

Tugas Praktikum Analisis Algoritma

Laporan ini ditujukan untuk memenuhi tugas praktikum analisis algoritma



Anugerah Prima Bagaskara

140810180006

Fakultas Matematika dan Ilmu

Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran

2019

Studi Kasus 5: Mencari Pasangan Titik Terdekat (Closest Pair of Points) Tugas:

- 1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem closest pair of points menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++ Program :

```
/*
    Nama   : Anugerah Prima Bagaskara
    NPM    : 140810180006   Kelas   : B
    Tanggal : 31 Maret 2020
    Program : Closest Pair of Point
*/

// A divide and conquer program in C++ // to find the smallest distance from a //
// given set of points.

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

// A structure to represent a Point in 2D plane class Point {   public:   int x, y;
};

/* Following two functions are needed for library function qsort().
Refer: http://www.cplusplus.com/reference/clibrary/cstdlib/qsort/ */

// Needed to sort array of points // according to X coordinate
int compareX(const void* a, const void* b){   Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
return (p1->x - p2->x);
}

// Needed to sort array of points according to Y coordinate int compareY(const void* a, const
void* b){   Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
```

```

    return (p1->y - p2->y);
}

// A utility function to find the //
distance between two points
float dist(Point p1, Point p2){
    return sqrt( (p1.x - p2.x)*(p1.x - p2.x) +
                (p1.y - p2.y)*(p1.y - p2.y)
                );
}

// A Brute Force method to return the
// smallest distance between two points
// in P[] of size n
float bruteForce(Point P[], int n){
    float min = FLT_MAX;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = i+1; j < n; ++j)
            if (dist(P[i], P[j]) < min)
                min = dist(P[i], P[j]);
    return min;
}

// A utility function to find //
minimum of two float values
float min(float x, float y){
    return (x < y)? x : y;
}

// A utility function to find the
// distance between the closest points of
// strip of given size. All points in
// strip[] are sorted accordint to
// y coordinate. They all have an upper //
bound on minimum distance as d.
// Note that this method seems to be
// a O(n^2) method, but it's a O(n)
// method as the inner loop runs at most 6 times
float stripClosest(Point strip[], int size, float d) {
    float min = d; // Initialize the minimum distance as d

    qsort(strip, size, sizeof(Point), compareY);

```

```
// Pick all points one by one and try the next points till the difference
```

```

    // between y coordinates is smaller than d.
    // This is a proven fact that this loop runs at most 6 times
for (int i = 0; i < size; ++i)
    for (int j = i+1; j < size && (strip[j].y - strip[i].y) < min; ++j)
if (dist(strip[i],strip[j]) < min)        min = dist(strip[i],
strip[j]);

    return min;
}

```

```

// A recursive function to find the
// smallest distance. The array P contains //
all points sorted according to x coordinate

```

```

float closestUtil(Point P[], int n){
    // If there are 2 or 3 points, then use brute force
if (n <= 3)
    return bruteForce(P, n);

```

```

    // Find the middle point
int mid = n/2;
    Point midPoint = P[mid];

```

```

    // Consider the vertical line passing
    // through the middle point calculate
    // the smallest distance dl on left    //
of middle point and dr on right side
float dl = closestUtil(P, mid);
    float dr = closestUtil(P + mid, n - mid);

```

```

    // Find the smaller of two distances
float d = min(dl, dr);

```

```

    // Build an array strip[] that contains
    // points close (closer than d)
    // to the line passing through the middle point
    Point strip[n];
int j = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        if (abs(P[i].x - midPoint.x) < d)
strip[j] = P[i], j++;

```

```

    // Find the closest points in strip.
    // Return the minimum of d and closest
    // distance is strip[]

