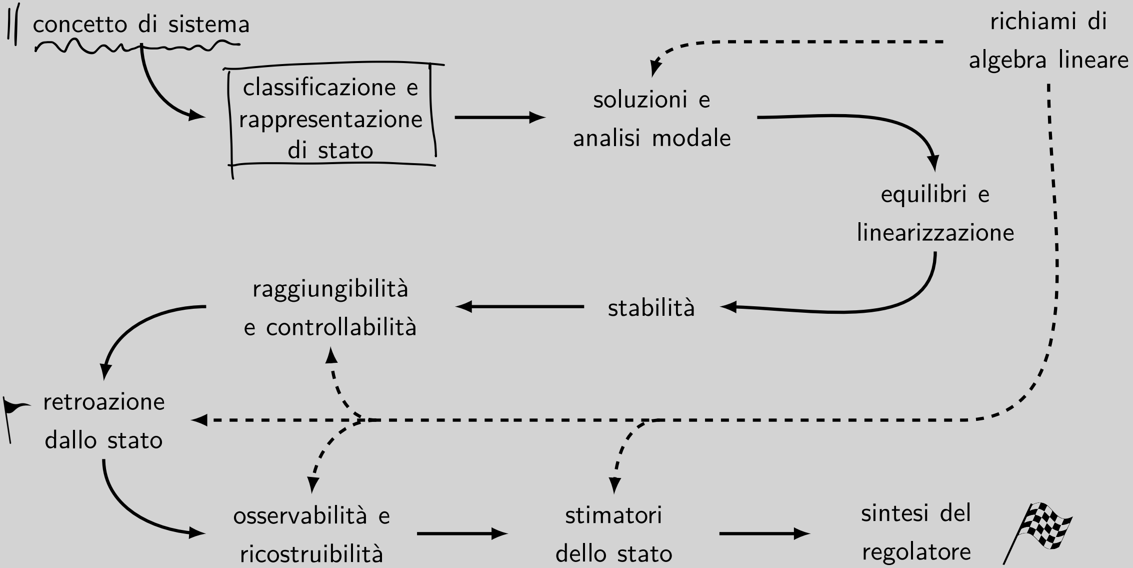
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

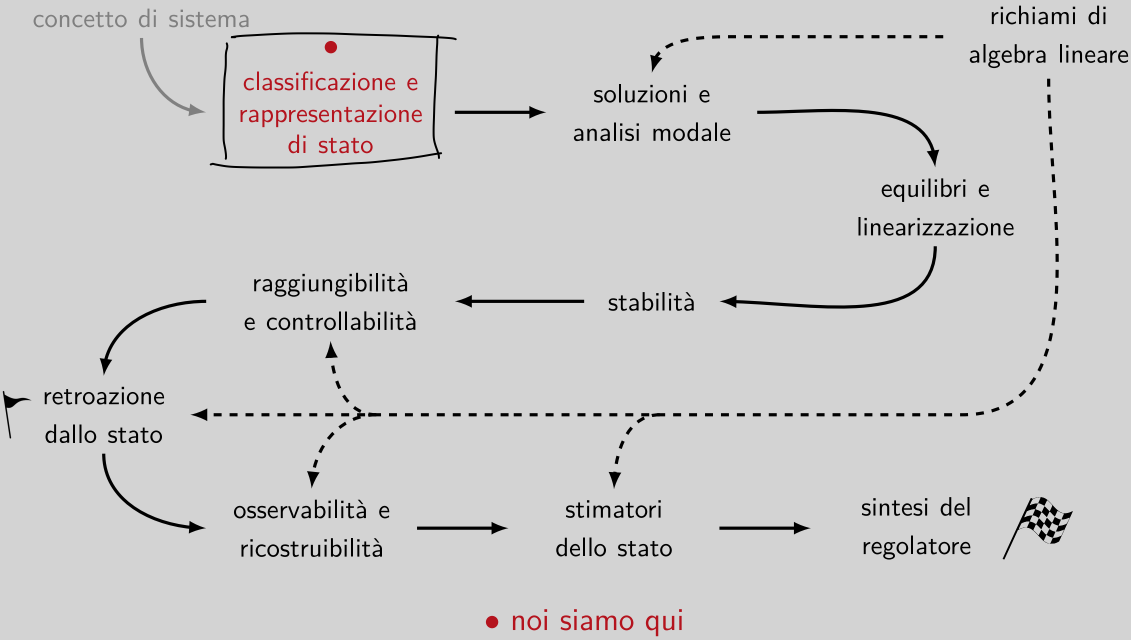
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Classificazione e Rappresentazione di Sistemi

