

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

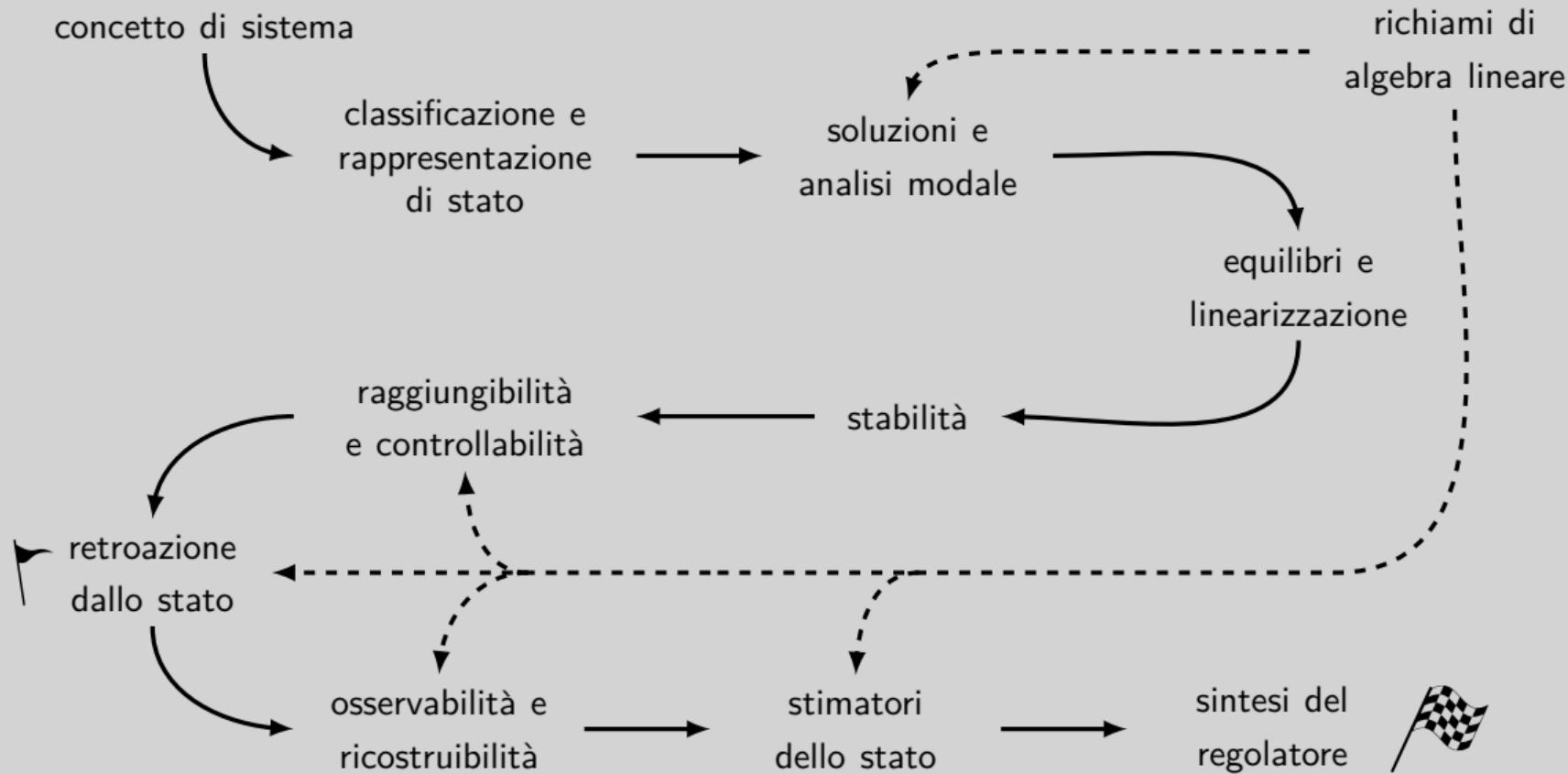
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 8: Esercizi di ricapitolazione su modelli di stato e analisi modale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



concetto di sistema

richiami di
algebra lineare

classificazione e
rappresentazione
di stato

soluzioni e
analisi modale

Parte I: Modelli di stato e analisi modale

equilibri e
linearizzazione

raggiungibilità
e controllabilità

stabilità

retroazione
dallo stato

osservabilità e
ricostruibilità

stimatori
dello stato

sintesi del
regolatore



In questa lezione: esercizi!

