Inégalité de Gagliardo-Nirenberg Sobolev

Sous la direction: Mr.Abdallah MAICHINE

Hajar BADRAOUI

Département des Mathematiques
Faculté des sciences Rabat

24 octobre 2023

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Théorème

Supposons $p \in [1, N[$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p et de N telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}\left(\mathbb{R}^N\right)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^N\right)} \quad \text{pour tout } u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^N\right).$$

[1] EVANS, Lawrence C. Partial differential equations. American Mathematical Society, 2022.

Preuve : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

On distingue deux cas :

Cas 1. Si $p = 1$.

Dans ce cas, le conjugué de Sobolev est : $p^* = \frac{N}{N-1}$.

Soit $u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Alors, pour chaque $i = 1, \cdots, N$ et $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N\right) dy_i$$

Alors

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N\right) \right| dy_i \\ &\leq \int_{-\infty}^{x_i} \left\| \nabla u\left(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N\right) \right\| dy_i. \end{aligned}$$

D'où

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \left\| \nabla u\left(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N\right) \right\| dy_i \right)^{1/(N-1)}$$

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Intégrons cette inégalité par rapport à x_1 :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{x_i} \|\nabla u\,(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i \right)^{1/(N-1)} dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{x_1} \|\nabla u\,(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1 \right)^{1/(N-1)}$$

$$\prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\,(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dy_i \right)^{1/(N-1)} dx_1$$

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\left(y_1, x_2, \cdots, x_N\right)\| \, dy_1\right)^{1/(N-1)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\left(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N\right)\| \, dy_i\right)^{1/(N-1)} dx_1$$

Utilisons l'inégalité de Hölder itérée à $(N-1)$ fonctions de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} |h_i| \, dx_1 \leq \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_i|^{p_i} \, dx_1\right)^{1/p_i},$$

on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\left(y_1, x_2, \cdots, x_N\right)\| \, dy_1\right)^{1/(N-1)}$$

$$\prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\left(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N\right)\| \, dy_i dx_1\right)^{1/(N-1)}.$$

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Pour simplifier on pose :

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\,(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1$$

et pour $i = 2, \cdots, N$, on pose :

$$I_i = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\,(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_N)\|\, dx_1 dy_i$$

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Alors, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 \leq \prod_{i=1}^{N} I_i^{1/(N-1)}.$$

Intégrons maintenant ceci par rapport à x_2, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 dx_2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} I_i^{1/(N-1)} dx_2 \\ &= I_2^{1/(N-1)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{N} I_i^{1/(N-1)} dx_2.\end{aligned}$$

Appliquons de nouveau l'inégalité de Hölder itérée, on obtient alors :

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 dx_2 \leq I_2^{1/(N-1)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} I_i dx_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$= I_2^{1/(N-1)} \left(\int_{\mathbb{R}} I_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} I_i dx_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\,(x_1, y_2, x_3, \cdots, x_N)\|\, dx_1 dy_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\,(y_1, x_2, \cdots, x_N)\|\, dy_1 dx_2\right)^{1/(N-1)}$$

$$\prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\,(x_1, x_2, \cdots, y_i, \cdots, x_N)\|\, dx_1 dx_2 dy_i\right)^{1/(N-1)}.$$

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

D'où,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)} dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u(x)\| dx_1 dx_2 \right)^{2/(N-1)}$$

$$\prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla u\left(x_1, x_2, \cdots, y_i, \cdots, x_N\right)\| \, dx_1 dx_2 dy_i \right)^{1/(N-1)}$$

De même, on intègre l'inégalité précédente par rapport à $x_3, \cdots, x_N$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)} dx$$

$$\leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \|\nabla u\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N\right)\| \, dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_N \right)^{1/(N-1)}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u(x)\| dx \right)^{1/(N-1)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u(x)\| dx \right)^{N/(N-1)}$$

Ce qui achève la démonstration pour le cas $p = 1$.

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Cas 2. Si $p \in]1, N[$.
On considère la fonction $|u|^\alpha$ avec $\alpha > 1$.
Alors $|u|^\alpha \in C_c^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ et on a $\nabla\left(|u|^\alpha\right) = \alpha |u|^{\alpha-2} u \nabla u$.
Par suite en utilisant le premier cas pour la nouvelle fonction, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\alpha N/(N-1)} dx\right)^{(N-1)/N} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla\left(|u|^\alpha\right)(x)\right\| dx$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\alpha-1} \|\nabla u\| dx$$

$$\leq \alpha \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p(\alpha-1)/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u\|^p dx\right)^{1/p}.$$

Preuve (suite) : Inégalité de Gagliardo-Nirenberg

Prenons $\alpha = \frac{p(N-1)}{N-p} > 1$, donc $\frac{\alpha N}{N-1} = \frac{p(\alpha-1)}{p-1} = \frac{pN}{N-p} = p^*$.
Ce qui nous donne

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{(N-1)/N-(p-1)/p} \leq \frac{p(N-1)}{N-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Puisque $\frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^*}$, alors :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{p(N-1)}{N-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Références

[1] EVANS, Lawrence C. Partial differential equations. American Mathematical Society, 2022.

Merci pour votre attention