INFIMUM DE SZEGÖ

HAJAR BADRAOUI

À la mémoire des grands mathématiciens Gábor Szegö, Andreï Kolmogorov et Mark Krein, qui ont consacré leur vie à la recherche dans cette discipline passionnante et notamment dans le concept de l'infimum de Szegö.

Résumé. Cet article se concentre sur la définition de l'infimum de Szegö et sur son lien avec la densité de polynômes analytiques et les approximations polynomiales pondérées.

$$\inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2d\mu$$

La théorie est illustrée en utilisant l'espace de Hardy, qui est le seul sous-espace invariant de $L^2(\mathbb{T})$ qui satisfait la propriété de 1-invariance.
Les mots clés : sous-espace z-invariant, espace de Hardy, polynômes analytiques, infimum de Szegö, approximation polynomiale pondérée, processus stationnaire.

1. **Introduction**

L'un des problèmes partiellement résolu qui suscite le plus d'engouement au sein de l'analyse fonctionnelle est celui du sous-espace invariant. Il a pour but de répondre à la problématique : Pour un opérateur borné donné sur un espace de Banach complexe H, peut-on toujours trouver un sous espace fermé non trivial M de H invariant par cet opérateur ? i.e $T(M) \subset M$.
De nombreuses variantes du problème ont été résolues pour une classe particulière d'espaces de Banach mais il reste ouvert pour les espaces de Hilbert séparables. Ce problème semble avoir été énoncé au milieu des années 1900 après les travaux de Von Neumann et Beurling, mais ce dernier mathématicien en 1948 était le premier à avoir l'idée de voir l'opérateur Shift comme un opérateur sur un espace de fonctions analytiques autrement dit sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ où le Shift représente dans cet espace l'opérateur de multiplication par z : $S^*f(z) = zf(z)$ $z \in \mathbb{C}$, ce qui nous permet d'énoncer que E est un sous espace invariant de $H^2(\mathbb{D})$ par l'opérateur Shift si $S^*E = zE \subset E$.
Dans le cadre de l'étude des espaces de Hardy, on trouve la notion de l'infimum de Szegö qui a été introduite par Gábor Szegö en 1915 pour une mesure positive finie absolument continue et qui est depuis lors devenue une notion centrale dans l'analyse harmonique et la théorie des espaces de Hilbert. Au fil des années, de nombreux mathématiciens ont contribué à l'étude de l'infimum de Szegő dans un cadre général, notamment A. Kolmogorov en 1941, M. Krein en 1945.

Date: 17/05/2023.

D'une vue probabiliste, l'infimum de Szegö donne la variance de la meilleure approximation d'une variable aléatoire par les éléments du passé, et d'un autre côté, il nous permet de caractériser la densité des polynômes analytiques dans $L^2(\mu)$.

2. Espaces de Hardy

Définition 2.1. On appelle espace de Hardy du cercle $H^2(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.
L'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions f holomorphes dans $\mathbb{D}$ telles que : $\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty$.

Remarque 2.2. ([1], p :41) On peut identifier les fonctions $f \in H^2(\mathbb{D})$ avec leurs valeurs au bord et écrire : $H^2(\mathbb{T}) = H^2(\mathbb{D}) = H$.

Définition 2.3. Une fonction f de H^2 qui vérifie $|f|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$ est appelée une fonction intérieure. Elle est dite extérieure si $E_f = \overline{vect\{z^n f, n \geq 0\}} = H^2$.

3. Sous espaces z-invariant

Définition 3.1. Un sous-espace E est dit 1-invariant ou simplement invariant (resp 2-invariant ou réduisant) si $zE \subsetneqq E$ (resp $zE = E$).

3.1. Sous-espaces simplement invariant de $L^2(m, \mathbb{T})$.

Théorème 3.2. (A.Beurling-H.Helson, 1946) ([1], p :9)
Soit E un sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$ 1-invariant. Alors, il existe une fonction unimodulaire θ unique à une constante multiplicative près, telle que $E = \theta H^2$.