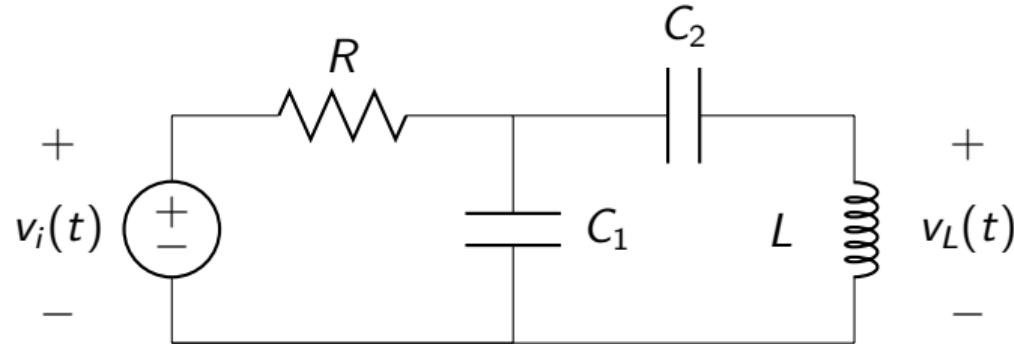
- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 1

extra



Rappresentazione interna o di stato con $u(t) = v_i(t)$ e $y(t) = v_L(t)$?

Esercizio 1: soluzione

Variabili: $x(t) = \begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$, $u(t) = v_i(t)$, $y(t) = v_L(t)$

Matrici: $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $H = [1 \quad -1 \quad 0]$, $J = 0$

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 2

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Jordan F_J ?
2. Polinomio minimo $\Psi_F(x)$?
3. Esponenziale e^{Ft} ?
4. Evoluzione libera per $x_0 = [1 \ 0 \ 0]^\top$?

Esercizio 2: soluzione

$$1. \ F_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \ \Psi_F(x) = x(x+1)^2$$

$$3. \ e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$4. \ x(t) = [e^{-t} \ 0 \ 2te^{-t}]^\top$$

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 3 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 1 Febbraio 2012]

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Forma di Jordan F_J e i modi del sistema al variare di $f \in \mathbb{R}$?
2. Funzione di trasferimento $W(s)$ al variare di $f \in \mathbb{R}$?
3. Per $f = 0$, ingresso $u(t)$ tale che $y_f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t$, $t \geq 0$?

Esercizio 3: soluzione

$$1. \quad F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = 1, \text{ modi: } e^t, te^t, e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & f = 2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, e^{2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = -2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} 2-f^2 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f \neq 1, 2, -2, \text{ modi: } e^{(2-f^2)t}, e^{ft}, e^{-2t} \end{cases}$$

$$2. \quad W(s) = \frac{(3-5f)-s}{(s-f)(s+2)}$$

$$3. \quad u(t) = 1 + 2t, \quad t \geq 0.$$

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 4

[riadattato da Es. 3 tema d'esame 24 Giugno 2019]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1. Modi del sistema e loro carattere?
2. Matrice di trasferimento $W(z)$?
3. Evoluzione del sistema per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = -2^{t+2}$, $t \geq 0$?

Esercizio 4: soluzione

1. $(-3)^t, 2^t$, entrambi divergenti

$$2. \quad W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z+3)(z-2)} \\ \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$$

$$3. \quad y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{19}2^{t+2} - \frac{3}{19}t2^{t+2} - \frac{5}{19}(-3)^{t+1} \\ -t2^{t+2} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 8: Esercizi di ricapitolazione su modelli di stato e analisi modale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

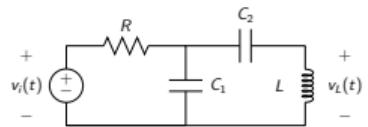
A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 baggiogi.github.io

Esercizio 1

back

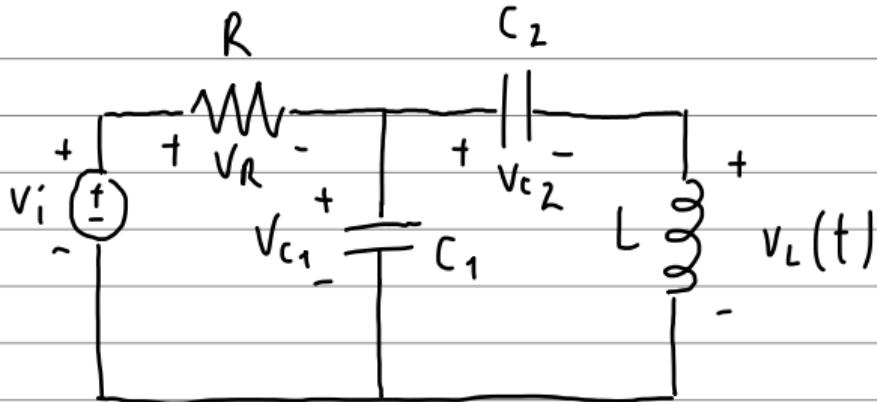


Rappresentazione interna o di stato con $u(t) = v_i(t)$ e $y(t) = v_L(t)$?

