

Формальные языки

Задача 1. Построить магазинные автоматы, распознающие следующие языки:

- $\{a^n b^{m+n} c^m \mid n, m \geq 1\}$

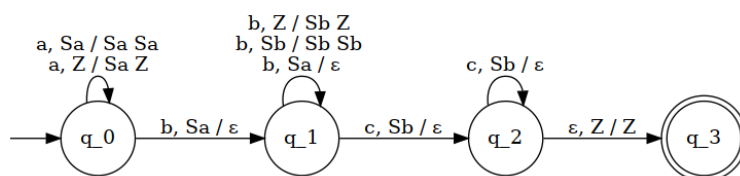


Рис. 1. Автомат 1

- $\{a^n b^m c^n \mid n, m \geq 1\}$

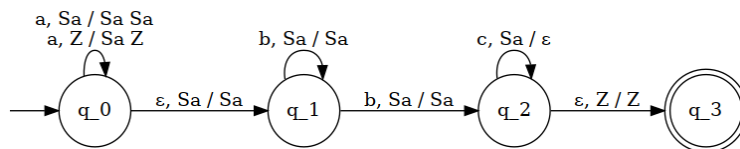


Рис. 2. Автомат 2

- $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 1\}$

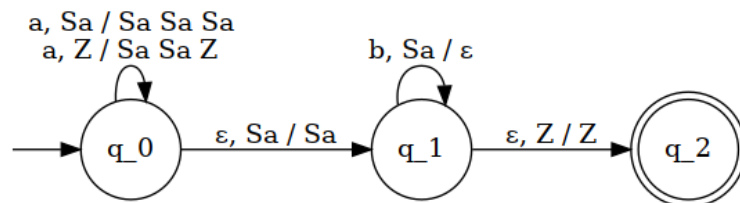


Рис. 3. Автомат 3

Задача 2. Доказать или опровергнуть, что следующие языки являются контекстно-свободными:

$$\bullet \{a^{n+m}b^mc^nd^m \mid n, m \geq 0\}$$

Для всех слов s данного языка должно выполняться

$$|s|_a = |s|_c + |s|_b$$

$$|s|_b = |s|_d$$

Предположим, что язык регулярный, тогда должна выполняться лемма о накачке. p - конста из леммы. Возьмем слово s принадлежащее нашему языку $s = a^{2p}b^pc^pd^p = uvwxu, |vwx| \leq p, |vx| \geq 1$. Рассмотрим слово $s' = uv^2wx^2u$.

1. $vwx = a^i, i \leq p$ тогда

$$|s'|_a = |s|_a + \Delta, \Delta \geq 1$$

$$|s'|_c + |s'|_b = |s|_c + |s|_b = |s|_a \neq |s'|_a$$

2. $vwx = a^ib^j, i + j \leq p$ тогда

$$|s'|_a + |s'|_b = |s|_a + |s|_b + \Delta, \Delta \geq 1$$

$$|s'|_c + 2|s'|_d = |s|_c + 2|s|_d = |s|_a + |s|_b \neq |s'|_a + |s'|_b$$

3. $vwx = b^i, i \leq p$ рассуждения идентичны рассуждениям в пункте 2

4. $vwx = b^ic^j, i + j \leq p$ тогда

$$|s'|_b + |s'|_c = |s|_b + |s|_c + \Delta, \Delta \geq 1$$

$$|s'|_a = |s|_a = |s|_b + |s|_c \neq |s'|_b + |s'|_c$$

5. $vwx = c^i, i \leq p$ рассуждения идентичны рассуждениям в пункте 4

6. $vwx = c^id^j, i + j \leq p$ тогда

$$|s'|_c + |s'|_d = |s|_c + |s|_d + \Delta, \Delta \geq 1$$

$$|s'|_a = |s|_a = |s|_c + |s|_d \neq |s'|_c + |s'|_d$$

7. $vwx = d^i, i \leq p$ рассуждения идентичны рассуждениям в пункте 6

Из данных рассуждений следует, что s' не может принадлежать языку, значит лемма о накачке не выполняется и язык не регулярный.

$$\bullet \{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^k b^l c^m \mid k \geq 0, l \geq 0, m \geq 20\}$$

Заметим, что

$$\{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^k b^l c^m \mid k \geq 0, l \geq 0, m \geq 20\} =$$

$$= \{a^n b^n a^n \mid 0 \leq n < 20\} \cup \{a^n b^n a^n \mid n \geq 20\} \cup \{a^k b^l c^m \mid k \geq 0, l \geq 0, m \geq 20\} =$$

$$(1) \quad = \{a^n b^n a^n \mid 0 \leq n \leq 20\} \cup \{a^k b^l c^m \mid k \geq 0, l \geq 0, m \geq 20\}$$

так как

$$\{a^n b^n a^n \mid n \geq 20\} \subset \{a^k b^l c^m \mid k \geq 0, l \geq 0, m \geq 20\}$$

Первое множество в (1) конечно, значит это регулярный язык. Второе множество описывается регулярным выражением $a^*b^*a^{20}a^*$, значит этот язык тоже регулярный. Объединение регулярных языков - регулярный язык. Регулярные языки контекстно свободны.