

# Inducción matemática

## [1] Principio de buen orden

1. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  entonces  $A$  tiene primer elemento  $a$  si  $\exists a \in A \forall x \in A a < x$ .
2. Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  entonces  $A$  esta bien ordenado si  $X \subseteq A \Rightarrow X$  tiene primer elemento.
3.  $\mathbb{N}$  esta bien ordenado.

## [2] Principio de inducción matemática

Sea  $p(n)$  una proposición abierta que depende de  $n \in \mathbb{N}$  entonces:

$$\frac{\begin{array}{l} p(1) \text{ es verdadera} \\ \forall n \in \mathbb{N} p(n) \rightarrow p(n+1) \end{array}}{\therefore \forall n \in \mathbb{N} p(n)}$$

A la segunda premisa se le llama hipótesis inductiva.

### ➡ Demostración:

1. Sea  $H = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}$  entonces  $H \subseteq \mathbb{N}$
2. Supongo  $H \neq \emptyset \Rightarrow \exists m [m \text{ primer elemento de } H] \Rightarrow p(m)$  es falso y  $p(m-1)$  verdadero.
3. Sabemos por la primer premisa que  $m \neq 1$ , entonces  $(m-1) \in \mathbb{N}$
4. Por la segunda premisa y (2.) que  $p(m)$  es verdadero
5. Por (2.) y (4.)  $p(m) \wedge \neg p(m)$
6.  $\therefore H = \emptyset \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} p(n)$

### ➡ Comenzando desde $n_0$

Ahora demostremos que también se da:

$$\frac{\begin{array}{l} p(n_0) \text{ es verdadera} \\ \forall n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\} p(n) \rightarrow p(n+1) \end{array}}{\therefore \forall n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\} p(n)}$$

1. Sea  $q(n) = p(n_0 + n - 1)$
  2. Entonces  $q(1)$  es verdadero
  3. Y  $q(n) \rightarrow q(n+1) \Leftrightarrow p(n_0 + n - 1) \rightarrow p(n_0 + n)$
  4.  $n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} \wedge n$
- $$n \in \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\} \Leftrightarrow$$

## [3] Símbolo sumatoria

Dados  $n \in \mathbb{N}$  números  $x_i$  con  $i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n$  se define a la sumatoria entre  $i = 1$  e  $i = n$  de los  $x_i$  a:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^1 x_i = x_1 \\ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = x_{k+1} + \sum_{i=1}^k x_i, \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n) \end{cases}$$

Si se desea demostrar una proposición del tipo  $\sum_{i=1}^n x_i = f(n)$  se puede (al menos intentar) demostrar por inducción tomando  $\sum_{i=1}^1 x_i = f(1)$  como caso base y  $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i$

### ➡ **sumatoria desde $n_0 \in \mathbb{Z}$**

Se extiende la definición de la sumatoria para incluir valores de  $n_0 \in \mathbb{Z}$  (con  $n_0 < n$ ) de la siguiente manera:

$$y_i = x_{i+n_0-1} \Rightarrow \sum_{i=n_0}^n x_i = \sum_{i=1}^{n-n_0+1} y_i$$

## [4] **Símbolo productoria**

Dados  $n \in \mathbb{N}$  números  $x_i$  con  $i \in \mathbb{N} \wedge i \leq n$  se define a la productoria entre  $i = 1$  e  $i = n$  de los  $x_i$  a:

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^1 x_i = x_1 \\ \prod_{i=1}^{k+1} x_i = x_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^k x_i, \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n) \end{cases}$$

Si se desea demostrar una proposición del tipo  $\prod_{i=1}^n x_i = f(n)$  se puede (al menos intentar) demostrar por inducción tomando  $\prod_{i=1}^1 x_i = f(1)$  como caso base y  $\forall n \in \mathbb{N} \prod_{i=1}^n x_i \rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} x_i$

### ➡ **productoria desde $n_0 \in \mathbb{Z}$**

Se extiende la definición de la productoria para incluir valores de  $n_0 \in \mathbb{Z}$  (con  $n_0 < n$ ) de la siguiente manera:

$$y_i = x_{i+n_0-1} \Rightarrow \prod_{i=n_0}^n x_i = \prod_{i=1}^{n-n_0+1} y_i$$

## [5] **Principio de inducción fuerte**

Sea  $p(n)$  una proposición abierta que depende de  $n \in \mathbb{N}$  entonces:

$$\frac{\begin{array}{l} p(1) \text{ es verdadera} \\ \forall n \in \mathbb{N} (\forall m \in \mathbb{N} \cap [1, n] p(m)) \rightarrow p(n+1) \end{array}}{\therefore \forall n \in \mathbb{N} p(n)}$$

### ➡ **Demostración**

1. Sea  $H = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}$  entonces  $H \subseteq \mathbb{N}$
2. Supongo  $H \neq \emptyset \Rightarrow \exists m [m \text{ primer elemento de } H] \Rightarrow p(m)$  es falso y  $\forall k \in \mathbb{N} \cap [1, m) p(m)$  verdadero.
3. Por la primer premisa  $m \geq 2$
4. Por la segunda premisa, (2.) y (3.)  $p(m)$  es verdadera
5. Por (2.) y (4.)  $p(m) \wedge \neg p(m)$
6.  $\therefore H = \emptyset \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} p(n)$