

# 데이터과학과 AI를 위한 파이썬

## 02강. 함수

세종사이버대학교

김명배 교수



## 학습내용

- 기초함수
- 일차/이차 함수
- 지수함수와 로그함수

## 학습목표

- 함수에 대한 정의를 학습하고 함수를 식별 할 수 있다.
- 일차함수와 이차함수를 학습하고 차이를 설명할 수 있다.
- 지수함수를 학습하고 그래프로 표현할 수 있다.
- 로그함수 및 지수함수와의 차이점을 학습하고 그래프로 표현할 수 있다.

# 1. 함수의 기초

## 1) 함수란

- 함수는 첫 번째 집합의 임의의 한 원소를 두 번째 집합의 원소 하나에 대응시키는 관계
- 예시) 음료수 수량과 금액

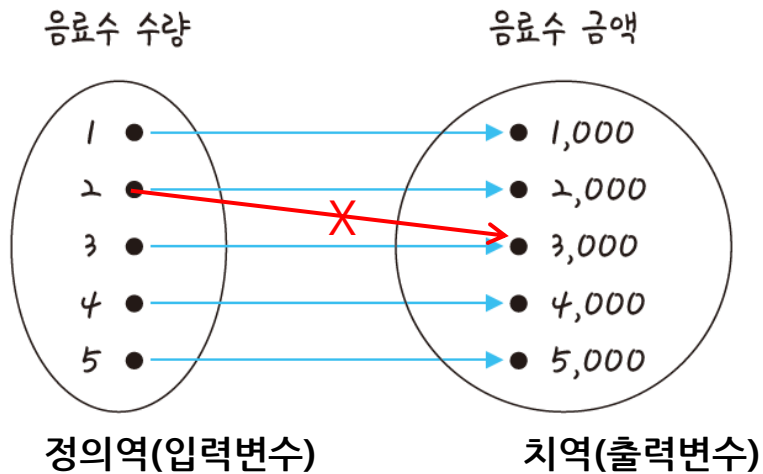
음료수 수량	1	2	3	4	5
음료수 금액	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000

- X와 Y 변수에 대해 X 값이 정해지면 Y 값이 하나로 결정될 때,  
Y를 X의 함수라고 하며 다음과 같이 표현할 수 있음  
 $Y = 1000 X, \quad Y = f(X), \quad f(X) = 1000 X$
- X값에 의해 결정되는,  $f(1), f(2)$ 를 함수값이라고 함

# 1. 함수의 기초

## 1) 함수란

- X와 Y 변수에 대해 X 값이 정해지면 Y 값이 하나로 결정 됨



# 1. 함수의 기초

## 2) 함수와 방정식의 차이

$$y = 2x + 3 \quad \rightarrow \text{함수}$$

$$y - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \text{방정식}$$

- **함수**는  $x$ 와  $y$  변수가 있을 때  $x$  값에 따라  $y$  값이 결정되는 형태
- **방정식**은 변수를 포함하는 등식에서 변수 값에 따라 참 또는 거짓이 성립하는 식
- **방정식과 함수의 관계**
  - 실수 범위 안에서 모두 좌표 평면에 표현할 수 있음
  - 방정식은 함수를 포괄하는 개념
  - 모든 함수는 방정식으로 바꾸어서 표현할 수 있음

## 2. 일차함수

### 1) 일차함수

- 일차함수는 최고차항의 차수가 1인 함수임
- 예를 들어  $y = ax + b$ 처럼  $x$ 의 차수가 1인 함수가 일차함수임

일차함수 예		$y = ax + b, f(x) = ax + b$
일차함수가 아닌 예	분수함수	$y = \frac{1}{x} + 1$
	상수함수	$y = 2$
	일차방정식	$ax + b = 1$
	일차부등식	$ax + b > 0, ax + b \geq 0$

## 2. 일차함수

### 1) 일차함수

#### 연습문제

$f(x) = ax + 2$ ,  $f(3) = 8$  일때,

①  $a$  값은?

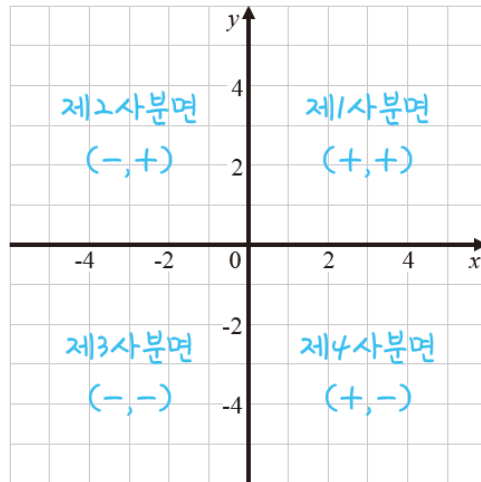
②  $f(6) - f(2)$  값은?

## 2. 일차함수

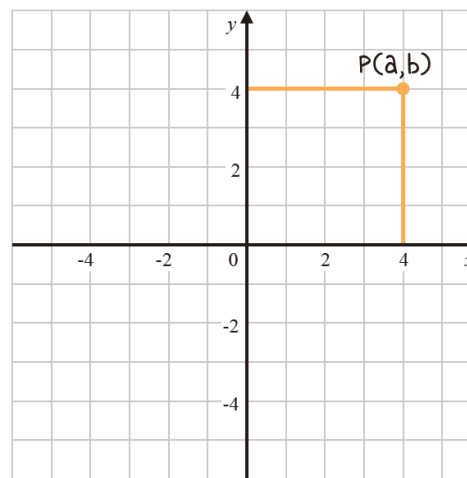
### 2) 좌표 평면과 기울기

- 좌표 평면이란 x축과 y축 두 개로 구성된 평면(2차원 평면)

① 좌표의 사분면



② 좌표 평면 위의 점





## 2. 일차함수

### 2) 좌표 평면과 기울기

- 기울기는 기울어진 정도

$$\text{- 기울기} = \frac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- 양의 기울기

