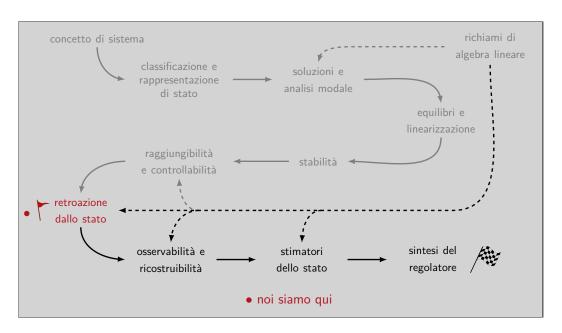
## Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2019-2020

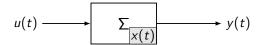


## In queste lezioni

- ▶ II problema del controllo
  - ▶ Controllo in retroazione: setup e proprietà
    - ▶ Forma canonica di controllo
      - ▶ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
        - ▶ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
          - ▶ Stabilizzabilità

# Il problema del controllo

sistema con stato x(t), ingresso u(t) e uscita y(t)

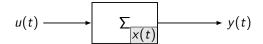


**Controllo** = manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso u(t)

-	
-	

#### Problemi di controllo

sistema con stato x(t), ingresso u(t) e uscita y(t)



#### Problema di regolazione:

stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

#### Problema di asservimento (tracking):

inseguire un andamento desiderato dell'uscita

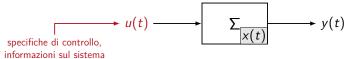
Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 5 / 37

## Controllo in "catena aperta" o open-loop

sistema con stato x(t), ingresso u(t) e uscita y(t)



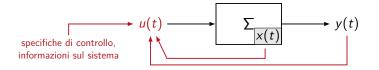
legge di controllo u(t) non dipende dai valori di x(t), y(t)

approccio semplice, ma non ideale se il sistema è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!

Giacomo Baggio IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17 November 19, 2019 6 / 37


#### Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato x(t), ingresso u(t) e uscita y(t)



legge di controllo u(t) dipende dai valori di x(t) e/o y(t)

approccio più complesso (richiede sensori di misura), ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!

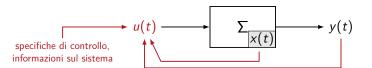
Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 7 / 37

#### Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato x(t), ingresso u(t) e uscita y(t)



→ dallo stato: u(t) = f(x(t)) (allo stesso istante t!) 1. Retroazione statica -→ dall'uscita: u(t) = f(y(t)) (allo stesso istante t!)

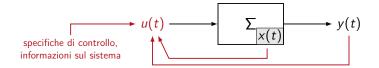
Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 8 / 37

#### Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato x(t), ingresso u(t) e uscita y(t)



ightharpoonup dallo stato:  $u(t)=f(x( au)),\ au\in[t_0,t]$ 2. Retroazione dinamica ightharpoonup dall'uscita:  $u(t)=f(y( au)),\, au\in[t_0,t]$ 

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 9 / 37

# Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \sum_{|x(t)|} y(t) \in \mathbb{R}^p$$

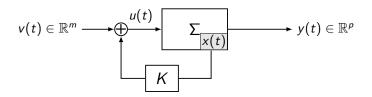
Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

## Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
  
 $y(t) = Hx(t)$ 



$$u(t) = Kx(t) + v(t), K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
 retroazione statica dallo stato

Giacomo Baggio

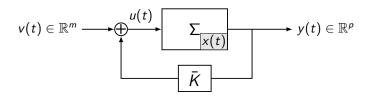
IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 11

11 / 37

## Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = (F + G\overline{K}H)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$



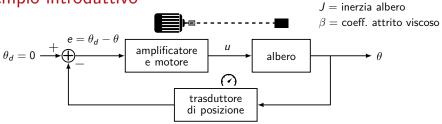
$$u(t) = \bar{K}Hx(t) + v(t), \ \bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$
 retroazione statica dall'uscita

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

#### Esempio introduttivo



Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = ke, \ k \in \mathbb{R}$$

$$y = \theta$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

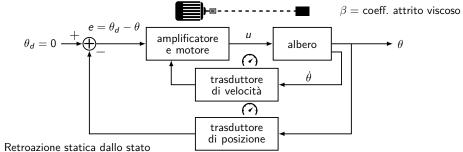
Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 13 / 37

J = inerzia albero

## Esempio introduttivo



$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = k_1e + k_2\dot{\theta}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$y = \theta$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ y = 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 14 / 37

### Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)}$$
:  $x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$   
 $y(t) = Hx(t)$ 

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T?

$$\bar{F} = T^{-1}FT$$
,  $\bar{G} = T^{-1}G$ ,  $\bar{H} = HT$ ,  $\bar{K} = KT$ 

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

## Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma$$
:  $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ 

 $X_R(t)$  = spazio di raggiungibilità in t passi di  $\Sigma$ 

$$\Sigma^{(K)}$$
:  $x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$ 

 $X_R^{(K)}(t) =$  spazio di raggiungibilità in t passi di  $\Sigma^{(K)}$ 

**Teorema:**  $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$ , per ogni scelta della matrice di retroazione  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

 $\Sigma$  raggiungibile  $\iff \Sigma^{(K)}$  raggiungibile

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

#### Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)}$$
:  $x(t+1) = (F+GK)x(t)+Gv(t)$   
 $y(t) = Hx(t)$ 

$$F_{\mathcal{K}} \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_{\mathcal{K}} \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\mathcal{K}} \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = egin{bmatrix} x_R(t+1) \ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = egin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \ 0 & F_{22} \end{bmatrix} egin{bmatrix} x_R(t) \ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + egin{bmatrix} G_1 \ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione!

