PROBABILITES

A. DAOUI

19 mars 2013

Introduction

Considérons les événements :
"Le problème palestinien sera résolu"
"Avoir un 2 en lançant un dé"
La réalisation du premier événement ne se base sur aucun élément objectif, alors que celle du second peut être cernée et expliquée par des éléments scientifiques objectifs.
Une théorie quantitative de la notion de probabilité ne doit considérer que des cas où il existe des probabilités objectives ; c.à.d. qui ne dépend pas de convictions personnelles mais de considérations quantitatives permettant de cerner le hasard.
L'échelle des probabilités s'étale de 0 à 1.

Expérience aléatoire

Phénomènes aléatoires - Espace probabilisable.
IL s'agit d'un processus dans lequel intervient le hasard ; c.à.d. une expérience telle que le résultat exact est inconnu mais l'ensemble de tous les résultats possibles est connu.

Exemples

Lancer un dé et observer le nombre obtenu.
Déterminer la composition d'une famille de 3 enfants selon le sexe.
Recueillir la taille d'une personne choisie au hasard au sein d'un groupe.
Déterminer la durée de vie d'un certain composé électronique.

Espace de probabilité ou univers

On appelle *espace échantillonnal* ou de *probabilité* ou *univers* l'ensemble de tous les résultats possibles ou *éventualités* d'une expérience aléatoire. On note souvent cet ensemble par Ω.

Exemple

On reprenant les exemples précédents, on a :

- $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\Omega_2 = \{fff, ffg, fgf, gff, fgg, gfg, ggf, ggg\}$
- $\Omega_3 = [0.50m, 2.30m]$
- $\Omega_4 = [0, +\infty[$

Evénement - Espace probabilisable

Un événement relié à une expérience aléatoire est une partie de Ω.
On note habituellement A, B, C, E, F.

Exemple

On lance un dé. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Soit l'événement A : "obtenir un résultat pair" $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
- L'événement impossible correspond à la partie vide $\emptyset \subset \Omega$.
- L'événement certain correspond à la partie pleine Ω

Remarque

La théorie des probabilités se fait correctement à partir de la théorie des ensembles.
Le tableau suivant donne la correspondance entre le langage probabiliste et la e langage ensembliste

Langage ensembliste	**Langage probabiliste**
$x \in \Omega$	x est une éventualité
$\{x\}$ est un singleton	$\{x\}$ est un événement simple ou él
$A \subset \Omega$	A est un événement
$\emptyset$: ensemble vide	Evénement impossible
Ω : partie pleine	Evénement certain
$A \cap B$: intersection de A et B	Réalisation simultanée des événeme
$A \cap B = \emptyset$: A et B disjoints	A et B sont incompatibles ou mutu
$\overline{A}$ ou A^C : complémentaire de A	Evénement contraire de A
$A \cup B$: réunion de A et B	Réalisation de A ou B (au moins l'u
$A \setminus B$: différence ensembliste	Réalisation de A sans B

On appelle *permutation* sans répétitions de n objets le fait de les présenter dans un certain ordre.
Le nombre de ces permutations est :
$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ (n factoriel)

Exemple de permutations

Le nombre de façons d'installer 20 passagers dans un bus de 20 places est $20! =$

Arrangements sans répétitions (tirage successif sans remise)

On appelle *arrangement sans répétitions* de p objets parmi n objets ($p \leq n$) le fait de choisir p objets parmi les n et de les présenter dans un certain ordre.
Le nombre de ces arrangements est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

On décerne 3médailles (différentes) aux 3 premiers d'une course de 8 partants.
De combien de façons peut-on le faire ?
$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

Arrangements avec répétitions (tirage successif avec remise)

On appelle *arrangement avec répétitions* de p objets parmi n toute disposition ordonnée de p objets choisis parmi les n où chacun des n objets peut figurer jusqu'à p fois (on peut avoir $p > n$)
Le nombre de ces arrangements est : $\alpha_n^p = n^p$

Exemple

On demande à 3 personnes successivement de donner leur jour de semaine de naissance.
Le nombre de dispositions possibles est 7^4

Combinaisons (tirage simultané)

On appelle *combinaison* de p objets parmi n le fait de choisir p objets parmi les n.
Le nombre de ces combinaisons est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Si A est un événement dans le cadre d'une expérience aléatoire alors la probabilité de réalisation de A notée $p(A)$ est égale au rapport du nombre des cas favorables à A sur le nombre total des éventualités. On a :

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

N.B. : Cette définition n'a un sens que si toutes les éventualités ont la même chance ($\frac{1}{card\Omega}$) d'avoir lieu. Cette hypothèse est appelée hypothèse d'équiprobabilité.