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

In questa lezione

0. DEFINIZIONE DI SISTEMA

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi

ingresso/uscita

rappresentazione di stato o interna

tempo-invarianti

- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato

LTI

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

In questa lezione

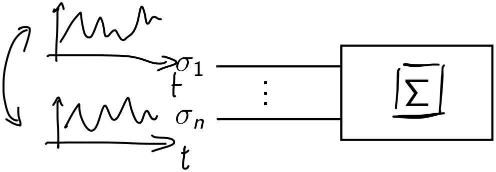
- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

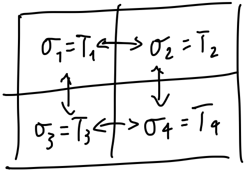
Sistema

ES: circuiti elettrici
circuiti meccanici

ES: mercati finanziari
iscritti/laureati
corso di laurea

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.





$\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

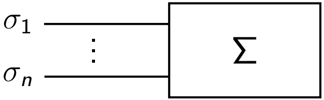
Esempio: Σ = appartamento, σ_1 = temp. cucina, σ_2 = temp. soggiorno, ...

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.

$$\Sigma : f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$$

$$\hookrightarrow \sigma_1(t) = f_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

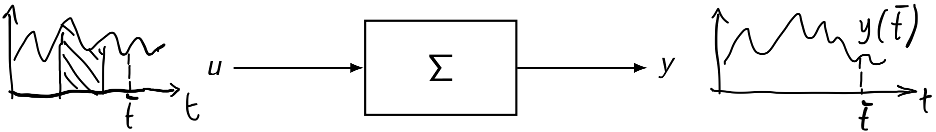


$\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

$\Sigma =$ Modello matematico che descrive la relazione temporale tra $\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.



In molti casi in $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ si possono distinguere variabili di:

ingresso/input u (causa) uscita/output y (effetto)

Esempio: automobile: u = pedale acc. / sterzo, y = posizione / velocità veicolo
motore elettrico: u = tensione / corrente armatura, y = posizione / velocità rotore

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

ANALISI *Perché studiare Σ e le sue proprietà?* CONTROLLO

Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) ***controllarlo***!

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) ***controllarlo***!

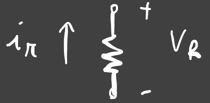
Ma perché usare la matematica?

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) ***controllarlo***!

Ma perché usare la matematica?

Fornisce strumenti che permettono di descrivere e analizzare in maniera ***quantitativa*** il comportamento di Σ



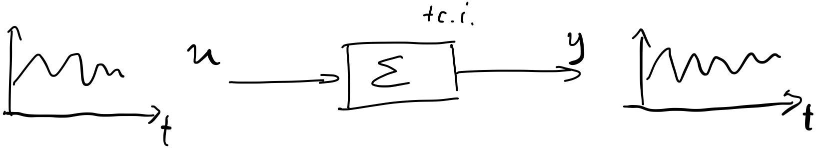
$$V_R = R\, i_R$$

$$[V] \qquad [A]$$

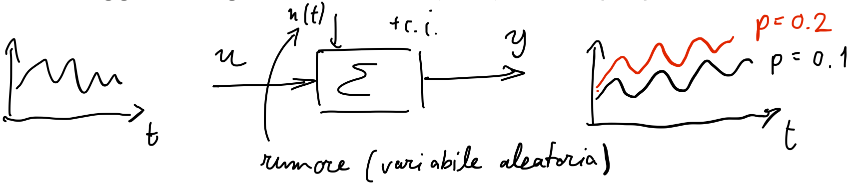
Classificazione dei sistemi

Σ

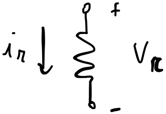
Deterministico: evoluzione delle variabili $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ determinato dal comportamento dalle variabili stesse in determinati intervalli temporali



