VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

A. DAOUI

24 mars 2014

- **Définition** : Lorsqu'on associe à chaque éventualité k d'une expérience aléatoire, un nombre réel noté $X(k)$ ou X_k, on dit qu'on aconstruit une variable aléatoire (on notera dans la suite par v.a.) X ; une v.a. est donc une application associée à une expérience aléatoire : $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

- **Définition** : Lorsqu'on associe à chaque éventualité k d'une expérience aléatoire, un nombre réel noté $X(k)$ ou X_k, on dit qu'on aconstruit une variable aléatoire (on notera dans la suite par v.a.) X ; une v.a. est donc une application associée à une expérience aléatoire : $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'ensemble des valeurs prises par une v.a. X sera noté $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$

Définition :Une v.a. X sera dite discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
Lorsque la v.a. X peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, on dira que X est continue.

Exemple

On lance un dé normal et on associe à chaque résultat possible un certain "Gain".

$1 \mapsto 10$ Dh
$2 \mapsto -20$ Dh
$3 \mapsto 30$ Dh
$4 \mapsto -30$ Dh
$5 \mapsto -20$ Dh
$6 \mapsto 30$ Dh

$$X(\Omega) = \{-30, -20, 10, 30\}$$

Loi de probabilité

Lorsqu'on associe à chaque valeur X_k de la v.a. X la probabilité $p_k = p(X = X_k)$, on dit qu'on a construit la loi de probabilité de la v.a. X.
La loi de probabilité d'une v.a. X vérifie les propriétés suivantes :

- $0 \leq p_k \leq 1$
- $\sum\limits_k p_k = 1$

Exemple

Cas du dé

X_k	-30	-20	10	30	$\sum$
$p(X = X_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

$p(X = 10) = p(\{1\}) = \frac{1}{6}$
$p(X = 30) = p(\{3, 6\}) = \frac{1}{3}$

Exercice

On dispose d'une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires.
Expérience aléatoire : "Tirer simultanément 4 boules de l'urne"
Variable aléatoire $X =$ " Nombre de boules blanches tirées"
Donner la loi de probabilité de X

Fonction de répartition

La fonction de répartition de la v.a. X est la fonction des probabilités cumulées croissantes définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = p(X < x) = \sum_{X_k < x} p(X = X_k)$$

Propriétés de la fonction de répartition

- $F(x) \in [0;1]\,, \forall x \in \mathbb{R}$
- F est continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ et possède un nombre dénomrable de discontinuités.
- F est une fonction croissante.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \;\; ; \;\; \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Intérêt de la fonction de répartition

La connaissance de la fonction de répartition permet de déterminer la loi de probabilité d'une v.a. discrète X.
en effet $X(\Omega) = \{x_k, x_k$ point de discontinuité de $F\}$
et $p(X = x_k) = F(x_k^+) - F(x_k^-)$
De plus : Tous les calculs de probabilité concernant la v.a. X peuvent être traités à l'aide de la fonction de répartition ; on a

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, \ a < b, \ p(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une V.A. $X = x_1, x_2, ..., x_n$ n'est autre que la moyenne arithmétique des valeurs de X pondérées de leur probablités de réalisation.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(X = x_i)$$

On note aussi m ou μ ou λ.

Interprétation

L'espérance mathématique consititue le meilleur paramètre de position ; elle renseigne sur l'ordre de grandeur des valeurs prises par une v.a. ; c'est la valeur moyenne ou baycentre de ces valeurs.

Le gain espéré ou la moyenne des gains est :

$E(X) = (-30.\frac{1}{6}) + (-20.\frac{1}{3}) + (10.\frac{1}{6}) + (30.\frac{1}{3}) = 0$ Dh

Propriétés

- Si $Z = aX + b$, alors $E(Z) = aE(X) + b$

Propriétés

- Si $Z = aX + b$, alors $E(Z) = aE(X) + b$
- Si $Z = X + Y$, alors $E(Z) = E(X) + E(Y)$

Propriétés

- Si $Z = aX + b$, alors $E(Z) = aE(X) + b$
- Si $Z = X + Y$, alors $E(Z) = E(X) + E(Y)$
- Si φ est une application réelle alors
  $E(\varphi(X)) = \sum \varphi(x_i).P(X = x_i)$

Variance et écart-type

Soit $X = x_1, x_2, ..., x_n$ une V.A.
La variance de X mesure l'écart quadratique moyen des valeurs de X par rapport à $E(X)$.