Giacomo Biggio

IMC-TdS-1820: Lez. 8

October 28, 2019 5 / 20



$$v_R = R i_R$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

Rappresentazione interna?

$$x_1 = V_{C_1}, \quad x_2 = V_{C_2}, \quad x_3 = i_L$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_{C_1} = \frac{1}{C_1} (i_R - i_L)$$

$$= \frac{1}{C_1} (i_R - x_3)$$

$$= \frac{1}{C_1} \left(\frac{V_R}{R} - x_3 \right) \quad V_R = V_i - V_{C_1}$$

$$= \frac{1}{C_1} \left(\frac{V_i - V_{C_1}}{R} - x_3 \right) = \frac{1}{C_1} \left(\frac{V_i}{R} - \frac{x_1}{R} - x_3 \right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{C_2} = \frac{1}{C_2} i_L = \frac{1}{C_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = \frac{d i_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L = \frac{1}{L} (V_{C_1} - V_{C_2}) = \frac{1}{L} (x_1 - x_2)$$

$$y = V_L = V_{C_1} - V_{C_2} = x_1 - x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/RC_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_G v_i$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{0 \cdot v_i}_J$$

Esercizio 2

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Jordan F_J ?
2. Polinomio minimo $\Psi_F(x)$?
3. Esponenziale e^{Ft} ?
4. Evoluzione libera per $x_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$?

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1820: Lez. 8

October 26, 2019 8 / 20

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1) F_J ?

- Autovalori: $\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda - 1 \end{bmatrix}$

$$= -\lambda (\lambda + 1)^2 \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad v_1 = \underline{1}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad v_2 = 2$$

- Autovettori:

$$\lambda_1: \quad v_1 \in \text{Ker}(F - \lambda_1 I) : \quad (F - \lambda_1 I) v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_{1,1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 2v_{1,1} - v_{1,3} = 0 \rightarrow v_{1,3} = 0 \end{cases} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = 1$$

$$\lambda_2: (F + I) v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ v_{2,2} = 0 \\ v_{2,1} = 0 \end{cases} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad g_2 = 1$$

Costruzione della catena di Jordan relativa a $\lambda_2 = -1$:

$$(F + I)^2 v_3 = 0$$

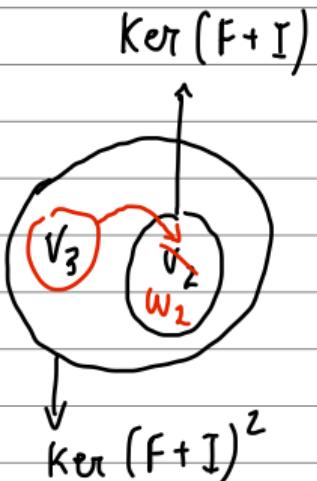
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ v_{3,2} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{autovettore generalizzato}$$

$$v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = (F + I)v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = v_1 \quad C_2 = [w_2 \ v_3] \quad \text{catene di Jordan}$$



$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & | & \mathcal{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c \\ d & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_J = T^{-1} F T = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2) \Psi_f(x) = \Delta_f(x) = -x(1+x)^2$$

$$3) e^{Ft} ?$$

Método Jordan: $e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\sigma t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-t} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-t} & 2te^{-t} \end{bmatrix}}_{\text{Jordan Form}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Método Laplace: } \mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -2 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)^2} \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 & 0 \\ 2s & 0 & s(s+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ \frac{2}{(s+1)^2} & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1} \left[(sI - F)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$4) \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = e^{Ft} x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 1 Febbraio 2012]

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Forma di Jordan F_J e i modi del sistema al variare di $f \in \mathbb{R}$?
2. Funzione di trasferimento $W(s)$ al variare di $f \in \mathbb{R}$?
3. Per $f = 0$, ingresso $u(t)$ tale che $y_f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t$, $t \geq 0$?

