데이터과학과 AI를 위한 파이썬

08강. 순열과 조합

세종사이버대학교

김명배 교수

학습내용

- 수열의 개념 및 종류
- 순열
- 조합

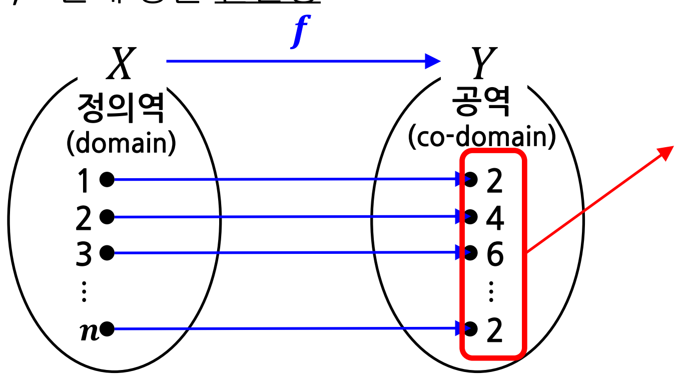
학습목표

- 수열에 대한 개념을 이해하고 등비수열과 등차수열의 차이점과 수열의 수렴과 발산을 설명할 수 있다.
- 순열의 정의와 중복순열과의 차이점을 설명할 수 있고, 파이썬으로 구현할 수 있다.
- 조합의 정의와 중복조합과의 차이점이 무엇인지, 그리고 순열과의 차이가 무엇인지를 설명할 수 있고, 이를 파이썬으로 구현할 수 있다.

1. 수열의 개념 및 종류

1) 수열(sequence)이란

- 수열은 규칙성이 있는 숫자의 나열
- 자연수를 정의역으로 갖는 함수나 그 함수의 결과로 얻은 원소들을 나열하는 것
- 순서대로 첫째 항(제1항), 둘째 항(제2항), ⋯ , n번째 항(제n항) 등으로 읽고, n번째 항을 일반항



수열 : $\{a_n\}$
$= \{2, 4, 6, \cdots, 2n\}$
$= 2n$
일반항

1. 수열의 개념 및 종류

2) 등차수열과 등비수열

① 등차수열(arithmetic sequence)

- 연속하는 두 항의 차이가 모두 일정한 수열
- 두 항의 차이를 공차(common difference)라고 함
- 일반항 : $a_n = a + (n-1)d$, a : 첫째 항, d : 공차

[예시]

$\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$

첫째 항 : 1

공차 : 2

일반항 : $1 + (n-1) \times 2$
$= 2n - 1$

첫째 항 : 2

공차 : 3

일반항 : $2 + (n-1) \times 3$
$= 3n - 1$

$\{\ ,\ \ ,\ \ ,\ \ , \cdots\}$

1. 수열의 개념 및 종류

2) 등차수열과 등비수열

② 등비수열(geomeric sequence)

- 각 항이 그 이전항에 일정한 수를 곱한 것으로 이루어진 수열
- 첫 항은 0이 되어서는 안되며, 곱하는 일정한 수를 공비(common ratio)라고 함
- 일반항 : $a_n = ar^{n-1}$, a : 첫째 항, r : 공비

[예시]

첫째 항 : 2

공비 : 2

$\{2, 4, 8, 16, \cdots\}$

일반항 : $2 \times 2^{n-1} = 2^n$

2. 수열의 극한과 발산

1) 수열이 수렴과 극한

- 수열의 극한과 발산은 함수의 극한과 발산 개념과 동일
- 수열 $\{a_n\}$에서 n이 무한하게 커질 때, a_n의 값이 a에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 a에 수렴한다고 표현
- a를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 함

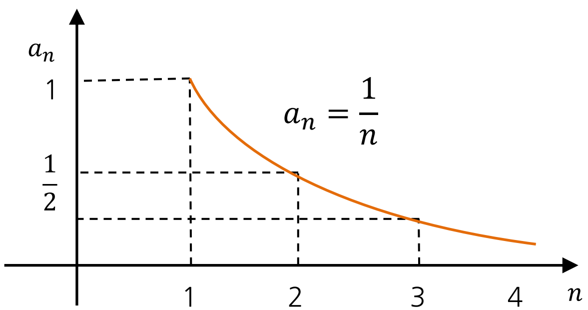
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{또는 } n \to \infty \text{ 일 때, } a_n \to a$$

2. 수열의 극한과 발산

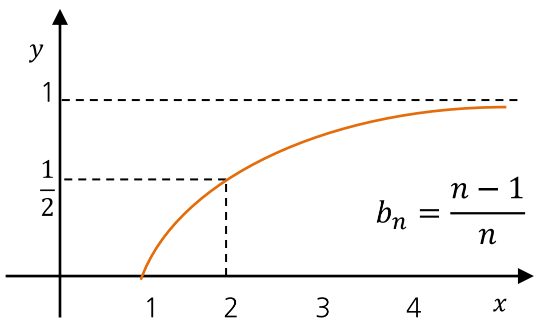
1) 수열이 수렴과 극한

[예시]