```

```
return min(d, stripClosest(strip, j, d) );
```

```

}

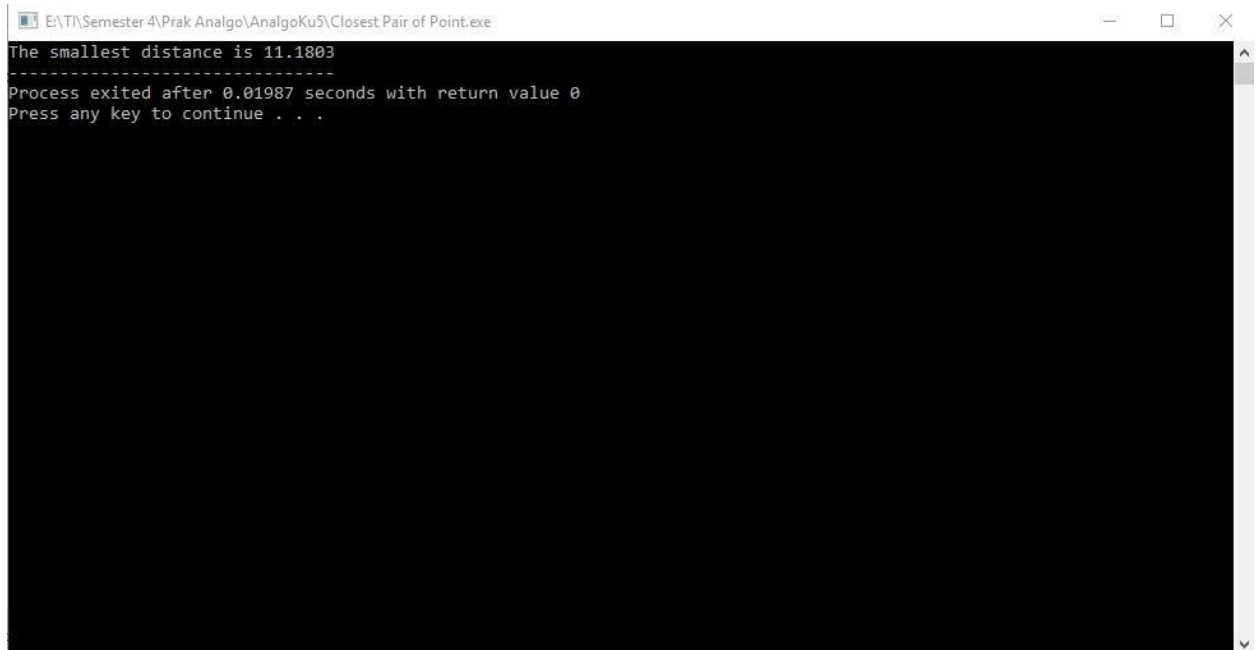
// The main function that finds the smallest distance
// This method mainly uses closestUtil() float
closest(Point P[], int n){
    qsort(P, n, sizeof(Point), compareX);

    // Use recursive function closestUtil()
    // to find the smallest distance
    return closestUtil(P, n);
}

// Driver code int
main(){
    Point P[] = {{6, 1}, {4, 12}, {44, 56}};
    int n = sizeof(P) / sizeof(P[0]);
    cout << "The smallest distance is " << closest(P, n);
    return 0;
}

```

Screenshot :



```

E:\TI\Semester 4\Prak Analgo\AnalgoKu5\Closest Pair of Point.exe
The smallest distance is 11.1803
-----
Process exited after 0.01987 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

- 2) Tentukan rekurensi dari algoritma tersebut, dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode recursion tree untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O ($n \lg n$) Jawab :

Kompleksitas Waktu

Biarkan kompleksitas waktu dari algoritma di atas menjadi $T(n)$. Mari kita asumsikan bahwa kita menggunakan algoritma pengurutan $O(n \log n)$. Algoritma di atas membagi semua titik dalam dua set dan secara rekursif memanggil dua set. Setelah membelah, ia menemukan strip dalam waktu $O(n)$, mengurutkan strip dalam waktu $O(n \log n)$ dan akhirnya menemukan titik terdekat dalam strip dalam waktu $O(n)$.

Jadi $T(n)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) + O(n \log n) + O(n)$$

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$$

$$T(n) = T(n \times \log n \times \log n)$$

Catatan

- 1) Kompleksitas waktu dapat ditingkatkan menjadi $O(n \log n)$ dengan mengoptimalkan langkah 5 dari algoritma di atas.
- 2) Kode menemukan jarak terkecil. Dapat dengan mudah dimodifikasi untuk menemukan titik dengan jarak terkecil.
- 3) Kode ini menggunakan pengurutan cepat yang bisa $O(n^2)$ dalam kasus terburuk. Untuk memiliki batas atas sebagai $O(n (\log n)^2)$, algoritma pengurutan $O(n \log n)$ seperti pengurutan gabungan atau pengurutan tumpukan dapat digunakan

Studi Kasus 6: Algoritma Karatsuba untuk Perkalian Cepat Tugas:

- 1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem fast multiplication menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan (Algoritma Karatsuba). Gunakan bahasa C++ Jawab :
Program :

