Exercice

$(F \rightarrow G)$, $(G \rightarrow H)$ |-- $(F \rightarrow H)$

F1 : $(F \rightarrow G)$
F2 : $(G \rightarrow H)$
F3 : $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$ (SA2)
F4 : $(G \rightarrow H) \rightarrow (F \rightarrow (G \rightarrow H))$ (SA1)
F5 : $F \rightarrow (G \rightarrow H)$ m.p. F2 et F4
F6 : $(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)$ m.p. F3 et F5
F7 : $(F \rightarrow H)$ m.p. F1 et F6

F0: $(G \Rightarrow H)$ hypothèse

F1: $((G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow (G \Rightarrow H)))$ SA1

F2: $(F \Rightarrow (G \Rightarrow H))$ m.p à partir de F0 et F1

F3: $((F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)))$ SA2

F4: $((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$ m.p à partir de F2 ET F3

F5: $(F \Rightarrow G)$ hypothèse

F6: $(F \Rightarrow H)$ m.p à partir de F4 et F5

(F->G),(G->H)|—(F->H) ssi. (F->G),(G->H),F|--H

f1 :(F->G). hypothèse
f2 :(G->H) hypothèse
f3: F hypothèse
f4: G en appliquant m.p à f1. Et. f3
f5 : H. en appliquant m.p à f2,f4

CALCUL PROPOSITIONNEL

SÉMANTIQUE

- La logique des propositions s'intéresse à des énoncés qui peuvent être soit vrais soit faux, ainsi qu'aux rapports entre ces énoncés
- Interpréter une proposition consiste à lui attribuer une valeur logique V (pour vrai) ou F (pour faux)
- On appelle interprétation de F toute application :

$i : \{p_0, p_1, \ldots\ldots, p_n, \ldots\ldots\} \rightarrow \{V,F\}$

- En logique propositionnelle, les tables de vérité établissent la relation entre la syntaxe (i.e. les phrases) et la sémantique (i.e. leur signification)

CALCUL PROPOSITIONNEL

SÉMANTIQUE

➢ Les tables de vérité sont le moyen de calculer la valeur de n'importe quelle proposition étant données les interprétations de chaque proposition atomique qui la compose

$\rceil B \rightarrow (B \rightarrow C) \quad B \vee (B \rightarrow C)$

P	¬P	Q	P ^ Q	P v Q	P → Q	P ↔ Q
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V

CALCUL PROPOSITIONNEL

MODELES

➢Un modèle d'une formule f est une interprétation i telle que i(f)=V

➢Il peut exister zéro, un ou plusieurs modèles pour une formule donnée $\neg P \wedge P$ $\neg P \vee P$

➢Un modèle d'un ensemble G={g_1, g_2, … , g_k} de formules est une interprétation qui rend vraie chaque formule g_1, g_2, … , g_k de G

➢S'il existe au moins un modèle de F on dit que F est satisfiable sinon il est inconsistant

CALCUL PROPOSITIONNEL

Tautologies

➢Les tautologies sont des formules vraies quelle que soit l'interprétation

Exemple : P v (⌉P)

➢Les tautologies sont des vérités universelles qui ne dépendent pas de l'état du monde

➢Une tautologie a la valeur varie pour toutes les lignes de sa table de vérité

CALCUL PROPOSITIONNEL

Équivalences

➢ Deux formules sont équivalentes si pour toute interprétation elles prennent les mêmes valeurs de vérité.

➢ Les équivalences sont utiles pour simplifier les formules logiques, quelques soient les valeurs (vrai ou faux) des propositions.

