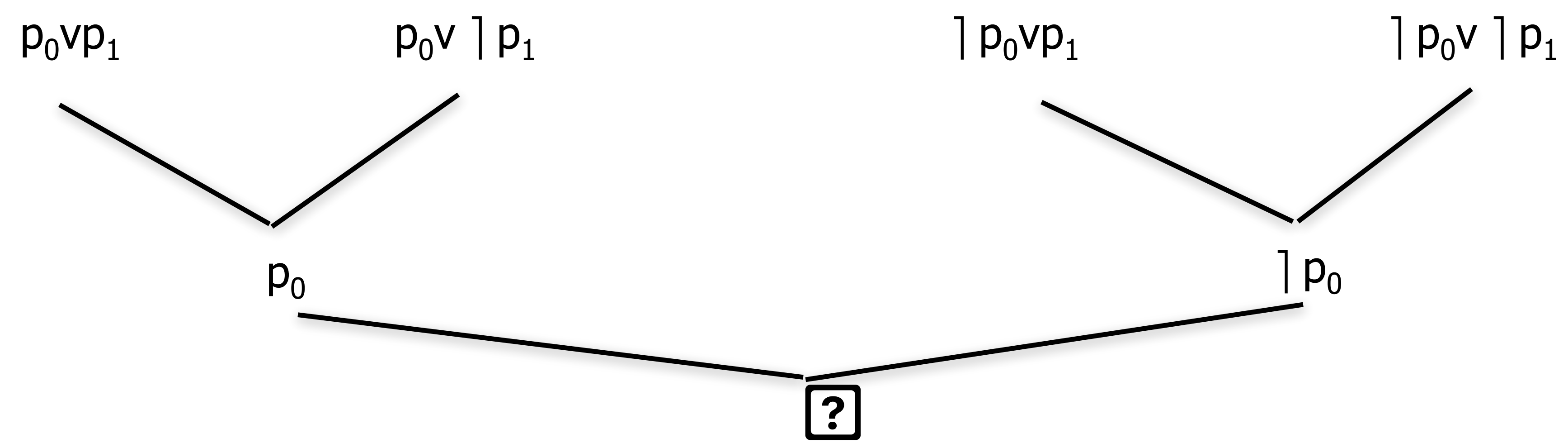
f3 : p_0 (res avec f1 et f2)

f4 : $\neg p_0 \ v \ p_1$ (Hypothèse)

f5 : $\neg p_0 v \neg p_1$ (Hypothèse)

f6 : $\neg p_0$ (res avec f4 et f5)

f7 : $\boxed{?}$ (res avec f3 et f6)



Arbre de dérivations associé à la déduction

RESOLUTION

Modus ponens : $A, A \rightarrow B \mid\!-\!- B$

Modus tollens : Si $\neg B$ et $A \rightarrow B \mid\!-\!- \neg A$

Enchaînement : $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C \mid\!-\!- A \rightarrow C$

EXERCICE

$f \vee p_i, g \vee \neg p_i \mid\!\!-\!\!-_{res} f \vee g$

res généralise le modus ponens. En effet :

$\neg p_i \vee p_j , p_i \mid\!-\!-_{m.p} \; p_j$ ou $p_j \vee \neg p_i , \boxed{?} \vee p_i \mid\!-\!-_{m.p} \; p_j$

$\neg$ce qui est bien « res » avec $f = p_j$ et $g = \boxed{?}$

res généralise le modus tolens. En effet :

$p \rightarrow q , \neg q \mid\!-\!-_{m.t} \; \neg p$ soit $\neg p \vee q , \neg q \mid\!-\!-_{m.t} \; \neg p$ soit $\neg p \vee q , \boxed{?} \vee \neg q \mid\!-\!-_{m.t} \; \neg p$

ce qui est bien « res » avec $f = \neg p$ et $g = \boxed{?}$

res généralise l'enchainement. En effet :

$p \rightarrow q , q \rightarrow r \mid\!\!-\!\!-_{en} p \rightarrow r$ soit $\neg p \vee q, \neg q \vee r \mid\!-\!-_{en} \neg p \vee r$ soit $\neg p \vee q, r \vee \neg q \mid\!-\!-_{en} \neg p \vee r$

ce qui est bien le « res » avec $f = \neg p$ et $g = r$

RESOLUTION

EXERCICE

Σ_{RSV} moins puissant que le calcul propositionnel :

