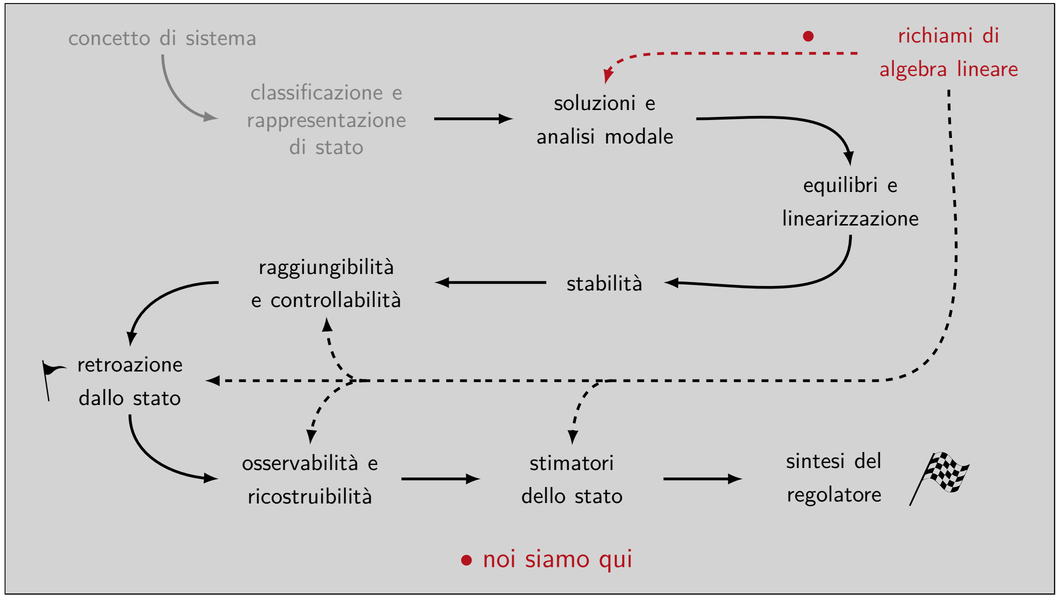
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3 & 4: Esponenziale di Matrice e Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



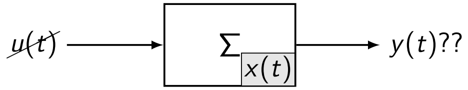
Nella scorsa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

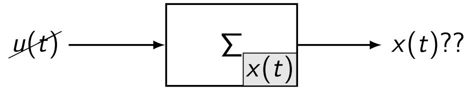
Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Σ lineare, tempo invariante e autonomo $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ y(t) \in \mathbb{R}^p,\ u(t) \equiv 0$

Tempo continuo: $\quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?

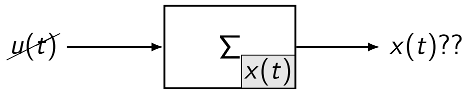


Caso scalare $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{f^nt^n}{n!} + \ldots\right) x_0$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^nt^n}{n!} + \ldots\right) x_0$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $\quad e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^nt^n}{n!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}}\, t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

caso più in generale: F diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \dots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \dots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

caso più in generale: F "quasi"-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I,\ F^1 = F,\ F^2 = -I,\ F^3 = -F,\ F^4 = I, \ldots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi "semplici"...

....ma come fare in casi più complessi (F "piena" e senza "struttura")?

Strategia: Trasformare F in una forma "semplice" (diagonale o quasi-diagonale)!

Vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

1. L'insieme (di vettori) $\mathbb{R}^n$ con campo (di scalari) $\mathbb{R}$ dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (dipendenti) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\Rightarrow)\ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se:

(i) generano $\mathbb{R}^n$: $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$

(ii) sono linearmente indipendenti

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $\quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

(i) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$, $\quad \forall v \in \mathbb{R}^m$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è completamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$.

3. Viceversa, data una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$, una trasformazione $f\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ si può estendere linearmente in modo unico all'intero spazio $\mathbb{R}^m$.

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^m$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tale che

$$f(v) = Fv, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m \,:\, Fv = 0\},$$
$$\operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \,:\, w = Av, \exists v \in \mathbb{R}^m\}.$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ.

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\nu_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa

$$(F - \lambda_i I)v = 0.$$

5. La molteplicità algebrica g_i di autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim\ker(F - \lambda_i I).$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

Esempio: diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F \text{ diagonalizzabile?} \qquad \text{Se sì, calcolare } T.$$

$$\lambda_1 = i,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile } \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ diagonalizzabile} \quad (\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$$

$$\downarrow$$

$$\text{Esiste } T \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ tale che } F_D = T^{-1}FT \text{ diagonale}$$

Come ci aiuta questo nel calcolo di e^{Ft}?

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ diagonalizzabile} \quad (\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$$

$$F = TF_DT^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_DT^{-1}t}$$

$$(TF_DT^{-1}t)^n = T(F_Dt)^nT^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_Dt}T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix},\ F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = Te^{F_Dt}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Obiettivo

$$\text{Calcolare } e^{Ft},\ F \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\downarrow$$

$$\text{Trovare una matrice } T \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ tale che } T^{-1}FT \text{ diagonale}$$

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $T^{-1}FT$ “quasi” diagonale!

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

$\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\ell}$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\downarrow$

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi "quasi" diagonali hanno la forma di slide 12! $\begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix}$