

## Lezione 20: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = [0 \quad 1 \quad 0], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato in modo che l'errore di stima abbia modi  $e^{-t} \sin(t)$ ,  $e^{-t} \cos(t)$ ,  $e^{-t}$ .

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0 \quad 1].$$

Si porti il sistema in forma di Kalman di osservabilità e si determini, se esiste, uno stimatore dead-beat per il sistema.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, H = [0 \quad 1 \quad 0], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato in modo che l'errore di stima abbia modi  $e^{-t}$ ,  $te^{-t}$ .

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = [0 \quad 1 \quad 0], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si discuta la rivelabilità del sistema al variare di  $\alpha$ . Per  $\alpha = -1$  si costruisce, se possibile, uno stimatore dello stato il cui guadagno abbia autovalori in  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ .

## Soluzioni

Esercizio 1. Il sistema è osservabile per cui lo stimatore richiesto esiste. Il guadagno dello stimatore è  $L = [-4 \quad -5 \quad -5]^\top$ .

Esercizio 2. La forma di Kalman di osservabilità è  $F_K = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array} \right]$ ,  $H_K = [1 \quad 0 \quad 0]$ . I guadagni  $L = [\alpha \quad 1/2 - \alpha \quad -1 - \alpha]^\top$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , posizionano tutti gli autovalori in zero.

Esercizio 3. Il sistema non è osservabile, ma il sottosistema non osservabile ha un autovalore in  $-1$  per cui il problema ha soluzione. Il guadagno di stima desiderato è  $L = [-9 \quad -6 \quad 0]^\top$ .

Esercizio 4. Il sistema è rivelabile se e solo se  $\alpha < 0$ . Lo stimatore richiesto esiste e ha guadagno  $L = [0 \quad -7 \quad -12]^\top$ .