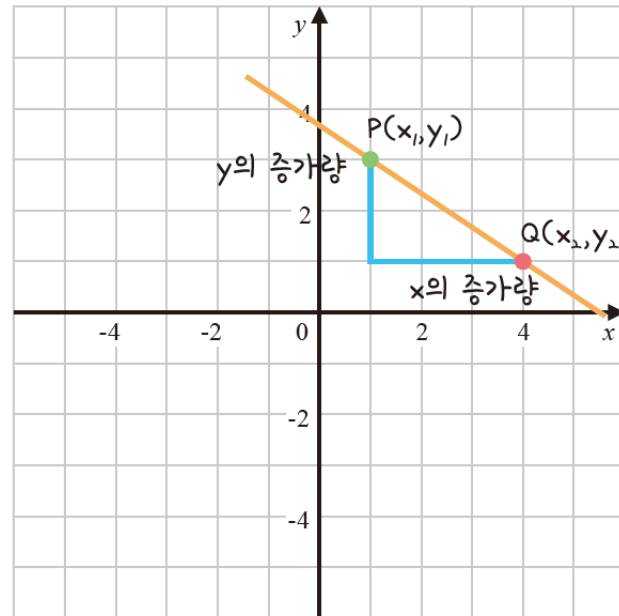
x가 **증가**할 때 y도 **증가**

또는 x가 **감소**할 때 y도 **감소**

- 음의 기울기

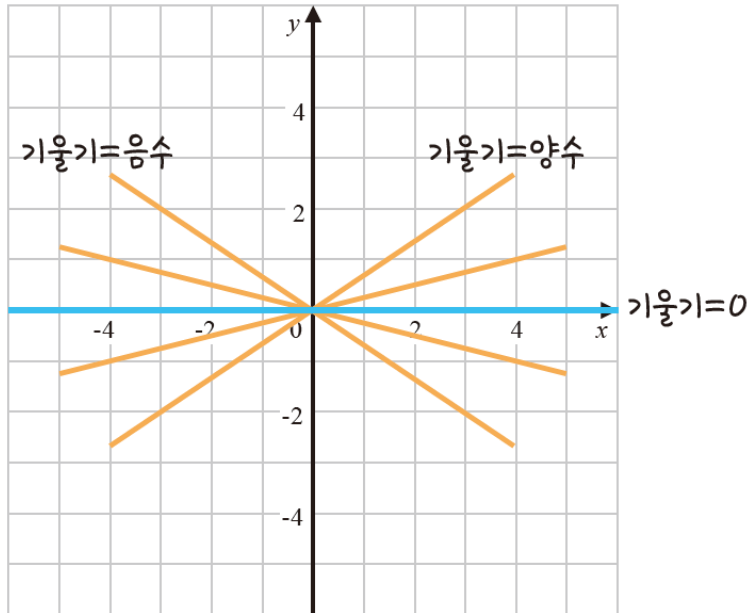
x가 **증가**할 때 y는 **감소**

또는 x가 **감소**할 때 y는 **증가**



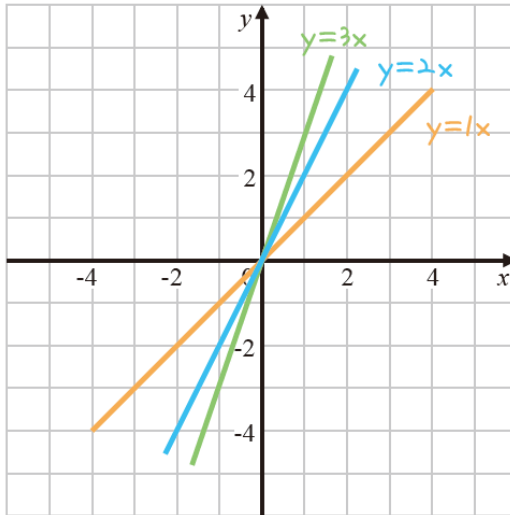
## 2. 일차함수

### 2) 좌표 평면과 기울기

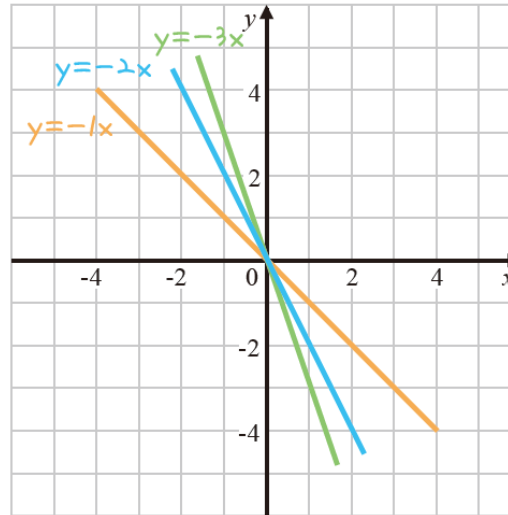


## 2. 일차함수

### 3) 일차함수 그래프



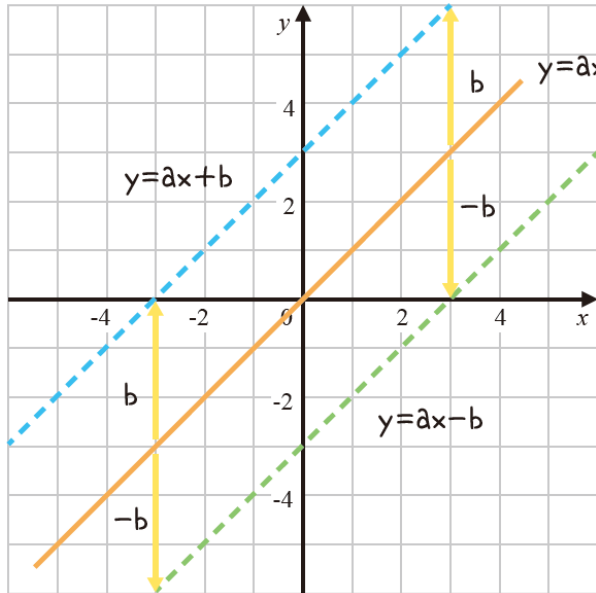
①  $y=ax$  그래프( $a$ 가 양수)



②  $y=ax$  그래프( $a$ 가 음수)

## 2. 일차함수

### 3) 일차함수 그래프



$$y = ax + b$$

직선의 기울기  $y$  절편

**$x$ 절편**은  $ax + b = 0$  의 해

## 2. 일차함수

### 3) 일차함수 그래프

#### 연습문제 1

- ① 기울기와 y 절편이 주어졌을 때 직선의 방정식 구하기

$$y = tx + c$$

- ② 기울기와 한 점의 좌표가 주어졌을 때 직선의 방정식 구하기

기울기 :  $t$ , 좌표 :  $P(x_1, y_1)$

$$y_1 = tx_1 + b$$

$$\Rightarrow b = y_1 - tx_1$$

$$y = tx + (y_1 - tx_1)$$

$$\Rightarrow y - y_1 = t(x - x_1)$$

## 2. 일차함수

### 3) 일차함수 그래프

#### 연습문제 2

- ① 기울기가 2이고 y 절편이 5인 직선의 방정식을 구하세요.
  