A ^ ˥A équivaut à faux

A v ˥A équivaut à vrai

˥(˥A) équivaut à A

CALCUL PROPOSITIONNEL

Équivalences

A^A équivaut à A

AvA équivaut à A

A ^ (B^C) équivaut à (A^B)^C

A v (BvC) équivaut à (Av B)vC

A^B équivaut à B^A

AvB équivaut à BvA

(A^B)vC équivaut à (AvC) ^ (BvC)

(AvB)^C équivaut à (A^C)v(B^C)

CALCUL PROPOSITIONNEL

Équivalences

$\rceil(A \wedge B)$ équivaut à $\rceil A \vee \rceil B$

$\rceil(A \vee B)$ équivaut à $\rceil A \wedge \rceil B$

$A \rightarrow B$ équivaut à $\rceil A \vee B$

$A \leftrightarrow B$ équivaut à $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$(\rceil A \vee B) \wedge (\rceil B \vee A)$

- Ces équivalences permettent d'effectuer toutes sortes d'opérations sur les propositions.
- Toute proposition P est équivalente à une proposition P' ne contenant ni $\rightarrow$ ni $\leftrightarrow$

CALCUL PROPOSITIONNEL

Terminologie

- On appelle tautologie toute formule A telle que pour toute interprétation i : i(A)=V , on note alors |== A

- B est conséquence de l'ensemble des formules $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, si à chaque fois que i(a) vrai pour tout a de $\mathcal{A}$, i(B) est vrai. On note $\mathcal{A}$ |== B

- B est conséquence de A, si à chaque fois que i(A) vrai i(B) est vrai. On note : A |== B

- Deux formules A et B sont équivalentes ssi A|== B et B|==A . On note : A $\equiv$ B

- Une formule A est inconsistante ou insatisfiable si pour toute interprétation i on a i(A) =F

CALCUL PROPOSITIONNEL

Propositions

Proposition 4:

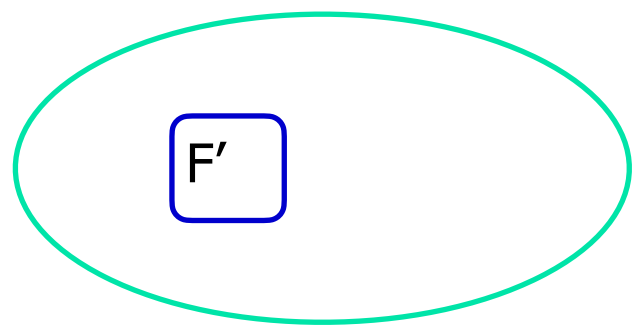
A C B

Soit A une formule

Si |-- A (i.e. théorème) alors |== A(tautologie)

Proposition 5 (théorème de complétude):

F infini



Soit A une formule

Si |== A alors |-- A

Proposition 6 (théorème de compacité) :

Soit F un ensemble de formules de $\mathcal{F}$

Si toute famille finie F’ ⊂ F est satisfiable, alors F est satisfiable

AVANTAGES / DÉSAVANTAGES DE LA LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

- La validité syntaxique est équivalente à la validité sémantique
- La logique propositionnelle a un pouvoir de représentation très limité

Ex: On ne peut pas dire que "tous les pays sont jolis"

Exercices

On raisonne par récurrence sur la longueur de la déduction qui donne A

1. n=1 A est un axiome donc tautologie
2. On suppose le résultat vrai pour n'importe quelle longueur de déduction k<n et on le montre pour k=n

F1: …

F2 : …

Fn-1 : ….

Fn : A

Il y a deux cas : soit A est un axiome donc tautologie

Soit A obtenu par modus ponens sur une formule B et B→A placées avant A donc de longueur k<n

Donc |-- B et |-- (B→A) de longueur de déduction k<n.

D'où |== B et |== (B→A) par la suite |== A

Exercices

<u>Ex</u> : Montrer que l'ensemble des théorèmes du calcul propositionnel est récursif

<u>Ex</u> : Montrer que pour toutes formules B_1, B_2, ….., B_n, A de $\mathcal{F}$

$B_1, B_2, \ldots, B_n \models A$ ssi $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A$

<u>Ex</u> : Soient B, C deux formules du calcul propositionnel P

a- Montrer que $\rceil B \to (B \to C)$ est un théorème

b- Si A_0 et $\rceil A_0$ sont des axiomes, que vaut l'ensemble T_P ?