- $\{a_n\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ $\{b_n\}: 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}$
- n이 커짐에 따라 a_n과 b_n 값의 변화



$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$



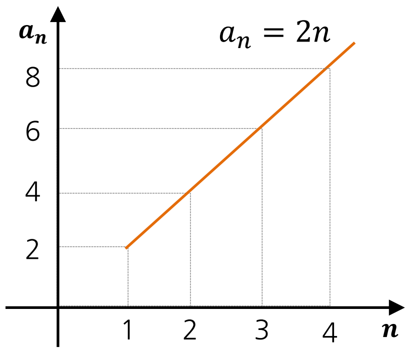
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

2. 수열의 극한과 발산

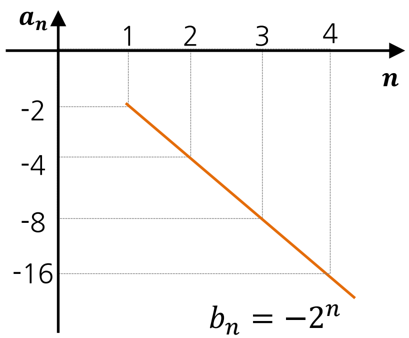
2) 수열의 발산

- 극한과는 반대되는 개념으로, 어떤 값에도 수렴하지 않는 수열을 발산이라고 함

$\{a_n\}: 2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$ $\{b_n\}: -2,-4,-8,-16,\cdots,-2n,\cdots$



$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$



$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

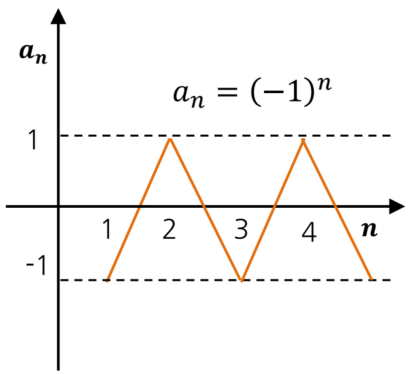
세종사이버대학교

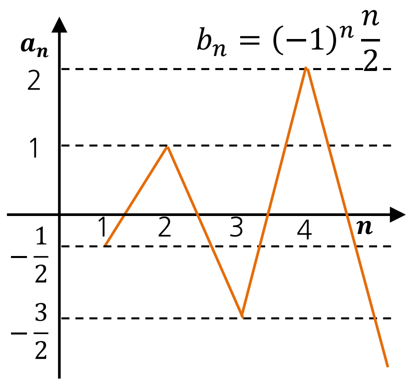
2. 수열의 극한과 발산

2) 수열의 발산

- 발산하는 수열 중에서 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 수열을 수열의 진동이라고 함

$\{a_n\}: -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n \cdots$ $\{b_n\}: -\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 2, \cdots, (-1)^n \frac{n}{2}, \cdots$





2. 수열의 극한과 발산

2) 수열의 발산

[수렴과 발산 정리]

① 수렴

- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (단 a는 실수)

② 발산

- 양의 무한대로 발산 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
- 양의 무한대로 발산 : $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- 진동

2. 수열의 극한과 발산

3) 수열 극한에 대한 성질

- 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a^n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b^n = \beta$일 대

① $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = c\alpha$ (단 c는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \beta$

④ $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)} = \frac{\alpha}{\beta}$ $(b_n \neq 0, \beta \neq 0)$

2. 수열의 극한과 발산

3) 수열 극한에 대한 성질

[연습문제] 다음 극한 값을 구하세요.

① $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2}$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{n^2+2n}$

2. 수열의 극한과 발산

4) 등비수열의 수렴과 발산

- 등비수열의 일반항 : $a_n = ar^{n-1}$
- a와 r의 값에 따른 수렴과 발산 유형

① $a = 0$인 경우는 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = 0$으로 수렴

② $a \neq 0$인 경우는 r값에 따라 발산과 수렴이 달라짐

- $r > 1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \infty$로 발산
- $r = 1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = a$로 수렴
- $-1 < r < 1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = 0$으로 수렴
- $r = -1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = a, -a$로 발산(진동)
- $r < -1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \infty, -\infty$로 발산

2. 수열의 극한과 발산

4) 등비수열의 수렴과 발산

[연습문제] 다음 문제에서 극한값을 구하세요.

① $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+5^n}$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n+1}$

3. 순열

1) 순열(permutation)이란

- 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개를 선택하여 일렬로 나열하는 것
  → n개에서 r개를 택한 순열이라고 함(중복 없고, 순서가 있음)
- 순열의 수의 표현

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \quad (\text{단, } 0 < r \le n)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

※팩토리얼 : $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

※ 파이썬 → intertools 라이브러리의 permutation() 함수 사용

3. 순열

1) 순열(permutation)이란

[연습문제]

① {1,2,3,4,5} 에서 세 개를 선택하여 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수를 구하세요.

