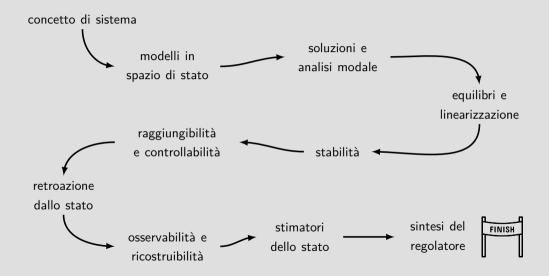
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione Parte II

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▶ Esercizio 1: equilibri e linearizzazione t.c.
- ▶ Esercizio 2: equilibri e linearizzazione t.d.
- ▶ Esercizio 3: stabilità di sistemi non lineari t.c.
- ▶ Esercizio 4: stabilità di sistemi non lineari t.d.

Esercizio 1 [Es. 1 tema d'esame 29 Gennaio 2020]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - x_1^3(t) - x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1^2(t) + \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- 1. Equilibri del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
- 2. Stabilità dell'equilibrio in (0,0) usando il teorema di linearizzazione?

Esercizio 1: soluzione

1.
$$\alpha = 0$$
: infiniti equilibri $\bar{x} = (0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha >$$
 2: tre equilibri (0,0), $(\pm \alpha/\sqrt{\alpha-2}, -2\alpha/(\alpha-2))$.

$$\alpha \leq 2$$
 (e $\alpha \neq 0$): un equilibrio (0,0).

2. $\bar{x} = (0,0)$ as intoticamente stabile se $\alpha < 0$ e instabile se $\alpha > 0$.

Esercizio 2

[Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- 1. Equilibri del sistema per $u(t) = \bar{u} = \text{cost.} \ \forall t$?
- 2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

Esercizio 2: soluzione

1.
$$\alpha \neq 1$$
: unico equilibrio $\bar{x} = \left(\frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2}, \frac{\bar{u}}{1-\alpha}\right)$.

$$\alpha=1$$
: nessun equilibrio se $\bar{u}\neq 0$, infiniti equilibri (β^2,β) , $\beta\in\mathbb{R}$ se $\bar{u}=0$.

2. equilibri asintoticamente stabili se $|\alpha| < 1$ e instabili se $|\alpha| > 1$.

Esercizio 3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

- 1. Stabilità di \bar{x} al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione?
- 2. Nei casi critici usare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 3: soluzione

1. $-1 < \alpha < 0$: \bar{x} as intoticamente stabile.

$$\alpha < -1$$
, $\alpha > 0$: \bar{x} instabile.

2. Casi critici $\alpha = -1, 0$.

 $\alpha = -1$: \bar{x} as intoticamente stabile.

 $\alpha = 0$: \bar{x} semplicemente stabile.

Esercizio 4 [Es. 1 tema d'esame 10 Settembre 2020]

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

- 1. Per $\beta = 0$, equilibri al variare di α ?
- 2. Per $\beta = 0$, stabilità degli equilibri usando la linearizzazione?
- 3. Per $\alpha=0$, $\beta=1$, studiare stabilità di $\bar{x}=(0,0)$ usando $V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$.

Esercizio 4: soluzione

1. $\alpha \neq \pm 1$: unico equilibrio $\bar{x} = (0,0)$.

$$\alpha = 1$$
: infiniti equilibri $\bar{x} = (\gamma, -\gamma^2/2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = -1$$
: infiniti equilibri $\bar{x} = (0, \gamma), \gamma \in \mathbb{R}$.

- 2. equilibri asintoticamente stabili se $|\alpha| < 1$ e instabili se $|\alpha| > 1$.
- 3. $\bar{x} = (0,0)$ as intoticamente stabile.