

## Lezione 17: esercizi suggeriti

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se possibile, una retroazione dallo stato che allochi gli autovalori del sistema in  $-1, -2$ .

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca, se possibile, un controllore dead-beat per il sistema.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

È possibile trovare una matrice di retroazione  $K$  tale da avere autovalori del sistema retroazionato in  $-2, -2, -1, -1$ ? E per autovalori in  $-2, -2, -2, -2$ ? E per autovalori in  $-2, -2, -2, -2$ ?

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il sistema è raggiungibile usando un solo ingresso. In caso contrario, si provi a rendere raggiungibile il sistema dal primo ingresso usando come matrice di retroazione preliminare  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Quindi si calcoli un controllore dead-beat per il sistema.

Esercizio 5. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Si studi la stabilizzabilità (tramite retroazione dallo stato) del sistema al variare di  $\alpha \in [0, 1]$ . Quando il sistema è stabilizzabile si calcoli il numero di minimo ingressi che rende il sistema stabilizzabile.

## Soluzioni

Esercizio 1. Matrice di retroazione  $K = \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$ .

Esercizio 2. Matrice di retroazione  $K = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ .

Esercizio 3. Il sistema non è raggiungibile. Il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 1 e autovalore in  $-1$ . Quindi è possibile calcolare una retroazione  $K$  tale da portare gli autovalori del sistema in  $-2$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $-1$  e in  $-2$ ,  $-2$ ,  $-2$ ,  $-1$ . Non è invece possibile portare tutti gli autovalori del sistema in  $-2$ .

Esercizio 4. Il sistema non è raggiungibile da un singolo ingresso, ma lo diventa (dal primo ingresso) usando come matrice di retroazione preliminare  $M$ . In questo caso, la matrice di retroazione complessiva è  $K = \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Esercizio 5. Se  $\alpha = 0$ , il sistema non è stabilizzabile. Se  $\alpha = 1$ , il sistema è stabilizzabile con due ingressi. Se  $0 < \alpha < 1$ , il sistema è stabilizzabile con un singolo ingresso (il secondo).