```
/*  
Nama : Anugerah Prima Bagaskara  
NPM : 140810180006 Kelas : B  
Tanggal : 31 Maret 2020  
Program : Problem Fast Multiplication Karatsuba Algorithm */  
  
// C++ implementation of Karatsuba algorithm for bit string multiplication. #include<iostream>  
#include<stdio.h>
```



```

using namespace std;

// FOLLOWING TWO FUNCTIONS ARE COPIED FROM http://goo.gl/q0OhZ
// Helper method: given two unequal sized bit strings, converts them to //
// same length by adding leading 0s in the smaller string. Returns the
// the new length
int makeEqualLength(string &str1, string &str2){
int len1 = str1.size();    int len2 = str2.size();
if (len1 < len2){
    for (int i = 0 ; i < len2 - len1 ; i++)
        str1 = '0' + str1;
return len2;
}
else if (len1 > len2){
    for (int i = 0 ; i < len1 - len2 ; i++)
        str2 = '0' + str2;
}
return len1; // If len1 >= len2
}

// The main function that adds two bit sequences and returns the addition
string addBitStrings( string first, string second ){    string result; // To
store the sum bits

    // make the lengths same before adding
int length = makeEqualLength(first, second);
int carry = 0; // Initialize carry

    // Add all bits one by one    for
(int i = length-1 ; i >= 0 ; i--){
int firstBit = first.at(i) - '0';    int
secondBit = second.at(i) - '0';

    // boolean expression for sum of 3 bits
int sum = (firstBit ^ secondBit ^ carry)+'0';

    result = (char)sum + result;

    // boolean expression for 3-bit addition
    carry = (firstBit&secondBit) | (secondBit&carry) | (firstBit&carry);
}

    // if overflow, then add a leading 1

```

```

    if (carry) result = '1' + result;

    return result;
}

// A utility function to multiply single bits of strings a and
b int multiplySingleBit(string a, string b) {    return (a[0]
- '0')*(b[0] - '0');
}

// The main function that multiplies two bit strings X and Y and returns
// result as long integer
long int multiply(string X, string Y){
    // Find the maximum of lengths of x and Y and make length
    // of smaller string same as that of larger string
int n = makeEqualLength(X, Y);

    // Base cases    if
(n == 0) return 0;
    if (n == 1) return multiplySingleBit(X, Y);

    int fh = n/2; // First half of string, floor(n/2)
int sh = (n-fh); // Second half of string, ceil(n/2)

    // Find the first half and second half of first string.
// Refer http://goo.gl/ILmgn for substr method
    string Xl = X.substr(0, fh);
    string Xr = X.substr(fh, sh);

    // Find the first half and second half of second string
string Yl = Y.substr(0, fh);
    string Yr = Y.substr(fh, sh);

    // Recursively calculate the three products of inputs of size n/2
long int P1 = multiply(Xl, Yl);    long int P2 = multiply(Xr,
Yr);
    long int P3 = multiply(addBitStrings(Xl, Xr), addBitStrings(Yl, Yr));

