

# Números Complejos

## [1] Los números complejos

Todo número complejo es de la forma  $z = a + ib$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . A  $i$  se le llama unidad imaginaria y se define por la relación  $i^2 = -1$ .

Esa forma de representar un numero complejo se llama forma canónica.

### ➔ El conjunto $\mathbb{C}$

Al conjunto de todos los números complejos se lo define  $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ .

### ➔ Componentes

Para todo número complejo  $z = a + ib$  se definen

1. Parte real de  $z$ :  $\text{Re}(z) = a$
2. Parte imaginaria de  $z$ :  $\text{Im}(z) = b$

## [2] Las operaciones de los números complejos

Sean  $z_1 = a_1 + ib_1$  y  $z_2 = a_2 + ib_2$  dos números complejos se definen.

### ➔ Igualdad

Antes de definir las operaciones debemos definir la igualdad entre números complejos. Se dice que  $z_1$  es igual a  $z_2$  si se cumple tienen igual parte real e imaginaria. Simbólicamente:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

### ➔ Suma

La suma de dos números complejos es  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

### ➔ Producto

El producto de dos números complejos es  $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_1) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

## [3] Teoremas de cuerpo

Sean  $z, w$  y  $u$  números complejos, entonces valen:

1. Clausura de la suma y el producto:  $(z + w) \in \mathbb{C}$  y  $(zw) \in \mathbb{C}$
2. Ley conmutativa de la suma y el producto:  $z + w = w + z$  y  $zw = wz$
3. Ley asociativa de la suma y el producto:  $(z + w) + u = z + (w + u)$  y  $(zw)u = z(wu)$
4. Ley distributiva del producto respecto a la suma:  $z(w + u) = zw + zu$
5. Existencia del elemento neutro de la suma:  $\exists 0 \in \mathbb{C} \ 0 + z = z$
6. Existencia del elemento identidad del producto:  $\exists 1 \in \mathbb{C} \ 1z = z$
7. Existencia del elemento opuesto:  $\forall z \in \mathbb{C} \ \exists -z \in \mathbb{C} \ z + (-z) = 0$
8. Existencia del elemento inverso:  $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} \ \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \ z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} \wedge z^{-1}z = 1$

## [4] Más operaciones

### ➔ Resta

La resta de dos números complejos  $z_1$  y  $z_2$  es  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

## ➔ División

La resta de dos números complejos  $z_1$  y  $z_2 \neq 0$  es  $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$

## ➔ Potencia de exponente entero

La potencia de exponente entero para  $z \in \mathbb{C}$  y  $n \in \mathbb{Z}$  es

$$z^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ z, & n = 1 \\ z^{n-1}z, & n \geq 2 \\ (z^{-1})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

### 1. Propiedades

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  y  $n, k \in \mathbb{Z}$  entonces:

1.  $z^k z^n = z^{k+n}$
2.  $(z^k)^n = z^{kn}$
3.  $(zw)^n = z^n w^n$
4.  $w \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n}$

### 2. Potencias de la unidad imaginaria

Se da que para todo  $n \in \mathbb{N}$  el resultado de  $i^n$  es fácilmente predecible y es:

$$\begin{cases} 1, & n = 0 \\ i, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ -i, & n = 3 \\ i^r, & n \geq 4 \text{ donde } r \text{ es el resto de } \frac{n}{4} \end{cases}$$

## ➔ Raíz cuadrada de un numero complejo

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  decimos que  $z$  es raíz cuadrada de  $w$  si  $z^2 = w$ .

### 1. Raíz cuadrada de un numero real negativo

Sea  $z \in \mathbb{C}$  raíz cuadrada de  $a \in \mathbb{R}^-$  entonces  $z = \pm i\sqrt{|a|}$

## [5] Forma de par ordenado de un número complejo

Los números complejos son *identificables* con los pares de números reales. Esto quiere decir que...

