

Vectores

[1] Definiciones

→ Magnitudes escalares

Todas las cantidades que puedan caracterizarse mediante un único número real son magnitudes escalares. Por ejemplo la masa de un objeto, o la edad de una persona.

→ Magnitudes vectoriales

Todas las cantidades que para su medición requieran además de magnitud, dirección y sentido son magnitudes vectoriales. Ejemplos son la velocidad y la fuerza de un objeto.

→ Vector

Un vector es un par ordenado de puntos. Sean A y B dos puntos tal que el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (A, B)$ es el vector que va de A hacia B entonces A es el origen de \vec{u} y B es el extremo de \vec{u} .

→ Representación gráfica de un vector

[TODO: Y si]

→ Vector nulo

Un vector \overrightarrow{AB} es nulo si el origen y el extremo coinciden ($A = B$) y se simboliza $\vec{0}$.

→ Dirección, sentido y módulo

Todo vector no nulo tiene:

- Una **dirección** dada por la recta que contiene el origen y el extremo o una paralela a la misma.
- Un **sentido**, todas las direcciones tienen dos sentidos donde el sentido de \overrightarrow{AB} es opuesto al sentido de \overrightarrow{BA} .
- Un **módulo** igual a la longitud del segmento \overline{AB} . Se simboliza $|\vec{u}|$ o $|\overrightarrow{AB}|$

El vector nulo no tiene dirección ni sentido pero sí tiene módulo igual a 0 y el módulo de cualquier vector no nulo es mayor a 0.

→ Igualdad entre vectores

Dos vectores no nulos se dicen iguales si y solo si tienen igual magnitud dirección y módulo. La igualdad caracteriza a los vectores libres, osea que dos vectores con igual origen y extremo son iguales pero también pueden serlo vectores con diferente origen y extremo. El vector nulo es igual solo a si mismo.

→ Paralelismo entre vectores

Dos vectores \vec{u} y \vec{v} no nulos se dicen paralelos si tienen igual dirección y se nota $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

→ Vector opuesto

Sea \vec{u} un vector no nulo, entonces $-\vec{u}$ es el vector opuesto a \vec{u} que tiene igual módulo, dirección y sentido opuesto. Nótese que $-\vec{0} = \vec{0}$

[2] Algunas operaciones de vectores

➔ Suma de vectores

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores, entonces su suma es $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ donde \vec{w} tiene el mismo origen que \vec{u} y el mismo extremo que \vec{v} .

1. Propiedades

Dados \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

1. Propiedad conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Propiedad asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. Existencia del elemento neutro: $\exists \vec{0} [\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}]$
4. Existencia del elemento opuesto: $\forall \vec{u} \neq \vec{0} \exists (-\vec{u}) [\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}]$

➔ Diferencia de vectores

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores, entonces su diferencia es $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

➔ Producto por un escalar

Sea \vec{u} un vector y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el producto de \vec{u} por α es $\alpha\vec{u}$ donde:

1. $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$
2. $\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} \parallel \vec{u}$
3. $\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\vec{u} \text{ tiene igual sentido a } \vec{u}, & \alpha > 0 \\ \alpha\vec{u} \text{ tiene distinto sentido a } \vec{u}, & \alpha < 0 \end{cases}$

1. Propiedades

Sean \vec{u} y \vec{v} vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares, entonces:

1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
3. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
4. $1\vec{u} = \vec{u} \wedge -1\vec{u} = -\vec{u}$
5. $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \vec{u} = \vec{0}$
6. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \vec{u} = \alpha\vec{v}$

➔ Angulo entre vectores

[TODO: Encontrar una definición no circular]

➔ Versores

Un versor es un vector de módulo 1.

1. Versor asociado a un vector

Dado un vector \vec{u} su versor asociado \vec{u}_0 es un versor con igual dirección y sentido que \vec{u} .

- $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

➔ Proyección de un vector sobre otro

1. Proyección escalar

La proyección escalar de \vec{v} sobre \vec{u} es $\vec{v}_{\vec{u}} = |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

2. Vector proyección

El vector proyección de \vec{v} sobre \vec{u} es $\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}$.

1. $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \wedge \neg(\vec{u} \perp \vec{v}) \Rightarrow \text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v}_{\vec{u}} \vec{u}_0$

➔ Producto escalar

El producto escalar de \vec{u} y \vec{v} es $\vec{u} \times \vec{v}$.

1. $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

1. Propiedades

Sean \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} vectores.

1. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$
4. $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \times \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

[3] Bases y componentes

➔ Conjuntos de vectores:

- \mathbb{V}_1 : Vectores en la recta.
- \mathbb{V}_2 : Vectores en el plano.
- \mathbb{V}_3 : Vectores en el espacio.

[TODO: Explicar bases y componentes y combinaciones lineales bien]

[4] Combinaciones lineales

[TODO: Explicar bases y componentes y combinaciones lineales bien]

[5] Versores fundamentales del plano

[TODO: Requiere ^^]

[6] Versores fundamentales del espacio

[TODO: Requiere ^^]

[7] Operaciones y propiedades por componentes

1. $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = u_1 v_2 - u_2 v_1, u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3$
3. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} (v_1 = \alpha u_1 \wedge v_2 = \alpha u_2 \wedge v_3 = \alpha u_3)$
4. $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \times \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$
5. $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

[8] Cosenos directores

Para un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ los cosenos directores son las componentes del versor asociado \vec{u}_0 .

- $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{i}}) = \frac{u_1}{|\vec{u}|} \wedge \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{j}}) = \frac{u_2}{|\vec{u}|} \wedge \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{k}}) = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$

[9] Componentes de un vector entre dos puntos

Dados dos vectores posición $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

[10] Coordenadas del punto medio entre dos puntos

Sea $M(x, y, z)$ punto medio entre los dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se dan.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MP_2}$$

$$\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2}$$

Entonces $2\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1P_2}$ o por componentes:

$$\begin{cases} 2(x - x_1) = x_2 - x_1 \\ 2(y - y_1) = y_2 - y_1 \\ 2(z - z_1) = z_2 - z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_2 - x_1}{2} + x_1 \\ y = \frac{y_2 - y_1}{2} + y_1 \\ z = \frac{z_2 - z_1}{2} + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_2 + x_1}{2} \\ y = \frac{y_2 + y_1}{2} \\ z = \frac{z_2 + z_1}{2} \end{cases}$$

[11] Producto vectorial

Para los vectores \vec{u} y \vec{v} el producto vectorial es $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y se define por:

1. $\vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0 \vee \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq 0 \wedge \vec{v} \neq 0 \wedge \neg(\vec{u} \parallel \vec{v}) \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección dada por: } (\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}) \\ \text{Sentido dado por: regla de la mano derecha} \\ \text{Módulo dado por: } |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\widehat{u,v}) \end{cases}$

[TODO: Mejorar la definición, está fea]

➔ Propiedades

Dados los vectores \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} se cumplen.

1. $\forall \vec{u} [\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}]$
2. $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$
3. $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$
4. $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
5. Antisimétrica: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
6. Distributivas: $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \end{cases}$
7. $\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v})$

➔ Por componentes

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

➔ Interpretación geométrica

[TODO:]

➡ Producto mixto

Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ el producto mixto entre ellos es $\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}$

1. Interpretación geométrica

[TODO:]