Inducción matemática

[1] Principio de buen orden

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ entonces A tiene primer elemento a si $\exists a \in A\ \forall x \in A\ a < x$.
2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ entonces A esta bien ordenado si $X \subseteq A \Rightarrow X$ tiene primer elemento.
3. $\mathbb{N}$ esta bien ordenado.

[2] Principio de inducción matemática

Sea $p(n)$ una proposición abierta que depende de $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{array}{l} p(1) \text{ es vedadera} \\ \forall n \in \mathbb{N}\ p(n) \to p(n+1) \\ \hline \therefore \forall n \in \mathbb{N}\ p(n) \end{array}$$

A la segunda premisa se le llama hipótesis inductiva.

➥ Demostración:

1. Sea $H = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}$ entonces $H \subseteq \mathbb{N}$
2. Supongo $H \neq \varnothing \Rightarrow \exists m[m \text{ primer elemento de } H] \Rightarrow p(m)$ es falso y $p(m-1)$ verdadero.
3. Sabemos por la primer premisa que $m \neq 1$, entonces $(m-1) \in \mathbb{N}$
4. Por la segunda premisa y (2.) que $p(m)$ es verdadero
5. Por (2.) y (4.) $p(m) \wedge \neg p(m)$
6. $\therefore H = \varnothing\ \ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ p(n)$

➥ Comenzando desde n_0

Ahora demostremos que también se da:

$$\begin{array}{l} p(n_0) \text{ es vedadera} \\ \forall n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\}\ p(n) \to p(n+1) \\ \hline \therefore \forall n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\}\ p(n) \end{array}$$

1. Sea $q(n) = p(n_0 + n - 1)$
2. Entonces $q(1)$ es verdadero
3. Y $q(n) \to q(n+1) \Leftrightarrow p(n_0 + n - 1) \to p(n_0 + n)$
4. $n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$

$n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\} \Leftrightarrow$

[3] Símbolo sumatoria

Dados $n \in \mathbb{N}$ números x_i con $i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n$ se define a la sumatoria entre $i = 1$ e $i = n$ de los x_i a:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} x_i = x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n) \end{cases}$$

Si se desea demostrar una proposición del tipo $\sum_{i=1}^{n} x_i = f(n)$ se puede (al menos intentar) demostrar por inducción tomando $\sum_{i=1}^{1} x_i = f(1)$ como caso base y $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{i=1}^{n} x_i \to \sum_{i=1}^{n+1} x_i$

➥ sumatoria desde $n_0 \in \mathbb{Z}$

Se extiende la definición de la sumatoria para incluir valores de $n_0 \in \mathbb{Z}$ (con $n_0 < n$) de la siguiente manera:

$$y_i = x_{i+n_0-1} \Rightarrow \sum_{i=n_0}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-n_0+1} y_i$$

[4] Símbolo productoria

Dados $n \in \mathbb{N}$ números x_i con $i \in \mathbb{N} \land i \leq n$ se define a la productoria entre $i = 1$ e $i = n$ de los x_i a:

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{1} x_i = x_1 \\ \prod_{i=1}^{k+1} x_i = x_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} x_i, \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n) \end{cases}$$

Si se desea demostrar una proposición del tipo $\prod_{i=1}^{n} x_i = f(n)$ se puede (al menos intentar) demostrar por inducción tomando $\prod_{i=1}^{1} x_i = f(1)$ como caso base y $\forall n \in \mathbb{N}\ \prod_{i=1}^{n} x_i \to \prod_{i=1}^{n+1} x_i$

➥ productoria desde $n_0 \in \mathbb{Z}$

Se extiende la definición de la productoria para incluir valores de $n_0 \in \mathbb{Z}$ (con $n_0 < n$) de la siguiente manera:

$$y_i = x_{i+n_0-1} \Rightarrow \prod_{i=n_0}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n-n_0+1} y_i$$

[5] Principio de inducción fuerte

Sea $p(n)$ una proposición abierta que depende de $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{array}{l} p(1) \text{ es vedadera} \\ \forall n \in \mathbb{N}\ (\forall m \in \mathbb{N} \cap [1, n]\ p(m)) \to p(n+1) \\ \hline \therefore \forall n \in \mathbb{N}\ p(n) \end{array}$$

➥ Demostración

1. Sea $H = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}$ entonces $H \subseteq \mathbb{N}$
2. Supongo $H \neq \varnothing \Rightarrow \exists m[m \text{ primer elemento de } H] \Rightarrow p(m)$ es falso y $\forall k \in \mathbb{N} \cap [1, m)\ p(m)$ verdadero.
3. Por la primer premisa $m \geq 2$
4. Por la segunda premisa, (2.) y (3.) $p(m)$ es verdadera
5. Por (2.) y (4.) $p(m) \land \neg p(m)$
6. $\therefore H = \varnothing \ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ p(n)$