데이터과학과 AI를 위한 파이썬

03강. 미분

세종사이버대학교

김명배 교수

학습내용

- 극한(수렴과 발산)
- 다항함수의 미분

학습목표

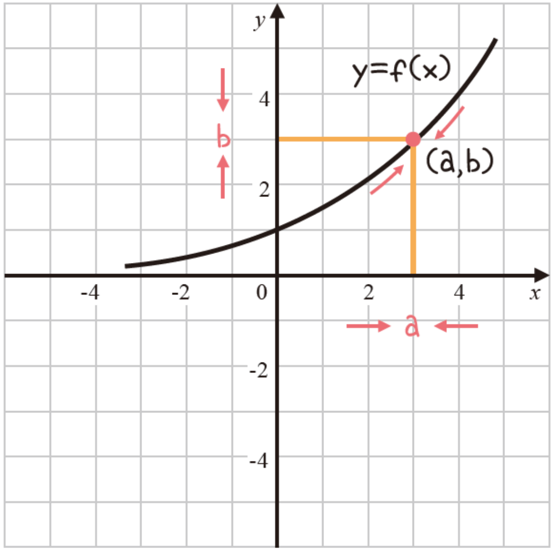
- 함수의 극한을 이해하고 함수가 주어졌을 때 극한값을 구할 수 있다.
- 함수의 수렴과 발산을 이해하고 함수가 주어졌을 때 수렴과 발산을 식별할 수 있다.
- 함수의 연속과 불연속을 이해하고 함수가 주어졌을 때 식별할 수 있다.
- 평균변화율과 순간변화율을 이해하고 파이썬으로 구현할 수 있다.
- 다항함수의 미분법을 학습하고 파이썬으로 구현할 수 있다.

1. 극한

1) 함수의 수렴

- x가 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$가 b에 한없이 가까워지면,
  '$f(x)$는 b에 **수렴**한다'고 하고,

  b를 'x값이 a에 한없이 가까워질 때
  $f(x)$의 **극한값(극한)**' 이라고 함
  (극한은 수렴해야 함)



- 극한의 표현
  $x \to a$일 때, $f(x) \to b$
  또는 $\lim_{x \to a} f(x) = b$

1. 극한

1) 함수의 수렴

- $x \to a$ 의미

  ① x와 a가 같지 않다면($x \neq a$) a에 한없이 가까이 가는 상태

  ② 좌극한($x \to a - 0$)과 우극한($x \to a + 0$)을 의미함

- 상수함수의 경우는 x값에 관계없이 다음을 만족함

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

1. 극한

1) 함수의 수렴

연습문제1) $x \to 2$ 일 때, 함수 $f(x) = \sqrt{x+2}$의 극한을 구하세요.

연습문제2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 일 때, $\lim_{x \to 1} f(x)$를 구하세요.

1. 극한

1) 함수의 수렴

- $\infty, -\infty$에서의 함수의 극한

  $x \to \infty$일 때, $f(x) \to b$ 또는 $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

  $x \to -\infty$일 때, $f(x) \to b$ 또는 $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

연습문제) $f(x) = \frac{2x-1}{x}$의 $\infty, -\infty$의 극한값을 구하세요.

힌트) 분모분자에 x가 있는 경우 분모의 **최고차항**으로
분모와 분자를 **나누어** 줌

※ 파이썬 → SymPy 라이브러리의 Limit(), S 사용

1. 극한

2) 함수의 발산

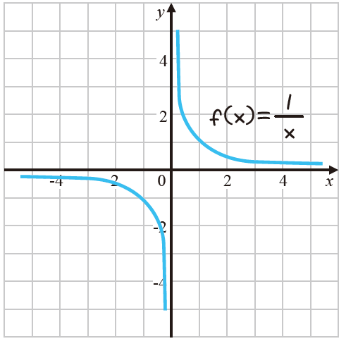
- **발산**이란 x가 a에 가까워질 때 $f(x)$가 어떤 실수 값에 **수렴하지 않는** 것을 의미함(극한값은 없음)

① 양의 무한대 발산

$x \rightarrow a$일 때, $f(x) \rightarrow \infty$ 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

② 음의 무한대 발산

$x \rightarrow a$일 때, $f(x) \rightarrow -\infty$ 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$



예시)

