데이터과학과 AI를 위한 파이썬

04강. 적분

세종사이버대학교

김명배 교수

학습내용

- 목적함수
- 속도와 가속도
- 오차역전파
- 경사하강법
- 적분

학습목표

- 목적함수의 개념을 이해한다.
- 도함수의 활용으로 가속도, 경사하강법, 오차역전파에서 어떻게 활용되는지 이해한다.
- 적분의 개념과 부정/정 적분을 이해하고, 미적분학의 기본정리를 이해한다.
- 파이썬에서 미적분학의 기본 정리와 수치적분을 활용할 수 있다.

1. 도함수의 활용

1) 편미분(partial derivative)

- 미분방정식

① 상미분 방정식 : 미분 변수가 1개만 존재

② 편미분 방정식 : 미분 변수가 2개 이상 존재

→ x, y 중 하나를 상수로 취급

x 편미분의 표현 : $f_x(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial x}$

연습문제)

$z = 2x^2 + 3x^{2y} - 5xy + 3x$ 를 x와 y에 대해 편미분 하세요.

1. 도함수의 활용

2) 평균값 정리와 롤의 정리

- 구간의 표현

기호	의미		용어
(a, b)		$a < x < b$	열린 구간, 개구간
$[a, b]$		$a \leq x \leq b$	닫힌 구간, 폐구간
$(a, b]$		$a < x \leq b$	반열린 구간
$[a, b)$		$a \leq x < b$	

세종사이버대학교

1. 도함수의 활용

2) 평균값 정리와 롤의 정리

- 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서

미분 가능하면, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$인 c가 a와 b 사이에

적어도 하나 존재한다.

1. 도함수의 활용

2) 평균값 정리와 롤의 정리

- 평균값 정리

연습문제)

함수 $f(x) = x^2$에서 구간 [0, 5]에서 **평균값 정리**를 만족하는 상수 c값을 구하세요.

1. 도함수의 활용

2) 평균값 정리와 롤의 정리

- 롤의 정리란

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분 가능할 때, $f(a) = f(b)$ 이면 $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$ 인 c가 열린 구간 (a, b)에 **적어도 하나** 존재한다.

1. 도함수의 활용

2) 평균값 정리와 롤의 정리

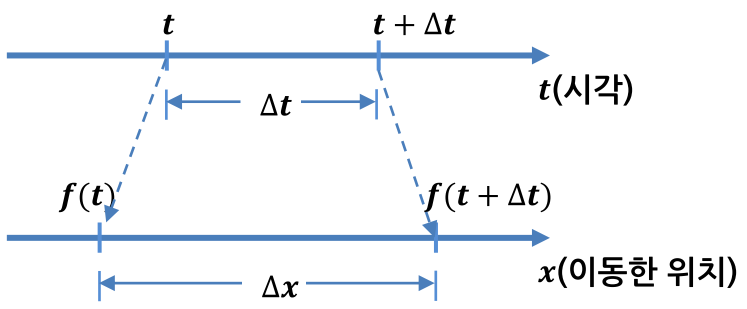
- 롤의 정리란

연습문제)

함수 $f(x) = 2x^3 - 6x$^2 에서 구간 [0, 5]에서 **롤의 정리**를 만족하는 상수 c값을 구하세요.

1. 도함수의 활용

3) 속도와 가속도



속도 $= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

가속도 $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ → 미분

1. 도함수의 활용

3) 속도화 가속도

연습문제)

원점과 수직선 위 임의의 점 P의 시간 t에서 위치를 $x = 2t^3 - 6t$라고 할 때,

1) $t = 3$ 에서 점 P의 속도와 가속도를 구하세요.

2) 점 P의 진행 방향이 바뀌는 시각을 구하세요.

1. 도함수의 활용

4) 예측 분석의 성능

- 예측분석이란

설명변수와 목표변수의 **인과관계**를 분석하여

관계(모델)를 규명하고(**모델링**)

알려지지 않은 목표변수를 **예측**

ex) 상품구매 가능성,해지 가능성,
주가, 판매량 등의 예측

- 선형모형의 대표적 모형(x: 독립변수, y: 종속변수)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_0 x_2 + \beta_0 x_3 \cdots + \epsilon$$

1. 도함수의 활용

4) 예측 분석의 성능

- **모수(β)**를 어떻게 찾을 것이냐
- 성능(**성능함수**)을 극대화 필요
  잔차(**손실/비용/오차 함수**)를 최소화
  → **목적함수**(objective function)
- 오차함수를 최소화하는 문제에 미분 사용
  $|f'(x)| = 0$이 되는 x를 찾음
  ➔ $|f'(x)|$ 가 작아지는 방향으로 이동을 반복
- **경사하강법**(gradient descent)이라고 함

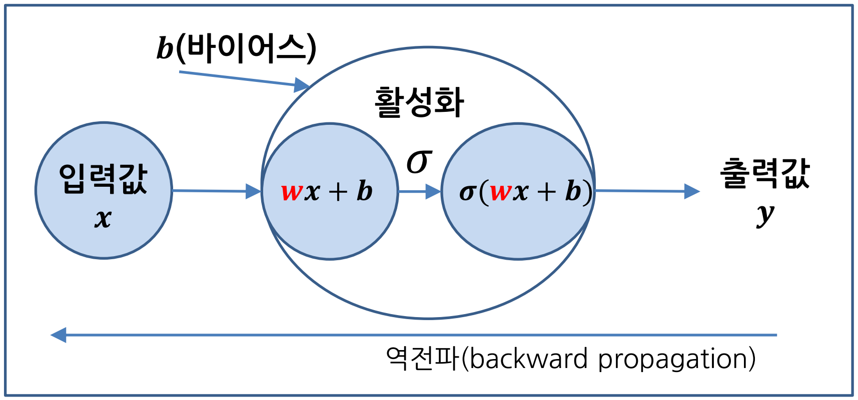
1. 도함수의 활용

5) 오차역전파

- 심층신경망(Deep Neural Network)

