Recta en el plano

[1] Recta

Dado P un punto en el plano y $\vec{u}$ un vector no nulo entonces la recta r que pasa por P en la dirección de $\vec{u}$ es el conjunto de puntos Q tal que:

$$Q \in r \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{u}$$

[2] Ecuaciones de la recta

Si queremos encontrar la expresión del vector posición sobre Q buscamos $\overrightarrow{OQ}$. Sabiendo que tenemos $\overrightarrow{PQ}$ entonces $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$, sustituyendo queda:

Ecuación Vectorial

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}$$

Luego si $P(x_0, y_0), Q(x, y), \vec{u} = (u_1, u_2)$ queda $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2)$ y reorganizando queda:

Ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Como sabemos que el vector $\vec{u}$ es no nulo podemos decir que $u_1 \neq 0 \vee u_2 \neq 0$ entonces se pueden despejar las ecuaciones para eliminar el parámetro λ de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{x-x_0}{u_1} \vee \lambda = \frac{y-y_0}{u_2}$$

$$u_1 y = u_1 y_0 + (x - x_0) u_2 \vee u_2 x = u_2 x_0 + (y - y_0) u_1$$

$$u_1 y = u_1 y_0 + (x - x_0) u_2 \vee u_2 x = u_2 x_0 + (y - y_0) u_1$$

$$u_2 x + (-u_1) y + (u_1 y_0 - u_2 x_0) = 0 \vee (-u_2) x + u_1 y + (u_2 x_0 - u_1 y_0) = 0$$

En cualquiera de ambos casos queda una expresión de la siguiente forma donde $a, b, c \in \mathbb{R}$:

Ecuación cartesiana general

$$ax + by + c = 0$$

Nótese que el vector $\vec{n} = (a, b)$ es perpendicular a la recta r ya que es perpendicular al vector $\vec{u}$ que le da dirección a la recta.

$$\vec{n} = (u_2, -u_1) \vee \vec{n} = (-u_2, u_1)$$

$$\vec{u} \times \vec{n} = (u_1, u_2) \times (u_2, -u_1) \vee \vec{u} \times \vec{n} = (u_1, u_2) \times (-u_2, u_1)$$

$$\vec{u} \times \vec{n} = u_1 u_2 - u_1 u_2 \vee \vec{u} \times \vec{n} = -u_1 u_2 + u_1 u_2$$

$$\vec{u} \times \vec{n} = 0 \vee \vec{u} \times \vec{n} = 0$$

$$\vec{u} \times \vec{n} = 0$$

$$\therefore \vec{n} \perp r$$

Si además se tiene que $|\vec{n}| = 1$ la ecuación cartesiana general es también ***Ecuación normal***.

Si $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$ la ecuación cartesiana general se puede reescribir como:

Ecuación segmentaria

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

Donde $A\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ y $B\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ son los puntos de de intersección de la recta con el eje x e y respectivamente.

Si $b \neq 0$ la ecuación cartesiana general se puede reescribir como $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$ y definiendo $m = -\frac{a}{b}$ y $h = -\frac{c}{a}$ queda:

Ecuación explícita

$$y = mx - h$$

A m se le llama pendiente y h es la ordenada al origen. La recta r interseca al eje y en (0, h).

Con $a \neq 0$ existe la otra ecuación explícita simétrica a la anterior con x en función de y.

[3] Recta por dos puntos

Sean r una recta y $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in r$ dos puntos pertenecientes a la misma, entonces el vector $\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ indica la dirección de la recta. Queda así la ecuación paramétrica con punto de paso P_1:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $x_1 \neq x_2$ la ecuación explicita con punto de paso P_1 y pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Si $x_1 = x_2$ la ecuación cartesiana queda: $x - x_1 = 0$

[4] Posición relativa de dos rectas

Dadas dos rectas r_1 y r_2 estas pueden ser:

1. **Paralelas** y se nota $r_1 \parallel r_2$ si y solo si los vectores dirección/normales son paralelos.
   - Son **coincidentes** si comparten al menos punto de paso.
     - $r_1 \parallel r_2 \land r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$
   - Son **estrictamente paralelas** si no comparten ningún punto.
     - $r_1 \parallel r_2 \land r_1 \cap r_2 = \varnothing$.
2. **Secantes** si no son paralelas.
   - $r_1 \nparallel r_2 \Rightarrow \exists! P[P \in r_1 \cap r_2]$

[5] Distancia de un punto a una recta

Dados P un punto y r una recta sea s una recta tal que $P \in s \land s \perp r$ entonces $\exists! P'[P' \in r \cap s]$. La distancia de P a r es $d(P, r)$ y es igual a la distancia entre P' y P igual a $\left|\overrightarrow{P'P}\right|$.

Sea $r) ax + by + c = 0, P(x_0, y_0), \vec{n} = (a, b)$ y $Q(x', y') \in r$ entonces:

`[TODO: Arreglar los ángulos]`

$$
\begin{aligned}
d(P,r) &= \left|\overrightarrow{P'P}\right| \\
&= \left|\overrightarrow{QP}\right| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{P'P}, \overrightarrow{QP}}\right) \\
&= \left|\overrightarrow{QP}\right| \cos\left(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{QP}}\right) \\
&= \left|\overrightarrow{QP}\right| \frac{\left|\vec{n} \times \overrightarrow{QP}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{QP}\right|} \\
&= \frac{\left|\vec{n} \times \overrightarrow{QP}\right|}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{|(a,b) \times (x_0 - x', y_0 - y')|}{|(a,b)|} \\
&= \frac{|a(x_0 - x') + b(y_0 - y')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + (-ax' - by')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}
$$