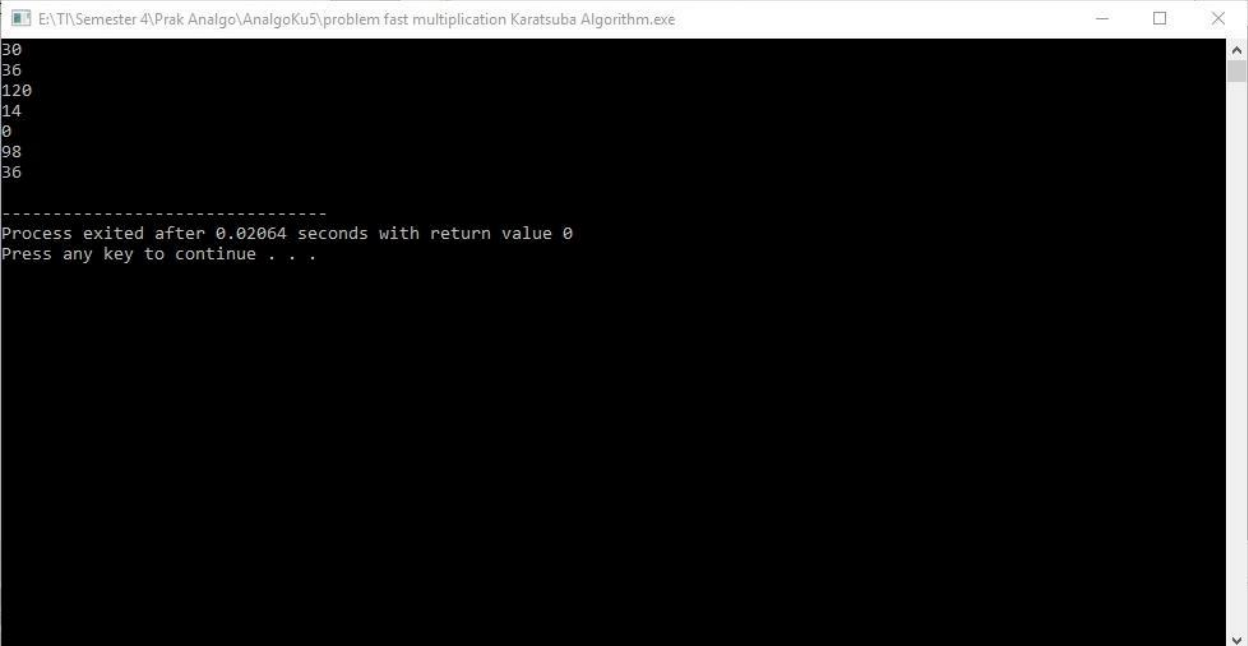
    // Combine the three products to get the final result.
return P1*(1<<(2*sh)) + (P3 - P1 - P2)*(1<<sh) + P2; }

// Driver program to test aboev functions int
main(){
    printf ("%ld\n", multiply("1111", "0010"));
}

```

```
printf ("%ld\n", multiply("1100", "0011"));  printf ("%ld\n", multiply("1100", "1010"));  printf ("%ld\n",
multiply("0001", "1110"));  printf ("%ld\n", multiply("0000", "1010"));  printf ("%ld\n", multiply("0111",
"1110"));  printf ("%ld\n", multiply("0011", "1100"));
}
```

Screenshot :



```
E:\TI\Semester 4\Prak Analgo\AnalgoKu5\problem fast multiplication Karatsuba Algorithm.exe
30
36
120
14
0
08
36
-----
Process exited after 0.02064 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

- 2) Rekurensi dari algoritma tersebut adalah $T(n) = 3T(n/2) + O(n)$, dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode substitusi untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O ($n \lg n$) Jawab :

- Let's try divide and conquer.
 - Divide each number into two halves.
 - $x = x_H r^{n/2} + x_L$
 - $y = y_H r^{n/2} + y_L$
 - Then:

$$xy = (x_H r^{n/2} + x_L) (y_H r^{n/2} + y_L)$$

$$= x_H y_H r^n + (x_H y_L + x_L y_H) r^{n/2} + x_L y_L$$
 - Runtime?
 - $T(n) = 4 T(n/2) + O(n)$
 - $T(n) = O(n^2)$
- Instead of 4 subproblems, we only need 3 (with the help of clever insight).
- Three subproblems:
 - $a = x_H y_H$
 - $d = x_L y_L$
 - $e = (x_H + x_L) (y_H + y_L) - a - d$
- Then $xy = a r^n + e r^{n/2} + d$
- $T(n) = 3 T(n/2) + O(n)$
- $T(n) = O(n^{\log 3}) = O(n^{1.584...})$