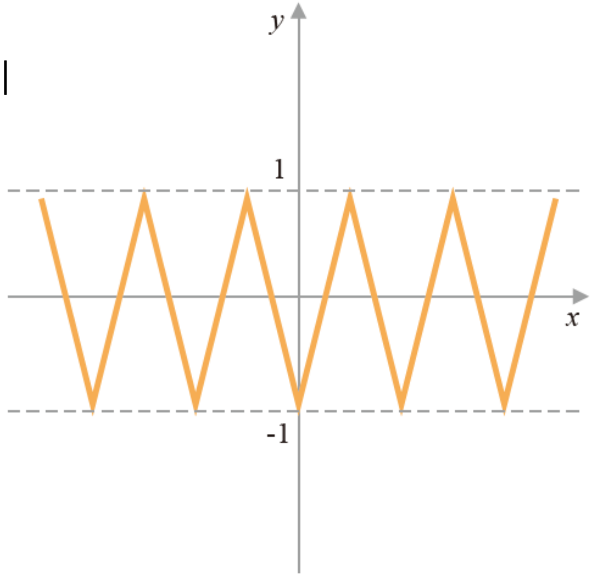
$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

1. 극한

2) 함수의 발산

③ 진동

극한으로 다가 갈수록 끊임없이
진동하는 것



1. 극한

3) 좌우극한 및 극한값의 조건

- **좌극한** : x가 a보다 **작은 방향**에서 a로 점점 가까워질 때, $f(x)$가 가까워지는 값
- **우극한** : x가 a보다 **큰 방향**에서 a로 점점 가까워질 때, $f(x)$가 가까우지는 값
- 좌극한 값과 우극한 값이 **같아야만** 극한값이 존재함

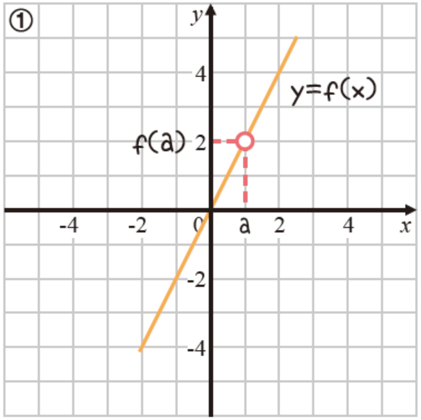
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = b$$

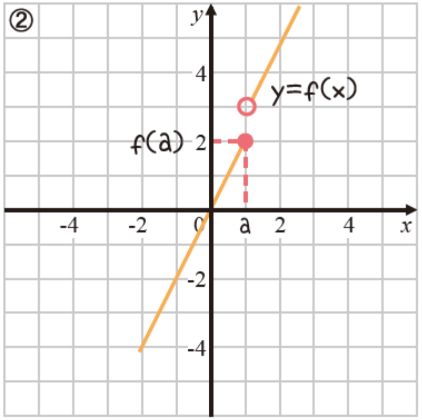
연습문제) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ 를 구하세요.

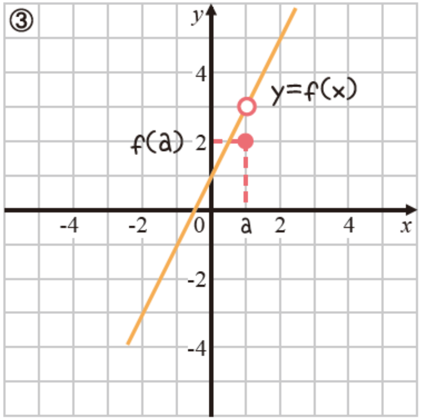
1. 극한

3) 함수의 연속과 불연속

- 함수의 **<u>연속</u>** : 그래프가 끊어지지 않고 **<u>계속 연결된</u>** 함수
- 함수의 **<u>불연속</u>** : $x = a$에서 $f(x)$ 값이 **<u>끊어진</u>** 함수







※ $x = a$에서 정의되어 있지 않음

1. 극한

3) 함수의 연속과 불연속

- 함수의 연속이 되는 조건들

① 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 정의되어야 함

② $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재해야 함(좌극한, 우극한)

③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

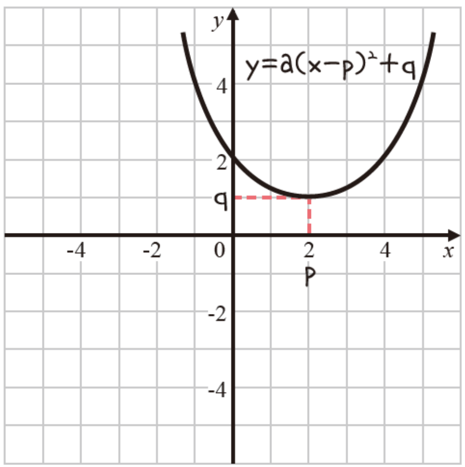
연습문제) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} \ (x \geq 2) \\ x+1 \ (x < 2) \end{cases}$ 가 $x = 2$에서 연속인가?