Démonstration. Pour l'unicité, on suppose que deux fonctions unimodulaires vérifient l'énoncé du théorème et en utilisant le fait que $H^2 \cap \overline{H^2}$ égal à une fonction constante, en outre, pour l'existence on utilise le fait que l'espace est invariant, ce qui nous donne l'existence d'une fonction θ qui est orthogonal à $z^n\theta$ avec le fait que chaque fonction de $L^2(\mathbb{T})$ est développable en série de fourrier, on trouve la norme égal 1. □

Corollaire 3.3. (Théorème de Beurling, 1949)([1], p :10)
$E \neq 0$ est un sous-espace de H^2 vérifiant $zE \subset E$, si et seulement si il existe θ intérieure telle que $E = \theta H^2$.

Démonstration. On appliquant le résultat précédent, il faut que $zE \subsetneqq E$ donc il suffit de prouver $zE \neq E$ qui est équivaut à montrer $\overline{z}E \not\subset E$. (Raisonnons par l'absurde). □

Exemple 3.4. L'espace Hardy H^2 est le seul espace 1-invariant de $L^2(m, \mathbb{T})$. Les théorèmes précédents le montre.

3.2. Sous-espaces réduisant de $L^2(\mu, \mathbb{T})$.

Théorème 3.5. (N. Wiener, 1933)([1], p :8)
Soit $\sigma \subset \mathbb{T}$ une partie mesurable, on note par χ_σ la fonction indicatrice de σ.
E un sous-espace de $L^2(\mu, \mathbb{T})$ 2-invariant si et seulement s'il existe un unique ensemble mesurable $\sigma \subset \mathbb{T}$ tel que :

$$E = \chi_\sigma L^2(\mathbb{T}) = \left\{f \in L^2(\mu) \,:\, f = 0 \,\mu.p.p.en\,\mathbb{T}\backslash\sigma\right\}$$

.

Théorème 3.6. (H. Helson, 1964)([1], p :12)
Soit $d\mu = \omega dm + d\mu_s$ la décomposition de Lebesgue d'une mesure de borel finie μ, et soit $E \subset L^2(\mu)$ un sous-espace 1-invariant ($zE \subset E$). Alors il existe $\sigma \subset \mathbb{T}$ avec $m(\sigma) = 0$, et une fonction mesurable θ telle que :
$E = E_0 + E_\infty = \theta H^2 \oplus \chi_\sigma L^2(\mu_s) \quad avec \quad |\theta|^2\omega \equiv 1\,, \theta H^2 \subset L^2(\mu_a), \chi_\sigma L^2(\mu_s) \subset L^2(\mu_s)$.

4. Infimum de szegö

Définition 4.1. Soit μ une mesure de Borel, la distance :

$$dist(1, H_0^2(\mu)) = inf_{p \in \mathcal{P}ol_+^0} \int_{\mathbb{T}} |1-p|^2 d\mu$$

est appelée **l'infimum de Szegö**, avec $H_0^2(\mu) = \text{clos}_{L^2(\mu)}\,(z^n : n \geq 1)$ et $\mathcal{P}ol_+^0$ est l'ensemble des polynômes analytiques s'annulant en zéro.

L'infimum de Szegö peut sembler être un concept mathématique abstrait mais il avait une interprétation probabiliste fascinante liée à la théorie des processus stochastiques.

5. Interprétation probabiliste

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Elle dite alors processus stochastique. On dit qu'elle est stationnaire, si pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et tout $\tau \in \mathbb{Z}$, on a : $\langle X_{m+\tau}, X_{n+\tau}\rangle = \langle X_m, X_n\rangle$. Autrement dit, le produit scalaire entre les termes de la suite ne dépend pas de l'instant considéré (défini par l'indice τ), mais uniquement de la différence entre les instants considérés (définie par l'indice $m-n$)

Remarque 5.1. Si on remplace l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ par l'espace $L^2(\mu)$ on va trouver dans ce dernier, un processus stationnaire équivalent dans un certain sens du processus de $\mathcal{H}$.

Démonstration. Soit $\tilde{X_j} = \chi^j$ avec $\chi(e^{ix}) = e^{ix}$
$(\tilde{X_j})$ définit ainsi un processus stochastique qui est stationnaire . En effet :
$\langle \tilde{X_j}, \tilde{X_k}\rangle_{L^2(\mu)} = \int \chi^{j-k} d\mu = \rho(j-k)$.
Donc $\langle \tilde{X_j}, \tilde{X_k}\rangle_{L^2(\mu)} = \langle X_j, X_k\rangle, \quad X_j$ et X_k sont dans $\mathcal{H}$.