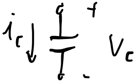
Stocastico: leggi che legano variabili $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ di tipo probabilistico



Classificazione dei sistemi



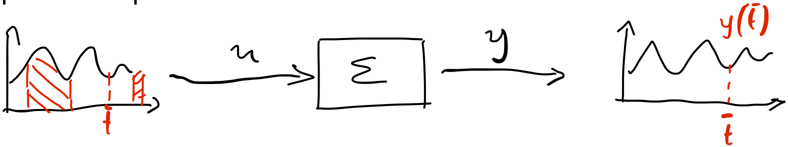
$v_R(t) = R\, i_R(t)$



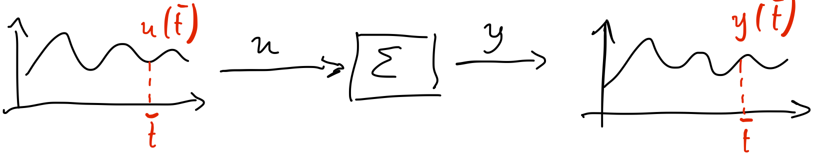
$i_c(t) = C \dfrac{dv_c(t)}{dt} \longrightarrow v_c(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{\bar{t}} i_c(t)\, dt$

Σ

Dinamico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende dall'evoluzione delle stesse in determinati intervalli



Statico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende solo dal valore assunto dalle stesse in t

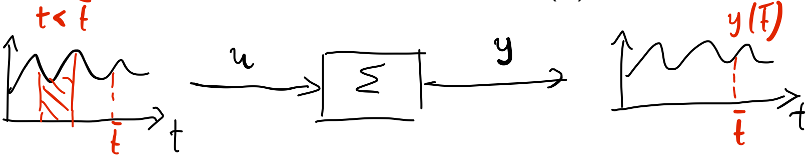


Classificazione dei sistemi

→ fisicamente realizzabili !

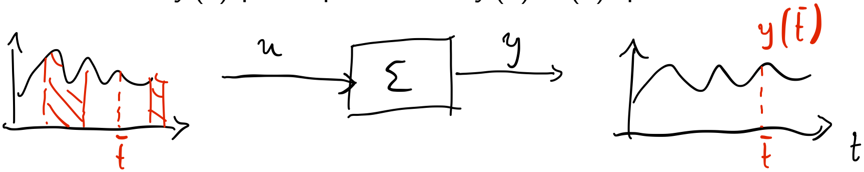
Σ dinamico

Causale: evoluzione di alcune variabili d'interesse (y) in t dipende del comportamento delle stesse e di altri variabili (u) in tempi $\leq t$

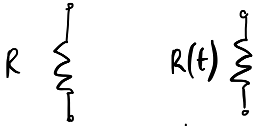


Non causale: $y(t)$ può dipendere da $y(s)$, $u(s)$, per $s > t$

signal processing (interpolatore)



Classificazione dei sistemi



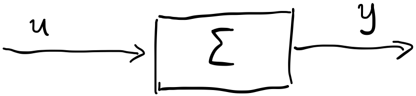
t. inv.   t. var.