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

17 / 37

#### Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma$$
:  $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$ ,  $g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$   $(m=1 = \text{singolo ingresso})$ 

$$\Sigma$$
 raggiungibile  $\implies$  rank $(\mathcal{R}) = n$   $\implies$  rank $\left( \begin{bmatrix} g & Fg & F^2g & \cdots & F^{n-1}g \end{bmatrix} \right) = n$   $\implies \{g, \ Fg, \ F^2g, \ \ldots, \ F^{n-1}g \}$  base di  $\mathbb{R}^n$ 

	$\implies \{g, Fg, F^2g, \ldots, F^{n-1}g\}$ ba	ase di $\mathbb{R}^n$					
	base ciclica di $\mathbb{R}^n$						
como Baggio	IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17	November 19, 2019	18 / 37				

#### Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

 $\Sigma$ : x(t+1) = Fx(t) + gu(t),  $g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  (m = 1 = singolo ingresso)

Consideriamo il cambio di base  $T = \mathcal{R}$ 

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

lovember 10, 2010

10 / 37

#### Forma canonica di controllo

$$\Sigma$$
:  $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$ ,  $g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  ( $m = 1 = \text{singolo ingresso}$ )

Con un ulteriore cambio di base Q arriviamo alla forma canonica di controllo

$$F_{c} = Q^{-1}\bar{F}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_{0} & -\alpha_{1} & -\alpha_{2} & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g_{c} = Q^{-1}\bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

#### Forma canonica di controllo: osservazioni

$$\Sigma$$
:  $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$ ,  $g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$   $(m=1 = \text{singolo ingresso})$ 

- 1.  $\Sigma$  raggiungibile  $\iff \Sigma$  può essere portato in forma canonica di controllo.
- **2.** Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base  $T_c \triangleq TQ$  ma solo dei coefficienti del polinomio  $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I F)$ .
- **3.** Se  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_c$  sono le matrici di raggiungibilità del sistema di partenza e del sistema in forma canonica di controllo allora  $T_c = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$ .

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

21 / 37

#### Allocazione autovalori (m = 1)

$$\Sigma$$
:  $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$ ,  $g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 

$$\Sigma^{(K)}$$
:  $x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$ 

Come fare ad assegnare a F + gK degli autovalori desiderati?

 $\Sigma^{(K)}$  raggiungibile  $\implies$  trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo!

$$F_c = T_c^{-1} F T_c, \quad g_c = T_c^{-1} g, \quad K_c = K T_c = \begin{bmatrix} k_{1,c} & \cdots & k_{n,c} \end{bmatrix}$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{1,c} & -\alpha_1 + k_{2,c} & -\alpha_2 + k_{3,c} & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

## Allocazione autovalori (m = 1)

$$\Delta_{F_c+g_c}\kappa_c(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

 $p(\lambda)=\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+p_1\lambda+p_0=$  polinomio con autovalori desiderati

- 1. Siano  $k_{1,c}^* \triangleq \alpha_0 p_0, \ldots, k_{n,c}^* \triangleq \alpha_{n-1} p_{n-1}$
- 2. Sia  $K_c^* \triangleq \begin{bmatrix} k_{1,c}^* & \cdots & k_{n,c}^* \end{bmatrix}$
- 3.  $K^* \triangleq K_c^* T_c^{-1} = \text{matrice di retroazione desiderata}$ !

Giacomo Baggio

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

23 / 37

#### Allocazione autovalori (m = 1): osservazioni

- 1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di  $\Sigma$  (e quindi di  $\Sigma^{(K)}$ ).
- **2.** Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero  $(p(\lambda) = \lambda^n)$  abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)**!
- **3.** Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio  $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I F)$ . Mentre, Il cambio di base  $T_c^{-1}$  per ottenere  $K^*$  si può calcolare come  $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1}$ .

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo.

 $=\lambda^n$ ) abbiamo costruito un lo il calcolo dei coefficienti di base  $T_c^{-1}$  per ottenere continuo.

