

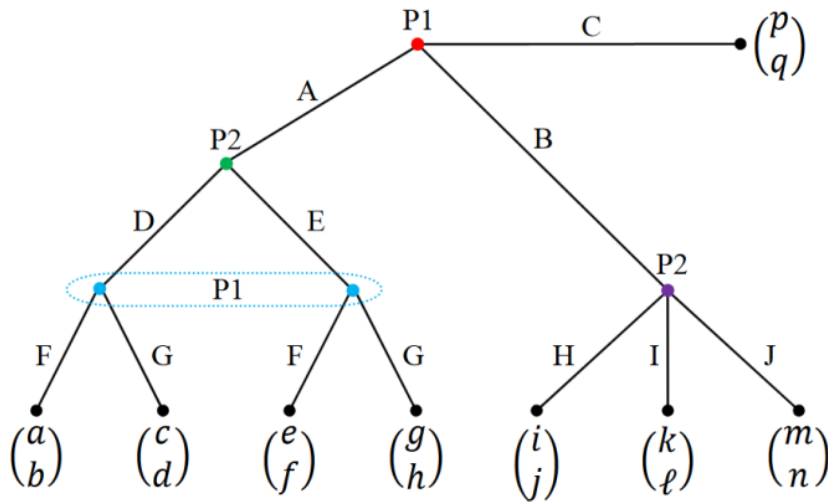
## Домашнее задание IV

Кобылянский А.В.

Группа 5381

### Игра 1

Игра двух игроков (P1 и P2), заданная деревом на рисунке ниже.



### Задача 1

Записать **Игру 1** в нормальной форме (strategic form), т.е. как биматричную игру: привести матрицы выигрышей (строки соответствуют P1, столбцы соответствуют P2).

	DH	DI	DJ	EH	EI	EJ
AF	(a, b)	(a, b)	(a, b)	(e, f)	(e, f)	(e, f)
AG	(c, d)	(c, d)	(c, d)	(g, h)	(g, h)	(g, h)
BF	(i, j)	(k, l)	(m, n)	(i, j)	(k, l)	(m, n)
BG	(i, j)	(k, l)	(m, n)	(i, j)	(k, l)	(m, n)
CF	(p, q)	(p, q)	(p, q)	(p, q)	(p, q)	(p, q)
CG	(p, q)	(p, q)	(p, q)	(p, q)	(p, q)	(p, q)

### Задача 2

Записать **Игру 1** в секвенциальной форме (strategic form); привести матрицы выигрышей (строки соответствуют P1, столбцы соответствуют P2).

	∅	D	E	H	I	J
∅	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	(i, j)	(k, l)	(m, n)
C	(p, q)	0	0	0	0	0
AF	0	(a, b)	(e, f)	0	0	0
AG	0	(c, d)	(g, h)	0	0	0

### Задача 3

Пусть **Игра 1** является игрой с нулевой суммой:  $a = -b, c = -d$ , и т.д., а выигрыши игрока P1 равны:

a	c	e	g	i	k	m	p
10	-11	-8	14	1	2	3	0

Найти равновесные смешанные стратегии, а так же цену игры с помощью:

1. Онлайн сервиса для нормальной формы игры.

Результат работы программы:

The matrix is

10 10 10 -8 -8 -8

-11 -11 -11 14 14 14

1 2 3 1 2 3

1 2 3 1 2 3

0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0

The value is 1.2093.

An optimal strategy for Player I is:

(0.5814,0.4186,0,0,0,0)

An optimal strategy for Player II is:

(0.51163,0,0,0.48837,0,0)

2. Решения пары задач линейного программирования для игры в секвенциальной форме (используя библиотеку cvxopt).