➔ $\lim_{x \to 2-} f(x)$ vs. $\lim_{x \to 2+} f(x)$

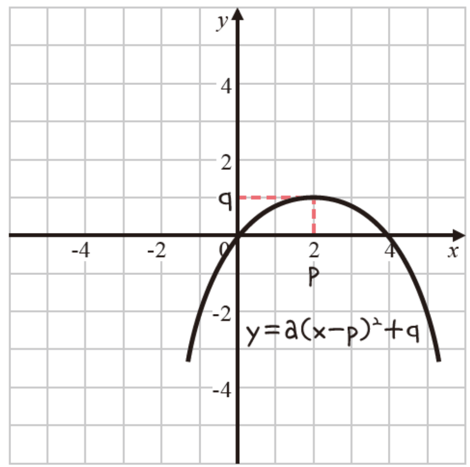
1. 극한

4) 함수의 최대, 최소

- 범위제한이 없는 경우



① $a>0$일 때 $y=a(x-p)^2+q$



② $a<0$일 때 $y=a(x-p)^2+q$

1. 극한

4) 함수의 최대, 최소

- x의 범위가 주어진 경우

① 꼭지점의 x좌표가 $a \leq x \leq b$인 경우$(a < b)$

최대 : $f(a),\ f(p),\ f(b)$ 중 가장 큰 값

최소 : $f(a),\ f(p),\ f(b)$ 중 가장 작은 값

② 꼭지점의 x좌표가 $x \leq a\ \ or\ x \geq b$인 경우$(a < b)$

최대 : $f(a),\ f(b)$ 중 가장 큰 값

최소 : $f(a),\ f(b)$ 중 가장 작은 값

1. 극한

4) 함수의 최대, 최소

연습문제) $y = x^2 - 2x + 3$ 일 때 다음을 구하세요.

① $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하세요.

② x값 범위가 $\{2 \leq x \leq 3\}$인 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하세요.

1. 극한

※ 인수분해란(↔ 전개)

- 복잡한 식을 공통인수로 묶어서 곱으로 표현하는 과정
- 다항식을 하나의 단항식과 다항식의 곱 또는 여러 다항식의 곱으로 표현

※ 인수분해 공식

① $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

② $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

③ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

④ $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

파이썬 ➔ SymPy의 factor(), expand()

1. 극한

※ 인수분해 연습문제

① $x^3y - xy^3$

② $x^2 + 3x + 2$

2. 다항함수의 미분

1) 평균 변화율

- 함수 y=f(x)가 있을 때 $\frac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}}$ 을 의미함
- 수학적 표현 : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Δ : 그리스문자 delta의대문자, 변화량, 증가량)
- 기하학적 의미로는 두 점에서의 기울기를 의미함

예시) $f(x) = x^2$인 경우 x가 1에서 5까지 증가했을 때 평균변화율

x의 증가량 : $\Delta x = 5 - 1 = 4$

y의 증가량 : $\Delta y = f(5) - f(1) = 25 - 1 = 24$

$\therefore \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{24}{4} = 6$

2. 다항함수의 미분

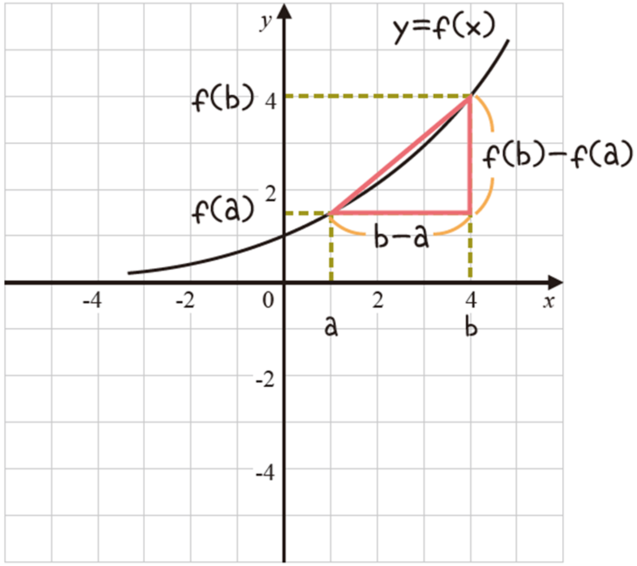
1) 평균 변화율

- 평균변화율의 다른 표현

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\Rightarrow \Delta x(b-a)$ 를 h로 치환

