Функциональное программирование
Задание 2

Кобылянский А.В.
Группа 5381

$\boxed{\textbf{FP1}}$ Реализуйте для чисел Чёрча следующие функции:

- вычитания;

Так как нумералы Черча неотрицательны, то определим "вычитание" как

$$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b, & \text{if } a > b \\ 0, & \text{if } a \leqslant b \end{cases}$$

Тогда

$$\text{SUB} \equiv \lambda ab.b \ \text{PREV} \ a$$

- проверки на равенство;

Из определения

$$a \dot{-} b = 0 \iff a \leqslant b$$

Мы можем вывести условие для равенства

$$a \dot{-} b = 0 \wedge b \dot{-} a = 0 \iff a \leqslant b \wedge b \leqslant a \iff a = b$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{isZero} &\equiv \lambda n.n \ (\lambda x.\, \text{FALSE}) \ \text{TRUE} \\ \text{LE} &\equiv \lambda ab.\, \text{isZero}(\text{SUB}\, a\, b) \\ \text{AND} &\equiv \lambda ab.a\, b \ \text{FALSE} \\ \text{isEquile} &\equiv \lambda ab.\, \text{AND}\, (\text{LE}\, a\, b)\ (\text{LE}\, b\, a) \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{FP2}}$ Постройте замкнутый λ-терм *в нормальной форме*, представляющий функцию

$$f(n) = 2n^2 + 3n + 1$$

для чисел Чёрча.

Преобразуем наше выражение к виду $(n+1)(2n+1)$, тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{SUCC} &\equiv \lambda nsz.s(nsz)\\
\mathrm{ADD} &\equiv \lambda nmsz.ns(msz)\\
\mathrm{MULT} &\equiv \lambda nms.n(ms)\\
f(n) &\equiv \lambda n.\,\mathrm{MULT}\;(\mathrm{SUCC}\,n)\;(\mathrm{SUCC}(\mathrm{ADD}\,n\,n))\\
&=_\beta \lambda n.\,\mathrm{MULT}\;(\lambda sz.s(nsz))\;(\mathrm{SUCC}(\mathrm{ADD}\,n\,n))\\
&=_\beta \lambda n.\,\mathrm{MULT}\;(\lambda sz.s(nsz))\;(\mathrm{SUCC}(\lambda sz.ns(nsz)))\\
&\equiv \lambda n.\,\mathrm{MULT}\;(\lambda sz.s(nsz))\;((\lambda nsz.s(nsz))(\lambda sz.ns(nsz)))\\
&=_\beta \lambda n.\,\mathrm{MULT}\;(\lambda sz.s(nsz))\;\lambda sz.s(ns(nsz)))\\
&\equiv \lambda n.(\lambda nms.n(ms))\;(\lambda sz.s(nsz))\;\lambda sz.s(ns(nsz)))\\
&=_\beta \lambda n.\lambda s.(\lambda sz.s(nsz))\;\lambda z.s(ns(nsz))\\
&=_\beta \lambda n.\lambda s.\lambda z.[\lambda z'.s(ns(nsz'))](n[\lambda z'.s(ns(nsz'))]z)\\
&=_\beta \lambda n.\lambda s.\lambda z.s(ns(ns(n[\lambda z'.s(ns(nsz'))]z)))
\end{aligned}$$

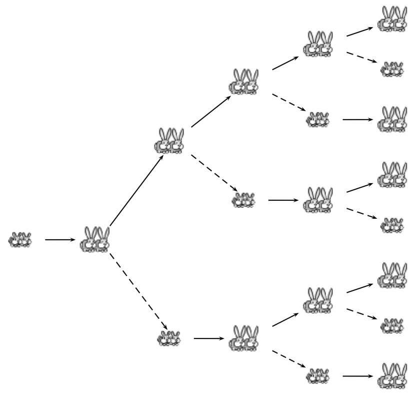
$\boxed{\textbf{FP3}}$ Реализуйте функцию *map*, которая применяет переданную функцию к каждому элементу переданного списка. То есть