Il n'accepte que des clauses

<u>Dans P_0 :</u>

on a $h_1, h_2, \ldots\ldots , h_n \vdash t \Leftrightarrow h_1 \wedge h_2 \wedge \ldots\ldots \wedge h_n \models t$

<u>Dans Σ_{RSV} :</u>

$p_0 \models p_0 \vee p_1$ bien qu'on ait pas $p_0 \vdash p_0 \vee p_1$

RESOLUTION

EXERCICE

Hypothèse : F_1 $|--_{res}$ C

F_1 contient deux clauses f v p_i , g v $\rceil p_i$ et C=f v g

Soit i une interprétation satisfaisant F_1:

➢ Si i[p_i] = V alors i[$\rceil p_i$]=F, donc i[g]=V et par la suite i[f v g] = V

➢Si i[p_i] = F alors i[f]=V et par la suite i[f v g] = V

Conclusion : $F_1 \models C$

RESOLUTION

Déduction en Logique des propositions

➢On cherche à démontrer : P1, ……, Pn |= C

➢Méthodes des tables de vérité : on vérifie à l'aide d'une table de vérité si l'ensemble des modèles de P1 $\wedge$ ……. $\wedge$ Pn constituent un modèle pour C

➢Principe de déduction par réfutation :
P1, ……, Pn |= C ssi P1 $\wedge$ ……. $\wedge$ Pn $\wedge$ $\rceil$C (dite formule de réfutation) est insatisfiable

RESOLUTION

Résolution en Logique des propositions

- Soient S1 et S2 deux clauses appartenant à une formule S mise sous forme d'une conjonction de clauses. S'il existe un atome L tel que $L \in S1$ et $\rceil L \in S2$, alors la clause

$$R \equiv S1 \setminus \{ L \} \cup S2 \setminus \{\rceil L \}$$

appelée **résolvante** de S1 et S2 est une conséquence logique de S1 et S2

- Les formules (S) et (S)$\cup$R sont logiquement équivalentes

Ex : pour S1= P v Q et S2= R v $\rceil$Q , on a res(S1,S2)= P v R

RESOLUTION

Résolution en Logique des propositions

Méthode de Résolution de Ronbinson

Pour montrer qu'une formule (S) est insatisfiable , il faut et il suffit de produire la clause vide par résolution de l'ensemble des clauses issues de (S) mise sous forme clausale

1- Construction de la formule de réfutation associée

2- Mise sous forme clausale de la formule de réfutation (Fr)

3- Tant que la clause vide ($\boxed{?}$) $\notin$ (Fr)

    3.1- Appliquer la résolution sur 2clauses de Fr

    3.2- Ajouter la résolvante à (Fr)

4- Si clause vide : raisonnement valide. Sinon, non valide

RESOLUTION

Substition dans le calcul des Prédicats du 1er ordre

➢On appelle composant de substitution toute expression de la forme (x |t) où x est une variable et t un terme quelconque du calcul des prédicats. Si A est une formule de Pr, on note (x |t)A la formule obtenue en remplaçant dans A toutes les occurrences de x par t.

➢Une substitution est une application σ de l'ensemble des fbf de Pr dans lui-même, de la forme : σ : A |→ c1...ck A
où c1,...,ck sont des composants de substitution. La suite finie c1,...,ck est appelée décomposition de la substitution σ est notée σ = [c1...ck]. La substitution identique sera notée []

Ex : Soit σ =[(x|f(a))(y|f(x))] une substitution.

σP(x,y) = (x|f(a))P(x,f(x)) = P(f(a),f(f(a)))

Soit $\sigma = [(x|f(a))(y|f(x))]$ une substitution.

$$\sigma P(x,y) = (x|f(a))P(x,f(x)) = P(f(a),f(f(a)))$$

$$\sigma P(x,y) = (x|f(a))(y|f(x))P(x,y) = (x|f(a))P(x,f(x)) = P(f(a),f(f(a)))$$

$$(y|f(x))(x|f(a))P(x,y) = (y|f(x))P(f(a),y) = P(f(a),f(x))$$

$$[(x|y)(z|y)] = [(z|y)(x|y)]$$

Z —> y	x—>y
x—>y	z—>y

RESOLUTION

Substitution dans le calcul des Prédicats du 1er ordre

➢La décomposition en composants de substitution n'est pas commutative en général

➢La décomposition en composants de substitution n'est pas unique en général

➢Soit $\Gamma = \{A1,\ldots,An\}$ un ensemble fini de formules atomiques de Pr. On appelle unificateur de Γ toute substitution σ telle que