- ② 기울기가 2이고 점(2,5)를 지나는 직선의 방정식을 구하세요.

### 3. 이차함수

#### 1) 이차함수

- 함수  $y = f(x)$ 에서  $f(x)$ 가  $x$ 에 관해 이차식일 때 이차함수라고 함

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

- $x$ 절편은  $ax^2 + bx + c = 0$ 의 해이고,  $y$ 절편은  $c$ 가 됨
- $a$ 는 이차항의 계수라고 함

$$y = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{이 수식의 해, } x \text{ 절편}}$$

y 절편  
↓

## 3. 이차함수

### 1) 이차함수

#### 연습문제

다음 중 이차함수를 모두 고르세요.

①  $y = x + 1$

②  $y = 4x^2 + 2x + 1$

③  $x^2 + 4x - 1 = 0$

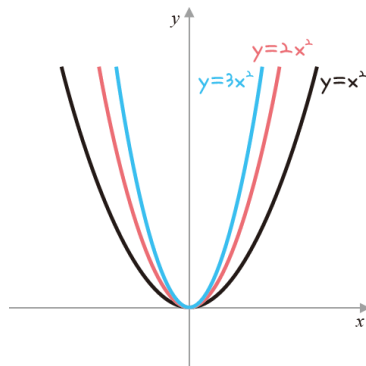


### 3. 이차함수

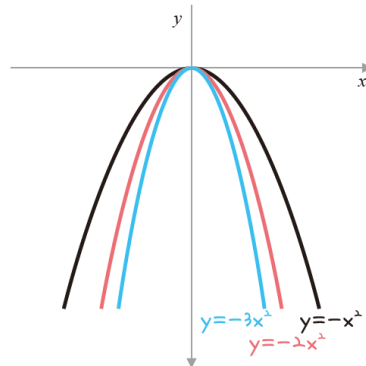
#### 2) 이차함수 그래프

##### ① $ax^2$ 의 그래프

- 이차항의 계수( $a$ )가 **양수**이면 **위로** 볼록,  
**음수**이면 **아래로** 볼록한 **U자형** 그래프
- $y$ 축을 기준으로 양쪽이 서로 **대칭**임



①  $y = ax^2$  ( $a > 0$ )



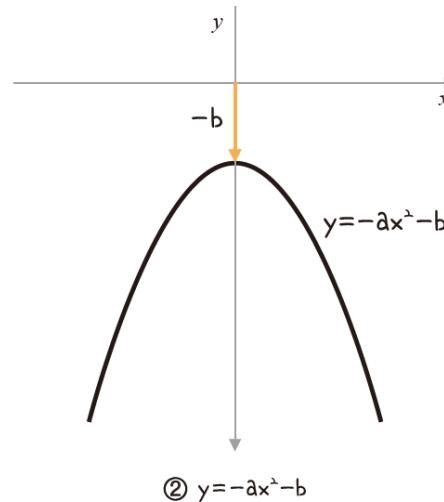
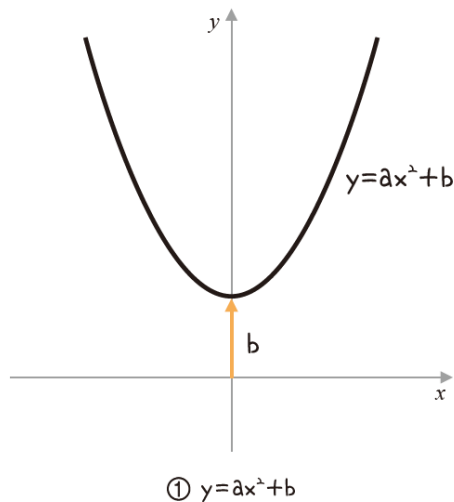
②  $y = ax^2$  ( $a < 0$ )

### 3. 이차함수

#### 2) 이차함수 그래프

②  $ax^2 + b$ 의 그래프

-  $y$ 절편  $b$ 만큼 위/아래 방향으로 이동된 형태임

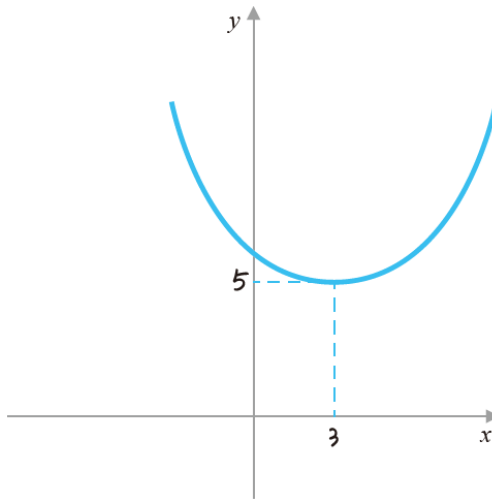


## 3. 이차함수

### 2) 이차함수 그래프

③  $a(x - 3)^2 + 5$ 의 그래프

-  $x$ 축으로 3만큼  $y$ 축으로 평행 이동된 그래프



## 4. 지수함수

### 1) 거듭제곱

- 거듭제곱은 같은 수를 여러 번 반복해서 곱하는 계산임

예시)  $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$  : 5의 5제곱(5승)

일반화)  $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{번}}$   $a^n$  ← 지수  
↑ 밑

### - 거듭제곱의 성질

- 0이 아닌 실수의 0 제곱은 항상 1임  $\Rightarrow a^0 = 1$
- 0이 아닌 실수의 1 제곱은 실수 값과 같음  $\Rightarrow a^1 = a$
- 0이 아닌 실수의 음의 제곱은  $\frac{1}{\text{실수의 양의 제곱}}$  과 같음  
 $\Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