$v_R(t) = R(t)\, i_R(t)$

(invecchiamento componenti)

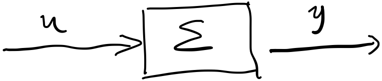
Σ →

Tempo invariante: legame tra variabili di interesse indipendente da t



$y(t) = f(u(t))$

Tempo variante: legame tra variabili di interesse dipendente da t



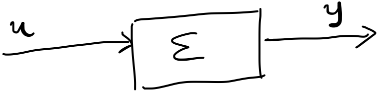
$y(t) = f(u(t), \boxed{t})$

Classificazione dei sistemi

1) molti sistemi ingegneristici sono lineari (circuiti elettrici / mecc.)
2) Linearizzazione
3) caratterizzazione analitica del comportamento del sistema

Σ

Lineare: legame tra variabili di interesse di tipo lineare



$y(t) = f(u(t))$

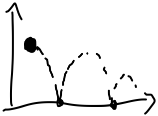
$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

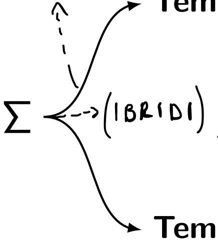
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)$

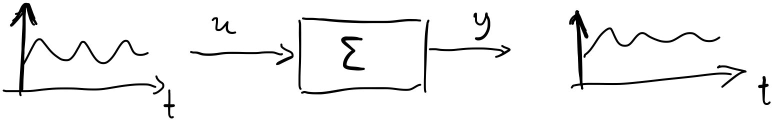
Non lineare: legame tra variabili di interesse non di tipo lineare

Classificazione dei sistemi

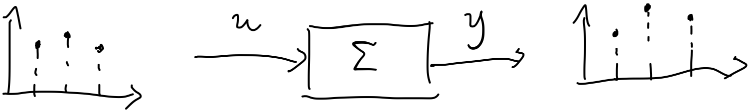




Tempo continuo: variabile temporale $t \in \mathbb{R}$



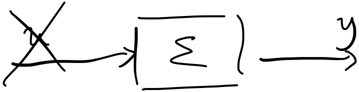
Tempo discreto: variabile temporale $t \in \mathbb{Z}$



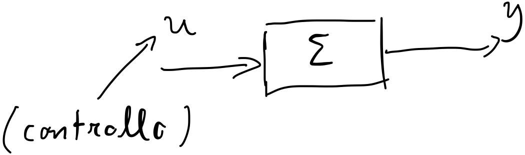
Classificazione dei sistemi

Σ

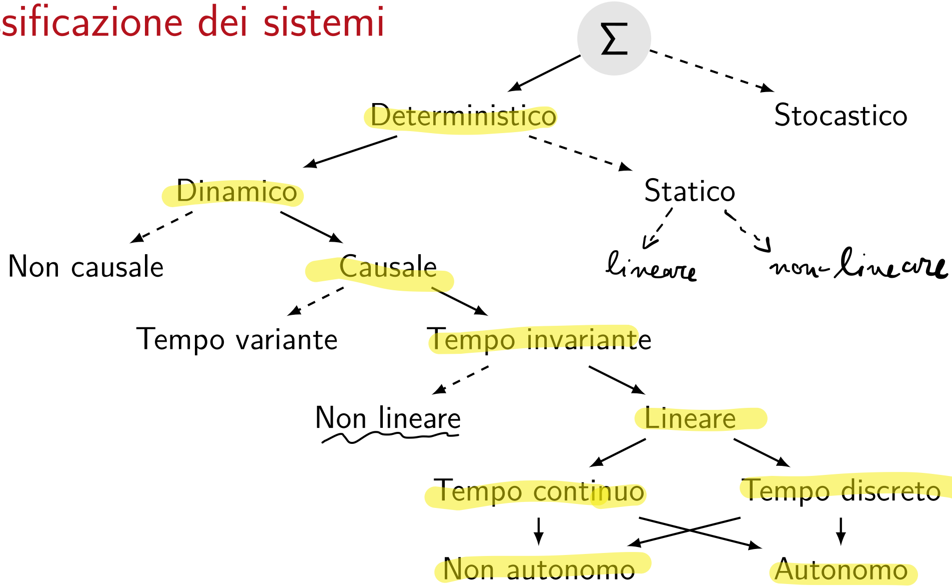
Autonomo: non ci sono ingressi ($u = 0$)