  입력층과 출력층, 그리고 그 사이에 은닉층으로 구성되어, 뇌의 신경세포의 연결관계를 흉내낸 수학적 모델

은닉층의 노드 내부의 동작 방식



2. 적분

1) 적분이란

- 적분은 미분과 반대되는 개념

2) 부정적분(indefinite integral)

- 정확하게 미분과 반대되는 개념(반미분)

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \leftrightarrow F(x) = \int f(x)dx + C$$

파이썬 : sympy.integrate()

2. 적분

3) 편미분의 부정적분

- $f(x, y)$: 함수 $F_1(x, y)$를 x로 편미분한 함수 일 때 표현

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} = f(x, y) \quad \leftrightarrow \quad F_1(x, y) = \int f(x, y)dx + C(y)$$

- $f(x, y)$: 함수 $F_2(x, y)$를 y로 편미분한 함수 일 때 표현

$$\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} = f(x, y) \quad \leftrightarrow \quad F_2(x, y) = \int f(x, y)dy + C(x)$$

2. 적분

4) 다차 도함수와 다중적분

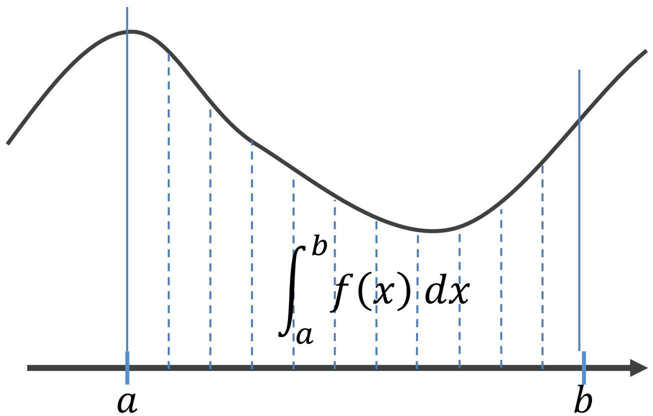
- $f(x, y)$: 함수 $F_3(x, y)$를 x로 한번, y로 다시 편미분한 함수 일 때 표현

$$\frac{\partial^2 F_3(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad \leftrightarrow \quad F_3(x, y) = \iint f(x, y) dy dx$$

2. 적분

5) 정적분(definite integral)

- 독립변수 x가 어떤 구간 [a, b] 사이일 때 함수 $f(x)$와 x축이 이루는 **면적**을 구하는 것



2. 적분

5) 정적분(definite integral)

- 미적분학의 기본 정리

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

파이썬 : F.subs, evalf()

- 수지적분 (numerical integration)

함수의 면적 부분을 실제로 **잘게 쪼개어** 면적을 근사하게 구하는 방법

파이썬 : sympy.integrate.quad()

2. 적분

5) 다변수 정적분

- 두 변수 적분은 2차원 평면에서 주어진 사각형 영역 아래의 부피

$$\int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x)\, dx\, dy$$

- 수치이중적분

파이썬 : sympy.integrate.dblquad()

정리하기

1. 편미분

- x, y 중 하나를 상수로 취급하여 미분 $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}$

2. 평균값 정리

- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분 가능하면,
  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 **적어도 하나** 존재한다.

2. 롤의 정리

- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분 가능할 때,
  $f(a) = f(b)$ 이면 $f'(c) = 0$ $(a < c < b)$ 인 c가 열린 구간 (a,b)에 **적어도 하나** 존재한다.

3. 가속도

- 가속도 = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ → 미분

4. 목적함수

- 예측모델의 성능을 표현하기 위해 정의한 함수
- 성능함수, 손실함수, 비용함수, 오차함수 등이 있음

5. 경사하강법

- 오차함수를 최소화하는 문제에 미분 사용
- $|f'(x)| = 0$이 되는 x를 찾기 위해 $|f'(x)|$ 가 작아지는 방향으로 이동을 반복

정리하기

6. 오차역전파

- 심층 신경망 등에서 입력값에 곱해지는 가중치의 최적화를 위해 미분이 사용됨

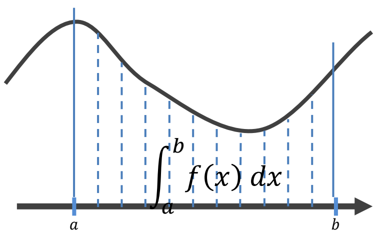
7. 부정적분

- 정확하게 미분과 반대되는 개념(반미분)
- 파이썬 : **sympy.integrate()**

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \leftrightarrow F(x) = \int f(x)dx + C$$

8. 정적분

- 독립변수 x가 어떤 구간 [a, b] 사이일 때,
  함수 $f(x)$와 x축이 이루는 면적을 구하는 것
- **파이썬 : F.subs, evalf()**



9. 수치적분

- 함수의 면적 부분을 실제로 잘게 쪼개어 면적을 근사하게 구하는 방법
- **파이썬 : sympy.integrate.quad()**