$$\Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



2. 다항함수의 미분

1) 평균 변화율

연습문제) 함수 $f(x) = x^2$에 대해 x값이 1에서 k까지 변할 때
평균변화율은 15라고 할 때, k값을 구하세요.

2. 다항함수의 미분

2) 미분과 미분계수(순간변화율)

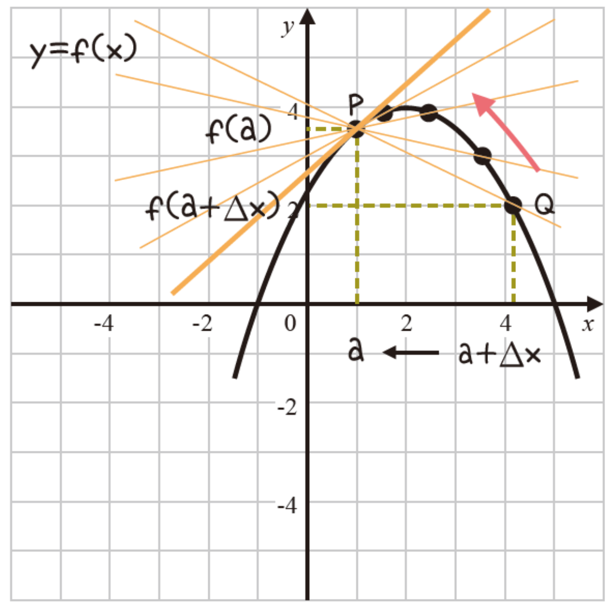
- 미분이란, 평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 h를 0으로 가까이 갈 때의 극한값을 구하는 것을 의미함
- 이 때의 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한값을 순간변화율, 미분계수라고 함
- x=a에서의 미분계수는 다음과 같이 표현함

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2. 다항함수의 미분

2) 미분과 미분계수(순간변화율)

- $f'(a)$의 기하학적 의미
  '함수 $y = f(x)$가 있을 때
  $(a, f(a))$에서 접선의 기울기'
- $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$는 증가
  $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$는 감소



※ 파이썬

➔ NumPy 라이브러리의
Derivative() 클래스 사용

2. 다항함수의 미분

2) 미분과 미분계수(순간변화율)

연습문제) 함수 $f(x) = x^2 + 3x$에 대해 x값이 1에서 5로 변할 때 평균변화율과 $x = k$에서의 순간변화율이 같을 때 k 상수 값을 구하세요.

2. 다항함수의 미분

3) 도함수

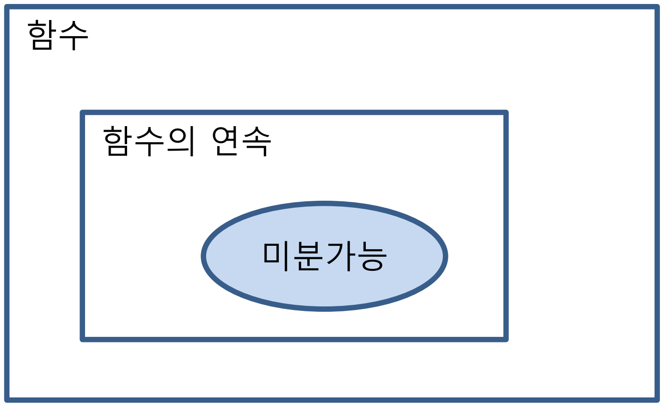
- 도함수란 $f(x)$를 **미분하여 얻은 함수** $f'(x)$를 의미함
- 미분을 두 번 하면 **2차 도함수**라고 함
- $f'(1), f'(2), f'(3)$ ... 을 구하는 번거로움을 줄이기 위해 미분계수를 **함수**처럼 구할 수 있음
- 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 ‘함수 $f(x)$를 x에 대해 **미분한다**’고 하며 그 계산법을 **미분법**이라고 합니다.
- 도함수의 여러 표기법

$$y', \qquad f'(x), \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}f(x)$$