Non autonomo: ci sono ingressi ($u \neq 0$)



Classificazione dei sistemi



In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

Rappresentazione esterna o I/O (ingresso/uscita)

MATLAB

tf(num, den)

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t)$$

tempo-variante

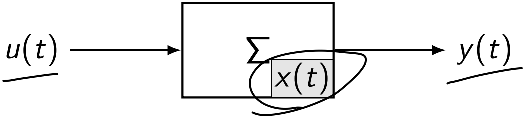
Tempo continuo: $h\left(y^{(n)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t), \boxed{t}\right) = 0 + \text{c.i.}$

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace) $G(s) = Y(s)/U(s)$

Tempo discreto: $h\left(y(t-t_n), \ldots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \ldots, u(t-1), u(t), t\right) = 0 + \text{c.i.}$

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta) $G(z) = Y(z)/U(z)$

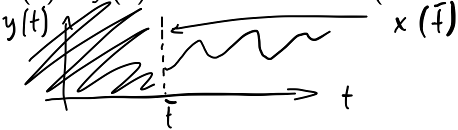
Rappresentazione interna o di stato



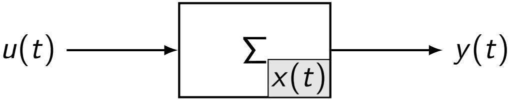
$\mathbb{R}^n \ni x(t) =$ (vettore di) variabili di stato *(memoria interna!)*

↳ "separa" il passato dal futuro di Σ

Proprietà di separazione: $x(t)$ fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di Σ necessaria per valutare $x(t)$ e $y(t)$ ad istanti futuri (una volta noto $u(t)$).



Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato *(memoria interna!)*

dinamica (eq. diff. 1° ord.)

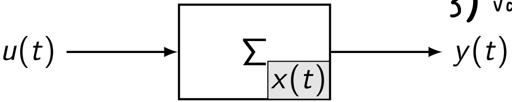
Tempo continuo: $$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \qquad x(t_0) = x_0$$

statica

f = mappa di transizione di stato $\qquad$ h = mappa di uscita

Rappresentazione interna o di stato

1) Rappresentazione compatta
2) MIMO
3) vantaggi computazionali



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato *(memoria interna!)*

eq. alle differenze

Tempo discreto:
$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

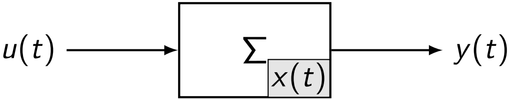
f = mappa di transizione di stato $\qquad$ h = mappa di uscita

In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

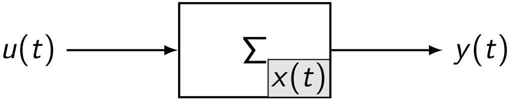
Sistemi LTI in spazio di stato

extra



Σ lineare e tempo invariante $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

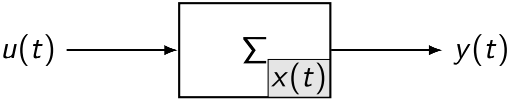
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo:
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

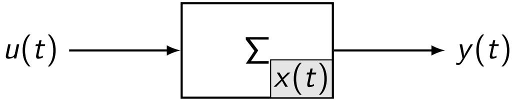
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Sovrapposizione degli effetti

$x',\ y'$ = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0' e ingresso u'

$x'',\ y''$ = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0'' e ingresso u''

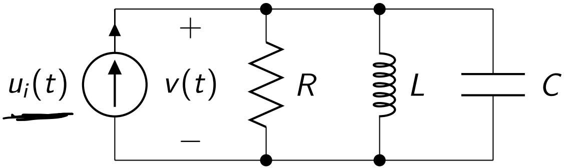
$$\boxed{x_0 = \alpha_1 x_0' + \alpha_2 x_0'',\ u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'',\ y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''}$$

