Números Reales

Veremos en este apunte una posible definición axiomática de los números reales. Los axiomas se dividen en tres grupos y son, los axiomas de cuerpo, de orden y del supremo.

Se da por sabido conocimiento básico de conjuntos y lógica. El conjunto de números reales es $\mathbb{R}$ y elementos del conjunto se declaran $a \in \mathbb{R}$ o $b, c \in \mathbb{R}$. Las operaciones binarias de suma y multiplicación (o producto) entre dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se notan $a + b$ y ab (o $a \cdot b$) respectivamente.

[1] Axiomas de cuerpo

➥ Los axiomas de cuerpo (propiedades aritméticas)

Dados los números reales $a, b, c \in \mathbb{R}$ de cumplen:

1. Propiedades conmutativas: $a + b = b + a$ y $ab = ba$
2. Propiedades asociativas: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$
3. Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$
4. Existencia de elementos neutros: $\exists 0[a + 0 = 0 + a = a]$ y $\exists 1[a1 = 1a = a]$
5. Existencia de elementos opuestos: $\forall a[\exists b[a + b = 0]]$
6. Existencia de elementos recíprocos (o inversos): $\forall a \neq 0\ \exists b[ab = 1]$

➥ Ley de simplificación para la suma

También llamada propiedad cancelativa de la suma es:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces si $a + b = a + c$ se da que $b = c$.

1. Demostración

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = a + c = d$. Por la existencia del elemento opuesto sabemos que hay un $y \in \mathbb{R}$ tal que $y + a = 0$ entonces:

1. $y + d = y + (a + b) \overset{\text{(i)}}{=} (y + a) + b = 0 + b \overset{\text{(ii)}}{=} b$
2. $y + d = y + (a + c) = (y + a) + c = 0 + c = c$

$\therefore b = c$

(i) Propiedad asociativa (ii) Existencia del elemento neutro

➥ Diferencia (o resta) de números reales

Primero definimos que dado un $a \in \mathbb{R}$ su elemento opuesto se nota $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ la diferencia entre ellos es $a - b = a + (-b)$

1. Propiedades de la diferencia y el opuesto

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen:

1. $-(-a) = a$
2. $-0 = 0$
3. $0 \cdot a = 0$
4. $a(-b) = -(ab) = (-a)b$
5. $(-a)(-b) = ab$
6. $a(b - c) = ab - ac$

➥ Ley de simplificación para producto

También llamada propiedad cancelativa del producto es:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ entonces si $ab = ac$ se da que $b = c$.

`[TODO: Demostración]`

➥ Unicidad del elemento neutro del producto

Si $1'$ es un número real que verifica $\forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 1' = 1' \cdot a = a$ entonces $1' = 1$

➥ Unicidad del reciproco

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists! b \in \mathbb{R} - \{0\}\ ab = ba = 1$

➥ Cociente de números reales

Primero definimos que dado un $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ su reciproco se nota a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$.

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ el cociente entre ellos es $\frac{a}{b} = ab^{-1}$

1. Propiedades del cociente y el reciproco

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se cumplen:

1. $1^{-1} = 1$
2. $\frac{a}{1} = a$
3. $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$
4. $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
5. $b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow$
   - $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$
   - $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$
   - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
6. $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$
7. $-a = (-1)a$

[2] Axiomas de orden

Para poder enunciar los axiomas de orden debemos primero declarar el conjunto de los números positivos. Suponemos que existe un $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ y lo llamamos conjunto de números positivos.

➥ Los axiomas de orden

7. La suma y el producto son cerrados en los números positivos:
   $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \wedge ab \in \mathbb{R}^+$
8. Para todo real $a \neq 0$ se da que a es positivo o su opuesto $-a$ es positivo pero no ambos:
   $\forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 0 \to (a \in \mathbb{R}^+ \wedge -a \notin \mathbb{R}^+) \vee (a \notin \mathbb{R}^+ \wedge -a \in \mathbb{R}^+)$
9. El elemento neutro de la suma (el cero) no es positivo:
   $0 \notin \mathbb{R}^+$

➥ Símbolos menor a, mayor a, …

Dados $a, b \in \mathbb{R}$

1. Menor a: $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$
2. Mayor a: $a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow b < a$
3. Menor o igual a: $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \vee a = b$

4. Mayor o igual a: $a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \vee a = b \Leftrightarrow b \leq a$

1. Propiedades

Para cualesquiera $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
3. $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
5. $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot a > 0$
6. $1 > 0$ osea $1 \in \mathbb{R}^+$
7. $a < b \Rightarrow -b < -a$
8. $ab > 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^+ \vee (a \notin \mathbb{R}^+ \wedge b \notin \mathbb{R}^+)$
9. $ab < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+ \veebar b \in \mathbb{R}^+$
10. $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$
11. $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

➥ Subconjuntos de los reales

1. Los números naturales

El conjunto de números naturales (notamos $\mathbb{N}$) se define mediante las siguientes reglas.