□

Pour l'analyse du processus dans $\mathcal{H}$, il convient d'étudier le processus de $L^2(\mu)$.

Définition 5.2. (au sens de Kolmogorov)([2], p :42)
la prédiction est l'étude de l'approximation par les polynômes trigonométriques dans $L^2(\mu)$ (Approximation pondérée par μ)
le passé de processus est l'espace $E_- = vect(X_n : n < 0)$
Le future de processus est l'espace $E_+ = vect(X_n : n \geq 0)$

Le théorème de représentation de Kolmogorov, également connu sous le nom de théorème de Herglotz-Kolmogorov, affirme qu'à tout processus stochastique stationnaire X_n correspond une mesure spectrale μ sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et un opérateur unitaire U sur un espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mu)$ tel que : $Uz^n = X_n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
Ce processus est déterministe si $E_- = \mathcal{H}$ ce qui est équivaut à $vect(z^n : n \leq 0) = L^2(\mu)$, (c'est-à-dire si toutes les valeurs de la séquence passées sont suffisantes pour

décrire complètement le processus). Sinon, le processus est appelé non déterministe. Dans ce dernier cas, on a $E_- \neq \mathcal{H}$. On a donc $1 \notin U^{-1}E_-$. Cela nous amène au problème de la prédiction optimale à un pas (ici, optimal est au sens de la distance de moindre carré), et donc au problème de calculer dist $\big(1, U^{-1}E_-\big)$.
L'isométrie $f \longmapsto \bar{f}$ est une transformation qui correspond à l'inversion de la direction du temps dans le cadre des processus stationnaires. nous sommes conduits au calcul de dist $\big(1, H_0^2(\mu)\big)$. On peut conclure alors que l'infimum de Szegö permet de mesurer la distance entre la prédiction optimale d'une variable aléatoire à un pas en utilisant l'historique passé et la prédiction qui n'utilise que les informations passées.

Remarque 5.3. L'infimum de Szegö dépend seulement de la partie absolument continue de la mesure μ. En effet :

$$dist(1, H_0^2(\mu)) = \|P_{H_0^2(\mu)^\perp}1\| = \|P_{H_0^2(\mu_a)^\perp}1_a\| = dist(1_a, H_0^2(\mu_a)) = \inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2 wdm$$

.

Théorème 5.4. (G. Szegö, A. Kolmogorov)([1], p :26)
Soit μ une mesure de Borel sur $\mathbb{T}$ avec la décomposition de Lebesgue $d\mu = wdm + d\mu_s$ et $w \in L^1(\mathbb{T})$.

(1) S'il n'existe aucune fonction $f \in H^2$ tel que $|f|^2 = w$ p.p
alors $\inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2 d\mu = 0$.

(2) S'il existe $f \in H^2$ tel que $|f|^2 = w$ avec $w \geq 0$ et $w \in L^2(\mathbb{T})$
alors $\inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2 d\mu = |\hat{f}(0)|^2$.

Démonstration. On a $dist(1, {H_0}^2(\mu)) = dist(1, {H_0}^2(\mu_a))$

(1) Ce cas n'est possible que si $zE_a = E_a$, donc $E_a = L^2(\mu_a)$ et par conséquent on aura $dist(1, {H_0}^2(\mu_a)) = 0$.

(2) On a : $\inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2 d\mu = \inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2 \omega dm$.
Supposons qu'elle existe une fonction extérieure $f \in H^2$ telle que $|f|^2 = \omega$, alors :

$$\inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2\omega dm = \inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2|f|^2 dm = \inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|f-pf|^2 dm$$

Puisque f est extérieure on a $vect(z^n f : n \geq 1) = zH^2$
D'où $\inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|f-pf|^2 dm = dist_{H^2}(f, zH^2)^2 = |\hat{f}(0)|^2$.

□

On peut déduire alors que le calcul de l'infimum de Szegö revient au calcul du $|\hat{f}(0)|^2$ en fonction de ω en considérant H^2 comme un espace de fonctions analytiques sur le disque unité.