In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

Circuito RLC

extra

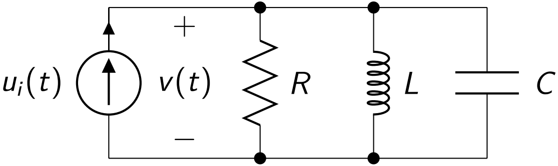


$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Circuito RLC

extra



$u_i(t) = \text{input},\ v(t) = \text{output}$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

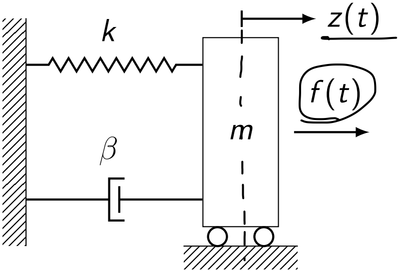
$$x_1 = v,\ x_2 = i_L,\ u = u_i,\ y = x_1 = v$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

Massa-molla-smorzatore

extra

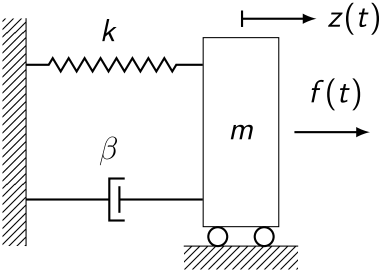


$f(t)$ = input, $z(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Massa-molla-smorzatore

extra



$f(t)$ = input, $z(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

F.d.T. $G(s) = \dfrac{1}{ms^2 + \beta s + k}$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = z,\ x_2 = \dot{x},\ u = f,\ y = x_1 = z$$

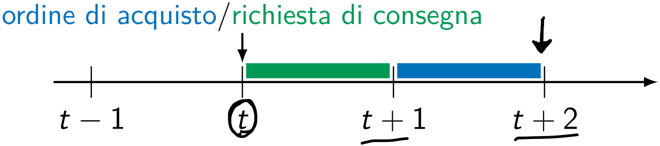
$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- eq. diff. $\rightarrow$ modello di stato extra
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

Magazzino merci



$y(t)$ = quantità merce in magazzino al tempo t

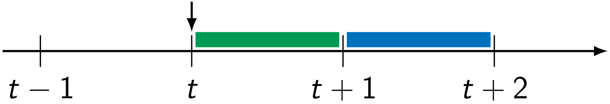
$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t

$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

$$u_1(t),\ u_2(t) = \text{input},\ y(t) = \text{output}$$

Magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna



extra

$y(t)$ = quantità merce in magazzino al tempo t

$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t

$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

$$u_1(t),\ u_2(t) = \text{input},\ y(t) = \text{output}$$

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

F.d.T. $G_1(z) = \dfrac{z^{-1}}{z-1},\ \ G_2(z) = -\dfrac{1}{z-1}$

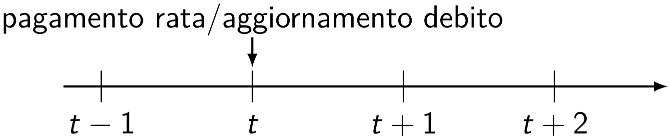
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estinzione debito



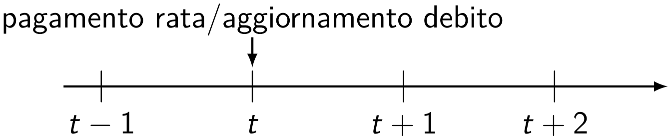
$y(t)$ = debito al tempo t = output

$u(t)$ = rata al tempo t = input

I = tasso di interesse (decimale)

Estinzione debito

extra



$y(t)$ = debito al tempo t = output
$u(t)$ = rata al tempo t = input
I = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1+I)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(z) = -\frac{z}{z-(1+I)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = x(t) = y(t) + u(t)$$

$$F = 1 + I,\ G = -1 - I$$

$$H = 1,\ J = -1$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Classificazione e Rappresentazione di Sistemi