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$

Notemos que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$ ya que $1 > 0$ y $a > 0 \Rightarrow a + 1 > 0$.

2. Los números enteros

El conjunto de los números enteros (notamos $\mathbb{Z}$) se define por:

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \vee x = 0\}$$

3. Los números racionales

El conjunto de los números racionales (notamos $\mathbb{Q}$) se define por:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}\ q \neq 0 \wedge x = \frac{p}{q}\right\}$$

4. Los números irracionales

El conjunto de los números irracionales (notamos $\mathbb{I}$) se define por $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

➥ La recta real

`[TODO: Explicar la representación geométrica de los números reales]`

➥ Intervalos reales

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalo abierto)
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (semiabierto a derecha o semicerrado a izquierda)
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha)
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervalo cerrado)
5. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

6. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
7. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
8. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

[TODO: Representaciones gráficas]

➥ Valor absoluto de un número real

Dado $x \in \mathbb{R}$ su valor absoluto es:

$$|x| = \begin{cases} \mathrm{x}, & \mathrm{x} \geq 0 \\ -\mathrm{x}, & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$

1. Propiedades

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen:

1. $|x| \geq 0$
   - $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. Dado $a \in R^+$ entonces:
   - $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
   - $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \lor x > a$
5. Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
7. $y \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

2. Interpretación geométrica

Dado $x \in \mathbb{R}$ entonces $|x|$ es la distancia del punto correspondiente a x al punto correspondiente a 0.

[TODO: Completar]

[3] Axioma del supremo

➥ Cotas superiores

Dado el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y el número $b \in \mathbb{R}$ se dice que b es **cota superior** de A si $\forall a \in A \ a \leq b$. Si existe al menos una cota superior para A entonces A esta acotado superiormente.

➥ Supremos

Dado el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y el número $b \in \mathbb{R}$ se dice que b es **supremo** de A y se nota $b = \sup(A)$ si:

1. $\forall a \in A \ a \leq b$.
2. $\forall c \in \mathbb{R} \ c < b \rightarrow c \text{ no es cota superior de } A$

1. Unicidad del supremo

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si $a = \sup(A)$ y $b = \sup(A)$ entonces $a = b$.

➥ Máximo

Dados $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y $b \in \mathbb{R}$ se dice que b es el máximo de A y se nota $b = \max(A)$ si:

1. $\forall a \in A \ a \leq b$.

2. $b \in A$

1. Supremacía del máximo

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $b = \max(A) \Leftrightarrow b \in A \wedge b = \sup(A)$

➥ Axioma del supremo

Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo. Simbólicamente:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ [(\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ a \leq b) \rightarrow \exists b \in \mathbb{R}\ b = \sup(A)]$$

1. Existencia de raíces cuadradas

Dado $a \in \mathbb{R}$ entonces $a \geq 0 \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0 \wedge x^2 = a)$

2. Número de Euler

Notado e se define por:

$$e \in \mathbb{R} \wedge e = \sup\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}\right)$$

➥ Cotas inferiores, ínfimo y mínimo

Dado el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y el número $b \in \mathbb{R}$:

1. Se dice que b es **cota inferior** de A si $\forall a \in A\ a \geq b$.
   - Si existe al menos una cota inferior para A entonces A esta acotado inferiormente.
2. Se dice que b es **ínfimo** de A y se nota $b = \inf(A)$ si:
   i. $\forall a \in A\ a \geq b$.
   ii. $\forall c \in \mathbb{R}\ c > b \rightarrow c$ no es cota inferior de A
3. Se dice que b es el mínimo de A y se nota $b = \min(A)$ si:
   i. $\forall a \in A\ a \geq b$.
   ii. $b \in A$

1. Infimacía† del mínimo

† Esa palabra es una mentira

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $b = \min(A) \Leftrightarrow b \in A \wedge b = \inf(A)$

2. Teorema del ínfimo

Todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene supremo. Simbólicamente:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ [(\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ a \geq b) \rightarrow \exists b \in \mathbb{R}\ b = \inf(A)]$$