Funciones

[1] Definición de función

Sea f una relación de A a B, se dice que f es función si se cumple:

$$a \in A \Rightarrow \exists! b \in B \ (a, b) \in f$$

➥ Dominio y codominio

A es el dominio de f y se nota $\mathrm{Dom}(f)$. B es el codominio de f y se nota $\mathrm{Codom}(f)$.

➥ Notación

Si f es una función con $\mathrm{Dom}(f) = A$ y $\mathrm{Codom}(f) = B$ entonces se puede declarar usando la notación $f : A \to B$.

Como el conjunto imagen de cualquier elemento $a \in A$ es un conjunto con un solo elemento empleamos la siguiente notación: $f(a) = b$ en vez de $f(a) = \{b\}$.

[2] Función inyectiva

Una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

$$\forall a_1 \in A \ \forall a_2 \in A \ f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$$

[3] Sobre el conjunto imagen de un subconjunto

Sea $f : A \to B, A_1 \subseteq A$ y $A_2 \subseteq A$ entonces:

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
3. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \Leftrightarrow f$ es inyectiva

[4] Restricciones y extensiones

Sea $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$

1. La restricción de f a A_1 es $f|_{A_1} : A_1 \to B$ tal que $a \in A_1 \Rightarrow f|_{A_1}(a) = f(a)$
2. La expansión de f a A_2 es $g : A_2 \to B$ tal que $a \in A \Rightarrow g(a) = f(x)$

[5] Sobre el conjunto pre-imagen de un subconjunto

Sea $f : A \to B, B_1 \subseteq B$ y $B_2 \subseteq B$

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}\left(\overline{B_1}\right) = \overline{f^{-1}(B_1)}$

[6] Función sobreyectiva

Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si:

$$\forall b \in B \ \exists a \in A \ f(a) = b$$

[7] Función biyectiva

Una función $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.

[8] Composición de funciones

Sean $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D, a \in A$ y $c \in C$, entonces la composición de A con B es $g \circ f$ tal que:

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$$
$$\forall x \in \mathrm{Dom}(g \circ f) \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \varnothing$ la composición no es posible.

➥ Propiedades

1. La composición de funciones no es conmutativa.
2. La composición de funciones es asociativa: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
3. Si f y g son inyectivas entonce $g \circ f$ es inyectiva.
4. Si f y g son sobreyectivas entonce $g \circ f$ es sobreyectiva.

[9] Función inversible

[TODO: Aclarar que significa id_A y id_B (son alguna función identidad)]

Una función $f : A \to B$ es inversible si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A \wedge f \circ g = \mathrm{id}_B$

➥ Propiedades

1. Si una función f es inversible la inversa es única y se nota f^{-1}
2. Toda función es inversible si y solo sí es biyectiva.
3. Dadas las funciones f y g inversibles: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
4. Dada una función inversible $f : A \to B$ donde las cantidades de elementos de A y B son finitas e iguales, entonces se cumple: f inyectiva $\Leftrightarrow$ f sobreyectiva $\Leftrightarrow$ f biyectiva.

Operaciones

[10] Definición de operación.

Cualquier función de la forma $f : A \times A \to B$ es una operación binaria en A. Si además $\mathrm{Im}(f) \subseteq A$ entonces es cerrada en A. Notamos $f(a, b)$ como $a \otimes b$

Cualquier función de la forma $g : A \to A$ es una operación monaria a en A.

[11] Operaciones conmutativas

Dada $f : A \times A \to B$ es conmutativa si y solo si:

$$x \otimes y = f(x, y) = f(y, x) = y \otimes x$$

[12] Operaciones asociativas

Dada $f : A \times A \to B$ cerrada en A es asociativa si y solo si:

$$(x \otimes y) \otimes z = f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) = x \otimes (y \otimes z)$$

[13] Elemento neutro

Dada $f : A \times A \to A$ tiene elemento neutro si $\exists e \in A \ e \otimes a = a \otimes e = a$

➥ Unicidad del neutro
Si una operación tiene neutro este es único.

[14] Elemento inverso
Dada $f : A \times A \to A$ con e elemento neutro de f entonces f tiene inversos si se cumple:

$$\forall a \in A \; \exists a' \in A \; a \otimes a' = a' \otimes a = e$$

➥ Unicidad de inversos
Si $f : A \times A \to A$ es una operación asociativa y conmutativa con elemento neutro $e \in A$ que posee inversos. Entonces cada elemento posee un único inverso.