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

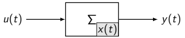
A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Sistemi LTI in spazio di stato

extra



Σ lineare e tempo invariante $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

back

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad y(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_{11} x_1(t) + \cdots + f_{1n} x_n(t) + g_{11} u_1(t) + \cdots + g_{1m} u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_{21} x_2(t) + \cdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_{n1} x_1(t) + \cdots + f_{nn} x_n(t) + g_{n1} u_1(t) + \cdots + g_{nm} u_m(t) \\ y_1(t) &= h_{11} x_1(t) + \cdots + h_{1n} x_n(t) + j_{11} u_1(t) + \cdots + j_{1m} u_m(t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= h_{p1} x_1(t) + \cdots + h_{pn} x_n(t) + j_{p1} u_1(t) + \cdots + j_{pm} u_m(t) \end{aligned}$$

back

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{p1} & \cdots & h_{pn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n} \qquad J = \begin{bmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ j_{p1} & \cdots & j_{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

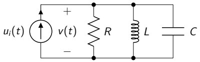
LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F x(t) + G u(t) \\ y(t) = H x(t) + J u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

$F =$ matrice di stato/sistema
$G =$ matrice di ingresso
$H =$ matrice di uscita
$J =$ matrice di "feed-forward"

Circuito RLC

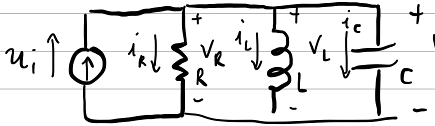
extra

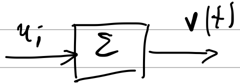


$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

back





Resistenza: $v_R = R\, i_R$

Condensatore: $i_C = C \dfrac{dV_C}{dt}$

Induttore: $v_L = L \dfrac{di_L}{dt}$

1) $v(t) = v_R(t) = v_L(t) = v_C(t)$

KIRCHHOFF

2) $u_i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{di_R(t)}{dt} + \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{di_C(t)}{dt}$$

$$= \frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} v(t) + C\frac{d^2 v(t)}{dt^2}$$

$$C\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} v(t) = \frac{du_i(t)}{dt}$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{U_i(s)} = \frac{s}{Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}}$$

Rappresentazione interna?

$x_1 = v_C = v_R = v_L = v \qquad x_2 = i_L$

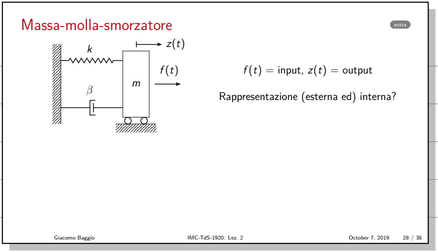
$$\dot{x}_1 = \dot{v}_C = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C}\left(u_i(t) - i_R(t) - i_L(t)\right)$$

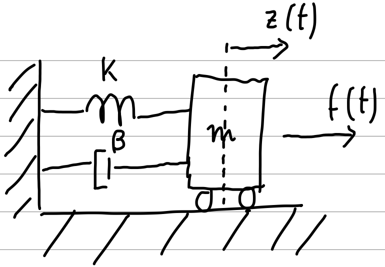
$$= \frac{1}{C}\left(u_i(t) - \frac{v_R(t)}{R} - x_2(t)\right) = \frac{1}{C}\left(u_i(t) - \frac{x_1(t)}{R} - x_2(t)\right)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{i}_L = \frac{v_L}{L} = \frac{x_1(t)}{L}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u_i(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u_i \end{cases}$$

$$x_1(0) = v(0)$$
$$x_2(0) = i_L(0)$$





back

$f(t) = \text{input}$

$z(t) = \text{output}$

Rappresentazione esterna:

Newton: $m\ddot{z}(t) = f(t) - Kz(t) - \beta\dot{z}(t) \Rightarrow m\ddot{z}(t) + \beta\dot{z}(t) + Kz(t) - f(t) = 0$

