Vectores

[1] Definiciones

➥ Magnitudes escalares

Todas las cantidades que puedan caracterizarse mediante un único número real son magnitudes escalares. Por ejemplo la masa de un objeto, o la edad de una persona.

➥ Magnitudes vectoriales

Todas las cantidades que para su medición requieran ademas de magnitud, dirección y sentido son magnitudes vectoriales. Ejemplos son la velocidad y la fuerza de un objeto.

➥ Vector

Un vector es un par ordenado de puntos. Sean A y B dos puntos tal que el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (A, B)$ es el vector que va de A hacia B entonces A es el origen de $\vec{u}$ y B es el extremo de $\vec{u}$.

➥ Representación gráfica de un vector

[TODO: Y si]

➥ Vector nulo

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es nulo si el origen y el extremo coinciden ($A = B$) y se simboliza $\vec{0}$.

➥ Dirección, sentido y módulo

Todo vector no nulo tiene:

- Una **dirección** dada por la recta que contiene el origen y el extremo o una paralela a la misma.
- Un **sentido**, todas las direcciones tienen dos sentidos donde el sentido de $\overrightarrow{AB}$ es opuesto al sentido de $\overrightarrow{BA}$.
- Un **módulo** igual a la longitud del segmento $\overline{AB}$. Se simboliza $|\vec{u}|$ o $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

El vector nulo no tiene dirección ni sentido pero sí tiene módulo igual a 0 y el módulo de cualquier vector no nulo es mayor a 0.

➥ Igualdad entre vectores

Dos vectores no nulos se dicen iguales si y solo si tienen igual magnitud dirección y módulo. La igualdad caracteriza a los vectores libres, osea que dos vectores con igual origen y extremo son iguales pero también pueden serlo vectores con diferente origen y extremo. El vector nulo es igual solo a si mismo.

➥ Paralelismo entre vectores

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos se dicen paralelos si tienen igual dirección y se nota $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

➥ Vector opuesto

Sea $\vec{u}$ un vector no nulo, entonces $-\vec{u}$ es el vector opuesto a $\vec{u}$ que tiene igual módulo, dirección y sentido opuesto. Nótese que $-\vec{0} = \vec{0}$

[2] Algunas operaciones de vectores

➥ Suma de vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, entonces su suma es $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ donde $\vec{w}$ tiene el mismo origen que $\vec{u}$ y el mismo extremo que $\vec{v}$.

1. Propiedades

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

1. Propiedad conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Propiedad asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. Existencia del elemento neutro: $\exists \vec{0} \left[\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}\right]$
4. Existencia del elemento opuesto: $\forall \vec{u} \neq \vec{0}\ \exists(-\vec{u}) \left[\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}\right]$

➥ Diferencia de vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, entonces su diferencia es $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

➥ Producto por un escalar

Sea $\vec{u}$ un vector y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el producto de $\vec{u}$ por α es $\alpha\vec{u}$ donde:

1. $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$
2. $\alpha \neq 0 \land \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} \parallel \vec{u}$
3. $\alpha \neq 0 \land \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\ \vec{u} \text{ tiene igual sentido a } \vec{u}, & \alpha > 0 \\ \alpha\ \vec{u} \text{ tiene distinto sentido a } \vec{u}, & \alpha < 0 \end{cases}.$

1. Propiedades

Sean $\vec{u}$ y $\vec{u}$ vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares, entonces:

1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
3. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
4. $1\vec{u} = \vec{u} \land -1\vec{u} = -\vec{u}$
5. $\alpha\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \lor \vec{u} = \vec{0}$
6. $\vec{u} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R}\ \vec{u} = \alpha\vec{v}$

➥ Angulo entre vectores

`[TODO: Encontrar una definición no circular]`

➥ Versores

Un versor es un vector de módulo 1.