<u>Ex</u> : Soient F un ensemble de formules de $\mathcal{F}$ et B une formule qcq

Si $F \models B$ alors $\exists F' \subset F$, F' fini tel que $F' \models B$

<u>Ex</u> : Soit S le système formel obtenu à partir du calcul proportionnel en remplaçant les (SAi) par (SA') : $((A\to B) \to (A\to A))$

Déterminer l'ensemble des théorèmes de S

Exercices

<u>Ex</u> : Montrer que l'ensemble des théorèmes du calcul propositionnel est récursif

Soit A une fbf, on doit mettre en évidence un programme qui au bout d'un temps fini indique : si A est théorème ou pas
Il suffit de prouver qu'il existe un programme qui , au bout d'un temps fini, indique que A tautologie ou pas (car |-- A ssi |== A)
1- repérer les variables propositionnelles p'1 ………… p'n qui interviennent dans A
2- pour chacune des 2puissance n interprétations possibles de p'1 ……..p'n non calcule i(A)
3-si à chaque fois on a obtenu i(A)=V alors A est tautologie donc théorème sinon A n'est pas une tautologie donc n'est pas un théorème

Ex : Montrer que pour toutes formules $B_1, B_2, \ldots, B_n, A$ de $\mathcal{F}$

$B_1, B_2, \ldots, B_n \models A$ ssi $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A$

On a : $\models (A \rightarrow B)$ ssi $A \models B$

$B_1, B_2, \ldots, B_n \models A$ ssi

$B_1, B_2, \ldots, B_{n-1} \models (B_n \rightarrow A)$ ssi

$B_1, B_2, \ldots, B_{n-2} \models (B_{n-1} \rightarrow (B_n \rightarrow A))$

$\models (B_1 \rightarrow (B_2 \quad \rightarrow (B_n \rightarrow A) \ldots)$ ssi

$\vdash (B_1 \rightarrow (B_2 \quad \rightarrow (B_n \rightarrow A) \ldots)$

$B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A$

Exercices

<u>Ex</u> : Soient B, C deux formules du calcul propositionnel P

a- Montrer que $\rceil B \rightarrow (B \rightarrow C)$ est un théorème

b- Si A_0 et $\rceil A_0$ sont des axiomes, que vaut l'ensemble des théorèmes ?

$\vdash \rceil B \rightarrow (B \rightarrow C)$?

ssi

$\rceil B \vdash (B \rightarrow C)$?

f1 : $\rceil B$ (hypothèse)

f2 : $(\rceil B \rightarrow (\rceil C \rightarrow \rceil B))$ (SA1)

f3 : $\rceil C \rightarrow \rceil B$ m.p. sur f1 et f2

f4 : $(\rceil C \rightarrow \rceil B) \rightarrow (B \rightarrow C)$ (SA3)

f5 : $B \rightarrow C$ m.p. f3 et f4

$B \vee (B \rightarrow C)$

$B \vee (\neg B \vee C)$

$(B \vee \neg B) \vee C$

ET $B \vee \neg B$ est une tautologie

Donc c'est une tautologie

Exercice

b- Si A_0 et $\rceil A_0$ sont des axiomes, que vaut l'ensemble des théorèmes T_S?

$$T_S = \mathcal{F}$$

Soit C une formule quelconque de $\mathcal{F}$

A-t-on |-- C ?

f1 :	$\rceil A_0$	axiome
f2 :	$(\rceil A_0 \rightarrow (\rceil C \rightarrow \rceil A_0))$	(SA1)
f3 :	$\rceil C \rightarrow \rceil A_0$	m.p. sur f1 et f2
f4 :	$(\rceil C \rightarrow \rceil A_0) \rightarrow (A_0 \rightarrow C)$	(SA3)
f5 :	$A_0 \rightarrow C$	m.p. f3 et f4
f6 :	A_0	axiome
f7 :	C	m.p. f5 et f6

Proposition 6 (théorème de compacité) :

Soit F un ensemble de formules de $\mathcal{F}$
Si toute famille finie $F' \subset F$ est satisfiable, alors F est satisfiable

Soient F un ensemble de formules de $\mathcal{F}$ et B une formule qcq
Si $F \models B$ alors $\exists F' \subset F$, F' fini tel que $F' \models B$

Si $\mathcal{F} \models B$ signifie qu'il n'existe pas d'interprétation i tq :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{F} \quad i[A]=V \text{ et } i[\neg B]=V.$$

D'après le théorème de compacité appliqué à $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$, il existe donc

$G \subset \mathcal{F} \cup \{\neg B\}$, G fini tel qu'il n'existe pas d'interprétation i vérifiant

$\forall A \in G \; i(A)=V$.