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 . P(X = x_i)$$

Propriétés

- On démontre que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

avec :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i)$$

Propriétés

- On démontre que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

avec :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.P(X = x_i)$$

- L'ecart-type noté σ ou $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. L'écart-type mesure l'écart moyen entre les valeurs de X et leur moyenne ; il est donné dans l'unité de X. La variance (ou l'écart-type) mesure donc la dispersion ou la variabilité des valeurs prises par X.

Propriétés

- On démontre que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

avec :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i)$$

- L'ecart-type noté σ ou $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. L'écart-type mesure l'écart moyen entre les valeurs de X et leur moyenne ; il est donné dans l'unité de X. La variance (ou l'écart-type) mesure donc la dispersion ou la variabilité des valeurs prises par X.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Propriétés

- On démontre que :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

avec :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i)$$

- L'ecart-type noté σ ou $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. L'écart-type mesure l'écart moyen entre les valeurs de X et leur moyenne ; il est donné dans l'unité de X. La variance (ou l'écart-type) mesure donc la dispersion ou la variabilité des valeurs prises par X.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- Si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Exemple

Cas du dé

- $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i) - E(X)^2$

$V(X) = (900.\frac{1}{6}) + (400.\frac{1}{3}) + (100.\frac{1}{6}) + (900.\frac{1}{3}) - 0$
$V(X) = 300$

Exemple

Cas du dé

- $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.P(X = x_i) - E(X)^2$

$V(X) = (900.\frac{1}{6}) + (400.\frac{1}{3}) + (100.\frac{1}{6}) + (900.\frac{1}{3}) - 0$
$V(X) = 300$

- $\sigma(X) = 17,32$ Dh

Une variable aléatoire X est dite suivre une loi de Bernouilli si elle est associée à une expérience aléatoire (dite expérience ou processus de Bernouilli) possédant deux éventualités seulement. L'une appelée succès et notée S avec $p(S) = p$ et l'autre appelée echec et notée$E = \overline{S}$, avec $p(E) = q = 1 - p$.

Exemples

- Pile ou Face

Exemples

- Pile ou Face
- Transformer un tir au but.

X ne peut prendre que les valeurs 1 et 0, c.a.d. $X(S) = 1$ et $X(E) = 0$.
On a : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Loi binômiale

- On répète une expérience de Bernouilli n fois dans les mêmes conditions et on considère la V.A.

$X =$ "nombres de succès obtenus"

On démontre que : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Loi binômiale

- On répète une expérience de Bernouilli n fois dans les mêmes conditions et on considère la V.A.

$X =$ "nombres de succès obtenus"

- Alors X suit une loi binômiale de paramètres n et p $(p = p(S))$. On note $X \rightsquigarrow B(n; p)$.

On démontre que : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Loi binômiale

- On répète une expérience de Bernouilli n fois dans les mêmes conditions et on considère la V.A.

$X =$ "nombres de succès obtenus"

- Alors X suit une loi binômiale de paramètres n et p ($p = p(S)$). On note $X \rightsquigarrow B(n; p)$.
- X est une V.A. discrète pouvant prendre les valeurs $k = 0, 1, 2, ..., n$ avec la loi de probabilité $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

On démontre que : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exemple

- Un joueur de Foot réussit son tir au but avec une probabilité de $\frac{7}{10}$. Il en tire 10.