$\sigma A1 = \cdots = \sigma An$

Ex : Soit $\Gamma=\{A1,A2,A3\}$ avec

$A1 = P(x,z)$, $A2 = P(f(y),g(a))$ et $A3 = P(f(u),z)$.

$\sigma = [(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]$ est un unificateur de Γ.

$A1 = P(x,z)$, $A2 = P(f(y),g(a))$ et $A3 = P(f(u),z)$.

$\sigma = [(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]$

$\rho = [(x|f(v))(y|v)(z|g(a))(u|v)]$

$[(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]P(x,z)=(x|f(u))(y|u)P(x,g(a))=P(f(u),g(a))$

$[(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]P(f(y),g(a))=(x|f(u))(y|u)P(f(y),g(a))=$
$(x|f(u))P(f(u),g(a))=P(f(u),g(a))$

$(x|f(u))(y|u)(z|g(a))]P(f(u),z)=(x|f(u))(y|u)P(f(u),g(a))=$
$(x|f(u))P(f(u),g(a))=P(f(u),g(a))$

Ex : pour $\Gamma=\{A1,A2,A3\}$, σ est un plus grand unificateur de Γ
La substitution $\rho = [(x|f(v))(y|v)(z|g(a))(u|v)]$ en est un autre et on a $\sigma = (v|u)\rho$ et $\rho = (u|v)\sigma$.

RESOLUTION

Unification

➢Si σ est un unificateur d'un ensemble fini de formules Γ, alors pour toute substitution α : α σ est un unificateur de Γ.

➢Il est possible qu'un ensemble de formules n'admette aucun unificateur

Ex : Γ = {P(x,f(x)),r(f(t),y)}) (prédicats différents)

➢Soit σ un unificateur d'un ensemble de formules Γ. On dit que σ est un plus grand unificateur de Γ si pour tout unificateur α de Γ il existe une substitution β telle que σ =β α.

Ex : pour Γ={A1,A2,A3}, σ est un plus grand unificateur de Γ

La substitution ρ = [(x|f(v))(y|v)(z|g(a))(u|v)] en est un autre et on a σ =(v|u)ρ et ρ= (u|v)σ.

RESOLUTION

Résolution dans le calcul des Prédicats du 1er ordre

➢Soient φ1 et φ2 deux clauses quelconques de Pr. On dit que φ1 et φ2 forment une paire résolvable ssi elles contiennent une paire opposée de formules atomiques ayant pour forme respective P(t1, ..., tn) et ⌉P(t'1,..., t'n) et qui peuvent être unifiées par un unificateur σ.

➢ On appelle alors résolvante de φ1 et φ2, la clause :

$$res(\varphi 1, \varphi 2) = \sigma\,(\varphi 1 \setminus \{P\}) \cup \sigma\,(\varphi 2 \setminus \{\rceil P\})$$

Ex : (S1) ≡ P(x) ∨ R(A)   (S2) ≡ ⌉P(y) ∨ R(y)

unificateur : σ [x | y]   résolvante : R ≡ R(A) ∨ R(y)

RESOLUTION

Exemples

<u>Exemple1:</u>

➢On cherche à déduire la formule :
$\exists$ z p(f(z)) à partir des formules
$\forall$x (p(x) $\rightarrow$ p(f(x))) et $\exists$ y p(y)

➢ Ce qui revient à déduire la clause vide $\boxed{?}$ des trois formules :
$\neg$p(x) v p(f(x)) , p(a), $\neg$ p(f(z))

Déduction de la clause vide $\boxed{?}$:
F1: $\neg$p(x) v p(f(x)) (hypothèse)
F2: p(a) (hypothèse)
F3: p(f(a)) (res à partir de f1 et f2 avec θ=(x|a))
F4: $\neg$ p(f(z)) (hypothèse)
F5: $\boxed{?}$ (res à partir de f3 et f4 avec θ=(z|a))

