Bogdan Alex Georgescu and Bernard Sklar
Ingeniería Eléctrica Comunicaciones Digitales
June 26, 2023

P1. Probabilidad de error

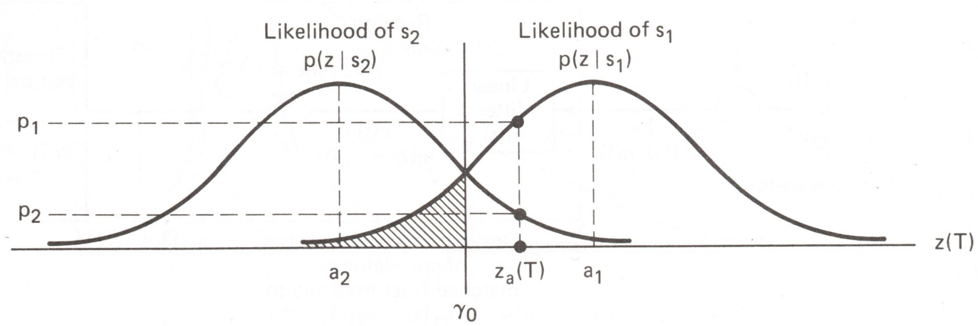

FIGURE 1. Funciones de densidad de probabilidad condicional: $p(z|s_1)$ and $p(z|s_2)$.

Para el ejemplo binario de la Fig. 1, hay dos formas en las que pueden ocurrir errores. Se producirá un error, e cuando se envía $s_1(t)$, y el ruido del canal da como resultado que la señal de salida del receptor $z(T)$, sea menor que γ_0. El probabilidad de tal ocurrencia es:

$$P(e|s_1) = P(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(z|s_1)dz \tag{1}$$

Esto se ilustra mediante el área sombreada a la izquierda de γ_0 en la Fig. 1. De manera similar, ocurre un error cuando $s_2(t)$ es enviado y el ruido del canal resulta en que $z(T)$, siendo mayor que γ_0. La probabilidad de que esto ocurra es:

$$P(e|s_2) = P(H_1|s_2) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z|s_2)dz \tag{2}$$

La probabilidad de un error es la suma de las probabilidades de todas las formas en que puede ocurrir un error. En el caso binario, podemos expresar la probabilidad de error de bit, P_B, de la siguiente manera:

$$P_B = \sum_{i=1}^{2} P(e, s_i) \tag{3}$$

Combinando las tres ecuaciones anteriores, se puede escribir:

$$P_B = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \tag{4}$$

Es decir, dado que se transmitió la señal $s_1(t)$, resulta un error si se elige la hipótesis H_2, o si se da que se transmitió la señal $s_2(t)$, se produce un error si se elige la hipótesis H_1. Para el caso en que el las probabilidades a priori son iguales, es decir, $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$,

$$P_B = \frac{1}{2}P(H_2|s_1) + \frac{1}{2}P(H_1|s_2) \tag{5}$$

y debido a la simetría de las funciones de densidad de probabilidad

$$P_B = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) \tag{6}$$

La probabilidad de un error de bit, P_B, es numéricamente igual al área debajo de la ”cola” de cualquier probabilidad función, bit error, P_B, es numéricamente igual al área bajo la c̈olade cualquiera de las funciones de probabilidad, $p(z|s_1)$ o $p(z|s_2)$, cayendo en el lado ”incorrecto” del umbral. Por lo tanto, podemos calcular P_B integrando $p(z|s_1)$ entre los límites $-\infty$ y γ_0, o como se muestra a continuación, integrando $p(z|s_2)$ entre los límites γ_0 y ∞:

(7) $$P_B = \int_{\gamma_0=(a_1+a_2)/2}^{\infty} p(z|s_2)dz$$

donde $\gamma_0 = (a_1 + a_2)/2$ es el umbral óptimo de la Fig. 1. Reemplazando la probabilidad $p(z|s_2)$ con su equivalente gaussiano, se obtiene:

(8) $$P_B = \int_{\gamma_0=(a_1+a_2)/2}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right] dz$$

donde σ_0^2 es la varianza del ruido fuera del correlacionador.

Sea $u = (z - a_2)/\sigma_0$. Entonces $\sigma_0 du = dz$ y:

(9) $$P_B = \int_{u=(a_1-a_2)/(2\sigma_0)}^{u=\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right)$$

donde Q(x), llamada función de error complementaria o función de co-error, es un símbolo de uso común para la probabilidad bajo las colas de la distribución gaussiana. Se define como:

(10) $$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

apt. 805 80 Point McKay CR NW, Calgary, Alberta, Canada, T3B 4W4