Exemple

- Un joueur de Foot réussit son tir au but avec une probabilité de $\frac{7}{10}$. Il en tire 10.
- Le nombre de buts réussis $X \rightsquigarrow B(10; \frac{7}{10})$

Exemple

- Un joueur de Foot réussit son tir au but avec une probabilité de $\frac{7}{10}$. Il en tire 10.
- Le nombre de buts réussis $X \rightsquigarrow B(10; \frac{7}{10})$
- La probabolité que ce joueur en réussisse 6 est $p(X = 6) = C_{10}^{6}(0,7)^{6}(0,3)^{4} = 0,2$

Exemple

- Un joueur de Foot réussit son tir au but avec une probabilité de $\frac{7}{10}$. Il en tire 10.
- Le nombre de buts réussis $X \rightsquigarrow B(10; \frac{7}{10})$
- La probabolité que ce joueur en réussisse 6 est $p(X = 6) = C_{10}^{6}(0,7)^{6}(0,3)^{4} = 0,2$
- La probabilité qu'il en réussisse au moins 8 est : $p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$

Loi de Poisson

On dit qu'une V.A. X suit une loi de Poisson si X représente le nombre de réalisations d'un certain phénomène dans un intervalle donné ou dans une région bien déterminée sachant que ce phénomène a lieu en moyenne λ fois (connue) pendant un tel intervalle de temps ou une telle région. De plus ce phénomène doit être rare dans le sens où la probabilité de sa réalisation pendant un "petit" intervalle de temps ou une région "réduite" doit être negligeable. La loi de Poisson est dite loi des phénomènes rares.

Loi de Poisson

- On note $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ (Loi de Poisson de paramètre λ)

Loi de Poisson

- On note $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ (Loi de Poisson de paramètre λ)
- X est alors une V.A. discrète pouvant prendre les valeurs k , $k \in \mathbb{N}$, avec la loi de probabilité :

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

Loi de Poisson

- On note $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ (Loi de Poisson de paramètre λ)
- X est alors une V.A. discrète pouvant prendre les valeurs k , $k \in \mathbb{N}$, avec la loi de probabilité :

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k}}{k!}$$

- On a : $E(X) = V(X) = \lambda.$

Loi de Poisson

- On note $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ (Loi de Poisson de paramètre λ)
- X est alors une V.A. discrète pouvant prendre les valeurs k , $k \in \mathbb{N}$, avec la loi de probabilité :

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

- On a : $E(X) = V(X) = \lambda.$
- Pour différentes valeurs du paramètre λ, la loi de probabilité de P_λ ainsi que sa fonction de répartition sont répertoriées sur des tables.

Exemple

- Supposons qu'en moyenne on compte 5 absents chaque jour pour la section SMP_3

Exemple

- Supposons qu'en moyenne on compte 5 absents chaque jour pour la section SMP_3
- Soit la V.A. $X =$ "Nombre d'absents enregistrés en journée donnée pour SMP_3".

Exemple

- Supposons qu'en moyenne on compte 5 absents chaque jour pour la section SMP_3
- Soit la V.A. $X =$ "Nombre d'absents enregistrés en journée donnée pour SMP_3".
- Alors $X \rightsquigarrow P(5)$.

Exemple

- Supposons qu'en moyenne on compte 5 absents chaque jour pour la section SMP_3
- Soit la V.A. $X =$ "Nombre d'absents enregistrés en journée donnée pour SMP_3".
- Alors $X \rightsquigarrow P(5)$.
- $p(X = 3) = \frac{e^{-5}.5^3}{3!} = 0.1404$

Exemple

- Supposons qu'en moyenne on compte 5 absents chaque jour pour la section SMP_3
- Soit la V.A. $X =$ "Nombre d'absents enregistrés en journée donnée pour SMP_3".
- Alors $X \rightsquigarrow P(5)$.
- $p(X = 3) = \frac{e^{-5}.5^3}{3!} = 0.1404$
- $p(X = 5) = 0.1755$

Exemple

- Supposons qu'en moyenne on compte 5 absents chaque jour pour la section SMP_3
- Soit la V.A. $X =$ "Nombre d'absents enregistrés en journée donnée pour SMP_3".
- Alors $X \rightsquigarrow P(5)$.
- $p(X = 3) = \frac{e^{-5}.5^3}{3!} = 0.1404$
- $p(X = 5) = 0.1755$
- $p(X \geq 12) = p(X \leq 11) = 1 - 0.995 = 0.005$

Approximation d'une loi binômiale par une loi de Poisson

Supposons que $X \rightsquigarrow B(n;p)$. Si X vérifie les conditions de rareté

$$\begin{cases} n \geq 50 \quad et \quad np \leq 5 \\ \quad ou \\ p \leq \frac{1}{10} \quad et \quad np \leq 10 \end{cases}$$

Alors on peut supposer que $X \rightsquigarrow P(\lambda = np)$

Exemple

- Des statistiques récentes montrent que 15 visiteurs sur 1000 de "Marjane" achètent un appareil électroménager.