1. Versor asociado a un vector

Dado un vector $\vec{u}$ su versor asociado $\vec{u}_0$ es un versor con igual dirección y sentido que $\vec{u}$.

- $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

➥ Proyección de un vector sobre otro

1. Proyección escalar

La proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es $\vec{v}_{\vec{u}} = |\vec{v}| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

2. Vector proyección

El vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es $\operatorname{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$.
1. $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \operatorname{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \wedge \neg(\vec{u} \perp \vec{v}) \Rightarrow \operatorname{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{v}_{\vec{u}} \vec{u}_0$

➥ Producto escalar

El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
1. $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

1. Propiedades

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores.
1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

[3] Bases y componentes

➥ Conjuntos de vectores:

En adelante, nos va a servir considerar a los vectores como parte de un universo de vectores limitado al espacio que encierre una misma recta, un mismo plano o un mismo espacio, siendo:
- $\mathbb{V}_1$: Vectores en la recta (espacio vectorial de 1 dimensión).
- $\mathbb{V}_2$: Vectores en el plano (espacio vectorial de 2 dimensiones).
- $\mathbb{V}_3$: Vectores en el espacio (espacio vectorial de 3 dimensiones).

Lo que queremos decir con esto es que vamos a considerar, en cada contexto, un universo de vectores más limitado o más amplio, dependiendo de cuántas son las dimensiones espaciales en las que se distribuyen:
- $\mathbb{V}_1$: Todos los vectores están contenidos en una misma recta, de modo que:

1. Fijado $\vec{u} \in \mathbb{V}_1$ no nulo, para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{V}_1$ existe único $\alpha \in \mathbb{R} \mid \vec{v} = \alpha\vec{u}$
2. La forma $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ es la *descomposición* de $\vec{v}$ en la *base* $\{\vec{u}\}$ y α es la *componente escalar* de $\vec{u}$ en la base $\vec{u}$

Esto quiere decir que a partir de tomar un solo vector de $\mathbb{V}_1$, siempre podemos multiplicarlo por algún escalar para hallar cualquier otro vector de $\mathbb{V}_1$. Mantengamos esta idea para pensar lo siguiente:
- $\mathbb{V}_2$: Todos los vectores están contenidos en un mismo plano, de modo que:

1. Fijados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_2$ no nulos ni paralelos, cualquier $\vec{w} \in \mathbb{V}_2$ puede ser *descompuesto* según las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, habiendo únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
2. $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base para $\mathbb{V}_2$ y α y β son las *componentes* de $\vec{w}$ en esa base.

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, esto es decir que solo los estamos sumando entre sí con distintas escalas, como si camináramos rectamente en la dirección de uno de los vectores una cierta distancia y luego camináramos rectamente en la dirección del otro. Para cualquier conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \ldots\}$, los ponemos todos en un origen común y decimos que el universo de vectores que son conseguibles a través de combinaciones lineales de esos vectores son el **espacio generado** por dichos vectores (estos vectores serían el *sistema generador*). Pero ahora imaginemos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos. ¿Generan realmente a $\mathbb{V}_2$? Bueno, no. Si pensamos en un sistema generador $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ con $\vec{u} \parallel \vec{v}$ vamos a obtener una línea recta porque solo podemos «movernos» en una dirección. Para que hayan 2 dimensiones, necesitamos combinar vectores en 2 direcciones distintas. Dos vectores colineales no pueden formar una base.

- $\mathbb{V}_3$: Todos los vectores del espacio.

1. Fijando $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ no nulos, no coplanares (no paralelos a un mismo plano), entonces para cualquier $\vec{x}$ hay únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \mid \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$
2. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base para $\mathbb{V}_3$ sobre $\mathbb{R}$, con α, β, γ componentes de $\vec{x}$ en esa base.