<u>Exemple2:</u>

A_1 = ⌉ p(x) v q(x,f(x))

A_2 = ⌉ p(x) v r(f(x))

A_3 = p(a)

A_4 = ⌉ q(x , y)

Déduction de la clause vide $\boxed{?}$:
F1: ⌉ p(x) v q(x,f(x)) (hyp)
F2: p(a) (hyp)
F3: q(a,f(a)) (res avec f1 et f2)avec θ=(x|a)
F4: ⌉ q(x,y) (hyp)
F5: $\boxed{?}$ (res avec f3 et f4)

RESOLUTION

Résolution dans le calcul des Prédicats du 1er ordre

➢Un ensemble de clauses S du calcul des prédicats du premier ordre est insatisfiable si et seulement si la clause vide $\boxed{?}$ peut être déduite à partir de S

➢ **Algorithme :**

Début
  tant que $\boxed{?}$ $\notin$ S faire
    choisir l_1, l2, c1, c2 tels que l1$\in$ c1 et l2$\in$ c2 et l1, l2 unifiables
    calculer la résolvante r à partir de l'unificateur principal
    remplacer S par S$\cup$\{r\}
  fin tant que
Fin

F1 : ∀x((S(x)vT(x))->P(x))

F2 : ∀x (S(x)vR(x))

F3 : ⌉R(a)

F1,F2,F3 ont pour conséquence la formule P(a)

⌉((S(x)vT(x))vP(x))

(⌉S(x) ∧ ⌉T(x))vP(x)

(⌉S(x) vP(x)) ∧ (⌉T(x))vP(x))

C1: ⌉S(x) vP(x)

C2 : ⌉T(x))vP(x))

C3 : S(x)vR(x)

C4: ⌉R(a)

C5: ⌉P(a)

C6 : S(a) Résolution de C3 et C4 avec (x|a)

C7 : P(a) Résolution de C1 et C6 avec (x|a)

C8 : ⍰ Résolution de C5 et C7

Donc : F1,F2,F3 |= P(a)

$F1 : \forall x(p(x) \rightarrow p(f(x)))$

$F2 : \exists y\ (p(y))$

$F1, F2 \vdash \exists z\ p(f(z))$

C1: $\rceil p(x) \vee p(f(x))$ hyp

C2 : $p(a)$ hyp

C3 : $p(f(a))$ Résolution de C1 et C2 avec (x|a)

C4: $\rceil p(f(z))$ hyp

C5 : $\boxed{?}$ Résolution de C3 et C4 avec (z|a)

EXERCICE

Les chevaux sont plus rapides que les chiens, et il y a un lévrier qui est plus rapide que tous les lapins. On sait qu'Harry est un cheval et que Ralph est un lapin , et que les lévriers sont des chiens.
Déduire qu'Harry est plus rapide que Ralph.

<u>Enoncés</u>

- les chevaux sont plus rapides que les chiens
- il existe un lévrier plus rapide que tout lapin
- Harry est un cheval
- Ralph est un lapin
- les lévriers sont des chiens

<u>Formules logiques du premier ordre</u>

- $\forall x \; \forall y$ cheval(x) ^ chien(y) ⇨ Rapide(x, y)
- $\exists y$ lévrier(y) ^ ($\forall z$ lapin(z) ⇨ rapide(y, z))
- cheval(Harry)
- lapin(Ralph)
- $\forall y$ lévrier(y) ⇨ chien(y)

EXERCICE

(1) $\forall x \forall y$ cheval(x) ^ chien(y) ⇨ Rapide(x, y) (hyp)
(2) $\exists y$ lévrier(y) ^ ($\forall z$ lapin(z) ⇨ rapide(y, z)) (hyp)
(3) $\forall y$ lévrier(y) ⇨ chien(y) (hyp)
(4) cheval(Harry) (hyp)
(5) lapin(Ralph) (hyp)
(6)lévrier(a) ^ ($\forall z$ lapin(z) ⇨ rapide(a, z))
(7) lévrier(a)
(8) lévrier(a) ⇨ chien(a) (d'après (3) pour a)
(9) chien(a) (m.p. sur 7 et 8)
(10) $\forall z$ lapin(z) ⇨ rapide(a, z) (d'après A ^ B $\models$ B appliqué sur (6))
(11) ($\forall z$ lapin(z) ⇨ rapide(a, z)) ⇨ (lapin(ralph) ⇨ rapide(a, ralph))
(d'après SA4)
(12) lapin(ralph) ⇨ rapide(a, ralph) (m.p. sur 11 et 10)