Théorème 5.5. (G.Szegö, A.Kolmogorov) ([1], p :65) Soit $d\mu = \omega dm + d\mu_s$ la mesure de Borel, où $dm = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée, sur le cercle unité $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, alors :

$$\inf_{p\in\mathcal{P}ol_+^0}\int_{\mathbb{T}}|1-p|^2 d\mu = \exp\left(\int_{\mathbb{T}}\log\omega dm\right)$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que l'infimum égal à $|\hat{f}(0)|^2$ s'il existe une fonction extérieure f telle que $|f|^2 = \omega$, et est égal à 0 sinon.
D'autre part, d'après les théorèmes ([1], p :36) et ([1], p :41) une telle fonction f existe si et seulement si $\log \omega \in L^1$, dans ce cas on a :

$$f = \exp \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \log \omega^{1/2} dm(\xi) \right)$$

Et $|\hat{f}(0)|^2 = |f(0)|^2 = \exp(\int \log \omega dm)$. □

6. **Conséquences de l'infimum de Szegö**

Théorème 6.1. Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{T}$, et soit $\omega = \frac{d\mu}{dm}$ sa dérivée de Radon-Nikodym.

$$\mathcal{P}ol_+ \text{ est dense dans } L^2(\mu) \text{ si et seulement si } log(\omega) \notin L^1(\mathbb{T}).$$

Démonstration. On a $\omega \in L^1(\mathbb{T})$, alors $dist(1, H_0^2(\mu)) \leq dist(1, \mathcal{P}ol_+)) = 0$, donc d'après le corollaire ([1] , p :22), on a $H_0^2(\mu) = L^2(\mu)$ ce qui implique les polynômes $\mathcal{P}ol_+$ sont denses dans $L^2(\mu)$. □

Théorème 6.2. Soit μ une mesure positive sur T, soit $d\mu = wdm + d\mu_s$ sa décomposition de Lebesgue et supposons que $\log(w) \in L^1(\mathbb{T})$. Soit $\varphi \in H^2$ fonction extérieure définie par $\varphi(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi+z}{\xi-z} \log \omega^{1/2}(\xi) dm(\xi)\right)$ donc la fermeture $H_0^2(\mu) = \operatorname{clos}_{L^2(\mu)}$ est donné par :

$$H^2(\mu) = L^2(\mu_s) \oplus \left(\varphi^{-1} H^2\right) = L^2(\mu_s) \oplus \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}) : f\varphi \in H^2 \right\}.$$

Démonstration. On a d'après le corollaire ([1], p :22) $H^2(\mu) = L^2(\mu_s) \oplus H^2(\mu_a)$ i.e $H^2(\mu) = L^2(\mu_s) \oplus H^2(wdm)$. Montrons que $H^2(wdm)$ est un sous espace 1-invariant (nous réduisant) de $L^2(wdm)$: (i.e $H^2(wdm) \subsetneq L^2(wdm)$) Supposons le contraire, c'est-à-dire $H^2(wdm) = L^2(wdm)$, ce qui nous donne que les polynômes $\mathcal{P}ol_+$ sont denses dans $L^2(wdm)$. Alors le théorème précédent implique que $log(\omega) \notin L^1(\mathbb{T})$. Mais puisque w est une fonction extérieure alors $log(\omega) \in L^1(\mathbb{T})$. Contradiction. D'autre part Soit $f \in H^2(\omega\, dm)$. Supposons qu'il existe une suite (p_n) convergente vers f dans $H^2(\omega\, dm)$. Alors, on a :

$$\int |zf - zp_n|^2 \omega\, dm = \int |f - p_n|^2 \omega\, dm \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Alors $Donczf \in H^2(wdm)$. D'où $H^2(wdm)$ est un sous espace 1- invariant (non réduisant) de $L^2(wdm)$, d'après le théorème de Beurling on aura $H^2(wdm) = \varphi^{-1} H^2$.

□

Acknowledgement

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers le Professeur Mr. EL FALLAH Omar et le Professeur Mr. HANINE Abdelouahab pour leur aimable soutien et leurs références précieuses. Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude envers le Professeur Mr. ELMADANI Youssef pour son précieux soutien et son guide éclairé tout au long de l'élaboration de cet article.

Références

[1] Nikolai.K. Nikolski, Operators, functions and systems : An Easy Reading, Volume 1. Mathematical Surveys and Monographs 92. American Mathematical Society, Providence, RI. (2002)

[2] HELS08, H. Méthodes complexes et.

Département de Mathématiques, Université Mohammed V, Rabat–Agdal–B.P. 1014 Rabat, Maroc

Email address: hajar.badraoui@um5r.ac.ma