Функциональное программирование
Задание 3

Кобылянский А.В.
Группа 5381

$\boxed{\textbf{FP1}}$ Найдите наиболее общие типы следующих термов:

• $\lambda xy.\, xy : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$

Пусть $y : \alpha$, тогда из наличия апликации xy имеем $x : \alpha \to \beta$. Тип результата (xy) соответственно будет β. Тогда наша функция принимает 2 аргумента $\alpha \to \beta$ и α и возвращает β.

• $\lambda xx.\, x : \beta \to \alpha \to \alpha$

Запишем $\lambda xx.\, x$ как $\lambda x.(\lambda x.x)$. Тип внутреннего выражения, очевидно, $\alpha \to \alpha$. Тип внешнего x, вообще говоря, может отличаться от внутреннего, обозначим его как β. Тогда наша функция принимает один аргумент β и возвращает $\alpha \to \alpha$.

• $\lambda xy.\, x(y(yx))$ – не типизируем

Пусть x имеет некий тип τ, тогда из апликации yx имеем $y : \tau \to \sigma$, а из апликации $y(yx)$ имеем $\tau = \sigma$. Тогда из апликации x в $x(y(yx))$ имеем $x : \tau \to \psi$ для какого-то типа ψ. Но мы начали с того, что $x : \tau$, значит $\tau = \tau \to \psi$. Не сходится по арности, как с термом $\lambda x.xx$.

• $\lambda xyz.\, x(y(xz)) : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha) \to \alpha \to \beta$

Пусть z имеет тип α, тогда из апликации xz имеем $x : \alpha \to \beta$, из апликации $y(xz)$ имеем $y : \beta \to \gamma$. Из апликации $x(y(xz))$ имеем $x : \gamma \to \delta$. и, сравнвая с первой типизацие x, получаем $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$. Тип результата $x(y(xz))$ будет тип, возвращаемый x, т.е. β. Тогда наша функция принимает 3 аргумента: $\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$ и α и возвращает β.

$\boxed{\textbf{FP2}}$ Выведите тип терма (приведите дерево вывода):

$$(\lambda xy.\, xy)(\lambda tz.\, t)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \to \beta \to \alpha, y : \alpha \vdash x : \alpha \to \beta \to \alpha \qquad x : \alpha \to \beta \to \alpha, y : \alpha \vdash y : \alpha}{x : \alpha \to \beta \to \alpha, y : \alpha \vdash (xy) : \beta \to \alpha}}{x : \alpha \to \beta \to \alpha \vdash (\lambda y.xy) : \alpha \to \beta \to \alpha}}{\vdash \lambda xy.xy : (\alpha \to \beta \to \alpha) \to \alpha \to \beta \to \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{t : \alpha, z : \beta \vdash t : \alpha}{t : \alpha \vdash (\lambda z.t) : \beta \to \alpha}}{\vdash (\lambda tz.t) : \alpha \to \beta \to \alpha}}{\vdash (\lambda xy.\, xy)(\lambda tz.\, t) : \alpha \to \beta \to \alpha}$$

$\boxed{\textbf{FP3}}$ Найдите замкнутые термы следующих типов:
• $\lambda xyzt.y(xtt)(zt) : (\gamma \to \gamma \to \beta) \to (\beta \to \alpha \to \delta) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \delta$
$x : \gamma \to \gamma \to \beta$, $t : \gamma$ значит $(xtt) : \beta$.
$z : \gamma \to \alpha$, $t : \gamma$ значит $(zt) : \alpha$.
$y : \beta \to \alpha \to \delta$, значит $y(xtt)(zt) : \delta$
• $\lambda xyztw.z(yw) : (\alpha \to \alpha \to \beta) \to (\gamma \to \beta) \to (\beta \to \delta) \to \alpha \to \gamma \to \delta$
$y : \gamma \to \beta$, $w : \gamma$ значит $(yw) : \beta$.
$z : \beta \to \delta$, значит $z(yw) : \delta$.
• $\lambda xy.x(\lambda z.yzz) : ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha$
$y : \alpha \to \alpha \to \beta$, значит $\lambda z.yzz : \alpha \to \beta$.
$x : (\alpha \to \beta) \to \alpha$, значит $x(\lambda z.yzz) : \alpha$.
• $\lambda xy.y(x(\lambda z.yzz))(x(\lambda z.yzz)) : ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \beta$
$y : \alpha \to \alpha \to \beta$ и из предыдущего пункта $x(\lambda z.yzz) : \alpha$, значит $y(x(\lambda z.yzz))(x(\lambda z.yzz)) : \beta$.

$\boxed{\textbf{FP4}}$ Найдите замкнутый терм типа

$$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta$$

которому нельзя приписать тип

$$\gamma \to (\gamma \to \beta) \to \beta$$

Искомый терм:

$$\lambda xy.y(\lambda z.xz)$$

Действительно, если $x : (\alpha \to \beta)$, то $(\lambda z.xz) : (\alpha \to \beta)$ и $y(\lambda z.xz) : \beta$, все сходится. С другой стороны, при втором варианте типизации $x : \gamma$ – не стрелочный тип и запись $\lambda z.xz$ становится нелегально.

$\boxed{\textbf{FP5}}$ Типизируйте по Чёрчу:

$$\mathbf{SKK}$$

В общем случае, для некоторых типов $\phi, \psi, \sigma, \tau, \omega$

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \lambda x^{\phi} y^{\psi}.x : \phi \to \psi \to \phi \\ \mathbf{S} &= \lambda x^{\sigma\to\tau\to\omega} y^{\sigma\to\tau} z^{\sigma}.xz(yz) : (\sigma \to \tau \to \omega) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \omega\end{aligned}$$

Типизируем наше выражение

$$\mathbf{SKK} = (\lambda xyz.xz(yz))(\lambda xy.x)(\lambda xy.x)$$

Пусть правое $\mathbf{K}$ имеет тип $\alpha \to \beta \to \alpha$. Тогда тип $y^{\sigma\to\tau}$ в $\mathbf{S}$ будет $y : \alpha \to \beta \to \alpha$. Имеем $\sigma \to \tau = \alpha \to (\beta \to \alpha)$ или $\sigma = \alpha$ и $\tau = \beta \to \alpha$. Из $\sigma = \alpha$ имеем для z^{σ} в $\mathbf{S}$: $z : \alpha$. Так же получаем почти весь тип для $x^{\sigma\to\tau\to\omega}$ в $\mathbf{S}$: $x : \alpha \to (\beta \to \alpha) \to \omega$.

Из апликации $\mathbf{SK}$ имеем равенство типов x и первого $\mathbf{K} : \alpha \to (\beta \to \alpha) \to \omega = \phi \to \psi \to \phi$ или $\alpha = \phi$, $(\beta \to \alpha) = \psi$, $\omega = \phi = \alpha$.

Теперь мы можем записать полный тип выражения:

$$(\lambda x^{\alpha\to(\beta\to\alpha)\to\alpha} y^{\alpha\to(\beta\to\alpha)} z^{\alpha}.xz(yz))(\lambda x^{\alpha} y^{\beta\to\alpha}.x)(\lambda x^{\alpha} y^{\beta}.x) : \alpha \to \alpha$$