$SA_4 : (\forall x\ A(x) \rightarrow A(t))$

EXERCICE

(13) rapide(a, ralph) (m.p. sur 12 et 5)
(14) cheval(harry) ^ chien(a) ⇨ rapide(harry, a)
(instantation de x par harry et y par a dans (1))
(15) cheval(harry) ^ chien(a) (d'après A , B $\models$ B avec A=(4) et B=(9))
(16) rapide(harry,a) (m.p. sur (14) et (15))
(17) ∀x ∀ y ∀ z rapide(x, y) ^ rapide(y, z) ⇨ rapide(x, z) (transitivité)
(18) rapide(harry, a) ^ rapide(a, ralph) ⇨ rapide(harry, ralph)
(19) rapide(harry, a) ^ rapide(a, ralph)
(d'après A , B $\models$ A ^ B avec A=(16) et B=(13))
(20) rapide(harry,ralph) (m.p. sur (18) et (19))

F1: ∀ x ∀ y cheval(x) ^ chien(y) ⇨ Rapide(x, y)
F2: ∃ x lévrier(x) ^ (∀ y lapin(y) ⇨ rapide(x, y))
F3: ∀x levrier(x) ⇨ chien(x)
F4: cheval(Harry)

F5: lapin(Ralph)
F6: ∀x ∀y ∀z (Rapide(x, y) ^ Rapide(y, z)) ⇨ Rapide(x, z)
F7: ⌉ rapide(harry,ralph)

F1: ⌉cheval(x) v ⌉ chien(y) v rapide(x,y)

F2: levrier(a)
F3: ⌉ lapin(y) v rapide(a,y)

F4: cheval(harry)
F5: lapin(Ralph)
F6: ⌉ levrier(x) v chien(x)

F7: ⌉ rapide(harry,ralph)

F8: chien(a) résolution(f2,f6) avec (x|a)
F9: ⌉ chien(a) v rapide(harry,a)

résolution(f1,f4)(x|harry)(y|a)
F10: rapide(harry,a) resolution(f8,f9)
F11: rapide(a,ralph) resolution(f3,f5)
F12: rapide(harry,ralph)
F13: $\boxed{?}$ resolution(f12,f7)

F'1: ⌉rapide(x,y) v ⌉rapide(y,z) v rapide(x,z)
F'2: ⌉rapide(a,z) v rapide(harry,z)
résolution(f10,f'1)(x|harry)(y|a)

F'3: rapide(harry,ralph) resolution(f11,f'2) (z|ralph)
F'4: $\boxed{?}$ resolution(f'3,f7)

EXERCICE

Soient les énoncés suivants :

A1 :Un étudiant qui a la grippe ne doit pas venir en cours

A2: Un étudiant qui a de la fièvre et qui tousse a la grippe

A3: Un étudiant qui a une température supérieure à 38 a de la fièvre

A4: Ali tousse et a une température supérieure à 38

B: Ali ne doit pas venir en cours

Peut-on établir B à partir de A1, A2, A3 et A4 (utiliser la résolution)?

Prédicats

grippe(x) : x a la grippe

pasvenir(x) : x ne doit pas venir en cours

fievre(x) : x a de la fièvre

tousse(x) : x tousse

temp(x,t) : x a la température t

sup(t,T) : t est supérieure à T

Modélisation

A1: $\forall x\ (grippe(x) \Rightarrow pasvenir(x))$

A2: $\forall x\ ((fievre(x) \wedge tousse(x)) \Rightarrow grippe(x))$

A3: $\forall x\ \forall t\ ((temp(x,t) \wedge sup(t,38)) \Rightarrow fievre(x))$

A4: $tousse(Ali) \wedge \exists t\ (temp(Ali,t) \wedge sup(t,38))$

B: $pasvenir(Ali)$ $\neg B = \neg pasvenir(Ali)$

$\{A1,A2,A3,A4,\neg B\}$ a un modèle ou pas ?