FdT: $ms^2 Z(s) + \beta s Z(s) + K Z(s) - F(s) = 0$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + \beta s + K}$$

back

Rappresentazione interna o di stato

$$x_1(t) = z(t) \qquad x_2(t) = \dot{z}(t) \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{z}(t) = \frac{1}{m} f(t) - \frac{k}{m} z(t) - \frac{\beta}{m} \dot{z}(t) = \frac{1}{m} f(t) - \frac{k}{m} x_1(t) - \frac{\beta}{m} x_2(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}}^{F} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{G} f(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{J} \cdot f(t) \end{cases}$$

equazione differenziale $\rightarrow$ modello di stato

back

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u \qquad (*)$$

$x_1(t) = y(t) \longrightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$

$x_2(t) = \dot{y}(t) \longrightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t)$

$x_3(t) = \ddot{y}(t)$

$\vdots$

$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$

$x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \longrightarrow \dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1\dot{y} - a_0 y + b_0 u$

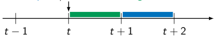
$= -a_{n-1}x_n(t) - \cdots - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t) + b_0 u$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}^{F} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}^{G} u \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{H} x(t) + \underbrace{0}_{J} \cdot u(t) \end{cases}$$

Magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna

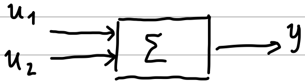
extra



$y(t)$ = quantità merce in magazzino al tempo t
$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t
$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

$u_1(t)$, $u_2(t)$ = input, $y(t)$ = output

$y(t)$ = quantità di merce al tempo t
$u_1(t)$ = quantità di merce ordinata al tempo t
$u_2(t)$ = quantità di merce in uscita al tempo t



Rappresentazione esterna:

$$y(t+1) = y(t) + u_1(t-1) - u_2(t)$$

FdT: $zY(z) = Y(z) + z^{-1}U_1(z) - U_2(z) \Rightarrow G_1(z) = \dfrac{Y(z)}{U_1(z)} = \dfrac{z^{-1}}{z-1}$

$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{U_2(z)} = \frac{-1}{z-1}$$

Rappresentazione interna o di stato

$$x_1(t) = y(t) \qquad x_2(t) = u_1(t-1) \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1(t+1) = y(t+1) = y(t) + u_1(t-1) - u_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - \underline{u_2(t)}$$

$$x_2(t+1) = \underline{u_1(t)}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{F} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{G} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\[2ex] y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} y(t_0) \\ u_1(t_0-1) \end{bmatrix}$$

Estinzione debito

pagamento rata/aggiornamento debito

$t-1 \quad t \quad t+1 \quad t+2$

extra

$y(t)$ = debito al tempo t = output
$u(t)$ = rata al tempo t = input
I = tasso di interesse (decimale)

back

$y(t)$ = debito al tempo $t \in \mathbb{Z}$

$u(t)$ = rata al tempo t

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t)$$

Rappresentazione esterna:

$$y(t+1) = y(t) + I\,y(t) - u(t+1) \Rightarrow y(t+1) - (1+I)\,y(t) + u(t+1) = 0$$

FdT: $\quad zY(z) - (1+I)\,Y(z) + z\,U(z) = 0$

$$G(z) = \frac{-z}{z-(1+I)}$$

back

Rappresentazione interna o di stato:

$$x(t) = x_1(t) = y(t) + u(t) \implies y(t) = x(t) - u(t) \quad (*)$$

$$x(t+1) = y(t+1) + u(t+1)$$

$$\overset{|}{=} (1+I)\, y(t) - \cancel{u(t+1)} + \cancel{u(t+1)}$$

$$\overset{(*)}{=} (1+I)\, x(t) - (1+I)\, u(t)$$

$$\begin{cases} x(t+1) = \overbrace{(1+I)}^{F}\, x(t) \overbrace{-(1+I)}^{G}\, u(t) \\ y(t) = \underbrace{1}_{H}\, x(t) \underbrace{-1}_{J}\, u(t) \end{cases}$$