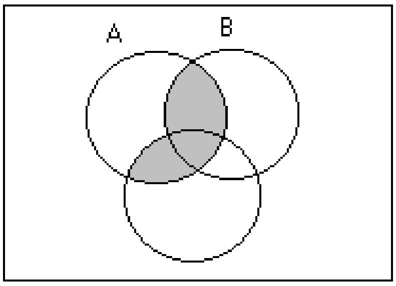
Pembuktian Teorema Himpunan

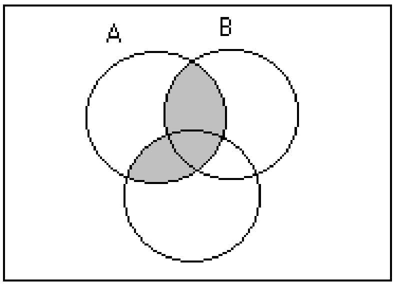
1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh . Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.
- Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh . Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0

1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh . Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= A \cap \mathrm{U} && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Contoh . Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= (A \cup B) \cap \mathrm{U} && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A \cup B && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Contoh . Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i)
$$
\begin{aligned}
A \cup (\overline{A} \cap B) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cap B) && \text{(H. distributif)} \\
&= \mathrm{U} \cap (A \cap B) && \text{(H. komplemen)} \\
&= A \cup B && \text{(H. identitas)}
\end{aligned}
$$

(ii) adalah dual dari (i)

$$
\begin{aligned}
A \cap (\overline{A} \cup B) &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) && \text{(H. distributif)} \\
&= \varnothing \cup (A \cap B) && \text{(H. komplemen)} \\
&= A \cap B && \text{(H. identitas)}
\end{aligned}
$$

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh . Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup \text{C})$.
Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall \text{x} \in A$ juga berlaku $x \in$ C, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh . Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

yang ditanyakan adalah $\left| A \cup B \right|$.

$$\left| A \right| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$
$$\left| B \right| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$
$$\left| A \cap B \right| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

$$\left| A \cup B \right| = \left| A \right| + \left| B \right| - \left| A \cap B \right| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$\left| A \cup B \cup C \right| = \left| A \right| + \left| B \right| + \left| C \right| - \left| A \cap B \right| - \left| A \cap C \right| - \left| B \cap C \right| + \left| A \cap B \cap C \right|$$

Untuk himpunan A_1, A_2, …, A_r, berlaku:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r \right| = \sum_{i} \left| A_i \right| - \sum_{1 \le i \le j \le r} \left| A_i \cap A_j \right| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} \left| A_i \cap A_j \cap A_k \right| + \ldots + (-1)^{r-1} \left| A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r \right|$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. **Buktikan dalil himpunana berikut, jika A, B, dan C sebarang himpunan;**
   a. **$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$**
   b. **Dalil De Morgan pada Himpunan**
2. **Di antara bilangan 1 sampai 300 (termasuk 1 dan 300 sendiri), berapa banyak yang tidak habis di bagi 3 dan 5.**
3. **Di antara bilangan 1 sampai 300, berapa banyak bilangan habis di bagi 3 tetapi tidak habis di bagi 5 maupun 7.**