Bogdan Alex Georgescu and Bernard Sklar
Génie Électrique Communications Numériques
June 26, 2023

P2. Le filtre adapté

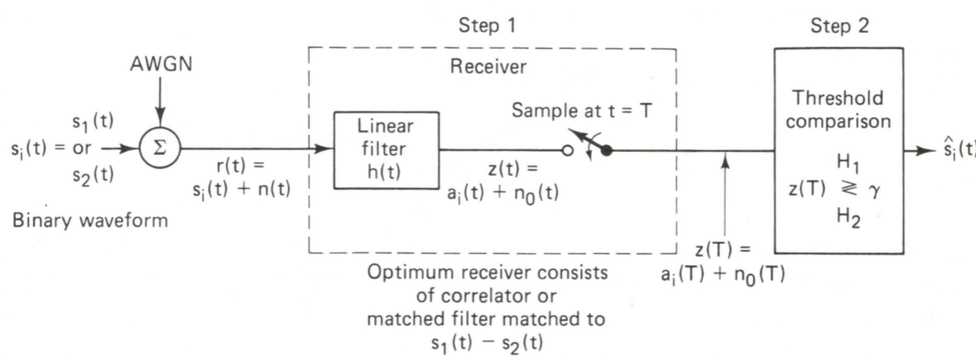

FIGURE 1. Étapes de la détection de signal numérique.

Un filtre adapté est un filtre linéaire conçu pour fournir le rapport de puissance signal/bruit maximal à son sortie pour une forme d'onde de symbole transmise donnée. Considérons qu'un signal connu $s(t)$ plus AWGN, $n(t)$, est l'entrée d'un filtre linéaire invariant dans le temps suivi d'un échantillonneur, comme illustré à la Fig.1. Au temps $t = T$, la sortie du récepteur $z(T)$, se compose d'une composante de signal, a_i, et d'une composante de bruit, n_0. L'écart de la le bruit de sortie (puissance de bruit moyenne) est noté σ_0^2, de sorte que le rapport entre la puissance instantanée du signal et la puissance de bruit moyenne, $(S/N)_T$, à l'instant $t = T$, en sortie du récepteur dans le bloc 1, est:

(1) $$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2}$$

On souhaite trouver la fonction de transfert du filtre $H_0(f)$ qui maximise l'équation précédente. Nous pouvons exprimer le signal, a(t), à la sortie du filtre, en fonction de la fonction de transfert du filtre, $H(f)$ (avant optimisation), et la transformée de Fourier du signal d'entrée comme suit:

(2) $$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT}df$$

où $S(f)$ est la transformée de Fourier du signal d'entrée $s(t)$. Supposons le spectre de puissance bilatéral la densité du bruit d'entrée est $N_0/2$ watts/hertz. La densité spectrale de puissance d'entrée, $G_X(f)$, et la sortie densité spectrale de puissance, $G_Y(f)$, sont liées comme suit:

(3) $$G_Y(f) = G_X(f)|H(f)|^2$$

Nous pouvons exprimer la puissance de bruit de sortie, σ_0^2, comme:

(4) $$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Nous combinons ensuite les équations précédentes pour exprimer $(S/N)_T$, comme suit:

(5) $$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi f_t}df\right|}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

On trouve ensuite la valeur de $H(f) = H_0(f)$ pour laquelle le maximum $(S/N)_T$ est atteint, en utilisant la formule de Schwarz inégalité. Une forme de l'inégalité peut être énoncée comme suit:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx \tag{6}$$

L'égalité est vraie s$f_1(x) = kf_2^*$, où k est une constante arbitraire et * indique un conjugué complexe. Si on identifie $H(f)$ avec $f_1(x)$ et $S(f)e^{j2\pi fT}$ avec $f_2(x)$ on peut écrire:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \tag{7}$$

La substitution dans l'une des équations précédentes donne:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \tag{8}$$

ou:

$$max \left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{2E}{N_0} \tag{9}$$

où l'énergie, E, du signal d'entrée s(t) est:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \tag{10}$$

Ainsi, la sortie maximale $(S/N)_T$ dépend de l'énergie du signal d'entrée et de la densité spectrale de puissance du bruit, pas sur la forme particulière de la forme d'onde qui est utilisée. L'égalité dans l'inégalité précédente n'est valable que si la fonction de transfert de filtre optimale, $H_0(f)$, est employé, tel que:

$$H(f) = H_0(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT} \tag{11}$$

ou:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{kS^*(f)e^{-j2\pi fT}\} \tag{12}$$

Puisque $s(t)$ est un signal à valeur réelle, nous pouvons écrire en utilisant le tableau des transformations de Fourier:

$$h(t) = \begin{cases} ks(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{13}$$

Ainsi, la réponse impulsionnelle d'un filtre qui produit le rapport signal sur bruit de sortie maximal est la image miroir du signal de message s(t), *retardé* de la durée du symbole, T. Notez que le retard de T secondes rend les équations précédentes causales; c'est-à-dire que le retard de T secondes fait de h(t) une fonction de temps positif dans l'intervalle $0 \leq t \leq T$. Sans le délai de T secondes, la réponse, $s(-t)$, est irréalisable parce qu'il décrit une réponse en fonction du temps négatif.

APT. 805 80 POINT MCKAY CR NW, CALGARY, ALBERTA, CANADA, T3B 4W4