② 트럼프 카드가 열 장 중 임의로 세 장을 뽑는 경우의 수를 구하세요.

3. 순열

2) 순열의 연산 성질

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \quad (\text{단}, 0 < r \leq n)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

① $r = n$일 때,

$${}_nP_n = n! = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

$\therefore 0! = 1$

② $r = 0$일 때,

$${}_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$\therefore \ {}_nP_0 = 1$

3. 순열

3) 중복순열

- 중복을 허락하고 r개를 일렬로 나열하는 수를 중복순열이라고 함

$$_n\Pi_r = n^r$$

[연습문제] {1, 2, 3, 4, 5, 6}에서 세자리 자연수를 만드는 경우의 수를 구하세요.

① 중복을 허락하지 않는 경우

② 중복을 허락하는 경우

4. 조합

1) 조합(combination)이란

- 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 선택하는 것

→ n개에서 r개를 택한 조합이라고 함(중복 없고 순서 없음)

$$
{}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{r!}{1}}
$$

$$
= \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단},\ 0 < r \le n)
$$

※ 파이썬 → intertools 라이브러리의 combinations()함수 사용

4. 조합

1) 조합(combination)이란

[연습문제] 한 반의 학생 수가 40명 있습니다.

① 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수를 구하세요.

② 주번 3명을 뽑는 경우의 수를 구하세요.

4. 조합

2) 중복조합

- 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 것

→ n개에서 r개를 택한 중복조합이라고 함

$$ {}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r} $$

[예시] 네 종류의 공에서 중복을 허용하여 일곱 개를 택하는 경우의 수

$$ {}_{4}H_{7} = {}_{4+7-1}C_{7} = {}_{10}H_{3} $$

$$ = \frac{{}_{10}P_{3}}{3!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120 $$

3. 순열과 조합

3) 순열과 조합의 비교

구분	순열	조합
순서와 위치	순서와 위치가 중요	순서와 위치가 중요하지 않음
표현	'배열하다'로 표현(${}_nP_r$)	'뽑는다'로 표현(${}_nC_r$)
계산방법	${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
배열 방법	배열 방법을 정하지 않음	배열 방법을 한가지로 정함

구분	순열	중복순열	조합	중복조합
순서	있음	있음	없음	없음
중복	불가능	가능	불가능	가능
표현	${}_nP_r$	${}_n\Pi_r = n^r$	${}_nC_r$	${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

정리하기

1. 수열의 개념 및 종류

- 수열은 규칙성이 있는 숫자의 나열한 것으로, 자연수를 정의역으로 갖는 함수나 그 함수의 결과로 얻은 원소들을 나열한 것
- 등차수열과 등비수열이 있으며, 두 항의 차이를 공차, 곱하는 일정한 수를 공비라고 함
- 등차수열의 일반항 : $a + (n-1)d$ 등비수열의 일반항 : $a_n = ar^{n-1}$
- 수열 $\{a_n\}$에서 n이 무한하게 커질 때, a_n의 값이 a에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 a에 수렴한다고 표현
- a를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라고 함

  $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 또는 $n \to \infty$ 일 때, $a_n \to a$
- 극한과는 반대되는 개념으로, 어떤 값에도 수렴하지 않는 수열을 발산이라고 함

  $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- 등비수열의 수렴과 발산은 $a_n = ar^{n-1}$에서 a와 r의 값에 따라 발산유형이 다름

정리하기

2. 순열

- 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개를 선택하여 일렬로 나열하는 것

  → n개에서 r개를 택한 순열이라고 함(중복 없고, 순서가 있음)

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \quad (\text{단, } 0 < r \le n) \quad = \frac{n!}{(n-r)!} $$

- 팩토리얼 : $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$
- 파이썬 → intertools 라이브러리의 permutation() 함수 사용
- 순열의 연산성질 : $0! = 1$, $i_nP_0 = 1$
- 중복을 허락하고 r개를 일렬로 나열하는 수를 중복순열이라고 함

  ${}_n\Pi_r = n^r$

정리하기

3. 조합

- 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 선택하는 것

  → n개에서 r개를 택한 조합이라고 함(중복 없고, 순서 없음)

$$
{}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{r!}{1}}
$$

$$
= \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \leq n)
$$

- 파이썬 → intertools 라이브러리의 combinations()함수 사용
- 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 것

  → n개에서 r개를 택한 중복조합이라고 함(${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$)
- 순열과 조합의 특성 비교

구분	순열	중복순열	조합	중복조합
순서	있음	있음	없음	없음
중복	불가능	가능	불가능	가능
표현	${}_nP_r$	${}_n\Pi_r = n^r$	${}_nC_r$	${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$