G peut s'écrire $F' \cup \{\neg B\}$, avec $F' \subset F$ et F' fini.

Par construction, il n'existe pas d'interprétation i telle que :

$$\forall A \in F' \quad i[A]=V \text{ et } i[\neg B]=V.$$

Donc $F' \models B$

Soit S le système formel obtenu à partir du calcul proportionnel en remplaçant

les (SAi) par (SA’) : $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A))$

Déterminer l’ensemble des théorèmes de S

Soit S le système formel obtenu à partir du calcul proportionnel en remplaçant les (SAi) par (SA’) : $((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow A))$
Déterminer l’ensemble des théorèmes de S

(SA’) : $((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow A))$
$\mathcal{R}$ = {m.p.}
m.p. : a , (a→b) |-- b

~~$SA_1 : (A \rightarrow (B \rightarrow A))$~~
~~$SA_2 : ((A\rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B)\rightarrow(A \rightarrow C)))$~~
~~$SA_3 : ((\rceil A \rightarrow \rceil B) \rightarrow (B \rightarrow A))$~~

f1 : $((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow A))$ axiome

f2 : $\underbrace{((A\rightarrow B)}_{a}\rightarrow\underbrace{(A\rightarrow A))}_{b}\rightarrow\underbrace{((A\rightarrow B)}_{a}\rightarrow\underbrace{(A\rightarrow B))}_{a}$

(a → b) →(a → a)

f3 : $((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B))$ m.p. sur f1 et f2

$T_S = \{((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow A))\} \cup \{((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B))\}$

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

Vers la logique des prédicats

les propositions atomiques sont en général composées d'objets (ce dont on parle) et d'un prédicat (ce qu'on en dit).

Exemple:

"l'examen est facile", le prédicat **est-facile** s'applique à l'objet examen

"Ali aime la logique", le prédicat **aime** s'applique à Ali et logique.

Ceci peut être réécrit de la manière suivante :

est-facile(Examen) et **aime**(Ali, logique).

La forme habituelle est :

nom_prédicat(objet1, objet2, ...).

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

Variables

L'introduction de variables permet de formuler des énoncés universels dans lesquels les variables représentent tous les objets d'un domaine. On utilise pour cela les quantificateurs : $\forall$(pour tout) et $\exists$ (il existe).

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

Quantificateurs

Quantificateur universel

- Vrai si et seulement si toutes les phrases sont vraies.
- $\forall x$ P est vrai si P est vrai pour tous les objets x

Tous les chats sont des mammifères:

$$\forall x\ Chat(x) \rightarrow Mammifère\ (x)$$

Tous en classe sont intelligents:

$$\forall\ x\ \ En(x,Classe) \rightarrow Intelligent\ (x)$$

Quantificateur existentiel

- Vrai si certains des énoncés sont vrais.
- $\exists$ x P est vrai si P est vrai pour certains des objets dans l'univers.

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

Propriétés des Quantificateurs

Un quantificateur peut être exprimé en utilisant l'autre.

$\forall$ x P $\Leftrightarrow$ $\neg$ $\exists$ x $\neg$P $\exists$ x P $\Leftrightarrow$ $\neg$ $\forall$ x $\neg$P

Exemples :

$\forall$ x Aime(x,Fruit) $\Leftrightarrow$ $\neg$ $\exists$ x $\neg$Aime(x,Fruit)

$\exists$x Aime(x,Viande) $\Leftrightarrow$$\neg$ $\forall$x $\neg$Aime(x,Viande)

Le père de Ali est Omar

Père(Ali) = Omar

Ahmed a au moins deux frères :

$\exists$ x,y Frère(x,Ahmed) ^ Frère(y,Ahmed) ^ (x$\neq$y)

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

Eléments de base (alphabet Σ_{pr}).