**[TODO: no se que significa]**

## ➔ Pares ordenados

Los pares ordenados de números reales son de la forma  $z = (a, b)$  donde  $a$  y  $b$  son números reales.

### 1. Igualdad

Los pares ordenados  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  son iguales si y solo si  $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

### 2. Suma

La suma de dos pares ordenados se define por  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

### 3. Producto

El producto de dos pares ordenados se define por  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

**[TODO: completar]**

## → Unidad imaginaria

La unidad imaginaria se define por  $i = (0, 1)$  que verifica:

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$$

## [6] Representación geométrica de los números complejos en el plano complejo

[TODO: acortar título]

[TODO: Los malditos gráficos]

## → Conjugado de un número complejo

Dado  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  el conjugado de  $z$  es  $\bar{z} = a - ib$

### 1. Propiedades

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces:

1.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2.  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3.  $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$
4.  $z * \bar{z} = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$
5.  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$

## [7] Módulo y argumento

Dado  $z \in \mathbb{C}$

1. Su módulo  $|z|$  es la longitud del segmento  $\overline{OP}$  donde  $P$  es el punto asociado a  $z$ .
2. Su argumento  $\text{Arg}(z)$  es el conjunto de todos los ángulos que forma el vector  $\overrightarrow{OP}$  con el semieje positivo de las abscisas. (El 0 no tiene argumento)
3. Su argumento principal es  $\arg(z) \in \text{Arg}(z)$  tal que  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$
4.  $\text{Arg}(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \varphi = \arg(z) + 2k\pi\}$
5.  $|z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 = z\bar{z}$
6.  $\cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|}$ ,  $\sin(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}$  y  $\tan(\arg(z)) = \frac{b}{a}$
7. Si  $z \neq 0$  entonces:

$$\arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & a \neq 0 \wedge (z \in \text{I}_c \vee z \in \text{IV}_c) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & a \neq 0 \wedge z \in \text{II}_c \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi, & a \neq 0 \wedge z \in \text{III}_c \end{cases}$$

## [8] Forma trigonométrica de un número complejo

Sean  $z = a + ib$ ,  $\rho = |z|$  y  $\varphi \in \text{Arg}(z)$  se define la forma trigonométrica de  $z$  como

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Despejando queda:  $a = \rho \cos \varphi \wedge b = \rho \sin \varphi$

### 1. Propiedades

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$

1.  $|zw| = |z||w|$
2.  $\arg(z) + \arg(w) \in \text{Arg}(zw)$

## [9] Forma polar de un número complejo

Sea  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $\rho = |z|$  y  $\varphi \in \text{Arg}(z)$  entonces la forma polar de  $z$  es  $\rho_\varphi$ .

Así queda que si  $z = \rho_\varphi$  y  $w = \delta_\theta$  se cumple  $z = w \Leftrightarrow \rho = \delta \wedge \exists k \in \mathbb{Z} \varphi = \theta + 2k\pi$

### 1. Propiedades

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $z = \rho_\varphi$  y  $w = \delta_\theta$

1.  $zw = (\rho\delta)_{\varphi+\theta}$
2.  $w \neq 0 \Rightarrow \frac{z}{w} = \left(\frac{\rho}{\delta}\right)_{\varphi-\theta}$
3.  $z^n = (\rho^n)_{n\varphi}$

## [10] Raíces n-ésimas de un numero complejo

### ➔ Formula de De Moivre

Sea  $z = \rho_\varphi \in \mathbb{C}$  entonces si  $w = \delta_\theta \in \mathbb{C}$  es una raíz  $n$ -ésima de  $z$  por la formula de De Moivre:

$$\delta = \sqrt[n]{\rho}$$

$$\exists k \in \mathbb{N} \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

## [11] Apéndice

### ➔ La resolvente

Cuando se quiere determinar las raíces de un polinomio de segundo grado con coeficientes complejos notamos que se evita el uso del símbolo  $\pm$  quedando  $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$  ya que todo complejo tiene dos raíces cuadradas.