Studi Kasus 7: Permasalahan Tata Letak Keramik Lantai (Tiling Problem)

Tugas:

- 1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem tiling menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++ Jawab :

Program :

```
/*
  Nama      : Anugerah Prima Bagaskara
  NPM       : 140810180006
  Kelas     : B
  Tanggal   : 31 Maret 2020
  Program   : Tilling Problem
*/

// C++ implementation to count number of ways to
// tile a floor of size n x m using 1 x m tiles
#include <bits/stdc++.h>
using namespace
std;

// function to count the total number of ways
```

```

int countWays(int n, int m)
{
    // table to store
    values // of
    subproblems int
    count[n + 1]; count[0]
    = 0;

    // Fill the table upto value n for (int i
    = 1; i <= n; i++) { // recurrence
    relation if (i > m) count[i]
    = count[i - 1] + count[i - m];

    // base cases
    else if (i < m)
    count[i] = 1;

    // i == m
    else
    count[i] = 2;
    }

    // required number of ways
    return count[n];
}

// Driver program to test above
int main()
{
    int n = 4, m = 2;
    cout << "Number of ways = "
    << countWays(n, m);
    return 0;
}

```

Screenshot :

```
E:\TI\Semester 4\Prak Analgo\AnalgoKu5\7. Tiling.exe
Number of ways = 5
-----
Process exited after 0.01441 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

// n adalah ukuran kotak yang diberikan, p adalah lokasi sel yang hilang
Tile (int n, Point p)

- 1) Kasus dasar: $n = 2$, A 2×2 persegi dengan satu sel yang hilang tidak ada apaapanya tapi ubin dan bisa diisi dengan satu ubin.
- 2) Tempatkan ubin berbentuk L di tengah sehingga tidak menutupi subsquare $n / 2 * n / 2$ yang memiliki kuadrat yang hilang. Sekarang keempatnya subskuen ukuran $n / 2 \times n / 2$ memiliki sel yang hilang (sel yang tidak perlu diisi). Lihat gambar 2 di bawah ini.
- 3) Memecahkan masalah secara rekursif untuk mengikuti empat. Biarkan p_1, p_2, p_3 dan p_4 menjadi posisi dari 4 sel yang hilang dalam 4 kotak.
 - a) Ubin ($n / 2, p_1$)
 - b) Ubin ($n / 2, p_2$)
 - c) Ubin ($n / 2, p_3$)
 - d) Ubin ($n / 2, p_3$)
- 2) Relasi rekurensi untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta. $T(n) = 4T(n / 2) + C$. Selesaikan rekurensi tersebut dengan Metode Master
Jawab :

Kompleksitas Waktu:

Relasi perulangan untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta.

$$T(n) = 4T(n / 2) + C$$

Rekursi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Master dan kompleksitas waktu adalah $O(n^2)$

Bagaimana cara kerjanya?

Pengerjaan algoritma Divide and Conquer dapat dibuktikan menggunakan Mathematical Induction. Biarkan kuadrat input berukuran $2k \times 2k$ di mana $k \geq 1$.

Kasus Dasar: Kita tahu bahwa masalahnya dapat diselesaikan untuk $k = 1$. Kami memiliki 2×2 persegi dengan satu sel hilang.

Hipotesis Induksi: Biarkan masalah dapat diselesaikan untuk $k-1$.

Sekarang perlu dibuktikan untuk membuktikan bahwa masalah dapat diselesaikan untuk k jika dapat diselesaikan untuk $k-1$. Untuk k , ditempatkan ubin berbentuk L di tengah dan memiliki empat subsquare dengan dimensi $2k-1 \times 2k-1$ seperti yang ditunjukkan pada gambar 2 di atas. Jadi jika dapat menyelesaikan 4 subskuares, dapat menyelesaikan kuadrat lengkap.