

# Polinomios

## [1] Polinomio a coeficientes complejos

Sea  $n \in \mathbb{N}_0 \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n] \ a_i \in \mathbb{C} \wedge a_n \neq 0$  entonces Una función polinómica o polinomio a coeficientes complejos es una función de la forma:

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- $a_k$  es el  $k$ -ésimo coeficiente.
- $a_k x^k$  es el  $k$ -ésimo término o monomio.
- $p(x) \neq 0 \Rightarrow n$  es el grado de polinomio y se nota  $\text{gr}(p) = n$ .
- $a_0$  es el coeficiente (o termino) independiente.
- $a_n$  es el coeficiente principal.
- $\mathbb{C}[x]$  es el conjunto de todos los polinomios a coeficientes complejos en la variable  $x$ .
- $p(x) = 0 \Rightarrow p = \bar{0}, \bar{0}$  es el polinomio nulo.
- $p(x) = 1 \Rightarrow p = \bar{1}$
- $\text{gr}(p) = 0 \Rightarrow p$  es una función constante no nula.

## [2] Igualdad de polinomios

Dados  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  de ley  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  y  $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$  se dice que son iguales si se cumple:

$$\text{gr}(p) = \text{gr}(q) \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n] \ a_i = b_i$$

## [3] Operaciones de polinomios

Sean  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  y  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$  s

### ➔ Suma

La suma de  $p$  y  $q$  es el polinomio suma definido por:

$$(p + q): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto (p + q)(x) = p(x) + q(x)$$

### ➔ Opuesto

El opuesto de  $p$  se define por:

$$-p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto (-p)(x) = -p(x)$$

### ➔ Diferencia

La diferencia de  $p$  y  $q$  es el polinomio definido por:

$$(p - q): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto (p - q)(x) = (p + (-q))(x) = p(x) - q(x)$$

### ➔ Multiplicación

La multiplicación de  $p$  y  $q$  es el polinomio definido por:

$$(p \cdot q): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto (p \cdot q)(x) = p(x)q(x) = \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^m b_j x^j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

## ➔ Inverso

Se dice que  $q$  es el inverso de  $p$  si  $p \cdot q = \bar{1}$ . Esto se da si:

$$p(x)q(x) = 1 \Rightarrow q(x) = p(x)^{-1} = \left( \sum_{i=0}^n a_i x^i \right)^{-1}$$

Notemos que si  $n = 0$  queda que  $q(x) = a_0^{-1} = \frac{1}{a_0}$ , por lo tanto:

$$\forall p \in \mathbb{C}[x] \quad \text{gr}(p) = 0 \Rightarrow p \text{ tiene inverso con grado } 0$$

## ➔ Propiedades

1.  $p \neq \bar{0} \wedge q \neq \bar{0} \Rightarrow \text{gr}(p + q) \leq \max\{\text{gr}(p) + \text{gr}(q)\}$
2.  $p \neq \bar{0} \wedge q \neq \bar{0} \Rightarrow \text{gr}(p \cdot q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$
3. La suma es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro  $\bar{0}$  y elementos opuestos.
4. La multiplicación es cerrada, conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro  $\bar{1}$ .
5. La multiplicación es distributiva respecto a la suma.

## ➔ Algoritmo de división

Sean  $p, q \in \mathbb{C}[x] \wedge q \neq \bar{0} \Rightarrow \exists! c, r \in \mathbb{C}[x] \quad p = c \cdot q + r \wedge (r = \bar{0} \vee 0 \leq \text{gr}(r) < \text{gr}(q))$

### 1. Regla de Ruffini

$$q(x) = x - \alpha \wedge \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} p = c \cdot q + r \\ r = a_0 + \alpha b_0 \\ c(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \\ b_{n-1} = a_n \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n-2] b_i = a_{i+1} + \alpha b_{i+1} \end{cases}$$

El método gráfico es el siguiente: **[TODO: Explicación]**

	$a_n$	$a_{n-1}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$\alpha$		$\alpha b_{n-1}$	$\dots$	$\alpha b_2$	$\alpha b_1$	$\alpha b_0$
	$a_n$	$a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$	$\dots$	$a_2 + \alpha b_2$	$a_1 + \alpha b_1$	$a_0 + \alpha b_0$

### 2. Teorema del resto

Si  $\text{gr}(p) \geq 1 \wedge a \in \mathbb{C} \Rightarrow p(z)$  es igual al resto de la división de  $p$  por  $x - z$ . Esto es porque por el algoritmo de la división  $p(x) = (x - z)c(x) + r(x) \Rightarrow p(z) = (z - z)c(x) + r(x) = r(x)$

### 3. Raíces de polinomios

Sea  $z \in \mathbb{C}$  se dice que  $z$  es raíz de  $p$  si y solo si  $p(z) = 0$ .

Si  $z$  es raíz de  $p$  si y solo si  $x - z$  divide a  $p$ .

## [4] Factorización de polinomios a coeficientes enteros

### → Teorema fundamental del álgebra

$$\forall p \in \mathbb{C}[x] \quad \text{gr}(p) \geq 1 \rightarrow \exists z \in \mathbb{C} \quad p(z) = 0$$

Deducimos entonces que si  $\text{gr}(p) \geq 1$  podemos expresar a  $p(x)$  como  $(x - \alpha_1)c_1(x)$  donde  $c_1$  tiene grado  $\text{gr}(p) - 1$ . Si  $\text{gr}(c_1) \geq 1$  entonces se puede expresar a  $c_1(x)$  como  $(x - \alpha_2)c_2(x)$  y así... Al final nos queda  $c_n \in \mathbb{C} \wedge n = \text{gr}(p) \wedge p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)c_n$

### → Descomposición factorial

Sea  $p \in \mathbb{C}[x]$ ,  $r$  la cantidad de raíces de  $p$ ,  $n = \text{gr}(p)$  y  $\forall i \in \mathbb{N} \cap [1, r] \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \wedge l_i \in \mathbb{N}$  entonces se llama descomposición factorial del polinomio  $p$  a la expresión.

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{l_i}$$

- $\sum_{i=1}^r l_i = n$
- $\text{gr}(p) = n \Rightarrow p$  tiene a lo sumo  $n$  raíces.
- $l_i$  es la multiplicidad de  $a_i$

### → Teorema de Gauss

Sea  $p \in \mathbb{C}[x]$  tal que  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  y  $a_i \in \mathbb{Z}$  entonces:

$$\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \wedge p\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \Rightarrow r|a_0 \wedge s|a_n$$

**[TODO: Agregar un ejemplo del método de búsqueda y verificación de raíces]**

### → Raíces complejas de un polinomio a coeficientes reales

Si un polinomio  $p \in \mathbb{C}[x]$  tiene una raíz compleja  $\alpha \in \mathbb{C}$  entonces también tiene por raíz al conjugado de  $\alpha = \bar{\alpha}$

$$p(\bar{\alpha}) = \sum_{i=0}^n a_i \bar{\alpha}^i = \sum_{i=0}^n \overline{a_i \alpha^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} \overline{\alpha^i} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i \alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i} = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$$