L'alphabet de la logique des prédicats est constitué des ensembles dénombrables disjoints :

V , C, F_j ($j \in N^*$), P_j ($j \in N$)

Les éléments de V sont appelés variables et notées x, y, z, x_1, x_2,...

Les éléments de C sont appelés constantes et notées a, b, c, d_1, ...

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

- Les éléments de $P_j (j \in N)$ sont appelés symboles relationnels j-aires (ou symboles de prédicats j-aires) et notés p, q, r, s_1, ….
- Les éléments de F_j $(j \in N^*)$ sont appelés symboles fonctionnels j-aires et sont notés par les lettres f, g, h, h_1, …

Et aussi :

- les quantificateurs $\forall$ $\exists$
- Les connecteurs $\rceil$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ ainsi que les parenthèses de la logique propositionnelle

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

Terme: L'ensemble des termes Terme est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que :

- toute variable est un terme
- toute constante est un terme
- $f(t_1,\ldots,t_n)$ est un terme si f est une fonction à n arguments et $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

<u>Définition (Atome) :</u> Si p est un prédicat à n arguments et $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes alors $p(t_1,\ldots,t_n)$ est une formule atomique ou atome

<u>Définition (Les Formules) :</u> L'ensemble F_{pr} des formules (fbf) de la logique des prédicats du 1er ordre est le plus petit ensemble défini sur l'alphabet :

Atome $\subset F_{pr}$

Si $A \in F_{pr}$, $B \in F_{pr}$, $x \in V$ alors

$\rceil A \in F_{pr}$, $(A \rightarrow B) \in F_{pr}$, $\forall\, x\, A \in F_{pr}$

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

Remarques :

$\exists x A$ représente $\rceil \forall x \rceil A$

$(A \vee B)$ représente $\rceil A \rightarrow B$

$(A \wedge B)$ représente $\rceil (A \rightarrow \rceil B)$

$(A \leftrightarrow B)$ représente $\rceil ((A \rightarrow B) \rightarrow \rceil (B \rightarrow A))$

LANGAGE

Variables libres, variables liées

Dans les formules $(\forall x\ A)$ et $(\exists x\ A)$, A est appelé la portée ou champ du quantificateur.

Une occurrence d'une variable est libre si elle n'est dans la portée d'aucun quantificateur. Sinon elle est liée.

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

l'ensemble des variables liées varliée(A) d'une formule A peut être défini de manière récurrente comme suit :

- Si A $\in$ Atome varliée(A) = $\emptyset$
- Si A est de la forme (B$\rightarrow$ C) :

  varliée(A) =varliée(B) $\cup$ varliée(C)
- Si A est de la forme $\rceil$B :

  varliée (A) = varliee(B)
- Si A est de la forme $\forall$xB :

  varliee(A) = varliee(B) $\cup$ {x}

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

l'ensemble des variables libres varlib (A) d'une formule A peuvent être définis de manière récurrente comme suit :

- Si A Atome : varlib(A) = var(A)
- Si A est de la forme (B→ C) :

  $$\text{varlib}(A) = \text{varlib}(B) \cup \text{varlib}(C)$$

- Si A est de la forme ⌉ B : varlib (A) = varlib(B)
- Si A est de la forme ∀xB : varlib(A) = varlib(B) - {x}

formule fermée, formule ouverte : Une formule est fermée (ou close) si elle ne contient pas de variables libres. Sinon elle est ouverte.