Exemple

Un sac contient 5 boules (3 noires et 2 blanches)

- On en tire une au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire.
- On en tire deux en même temps. Soit E l'événement "obtenir deux boules noires", calculer $p(E)$.

Définition mathématique - Axiomes

La notion de probabilité au sens de cPascal vérifie les propriétés ou les *axiomes* suivants :

- **Axiome 1 :** $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$, pour tout $A \subseteq \Omega$.
- **Axiome 2** : $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$
- **Axiome 3** : Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
  En général : $p(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(A_i)$ si les événements A_i sont 2 à 2 incompatibles.

Mathématiquement, on peut définir une probabilité comme une application :
$p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, vérifiant les 3 axiomes précédents.

Propriétés :

- Si $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de l'événement A alors $p(A) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i)$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \cap \overline{B}) = p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exercice

Montrer que $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

Probabilité conditionnelle

On est souvent amené à déterminer la probabilité de réalisation d'un événement A par rapport à un événement B plus restreint que Ω. Cette probabilité est appelée probabilité de réalisation de A par rapport à B ou probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé. On note :

$$p_B(A) = p(A/B) = \frac{card(A \cap B)}{card(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Exemple

On considère une classe de 25 garçons et 15 filles. Parmi les garçons, 10 portent des lunettes et on en compte 5 parmi les filles. On choisit un étudiant de cette classe au hasard. Notons les événements ci-dessus G,F et L et donnons la probabilité qu'il s'agisse

- d'un garçon : $p(G) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$
- d'une fille qui porte des lunettes : $p(F \cap L) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$
- d'une fille sachant qu'elle porte des lunettes. C'est la probabilité conditionnelle $p(F/L) = \frac{card(F \cap L)}{card(L)} = \frac{5}{15}$
- d'un garçon s'il porte des lunettes :
  $p(G/L) = \frac{card(G \cap L)}{card(L)} = \frac{10}{15}$
- d'un étudiant portant de lunettes sachant que c'est un garçon :

$p(L/G) = \frac{card(G \cap L)}{card(G)} = \frac{5}{25}$

Probabilités successives - Evénements indépendants

Comme conséquence de la définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$p(A \cap B) = p(A/B).p(B) = p(B/A).p(A)$$

Cette formule est dite des probabilités successives.

Evénements indépendants

Les événements A et B seront dits indépendants lorsque la réalisation de A est indépendante de celle de B (*et à forciori celle de* A *est indépendante de celle de* B) ; c.à.d. $p(A/B) = p(A)$ (*et forcément* $p(B/A) = p(B)$). Notons que ceci est équivalent, d'après la formule des probabilités successives, à : $p(A \cap B) = p(A).p(B)$

Formule des probabilités totales

Soit $E \subset \Omega$, un événement et $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet (ou une partition de Ω). Alors

$$p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E/A_i).p(A_i)$$

Exemple

Dans une ville des U.S.A., les républicains ont recueilli 53% des suffrages exprimés lors des dernières élections, les démocrates 45% et les indépendants 2%. Il est connu que des républicains, des démocrates et des indépendants sont en faveur d'un certain projet de loi. Si l'on choisit une personne au hasard dans cette ville, quelle est la probabilité qu'elle soit en faveur du projet de loi ?

Formule de Bayes

Sous les mêmes conditition que le paragraphe précédent, on a :

$$p(A_i / E) = \frac{p(E \cap A_i)}{p(E)} = \frac{p(E / A_i).p(A_i)}{p(E)}$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, donner la probabilité que la personne choisie soit républicaine si elle est en faveur du projet de loi.