$$map\,f\,[a,\;b,\;c] \implies [fa,\;fb,fc]$$

Список реализуйте через его функцию свертки.
Например, список $[a,\;b,\;c]$ становится функцией, которая принимает два аргумента f и z и возвращает $f\;a\;(f\;b\;(f\;c\;z)))$

$$\begin{aligned}
\mathrm{NIL} &\equiv \lambda fz.z\\
\mathrm{CONS} &\equiv \lambda alfz.f\;a\;(l\;f\;z)\\
\mathrm{MAP} &\equiv \lambda gl.l\;(\lambda x.\,\mathrm{CONS}\;(gx))\,\mathrm{NIL}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{FP4}}$ Числа Фибоначчи описывают идеализированную модель популяции кроликов.



Реализуйте функцию fib', описывающую модель, в которой пара кроликов производит k пар кроликов(в классической модели $k = 1$).
fib' — функция двух аргументов, т.е. $fib' = \lambda kn.(\ldots)$.
Обычные числа Фибоначчи fib можно получить так:

$$fib = fib'\, 1$$

Пример: для пятого месяца ($n = 5$) при $k = 3$ число пар кроликов равно $fib'\, 3\, 5 = 19$

Такая модель описывается уравнениями:

$$fib'_k(1) = fib'_k(2) = 1$$
$$fib'_k(n+1) = fib'_k(n) + k \cdot fib'_k(n-1)$$

Запишем функцию в лямбда исчислении:

$$fib' = \lambda kn.\, \mathrm{IF}\ (\mathrm{LE}\, n\ 2)\ 1\ (\mathrm{ADD}\ (fib'\ k\ (\mathrm{PREV}\, n))(\mathrm{MULT}\, k\ (fib'\ k\ (\mathrm{PREV}(\mathrm{PREV}\, n))))$$
$$fib' = [\lambda fkn.\, \mathrm{IF}\ (\mathrm{LE}\, n\ 2)\ 1\ (\mathrm{ADD}\ (f\ k\ (\mathrm{PREV}\, n))(\mathrm{MULT}\, k\ (f\ k\ (\mathrm{PREV}(\mathrm{PREV}\, n))))]fib'$$
$$fib' = Y\ [\lambda fkn.\, \mathrm{IF}\ (\mathrm{LE}\, n\ 2)\ 1\ (\mathrm{ADD}\ (f\ k\ (\mathrm{PREV}\, n))(\mathrm{MULT}\, k\ (f\ k\ (\mathrm{PREV}(\mathrm{PREV}\, n))))]$$

$\boxed{\textbf{FP5}}$ Покажите/объясните, что следующее выражение представляет собой комбинатор неподвижной точки :