➥ Base de un espacio vectorial

Para un **espacio vectorial** V (es decir, un conjunto que actúa como universo de vectores) decimos que una **base** $\mathcal{B}$ de V sobre $\mathbb{R}$ es un sistema generador de V cuyos elementos son **linealmente independientes** (es decir, «apuntan» en distintas direcciones). Eso quiere decir que se cumplirán las siguientes propiedades:

- $\mathcal{B}$ es un **sistema generador** de V. o sea:

1. Sus elementos son vectores y pertenecen a V.
2. El espacio vectorial V completo puede generarse combinando linealmente los elementos de $\mathcal{B}$

- Los elementos de $\mathcal{B}$ forman un conjunto **linealmente independiente**. O sea:

1. Ningún elemento de $\mathcal{B}$ puede formarse como combinación lineal de los restantes.

Notemos que si los elementos de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes, entonces no solo ninguno apunta en la misma dirección que el resto (es decir, no son paralelos entre sí) sino que ninguno puede pertenecer al espacio generado por el resto de los vectores. Es decir, si tenemos que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es base de $\mathbb{V}_2$, entonces la única forma de tener un conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ que sea base de algún espacio vectorial, es que $\vec{w}$ no pertenezca al plano que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Es necesario que $\vec{w}$ se «despegue» de ese plano y, por lo tanto, ya no hay solo 2 dimensiones sino 3. Así tenemos que:

- $\mathcal{B}$ debe tener exactamente tantos elementos como dimensiones espaciales tenga V.

[4] Versores fundamentales del plano

`[TODO: Requiere ^^]`

[5] Versores fundamentales del espacio

`[TODO: Requiere ^^]`

[6] Operaciones y propiedades por componentes

1. $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_1, u_3 + v_3)$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
3. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}\ (v_1 = \alpha u_1 \land v_2 = \alpha u_2 \land v_3 = \alpha u_3)$
4. $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$
5. $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

[7] Cosenos directores

Para un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ los cosenos directores son las componentes del versor asociado $\vec{u}_0$.

- $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{\imath}}\right) = \frac{u_1}{|\vec{u}|} \land \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{\jmath}}\right) = \frac{u_2}{|\vec{u}|} \land \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{k}}\right) = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$

[8] Componentes de un vector entre dos puntos

Dados dos vectores posición $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

[9] Coordenadas del punto medio entre dos puntos

Sea $M(x, y, z)$ punto medio entre los dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se dan.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MP_2}$$

$$\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2}$$

Entonces $2\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1P_2}$ o por componentes:

$$\begin{cases} 2(x - x_1) = x_2 - x_1 \\ 2(y - y_1) = y_2 - y_1 \\ 2(z - z_1) = z_2 - z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_2 - x_1}{2} + x_1 \\ y = \frac{y_2 - y_1}{2} + y_1 \\ z = \frac{z_2 - z_1}{2} + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_2 + x_1}{2} \\ y = \frac{y_2 + y_1}{2} \\ z = \frac{z_2 + z_1}{2} \end{cases}$$

[10] Producto vectorial

Para los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el producto vectorial es $\vec{u} \times \vec{v}$ y se define por:

1. $\vec{u} = 0 \lor \vec{v} = 0 \lor \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq 0 \land \vec{v} \neq 0 \land \neg(\vec{u} \parallel \vec{v}) \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección dada por: } (\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}) \land (\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}) \\ \text{Sentido dado por: regla de la mano derecha} \\ \text{Módulo dado por: } |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}(\widehat{u, v}) \end{cases}$

[TODO: Mejorar la definición, está fea]

➡ Propiedades

Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ se cumplen.

1. $\forall \vec{u}\left[\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}\right]$
2. $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$
3. $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$
4. $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
5. Antisimétrica: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
6. Distributivas: $\begin{cases} \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w} \end{cases}$
7. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

➡ Por componentes

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{\imath} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

➥ Interpretación geométrica

[TODO:]

➥ Producto mixto

Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ el producto mixto entre ellos es $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$

1. **Interpretación geométrica**

[TODO:]