## 4. 지수함수

### 1) 거듭제곱

#### - 지수의 법칙

##### ① 합의 법칙

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

##### ② 차의 법칙

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

##### ③ 곱의 법칙

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

## 4. 지수함수

### 2) 거듭제곱근

- p제곱을 하면 a가 되는 수를 a의 거듭제곱근이라고 부름

예시)  $\sqrt[3]{64} = 4$  : 4를 3제곱(승)하면 64가 됨

- 거듭제곱근의 성질

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\textcircled{3} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\textcircled{4} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\textcircled{5} \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

## 4. 지수함수

### 3) 지수함수

- 지수(exponential)함수는 지수에 미지수  $x$ 가 있는 함수

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

지수: 변수

밑: 양의 정수

- 밑은 0보다 크고, 1이면 안됨  
(1이 되면  $f(x)$ 가 항상 1이 되기 때문 → 상수함수)
- 밑은 다음과 같이 두 종류로 나눌 수 있음
  - ①  $0 < a < 1$
  - ②  $a > 1$

## 4. 지수함수

### 3) 지수함수

- 인공지능에서는  $a = e$ (네이피어 상수)를 주로 사용함

- $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281\cdots$

-

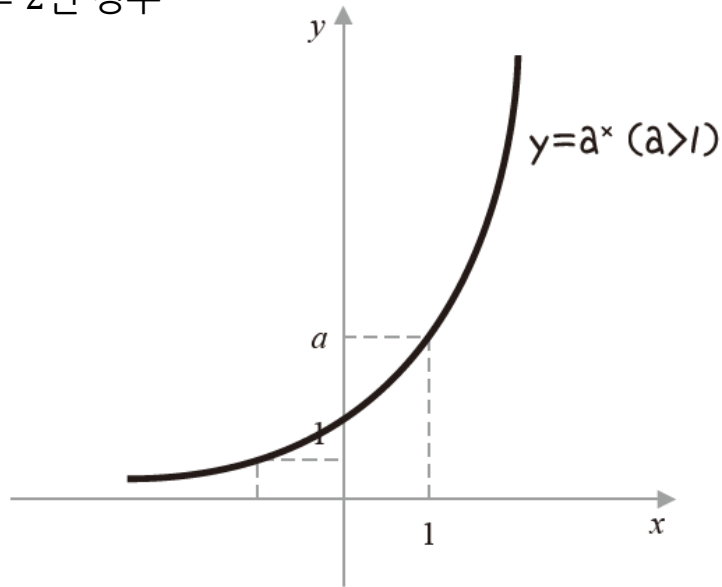


## 4. 지수함수

### 3) 지수함수의 그래프

- $y = a^x$ 에서  $a = 2$ 인 경우

$x$	$y = 2^x$
...	...
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
...	...

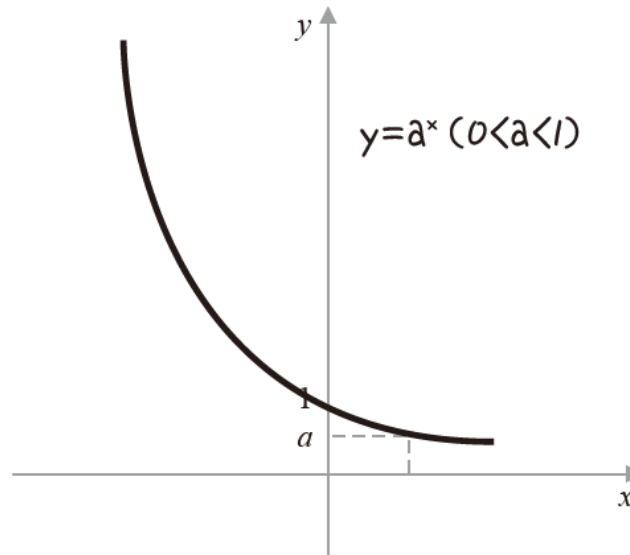


## 4. 지수함수

### 3) 지수함수의 그래프

- $y = a^x$ 에서  $a = 1/2$ 인 경우

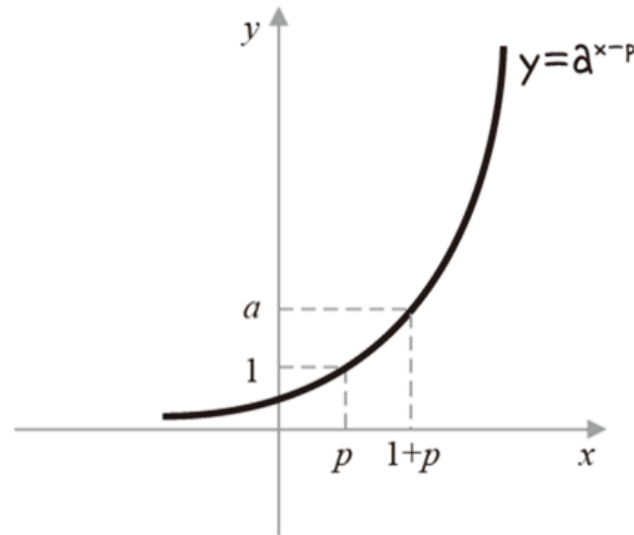
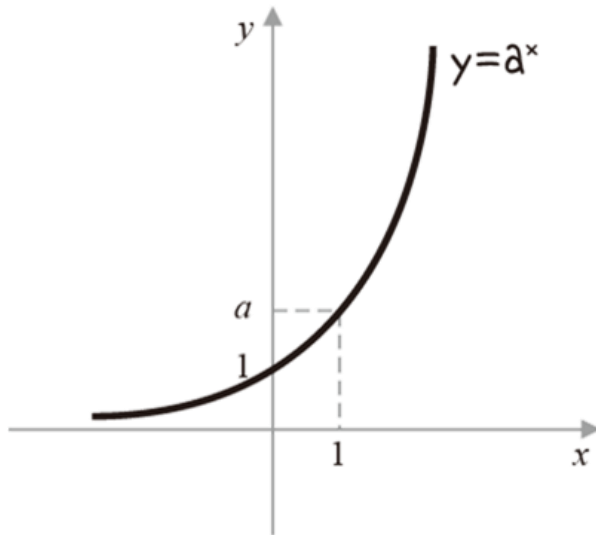
$x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
...	...
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
...	...