$$\pounds$$

где

$$\pounds \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$$

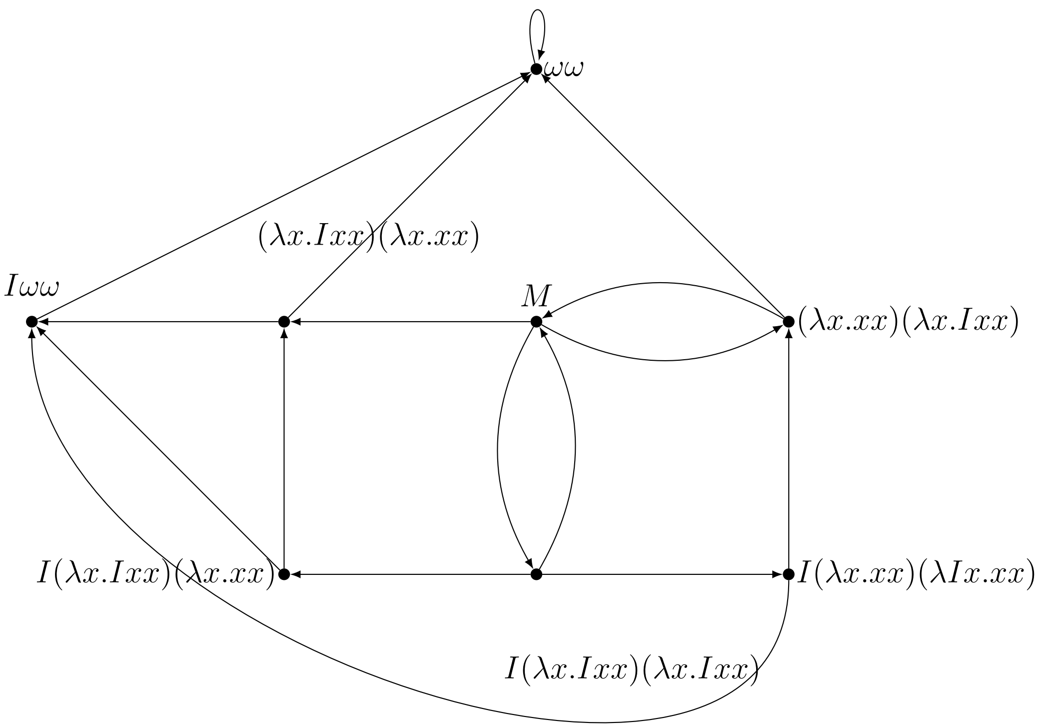
Пусть $A^n = AA...A$ – n раз записанный терм A (это только сокращение записи, а не апликация, скобки в данной конструкции будут расставлены в зависимости от того, куда это выражение подставить). Тогда требуется доказать, что $\pounds^{26}$ - комбинатор неподвижной точки.

$$\begin{aligned}\pounds^{26} f &= (\lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator))\pounds^{25} f \\ &=_\beta (\lambda r.r(\pounds^{26} r))f \\ &=_\beta f(\pounds^{26} f)\end{aligned}$$

Вторая строчка верна, потому что в “abcdefghijklmnopqstuvwxyz” – 25 символов, а в “thisisafixedpointcombinato” – 26 символов (и все из них содержатся в “abcdefghijklmnopqstuvwxyz”).

FP6 Нарисуйте β-редукционный граф $G_\beta(M)$ для терма:

$$M \equiv (\lambda x.\mathbf{I}xx)(\lambda x.\mathbf{I}xx)$$



$\boxed{\textbf{FP7}}$ Приведите пример замкнутого λ-терма находящегося:

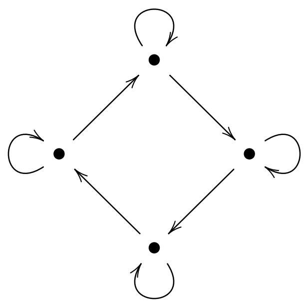
- в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;

$$\lambda x.(\lambda t.t)x$$

- в головной нормальной форме, но не в нормальной форме;

$$\lambda x.x((\lambda t.t)x)$$

$\boxed{\text{FP8}}$ Найдите терм, имеющий β-редукционный граф:



Искомый терм:

$$(\omega\omega)((\lambda abcd.ddddd)(\lambda abcd.ddddd)(\lambda abcd.ddddd)(\lambda abcd.ddddd)(\lambda abcd.ddddd))$$

$\boxed{\text{FP9}}$ Докажите, что:

$$\forall M \in \Lambda, \exists N \in \Lambda : N\mathbf{I} \twoheadrightarrow_\beta M$$

где терм N в β-нормальной форме.

Пройдемся по M и заменим все редексы $((\lambda t.X)Y)$ на $(x(\lambda t.X)Y)$, где $x \notin FV(M)$. Тогда все редексы нейтрализуются, а новых не появится, значит полученый терм M' будет в нормальной форме. Искомый терм N можно выразить как $N \equiv \lambda x.M'$.