- Si A est de la forme $\forall x B$: $varliee(A) = varliee(B) \cup \{x\}$
- Si A est de la forme $\forall x B$: $varlib(A) = varlib(B) - \{x\}$
- Si A Atome : $varlib(A) = var(A)$
- Si $A \in$ Atome $varliée(A) = \varnothing$

EXEMPLES

$A = (p(f(x,y)) \lor \forall z\, r(a,z)$

$var(A) = ?$

$Varliee(A) = ?$

$Varlib(A) = ?$

$B = (\forall x\, p(x,y,z) \lor \forall \mathbf{z}\, (p(z) \rightarrow r(z)))$

$var(B) = ?$

$Varliee(B) = ?$

$Varlib(B) = ?$

$C = \forall x\, \exists y\, (\overline{p(x,y) \rightarrow \forall z\, r(x,y,z)}^{\,A})$

$var(C) = ?$

$Varliee(C) = ?$

$Varlib(C) = ?$

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

LANGAGE

<u>Définition (renommage et substitution) :</u>

Soit $A(x)$ une formule contenant x comme variable libre ; soit t un terme.

On notera $A(t)$ toute formule obtenue en remplaçant chaque x par t dans la formule $A(x)$, et ceci après avoir changé dans A les noms des variables liées de telle manière à ce que x ne soit plus liée (si x l'était) et que plus aucune variable de t ne soit liée (s'il y en avait)

Lorsque $x \notin varlib(A)$ on convient que $A=A(x)=A(t)$

<u>Exemple</u> : $(A(x) = p(x) \vee \forall y \, \exists x \, r(x,y))$ et $t = f(y,u)$

$p(x) \vee \forall y \, \exists x \, r(x,y)$ $p(x) \vee \forall y1 \, \exists x1 \, r(x1,y1)$ $p(f(y,u)) \vee \forall y1 \, \exists x1 \, r(x1,y1)$

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

SYSTÈME FORMEL

On appelle système formel des prédicats du 1er ordre le système défini par :

♦ $\Sigma_{pr} = V \cup C \cup (\cup Fj) \cup (\cup Pj) \cup \{(,)\} \cup \{,\} \cup \{\rceil, \forall, \rightarrow\}$

♦ F_{pr} : ensemble des fbf

♦ R = {m.p., g.}

m.p.(modus ponens) : $A \text{ , } (A \rightarrow B) \mid\!-\!- B$

g. (généralisation) : $A \mid\!-\!- \forall x\ A$

pour toute formule A, B de F_{pr} et pour toute variable x

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

SYSTÈME FORMEL

♦ A_{pr} = ensemble de toutes les formules de l'une des formes suivantes :

SA_1 : $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

SA_2 : $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

SA_3 : $((\rceil A \rightarrow \rceil B) \rightarrow (B \rightarrow A))$

SA_4 : $(\forall x\, A(x) \rightarrow A(t))$

SA_5 : $((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow \forall x\, B))$

où A,B, C sont des formules quelconques de F_{pr}, x une variable, t un terme et D une formule n'ayant pas x pour variable libre

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

EXERCICES

A-t-on ?

$\forall x \, \forall y \; p(x,y) \;|\text{--}\; \forall z \; p(z,z)$

$\forall x \; A(x) \;|\text{--}\; \forall y \; A(y)$

$\forall x \; A(x) \;|\text{--}\; \exists y \; A(y)$

CALCUL DES PREDICATS DU 1er ORDRE

EXERCICES

A-t-on ? $\forall x \forall y\, p(x,y) \mid\!-\!- \forall z\, p(z,z)$

F1 : $\forall x \forall y\, p(x,y)$ hypothèse

F2 : $(\forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow \forall y\, p(z,y))$ SA4

F3 : $\forall y\, p(z,y)$ m.p. sur f1 et f2

F4 : $\forall y\, p(z,y) \rightarrow p(z,z)$ SA4

F5 : $p(z,z)$ m.p. sur f3 et f4

F6 : $\forall z\, p(z,z)$ g.

F0: $\forall x \forall y\, p(x,y)$ hypothèse

F1 : $\forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow p(z,z)$ sa4

F2 : $(\forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow p(z,z)) \rightarrow \forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow \forall z\, p(z,z)$ sa5

f3 : $\forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow \forall z\, p(z,z)$ mp sur f1 et f2

F4 $\forall z\, p(z,z)$ mp sur f3 et l'hypothese