## 4. 지수함수

### 3) 지수함수의 그래프

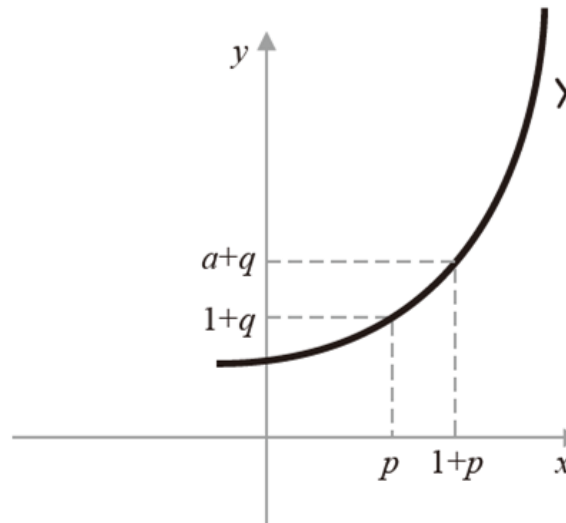
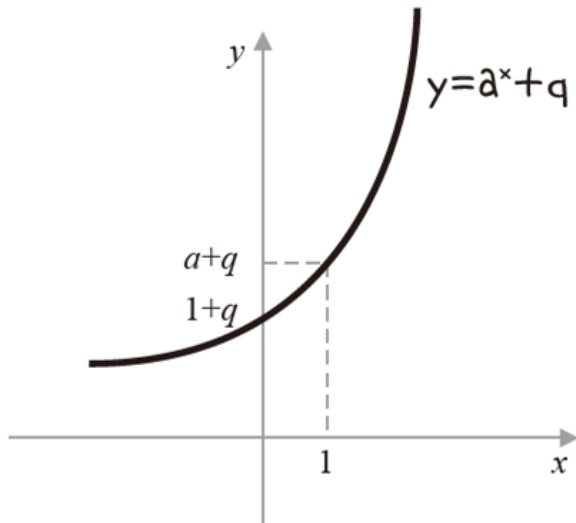
- 평행이동



## 4. 지수함수

### 3) 지수함수의 그래프

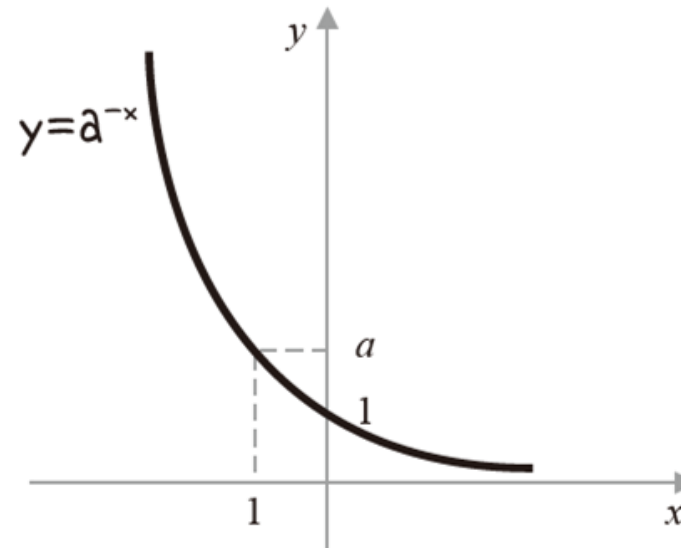
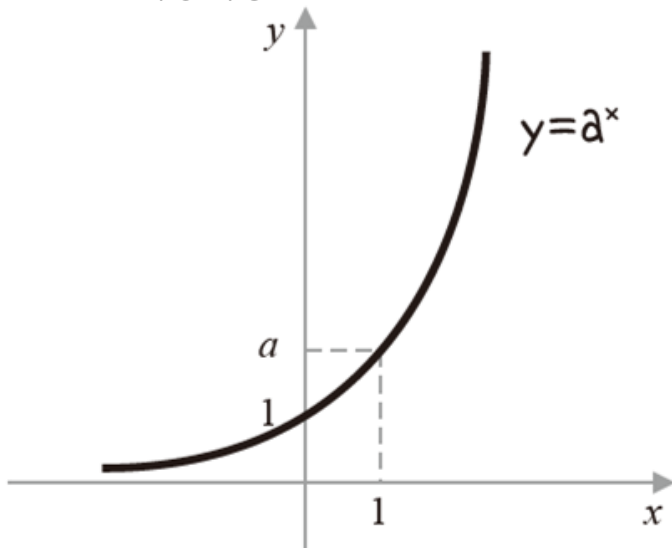
- 평행이동



## 4. 지수함수

### 3) 지수함수의 그래프

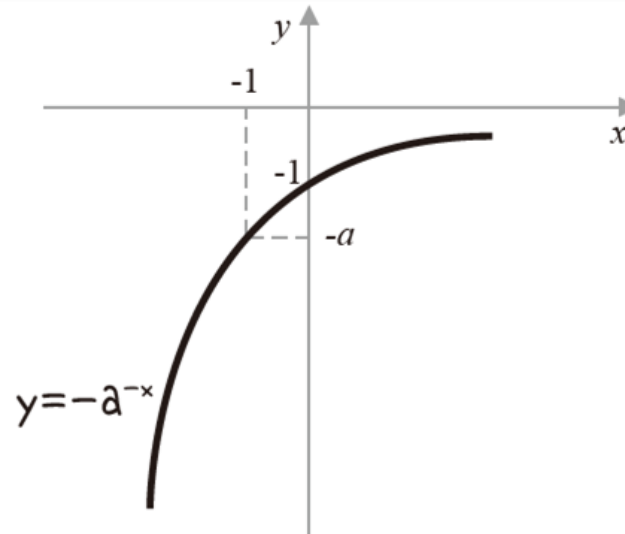
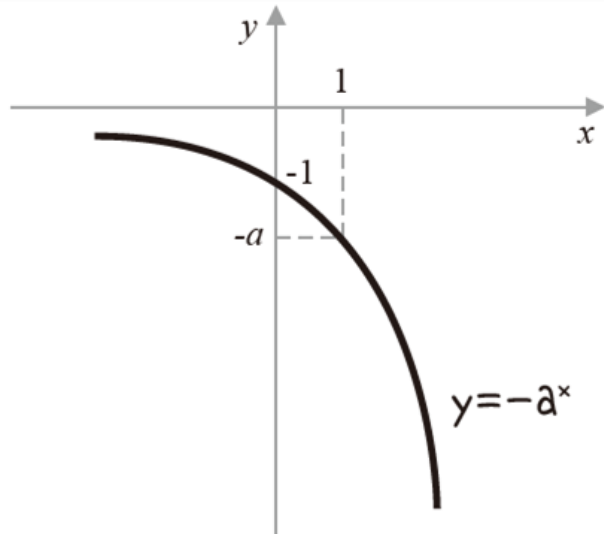
- 대칭이동