#### Игры с нулевой суммой

В частном случае *игр с нулевой суммой* (zero-sum game), а именно когда  $A = -B$ , имеет место равенство  $v_A = v_B = v$ , где  $v$  называется *ценой игры* (value of the game), а профиль равновесных стратегий  $(x_*, y_*)$  состоит из решений пары задач линейного программирования:

$\begin{aligned} \max_{x,q} & -f^T q \\ \text{s.t. } & A^T x + F^T q \geq 0, Ex = e, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min_{y,p} & e^T p \\ \text{s.t. } & -Ay + E^T p \geq 0, Fy = f, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$
---	--

Если вектор  $x$  соответствует последовательностям  $[\emptyset, A, B, C, AF, AG]$ , а вектор  $y$  последовательностям  $[\emptyset, D, E, H, I, J]$ , то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 14 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_0 \\ x_4 + x_5 = x_1 \end{cases} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 + y_2 = y_0 \\ y_3 + y_4 + y_5 = y_0 \end{cases} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Код решения:

```

1 from cvxopt import solvers, matrix
2 import numpy as np
3
4 solvers.options['show_progress'] = False
5 solvers.options['feastol'] = 10**(-10)
6
7 E = np.array(
8     [[1, 0, 0, 0, 0, 0],
9      [-1, 1, 1, 1, 0, 0],
10     [0, -1, 0, 0, 1, 1]]
11 )
12 e = np.array([1, 0, 0]).reshape((3, 1))
13
14 F = np.array(
15     [[1, 0, 0, 0, 0, 0],
16      [-1, 1, 1, 0, 0, 0],
17      [-1, 0, 0, 1, 1, 1]]
18 )
19 f = np.array([1, 0, 0]).reshape((3, 1))
20
21 A_ = np.array(
22     [[0, 0, 0, 0, 0, 0],
23      [0, 0, 0, 0, 0, 0],
24      [0, 0, 0, 1, 2, 3],
25      [0, 0, 0, 0, 0, 0],
26      [0, 10, -8, 0, 0, 0],
27      [0, -11, 14, 0, 0, 0]]
28 )
29
30 # first player
31
32 c = np.vstack( (np.zeros((6, 1)), f) )
33

```

```

34 G1 = np.hstack( (-A_.T, -F.T) )
35 G2 = np.hstack( (-np.eye(6), np.zeros( (6, 3) )) )
36 G = np.vstack( (G1, G2) )
37 h = np.zeros( (12, 1) )
38
39 A = np.hstack( (E, np.zeros( (3, 3) )) )
40 b = e
41
42 c = matrix(c, tc='d')
43 G = matrix(G, tc='d')
44 h = matrix(h, tc='d')
45 A = matrix(A, tc='d')
46 b = matrix(b, tc='d')
47
48 x = solvers.lp(c, G, h, A, b)[ 'x' ][:6]
49 print(x) # [1.000, 0.999, 2.294e-07, -8.409-09, 0.581,
           0.418]
50
51 # second player
52
53 c = np.vstack( (np.zeros((6, 1)), e) )
54
55 G1 = np.hstack( (A_, -E.T) )
56 G2 = np.hstack( (-np.eye(6), np.zeros( (6, 3) )) )
57 G = np.vstack( (G1, G2) )
58 h = np.zeros( (12, 1) )
59
60 A = np.hstack( (F, np.zeros( (3, 3) )) )
61 b = f
62
63 c = matrix(c, tc='d')
64 G = matrix(G, tc='d')
65 h = matrix(h, tc='d')
66 A = matrix(A, tc='d')
67 b = matrix(b, tc='d')
68
69 y = solvers.lp(c, G, h, A, b)[ 'x' ][:6]
70 print(y) # [0.999, 0.511, 0.488, 0.878, 0.081, 0.0393]
71
72 print(x.T @ A_ @ y) # 1.20930232

```

Цена игры такая же, как и в первом пункте: 1.2093.

Ниже приведены равновесные смешанные стратегии полученные в первом пункте (красным) и втором пункте (зеленым). Они тоже практически одинаковы, кроме ребер  $H, I, J$ .