Exemple

- Des statistiques récentes montrent que 15 visiteurs sur 1000 de "Marjane" achètent un appareil électroménager.
- On considère la V.A. aléatoire :

Exemple

- Des statistiques récentes montrent que 15 visiteurs sur 1000 de "Marjane" achètent un appareil électroménager.
- On considère la V.A. aléatoire :
- $X =$ "Nombre d'acheteurs d'un appareil électroménager dans un échantillon de 600 clients"

Exemple

- Des statistiques récentes montrent que 15 visiteurs sur 1000 de "Marjane" achètent un appareil électroménager.
- On considère la V.A. aléatoire :
- $X = $ "Nombre d'acheteurs d'un appareil électroménager dans un échantillon de 600 clients"
- Alors $X \rightsquigarrow B(1000; 0.015)$, $E(X) = np = 9$ clients

- Calculons $p(X = 6)$ et $p(X \geq 20)$

- Calculons $p(X = 6)$ et $p(X \geq 20)$
- Le calcul à l'aide de la loi binômiale peut s'avérer laborieux (Bon courage ! !). Cependant on peut supposer que $X \rightsquigarrow P(\lambda = np = 9)$ car $p = 0.015 \leq \frac{1}{10}$ et $np = 9 \leq 10$

- Calculons $p(X = 6)$ et $p(X \geq 20)$
- Le calcul à l'aide de la loi binômiale peut s'avérer laborieux (Bon courage ! !). Cependant on peut supposer que $X \rightsquigarrow P(\lambda = np = 9)$ car $p = 0.015 \leq \frac{1}{10}$ et $np = 9 \leq 10$
- En utilisant la table, on a rapidement :
  $p(X = 6) = 0.0911$
  $p(X \geq 20) = p(X \leq 19) = 1 - 1 = 0$

Loi Hypergéométrique

Une urne contient N boules dont N_1 boules blanches et $N_2 = N - N_1$ boules noires.
On en tire successivement n boules avec remise et on considère la V.A. $X =$ "Nombre de boules blanches tirées".

$$\text{Alors } X \rightsquigarrow B(n;p) \quad \text{avec} \quad p = \frac{N_1}{N}.$$

Si maintenant le tirage est effectué simultanément et sans remise alors X suit une loi *hypergéométrique* de paramètres n, N et $p = \frac{N_1}{N}$.
On note $X \rightsquigarrow H(n;N;p)$

Si $X \rightsquigarrow H(n; N; p)$ alors X est une V.A. discrète pouvant prendre les valeurs $k = 0, 1, 2, ..., Min(N_1, n)$ avec la loi de probabilité

$$p(X = k) = \frac{C_{N_1}^{k} . C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$$

De plus on a :

$$E(X) = np$$
$$V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Exemple

150 étudiants sont inscrits en SMA_4 dont 100 garçons.
Pou former un comité, on choisit 9 étudiants au hasard. Donner la probabilité que le comité

1. compte 5 garçons
2. compte une majorité de garçons
3. donner le nombre de garçons qu'on peut éspérer avoir dans un comité

Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

Dans les sondages, la loi hypergéométrique est plus adaptée que la loi binomiale car les tirages sont sans remise. Cependant on peut approcher une loi hypergéométrique par une loi binomiale (plus facile à utiliser) dès que N devient assez grand (on fait $N \longrightarrow \infty$). On estime que l'approximation est bonne dès que le taux de sondage $\frac{n}{N} < 10\%$

Exemple

Population de taille $N = 25\ millions$ dont $N_1 = 15\ millions$ de type 1
$N_2 = 10\ millions$ de type 2

On choisit un échantillon de $n = 1000$ individus.

Comparer les probabilités de choisir un individu de type 1 au 1^{er} et au 1000^{eme} tirage.