2. 다항함수의 미분

4) 함수의 연속과 미분 가능성

- 미분 가능 = 미분계수 = 평균변화율의 극한값

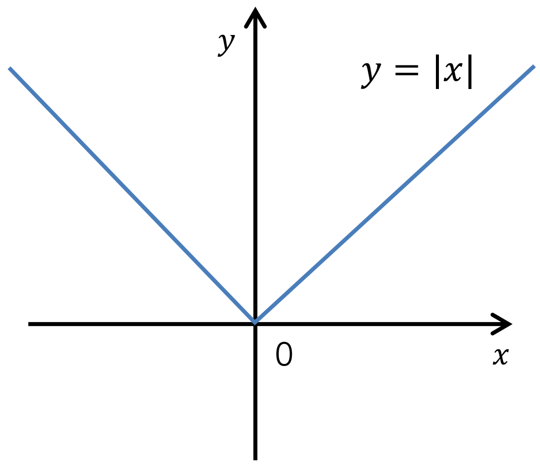


2. 다항함수의 미분

4) 함수의 연속과 미분 가능성

- 연속이지만 미분 불가능한 예시)

$y = |x|$



2. 다항함수의 미분

5) 다항함수의 미분법

① 상수 : $f(x) = c$ 이면 $f'(x) = 0$ (단, c는 상수)

② 거듭제곱 : $f(x) = x^n$ 이면 $f'(x) = nx^{n-1}$ (단, n은 자연수)

③ 로그 : $f(x) = \log x$ 이면 $f'(x) = \frac{1}{x}$

④ 지수 : $f(x) = e^x$ 이면 $f'(x) = e^x$

⑤ 선형조합법칙 : $\{cf(x)\}' = cf'(x)$ (단, c는 상수)
$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$

⑥ 곱셈법칙 : $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

⑦ 연쇄법칙 : f(x)=h(g(x)) 이면 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

※ 파이썬 - SymPy 라이브러리의 diff를 이용

2. 다항함수의 미분

5) 다항함수의 미분법

연습문제)

① 함수 $y = (2x + 1)(3x^2 + 2x)$를 미분하세요.

② 함수 $y = (x - 1)(x^2 + 3x + 1)$을 미분하세요.

③ 함수 $y = \log(x^2 - 3)$ 을 미분하세요.

정리하기

1. 함수의 수렴

- x가 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$가 b에 한없이 가까워지면, '$f(x)$는 b에 **수렴**한다'고 하고, b를 'x값이 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 **극한값(극한)**' 이라고 함(**극한은 수렴해야 함**)

2. 함수의 발산

- 발산이란 x가 a에 가까워질 때 $f(x)$가 어떤 실수 값에 수렴하지 않는 것을 의미함(**극한값은 없음**)
- 발산의 종류는 양의 무한대 발산, 음의 무한대 발산, 진동이 있음

3. 극한값의 조건과 연속/불연속

- **좌/우 극한 값이 같아**야만 극한값이 존재함
- 함수의 **연속이 되는 조건**들 :
  ① 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 정의되어야 함 ② $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재해야 함(좌극한, 우극한) ③ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

4. 평균 변화율과 순간 변화율

- 함수 y=f(x)가 있을 때 $\frac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 을 의미함
- 기하학적 의미로는 두 점에서의 **기울기**를 의미함

5. 순간변화율과 미분, 미분계수

- 미분이란, 평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$에서 **$h$를 0으로 가까이 갈 때**의 극한값을 구하는 것을 의미함
- 도함수란 $f(x)$를 **미분하여 얻은 함수** $f'(x)$를 의미함(y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$)
- 미분법칙으로 **상수, 거듭제곱, 지수, 로그, 선형조합법칙, 곱셈법칙, 연쇄법칙**이 있음

정리하기

5. 파이썬 실습

- 그래프 그리기
  - numpy.linspace(start, stop, num)
  - matplotlib.pyplot.plot()
  - matplotlib.pyplot.show()
- 기호변수 선언
  - Symbol('x')
- 극한과 무한대
  - sympy.Limit().doit()
  - S.Infinity (sympy)
- 도함수
  - sympy.Derivative(fx, x).doit()
  - sympy.diff(fx)
- 미분 실행
  - doit()