

# Funciones

## [1] Definición de función

Sea  $f$  una relación de  $A$  a  $B$ , se dice que  $f$  es función si se cumple:

$$a \in A \Rightarrow \exists! b \in B (a, b) \in f$$

### → Dominio y codominio

$A$  es el dominio de  $f$  y se nota  $\text{Dom}(f)$ .  $B$  es el codominio de  $f$  y se nota  $\text{Codom}(f)$ .

### → Notación

Si  $f$  es una función con  $\text{Dom}(f) = A$  y  $\text{Codom}(f) = B$  entonces se puede declarar usando la notación  $f : A \rightarrow B$ .

Como el conjunto imagen de cualquier elemento  $a \in A$  es un conjunto con un solo elemento empleamos la siguiente notación:  $f(a) = b$  en vez de  $f(a) = \{b\}$ .

## [2] Función inyectiva

Una función  $f : A \rightarrow B$  es inyectiva si:

$$\forall a_1 \in A \forall a_2 \in A f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

## [3] Sobre el conjunto imagen de un subconjunto

Sea  $f : A \rightarrow B$ ,  $A_1 \subseteq A$  y  $A_2 \subseteq A$  entonces:

1.  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2.  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
3.  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \Leftrightarrow f$  es inyectiva

## [4] Restricciones y extensiones

Sea  $f : A \rightarrow B$  y  $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$

1. La restricción de  $f$  a  $A_1$  es  $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B$  tal que  $a \in A_1 \Rightarrow f|_{A_1}(a) = f(a)$
2. La expansión de  $f$  a  $A_2$  es  $g : A_2 \rightarrow B$  tal que  $a \in A \Rightarrow g(a) = f(a)$

## [5] Sobre el conjunto pre-imagen de un subconjunto

Sea  $f : A \rightarrow B$ ,  $B_1 \subseteq B$  y  $B_2 \subseteq B$

1.  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3.  $f^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{f^{-1}(B_1)}$

## [6] Función sobreyectiva

Una función  $f : A \rightarrow B$  es sobreyectiva si:

$$\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b$$

## [7] Función biyectiva

Una función  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.

## [8] Composición de funciones

Sean  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D, a \in A$  y  $c \in C$ , entonces la composición de  $A$  con  $B$  es  $g \circ f$  tal que:

$$\begin{aligned}\text{Dom}(g \circ f) &= \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \in \text{Dom}(g)\} \\ \forall x \in \text{Dom}(g \circ f) \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x))\end{aligned}$$

Si  $\text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g) = \emptyset$  la composición no es posible.

### → Propiedades

1. La composición de funciones no es conmutativa.
2. La composición de funciones es asociativa:  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
3. Si  $f$  y  $g$  son inyectivas entonces  $g \circ f$  es inyectiva.
4. Si  $f$  y  $g$  son sobreyectivas entonces  $g \circ f$  es sobreyectiva.

## [9] Función inversible

**[TODO: Aclarar que significa  $\text{id}_A$  y  $\text{id}_B$  (son alguna función identidad)]**

Una función  $f : A \rightarrow B$  es inversible si existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $g \circ f = \text{id}_A \wedge f \circ g = \text{id}_B$

### → Propiedades

1. Si una función  $f$  es inversible la inversa es única y se nota  $f^{-1}$
2. Toda función es inversible si y solo si es biyectiva.
3. Dadas las funciones  $f$  y  $g$  inversibles:  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
4. Dada una función inversible  $f : A \rightarrow B$  donde las cantidades de elementos de  $A$  y  $B$  son finitas e iguales, entonces se cumple:  $f$  inyectiva  $\Leftrightarrow f$  sobreyectiva  $\Leftrightarrow f$  biyectiva.

# Operaciones

## [10] Definición de operación.

Cualquier función de la forma  $f : A \times A \rightarrow B$  es una operación binaria en  $A$ . Si además  $\text{Im}(f) \subseteq A$  entonces es cerrada en  $A$ . Notamos  $f(a, b)$  como  $a \otimes b$

Cualquier función de la forma  $g : A \rightarrow A$  es una operación monaria  $a$  en  $A$ .

## [11] Operaciones conmutativas

Dada  $f : A \times A \rightarrow B$  es conmutativa si y solo si:

$$x \otimes y = f(x, y) = f(y, x) = y \otimes x$$

## [12] Operaciones asociativas

Dada  $f : A \times A \rightarrow B$  cerrada en  $A$  es asociativa si y solo si:

$$(x \otimes y) \otimes z = f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) = x \otimes (y \otimes z)$$

## [13] Elemento neutro

Dada  $f : A \times A \rightarrow A$  tiene elemento neutro si  $\exists e \in A \quad e \otimes a = a \otimes e = a$

### ➡ Unicidad del neutro

Si una operación tiene neutro este es único.

### [14] Elemento inverso

Dada  $f : A \times A \rightarrow A$  con  $e$  elemento neutro de  $f$  entonces  $f$  tiene inversos si se cumple:

$$\forall a \in A \exists a' \in A \ a \otimes a' = a' \otimes a = e$$

### ➡ Unicidad de inversos

Si  $f : A \times A \rightarrow A$  es una operación asociativa y conmutativa con elemento neutro  $e \in A$  que posee inversos. Entonces cada elemento posee un único inverso.