## 4. 지수함수

### 3) 지수함수의 그래프

- 대칭이동



## 4. 지수함수

### 3) 지수함수의 그래프

#### 연습문제

- ①  $y = 2^x$  그래프와  $y = 2^{x-3}$  그래프를 그리세요.
- ②  $y = 2^{x-3}$  그래프와  $y = -2^{x-3}$  그래프를 그리세요.

## 4. 지수함수

### 4) 로지스틱 함수

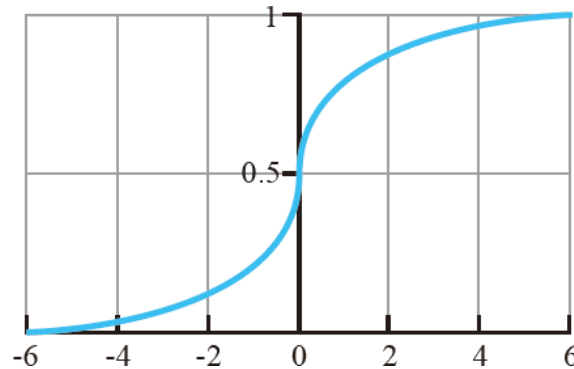
- 로지스틱(logistic) 함수는 지수함수를 변형한 것
- 시그모이드(sigmoid) 함수의 하나로 인공지능에서 활성화(activation) 함수로 많이 쓰임
- 활성화 함수는 선형 형태를 비선형 형태로 변환하여 보다 복잡한 형태를 표현함

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0.5$$





## 5. 로그함수

### 1) 로그함수

- 로그(log)함수는 로그의 진수에 미지수  $x$ 가 있는 함수,  
즉  $f(x) = \log_a x (x > 0, a > 0, a \neq 1)$  꼴이 포함되는 함수
- 로그함수는 지수함수와 역함수 관계임

$$f(x) = \log_a x \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

진수  
밑

### ※역함수란

- 어떤 함수의  $x$ 와  $y$ 가 정 반대인 관계를 갖는 함수( $f^{-1}(y)$ )  
 $f(x) = y, \quad g(y) = x \quad \Rightarrow \quad g(y) = f^{-1}(y)$
- 역함수는 일대일대응 일 때만 존재함

## 5. 로그함수

### 1) 로그함수

- 로그함수의 성질

$$\blacksquare \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\Rightarrow \log(\prod x_i) = \sum(\log x_i)$$

$$\blacksquare \log_a x^n = n\log_a x$$

$$\blacksquare \log_a 1 = 0$$

- 어떤 함수에 log를 취해도 최고점, 최저점의 x값은 변하지 않음

- 로그함수는 작은 값(0~1)은 상대적으로 크게,  
큰 값(1~)은 비교적 작게 만드는 특성이 있음

- 이런 특성 때문에 인공지능에서는 로그 가능도(log likelihood)  
함수로 활용

## 5. 로그함수

### ※ 자연상수(natural number)

- 인공지능에서는 지수의 밑과 로그함수의 밑으로  $e$ (자연상수) 를 주로 사용함

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281\cdots$$

- 지수함수의 경우  $\exp(x)$ 로 표기하고, 로그함수의 경우 자연로그(natural logarithm)라고 하고  $\ln$ 라고 씀
- 미분 적용 시 계산과정이 간결해 짐

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

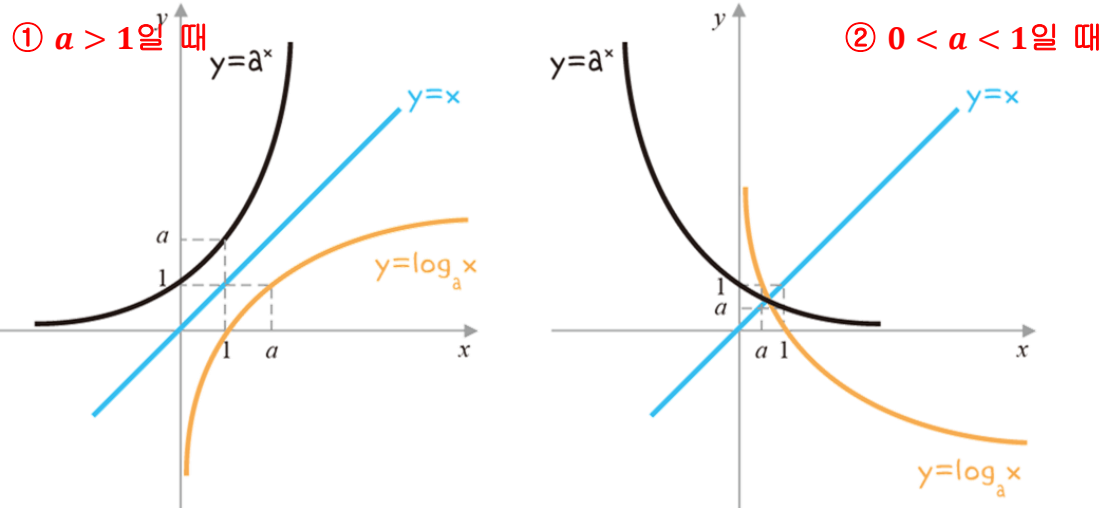
- 네이피어(Napier's) 상수 또는 오일러(Euler's) 상수라고도 함