## Esempio

$$x(t+1) = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + egin{bmatrix} 1 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

 $K^*$  tale che il sistema retroazionato abbia autovalori  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  (DBC)?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

25 / 37

## Allocazione autovalori (m = 1): metodo alternativo

$$\Sigma$$
:  $x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$ ,  $g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 

$$\Sigma^{(K)}$$
:  $x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$ 

 $p(\lambda)=\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+p_1\lambda+p_0=$  polinomio con autovalori desiderati

Risolvere 
$$\Delta_{F+gK}(\lambda)=\det(\lambda I-F-gK)=p(\lambda)$$
 con incognita  $K$ 



Sistema di equazioni lineari con incognite  $k_1,\dots,k_n$ ,  $K=\begin{bmatrix}k_1&\cdots&k_n\end{bmatrix}$  !

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

## Esempio (cont.)

$$x(t+1) = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + egin{bmatrix} 1 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

 $K^*$  tale che il sistema retroazionato abbia autovalori  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  (DBC)?

$$\mathcal{K}^* = egin{bmatrix} -rac{1}{2} & -rac{3}{2} & -rac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 2

#### Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$\Sigma^{(K)}: \quad egin{aligned} x(t+1) &= (F+gK)x(t)+gv(t) \ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t. W(z) di  $\Sigma^{(K)}$  ?

$$W(z) = H(zI - F - gK)^{-1}g = H_c(zI - F_c - g_cK_c)^{-1}g_c$$

$$= \frac{\beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0}{z^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})z^n + \dots + (\alpha_1 - k_{2,c})z + (\alpha_0 - k_{1,c})}$$

La funzione modifica solo i poli della funzione di trasferimento!

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

## Allocazione autovalori (m > 1)

$$\Sigma$$
:  $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 

$$\Sigma^{(K)}$$
:  $x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$ 

Come fare ad assegnare a F + GK degli autovalori desiderati?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1k_1 + \cdots + g_mk_m$$

**Idea:** Selezionare un singolo ingresso (una sola riga  $k_i$  non nulla) ed usare la procedura vista prima (m = 1)!

Problema: Il sistema potrebbe non essere raggiungibile da un singolo ingresso anche se  $\Sigma$  raggiungibile!!

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 29 / 37

### Esempio

$$x(t+1) = egin{bmatrix} 0 & 0 \ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

Giacomo Baggio IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17 November 19, 2019

## Allocazione autovalori (m > 1): Lemma di Heymann

 $\Sigma$ : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 

 $\Sigma^{(K)}$ : x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)

Come fare ad assegnare a F + GK degli autovalori desiderati se  $\Sigma$  **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda  $\Sigma$  raggiungibile da un ingresso !!

**Teorema:** Se (F, G) è raggiungibile e se  $g_i$  è una colonna non nulla di G, esiste una matrice  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tale che  $(F + GM, g_i)$  è raggiungibile.

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

31 / 37

### Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

 $K^*$  tale che il sistema retroazionato abbia autovalori  $\lambda_1=\lambda_2=1/2$ ?

Prendendo  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  il sistema è raggiungibile dal primo ingresso  $g_1$ .

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{M} + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

## Allocazione autovalori (m > 1): osservazioni

- 1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M.
- 2. L'approccio appena visto è piuttosto intuitivo ma ha delle limitazioni.

Ad esempio, usando un singolo ingresso si può ottenere un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi non inferiore a n. Con più ingressi invece esistono casi in cui è possibile costruire un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi inferiore a n

Quindi, usando tecniche più avanzate (che sfruttano la cosiddetta forma canonica di controllo multivariabile) si possono ottenere prestazioni di controllo migliori.

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

## Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
 *n*-dimensionale

**Definizione:** Il sistema  $\Sigma$  si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- 1.  $\Sigma$  è stabilizzabile.
- 2. Il sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$  ha autovalori con modulo minore di 1.
- 3. La matrice PBH [zI F G] ha rango n,  $\forall z$  con  $|z| \ge 1$ .

-	

Giacomo Baggio IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17 November 19, 2019

## Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
 *n*-dimensionale

**Definizione:** Il sistema  $\Sigma$  si dice stabilizzabile in tempo finito se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- 1.  $\Sigma$  è stabilizzabile in tempo finito.
- 2.  $\Sigma$  ammette un DBC.
- 3. Il sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$  ha autovalori nulli.
- 4.  $\Sigma$  è controllabile (a zero).
- 5. La matrice PBH [zI F G] ha rango n,  $\forall z$  con  $z \neq 0$ .

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

35 / 37

#### Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
 *n*-dimensionale

**Definizione:** Il sistema  $\Sigma$  si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- Σ è stabilizzabile.
- 2. Il sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$  ha autovalori con parte reale minore di 0.
- 3. La matrice PBH [zI F G] ha rango n,  $\forall z$  con  $\Re[z] \geq 0$ .


Giacomo Baggio IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019

# Esempio

$$\dot{x}(t) = egin{bmatrix} 0 & lpha \ 0 & -lpha \end{bmatrix} x(t) + egin{bmatrix} 1 & 1 \ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad lpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

Il sistema è stabilizzabile se  $\alpha > 0$ .

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 16 & 17

November 19, 2019 37 / 37

