

# Функциональное программирование

## Задание 1

Кобылянский А.В.  
Группа 5381

**FP1**

Определите свободные и связанные переменные в термах и выполните подстанов-

ки:

- $[ux/x] (x\lambda y.yx)$

$$\text{BV}(x\lambda y.yx) = \{y\}$$

$$\text{FV}(ux) = \{u, x\}$$

$$[ux/x] (x\lambda y.yx) \equiv ux\lambda y.y(ux)$$

- $[uy/x] (x\lambda y.yx)$

$$\text{BV}(x\lambda y.yx) = \{y\}$$

$$\text{FV}(uy) = \{u, y\}$$

$$[uy/x] (x\lambda y.yx) \equiv_{\alpha} [uy/x] (x\lambda y'.y'x) \equiv uy\lambda y'.y'(uy)$$

- $[xz/y] (xy(\lambda xz.xyz)y)$

$$\text{BV}(xy(\lambda xz.xyz)y) = \{x, z\}$$

$$\text{FV}(xz) = \{x, z\}$$

$$[xz/y] (xy(\lambda xz.xyz)y) \equiv_{\alpha} [xz/y] (xy(\lambda x'z'.x'y'z')y) \equiv x(xz)(\lambda x'z'.x'(xz)z')(xz)$$

- $[x(\lambda t.tt)s/x] (\lambda t.x(\lambda s.sx)t)$

$$\text{BV}(\lambda t.x(\lambda s.sx)t) = \{t, s\}$$

$$\text{FV}(x(\lambda t.tt)s) = \{x, s\}$$

$$\begin{aligned} [x(\lambda t.tt)s/x] (\lambda t.x(\lambda s.sx)t) &\equiv_{\alpha} [x(\lambda t.tt)s/x] (\lambda t.x(\lambda s'.s'x)t) \\ &\equiv \lambda t.x(\lambda t.tt)s(\lambda s'.s'(x(\lambda t.tt)s))t \end{aligned}$$

- $[y(\lambda v.vx)/w] ((\lambda x.x(\lambda y.yx)w)(\lambda w.wv))$

$$\text{BV}((\lambda x.x(\lambda y.yx)w)(\lambda w.wv)) = \{x, y, w\}$$

$$\text{FV}(y(\lambda v.vx)) = \{y, x\}$$

$$\begin{aligned} [y(\lambda v.vx)/w] ((\lambda x.x(\lambda y.yx)w)(\lambda w.wv)) &\equiv_{\alpha} [y(\lambda v.vx)/w] ((\lambda x'.x'(\lambda y'.y'x')w)(\lambda w.wv)) \\ &\equiv (\lambda x'.x'(\lambda y'.y'x')(y\lambda v.vx))\lambda w.wv \end{aligned}$$

**FP2** Уберите лишние скобки и при возможности выполните  $\beta$  — преобразование:

- $((\lambda x.(\lambda y.((xy)z)))(a(bc)))$   
 $((\lambda x.(\lambda y.((xy)z)))(a(bc))) \rightarrow (\lambda xy.xyz)(a(bc))$   
 $\equiv_{\beta} \lambda y.a(bc)yz$
- $((\lambda x.(\lambda y.((yx)x)))(x(xy))y)$   
 $((\lambda x.(\lambda y.((yx)x)))(x(xy))y) \rightarrow (\lambda xy.yxx)(x(xy))y$   
 $\equiv_{\alpha} (\lambda x'y'.y'x'x')(x(xy))y$   
 $\equiv_{\beta} y(x(xy))(x(xy))$

**FP3** Покажите, что:

$$\mathbf{SKK} = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{SKK} &\equiv (\lambda xyz.xz(yz))\mathbf{KK} \\ &\equiv_{\beta} (\lambda yz.\mathbf{K}z(yz))\mathbf{K} \\ &\equiv_{\beta} (\lambda yz.z)\mathbf{K} \\ &\equiv_{\beta} \lambda z.z \\ &\equiv_{\alpha} \mathbf{I} \end{aligned}$$

**FP4** Определите терм для оператора XOR.

$$\mathbf{XOR} \equiv \lambda ab.a(\mathbf{NOT} b)b$$

**FP5** Реализуйте для чисел Чёрча функцию возведения в степень.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\equiv \lambda s.\lambda z.sz \\ \mathbf{MULT} &\equiv \lambda a.\lambda b.\lambda s.\lambda z.a(bs)z \\ \mathbf{POW} &\equiv \lambda a.\lambda b.b(\mathbf{MULT} a) \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{POW} ab = a^b$$

**FP6** Покажите, что:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S(KS)K}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S(KS)K} &\equiv (\lambda xyz.xz(yz))(\mathbf{KS})\mathbf{K} \\ &\equiv_{\beta} \lambda z.(\mathbf{KS})z(\mathbf{K}z) \\ &\equiv_{\beta} \lambda z.\mathbf{S(K}z) \\ &\equiv \lambda z.(\lambda abc.ac(bc))(\mathbf{K}z) \\ &\equiv_{\beta} \lambda zbc.(\mathbf{K}z)c(bc) \\ &\equiv_{\beta} \lambda zbc.z(bc) \\ &\equiv \mathbf{B} \end{aligned}$$

**FP7** Мы определяли оператор NOT как:

$$not \equiv \lambda b.b\ fls\ tru$$

Найдите более «короткую» (в смысле длины терма см. ниже) версию оператора NOT. Длина терма  $M$  ( $lgh(M)$ ):

$$lgh(x) = 1, x \in V$$

$$lgh(MN) = lgh(M) + lgh(N), M \in \Lambda \wedge N \in \Lambda$$

$$lgh(\lambda x.M) = 1 + lgh(M), x \in V \wedge M \in \Lambda$$

Для  $M \equiv \lambda b.b\ fls\ tru \equiv \lambda b.b\ (\lambda t f.f)\ (\lambda t f.t)$  длина терма равна 8.

$$NOT \equiv \lambda b.\lambda t.\lambda f.bft$$

$$lgh(NOT) = 6$$

**FP8** Реализуйте для чисел Чёрча функцию *isEven*, возвращающую *tru* на четных числах и *fls* на нечетных.

$$isEven \equiv \lambda n.n\ NOT\ tru$$