※ 밑이 10인 로그를 상용(common)로그라고 함

## 5. 로그함수

### 2) 로그함수의 그래프

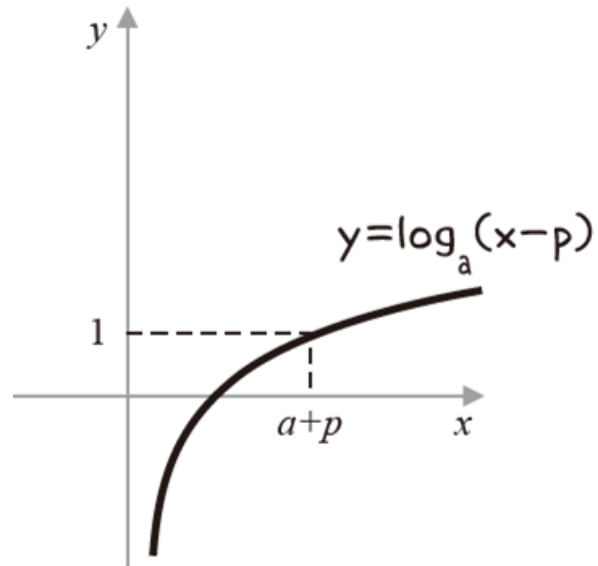
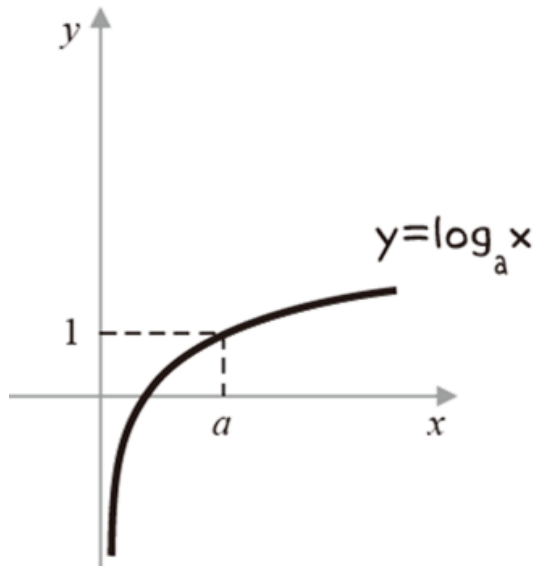
- 로그함수는 지수함수의 **역함수**
- 역함수의 그래프는 직선  $y = x$  를 기준으로 대칭이동 한 그래프임



## 5. 로그함수

### 2) 로그함수의 그래프

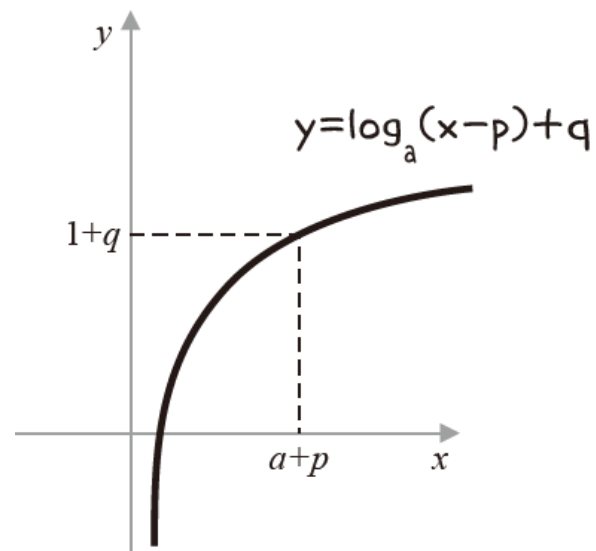
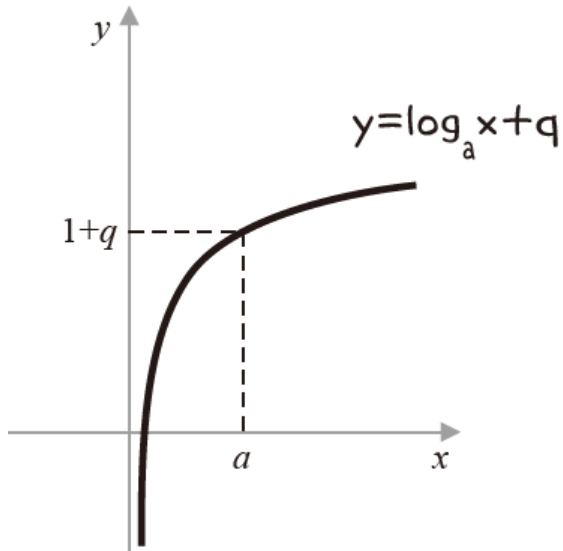
- 평행이동