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1) F_J , $f \in \mathbb{R}$? Modi?

$$\text{Autovalori: } \Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \left| \begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ 2f & f-2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2-\lambda \end{array} \right|$$

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2f & f-2-\lambda \end{bmatrix} \cdot (2-f^2-\lambda)$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= f \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= 2 - f^2\end{aligned}$$

$f = 2 - f^2$
 $f^2 + f - 2 = 0$
 $(f+2)(f-1) = 0$

$$\begin{aligned}&= [-\lambda(f-2-\lambda) - 2f](2-f^2-\lambda) \\ &= [\lambda^2 + (2-f)\lambda - 2f](2-f^2-\lambda) \\ &= (\lambda-f)(\lambda+2)(2-f^2-\lambda)\end{aligned}$$

① $f = -2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \rightarrow \lambda_1 = -2, v_1 = 3$

② $f = 2, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -2 \rightarrow \lambda_1 = 2, v_1 = 1, \lambda_2 = -2, v_2 = 2$

③ $f = 1, \lambda_1 = \lambda_3 = 1, \lambda_2 = -2 \rightarrow \lambda_1 = 1, v_1 = 2, \lambda_2 = -2, v_2 = 1$

④ $f \neq -2, 1, 2 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ distinti} \quad v_1 = v_2 = v_3 = 1$

$$\textcircled{1} \quad f = -2$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\dim \ker [F + 2I]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F + 2I$$

$$\text{rango } (F + 2I) = 2$$

$A_{n \times n}$

Teorema del rango: $\text{rango}(A) + \dim \ker(A) = \dim(A) = n$

$$\dim \text{Ker}(F + 2I) = 3 - \text{rang}o(F + 2I) = 1 = g_1$$

$$F_J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow e^{-2t}, t e^{-2t}, \frac{t^2}{2} e^{-2t}$$

② $f = 2$ $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, v_2 = 2$

$$g_2 = \dim \text{Ker}[F - 2I] \quad F - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}o(F - 2I) = 2$$

$$g_2 = 1$$

$$F_J = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline -2 & 1 \\ & -2 \end{array} \right] \rightarrow \text{modi: } e^{2t}, e^{-2t}, te^{-2t}$$

③ $f = 1$ $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1 \quad v_1 = 2$
 $\lambda_2 = -2 \quad v_2 = 1$

$$g_1 = \dim \ker [F - I]$$

$$F - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{range } (F - I) = 2 \Rightarrow g_1 = 1$$

$$F_J = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array} \right] \rightarrow \text{modi: } e^{-2t}, e^t, t e^t$$

④ $f \neq -2, 1, 2 \Rightarrow F$ diagonalizzabile, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distinti

$$F_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}$$

2) F. d. T. $W(s)$?

N.B.

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ * & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$W(s) = H (sI - F)^{-1} G + J$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & | & 0 \\ -2 & s-f+2 & | & 0 \\ \hline -2 & 0 & | & s-2+f^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2f & s-f+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\frac{1}{s(s-f+2) - 2f}}_{(s-f)(s+2)} \begin{bmatrix} s-f+2 & +1 \\ 2f & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-f+2}{(s-f)(s+2)} & \frac{1}{(s-f)(s+2)} \\ \frac{2f}{(s-f)(s+2)} & \frac{s}{(s-f)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\begin{array}{c|c} \frac{s-f+2 - 4f}{(s-f)(s+2)} & \frac{1 - 2s}{(s-f)(s+2)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{-s - 5f + 3}{(s-f)(s+2)}$$

4) $y_f = \frac{3}{2}t^2 - t$ $u(t)$? $f = 0$

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= W(s) U(s) \Rightarrow U(s) = \frac{Y_f(s)}{W(s)} = \frac{\frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^2}}{\frac{-s+3}{s(s+2)}} \\ &= \frac{\cancel{s}}{\cancel{s^3}} \cdot \frac{s(s+2)}{\cancel{-s}} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} \end{aligned}$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = 1 + 2t, \quad t \geq 0$$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1. Modi del sistema e loro carattere?

2. Matrice di trasferimento $W(z)$?

3. Evoluzione del sistema per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = -2^{t+2}$, $t \geq 0$?

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

$$1) \quad F = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$$

$$F_J = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow (-3)^t, \quad 2^t \quad \text{divergenti}$$

2)

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} z+3 & -1 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots$$

$$3) Y(z) = \textcircled{z} (zI - F)^{-1} x_0 + W(z) V(z)$$

$$V(z) \rightarrow V'(z) = \frac{V(z)}{z} \rightarrow \text{pratici semplici} \left[\frac{A}{(z+a)} + \frac{B}{(z+a)^2} + \dots \right] z$$