Bogdan Alex Georgescu and Bernard Sklar
Ingeniería Eléctrica Comunicaciones Digitales
June 26, 2023

P2. El Filtro Emparejado

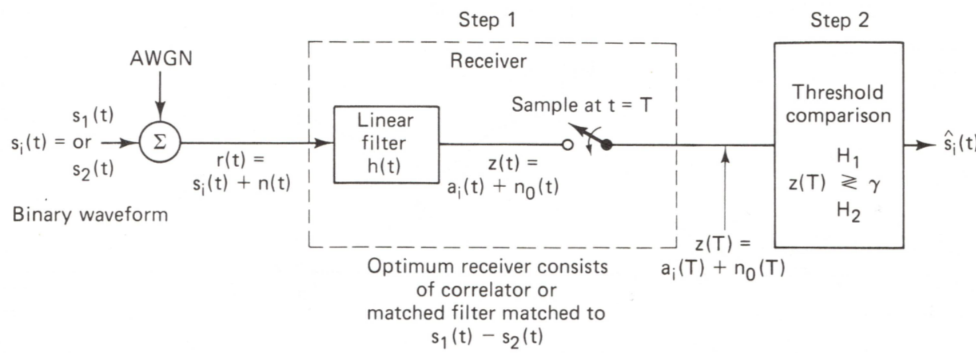

FIGURE 1. Dos pasos basicos en la detección de señales digitales.

Un filtro emparejado es un filtro lineal diseñado para proporcionar la máxima relación de potencia de señal a ruido en su salida para una forma de onda de símbolo transmitida dada. Considere que una señal conocida $s(t)$ más AWGN, n(t), es la entrada a un filtro lineal invariable en el tiempo seguido de un muestreador, como se muestra en la Fig. 1. En el tiempo $t = T$, la salida del receptor $z(T)$, consiste en un componente de señal, a_i, y un componente de ruido, n_0. La varianza del ruido de salida (potencia de ruido promedio) se denota por σ_0^2, de modo que la relación entre la potencia de la señal instantánea y la potencia de ruido promedio, $(S/N)_T$, en el tiempo t = T , fuera del receptor en el bloque 1, es:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2} \tag{1}$$

Se desea encontrar la función de transferencia de filtro $H_0(f)$ que maximice la ecuación anterior. Se puede expresar la señal, $a(t)$, en la salida del filtro, en términos de la función de transferencia del filtro, $H(f)$ (antes optimización), y la transformada de Fourier de la señal de entrada de la siguiente manera:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT}df \tag{2}$$

donde $S(f)$ es la transformada de Fourier de la señal de entrada $s(t)$. Suponga que el espectro de potencia bilateral la densidad del ruido de entrada es $N_0/2$ watts/hertz. La densidad espectral de potencia de entrada, $G_X(f)$, y la salida densidad espectral de potencia, $G_Y(f)$, se relacionan de la siguiente manera:

$$G_Y(f) = G_X(f)|H(f)|^2 \tag{3}$$

Se puede expresar la potencia de ruido de salida, σ_0^2, como:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \tag{4}$$

Luego combinamos las ecuaciones anteriores para expresar $(S/N)_T$, como sigue:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi f_t}df\right|}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \tag{5}$$

A continuación se encuentra el valor de $H(f) = H_0(f)$ para el cual se logra el máximo $(S/N)_T$, utilizando el método de Schwarz desigualdad. Una forma de la desigualdad se puede establecer como:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx \tag{6}$$

La igualdad se cumple si $f_1(x) = k f_2^*$, donde k es una constante arbitraria y * indica conjugado complejo. Si se identifica $H(f)$ con $f_1(x)$ y $S(f)e^{j2\pi fT}$ con $f_2(x)$ se puede escribir:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi fT} df \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \tag{7}$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \tag{8}$$

o:

$$max \left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{2E}{N_0} \tag{9}$$

donde la energía, E, de la señal de entrada $s(t)$ es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \tag{10}$$

Por lo tanto, la salida máxima $(S/N)_T$ depende de la energía de la señal de entrada y de la densidad espectral de potencia del ruido, no en la forma particular de la forma de onda que se utiliza. La igualdad en la desigualdad anterior se cumple solo si la función de transferencia de filtro óptima, $H_0(f)$, es empleado, tal que:

$$H(f) = H_0(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT} \tag{11}$$

o:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{kS^*(f)e^{-j2\pi fT}\} \tag{12}$$

Dado que $s(t)$ es una señal de valor real, podemos escribir usando la tabla de transformaciones de Fourier:

$$h(t) = \begin{cases} ks(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{13}$$

Por tanto, la respuesta de impulso de un filtro que produce la máxima relación señal-ruido de salida es la imagen especular de la señal de mensaje $s(t)$, *retrasada* por la duración del tiempo del símbolo, T. Tenga en cuenta que la demora de T segundos hace que las ecuaciones anteriores sean causales; es decir, el retraso de T segundos hace que $h(t)$ sea una función de tiempo positivo en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Sin el retraso de T segundos, la respuesta, $s(-t)$, es irrealizable porque describe una respuesta como una función de tiempo negativo.

apt. 805 80 Point McKay CR NW, Calgary, Alberta, Canada, T3B 4W4