## 5. 로그함수

### 2) 로그함수의 그래프

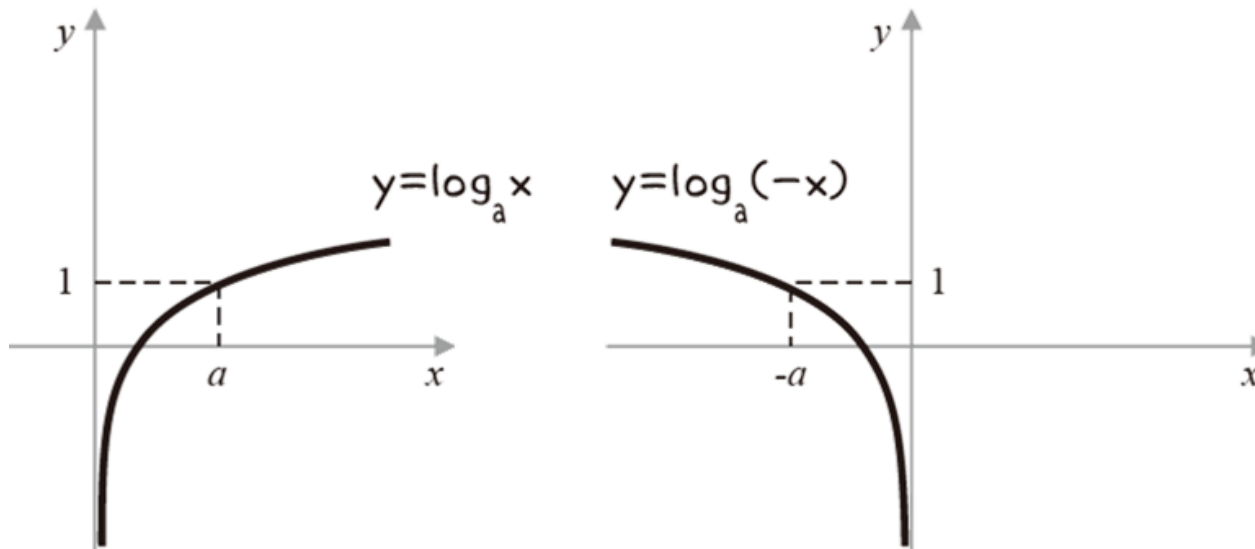
- 평행이동



## 5. 로그함수

### 2) 로그함수의 그래프

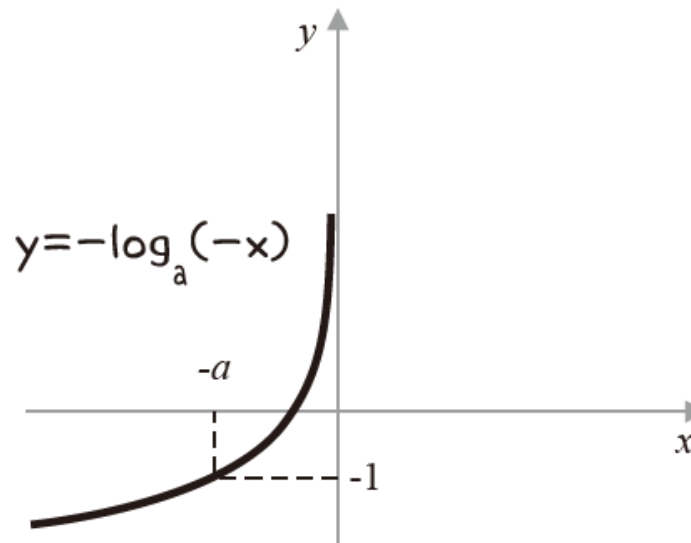
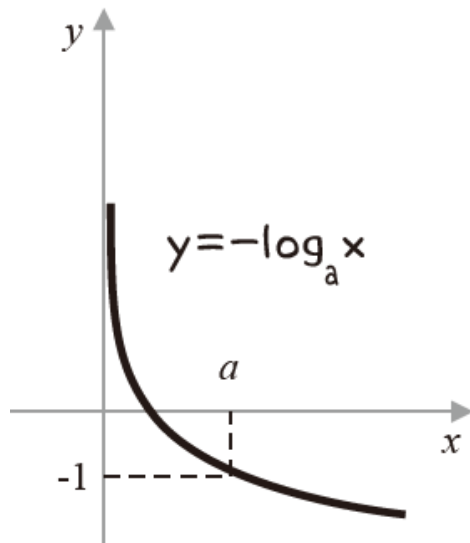
- 대칭이동



## 5. 로그함수

### 2) 로그함수의 그래프

- 대칭이동





## 5. 로그함수

### 2) 로그함수의 그래프

#### 연습문제

- ①  $y = \log_2 x$  그래프를 그리세요.
- ②  $y = \log_2(x - 2)$  그래프를 그리세요.
- ③  $y = \log_2 -x$  그래프를 그리세요.

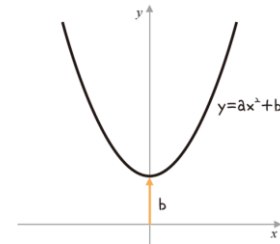
# 정리하기

## 1. 함수의 기초

- 함수는  $x$ 의 임의의 한 원소를  $y$  집합의 원소 하나에 대응시키는 관계  
(서로 다른  $x$ 에 대해 동일한  $y$ 와 되는 대는 경우도 함수임)

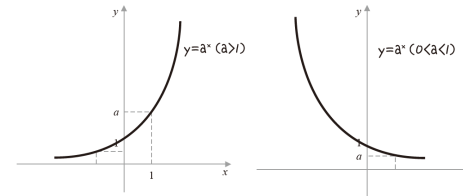
## 2. 일차함수와 이차함수

- 일차함수는 최고차항의 차수가 1인 함수임( $f(x) = ax + b$ )
- 일차함수의 그래프는 직선으로  $a$ 는 기울기,  $b$ 는  $y$  절편
- 함수  $y = f(x)$ 에서  $f(x)$ 가  $x$ 에 관해 이차식일 때 이차함수라고 함
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- 이차함수의 그래프는 U자형으로  
 $a$ 가 양수이면 아래로 볼록,  $a$ 가 음수이면 위로 볼록한 형태임



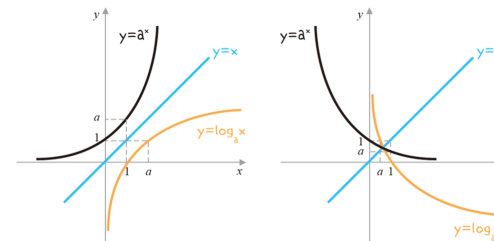
## 3. 지수함수

- 지수함수는 지수에 미지수  $x$ 가 있는 함수



## 4. 로그함수

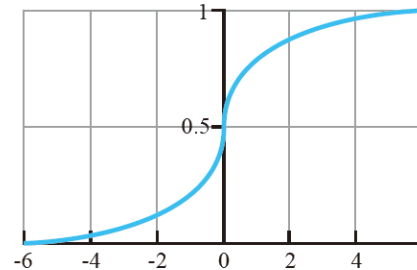
- 로그함수는 로그의 진수에 미지수  $x$ 가 있는 함수
- 로그함수는 지수함수와 역함수 관계임
- 작은 값은 크게, 큰 값은 작게 만들어줌



# 정리하기

## 5. 로지스틱 함수

- 지수함수를 변형한 것 ( $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ )
- 시그모이드 함수의 하나로 활성화함수로 활용



## 6. 파이썬 실습

- 그래프 그리기
  - numpy.linspace(start, stop, num)
  - matplotlib.pyplot.plot()
  - matplotlib.pyplot.show()
- 지수와 로그의 표현
  - numpy.exp()
  - numpy.log(), numpy.log2(), numpy.log10()