

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



noi siamo qui

concetto di sistema



modelli in  
spazio di stato

soluzioni e  
analisi modale

equilibri e  
linearizzazione

raggiungibilità  
e controllabilità

stabilità

retroazione  
dallo stato

osservabilità e  
ricostruibilità

stimatori  
dello stato

sintesi del  
regolatore



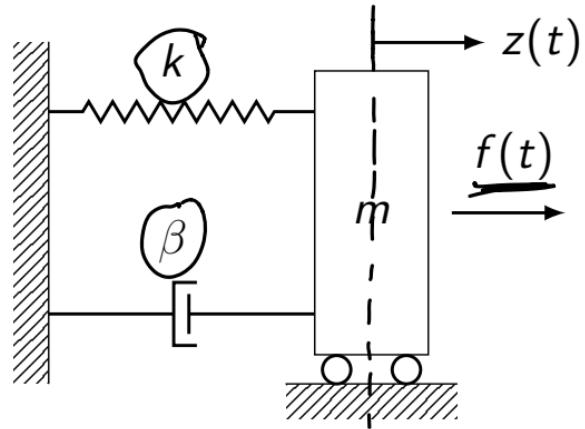
## Nella scorsa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi deterministici, dinamici, causali, lineari, tempo invarianti
- ▷ Rappresentazione di sistemi
  - ↗ Rappresentazione esterna
  - ↘ Rappresentazione interna
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

# In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

# Massa-molla-smorzatore

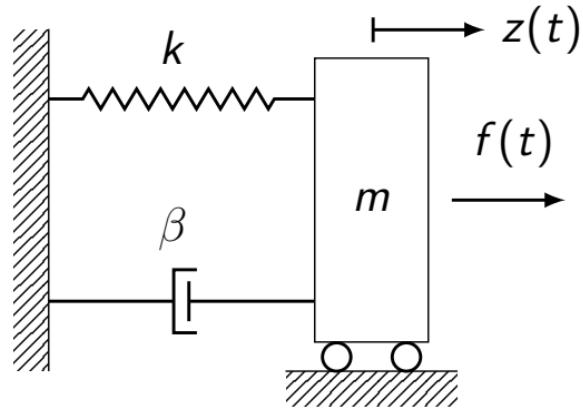


$f(t)$  = input,  $z(t)$  = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

note

# Massa-molla-smorzatore



Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

$f(t)$  = input,  $z(t)$  = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad u = f, \quad y = x_1 = z$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

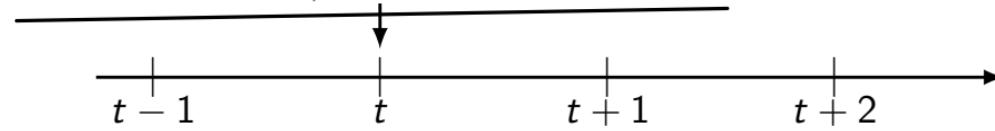
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = 0$$

note

# Estinzione debito



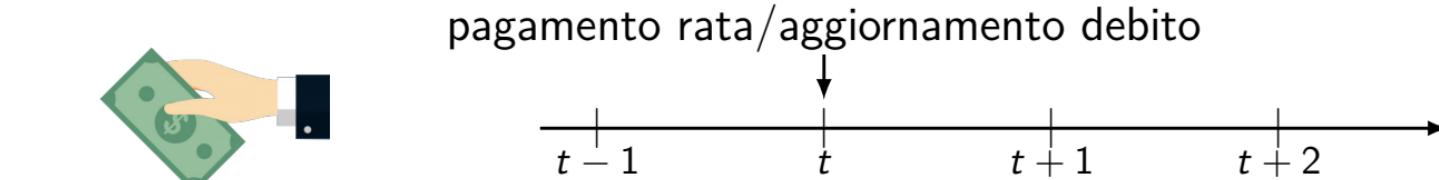
pagamento rata/aggiornamento debito



- $\swarrow$   $y(t)$  = debito al tempo  $t$  = output  
 $\swarrow$   $u(t)$  = rata al tempo  $t$  = input  
 $\swarrow$   $I$  = tasso di interesse (decimale)

note

# Estinzione debito



$y(t)$  = debito al tempo  $t$  = output

$u(t)$  = rata al tempo  $t$  = input

$I$  = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1 + I)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(z) = -\frac{z}{z - (1 + I)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = x(t) = y(t) + u(t)$$

$$F = 1 + I, \quad G = -1 - I$$

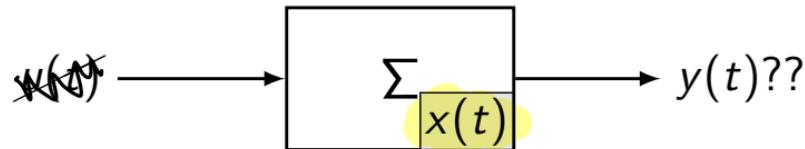
$$H = 1, \quad J = -1$$

note

# In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

# Soluzioni di un sistema LTI autonomo

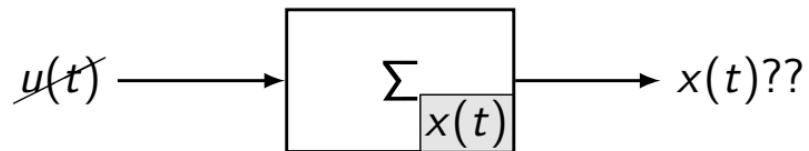


$\Sigma$  lineare, tempo invariante e autonomo       $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad \underline{x(0) = x_0}$$

# Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare

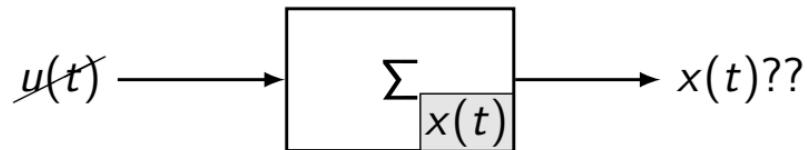


Caso scalare       $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$x(t) = e^{\int t} x_0 \quad \leftarrow \quad \dot{x}(t) = f x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$\dot{x} = f \underbrace{e^{\int t} x_0}_x \quad x(t) = ??$$

# Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare

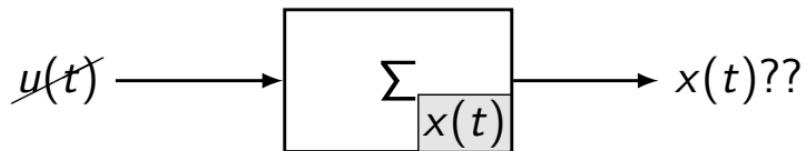


Caso scalare       $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft} x_0 = \underbrace{\left(1 + ft + \frac{f^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{f^k t^k}{k!} + \cdots\right)}_{\text{serie di Taylor}} x_0$$

# Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale



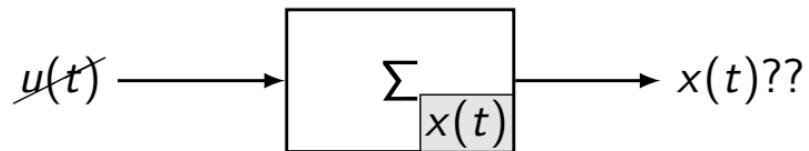
Caso vettoriale  $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n \quad n > 1$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$\in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$x(t) = ??$$

# Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale

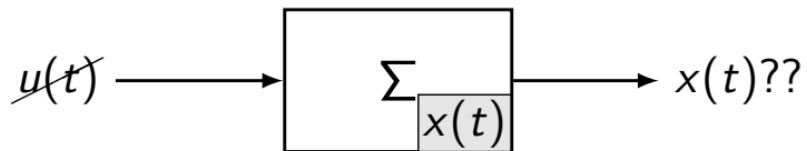


Caso vettoriale       $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{\text{?}} = ??$$

# Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale



Caso vettoriale       $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \triangleq \left( I + F t + \frac{F^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^k t^k}{k!} + \cdots \right) x_0$$

# In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

# Esponenziale di matrice e sue proprietà

**Definizione:** L'esponenziale di una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

**NB:**  $e^A$  è sempre ben definito perché la serie  $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$  converge sempre!

note

# Esponenziale di matrice e sue proprietà

**Definizione:** L'esponenziale di una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

**NB:**  $e^A$  è sempre ben definito perché la serie  $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$  converge sempre!

## (Alcune) proprietà:

- ①  $e^0 = I$
- ②  $(e^A)^\top = e^{(A^\top)}$
- ③  $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
- ④  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertibile:  $e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}$

note

# In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:

$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

**Esempio 1:**  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

note

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

caso più in generale:  $F$  diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

**Esempio 2:**  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$ ,  $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i)  $N^0 = I$ ,  $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(ii)  $e^{I+N} = e^I e^N$

note

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

**Esempio 3:**  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$ ,  $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i)  $N^0 = I$ ,  $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(ii)  $e^{I+N} = e^I e^N$

note

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

caso più in generale:  $F$  “quasi”-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

**Esempio 4:**  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

note

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

**Esempio 5:**  $F = F^2$

$$F^0 = I, F^k = F, k \geq 1 \implies e^{Ft} = I + (e^t - 1)F$$

note

# Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

**Esempio 6:**  $F = vu^\top$ ,  $v, u \in \mathbb{R}^n$

$$F^0 = I, F^k = (u^\top v) F^{k-1}, k \geq 1 \implies e^{Ft} = I + \frac{(e^{u^\top v t} - 1)}{u^\top v} F$$

note

# Calcolo diretto di $e^{Ft}$

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

# Calcolo diretto di $e^{Ft}$

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici” e/o “strutturati”...

*....ma come fare in casi più complessi ( $F$  “piena” e senza “struttura”)?*

# Calcolo diretto di $e^{Ft}$

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici” e/o “strutturati”...

....ma come fare in casi più complessi ( $F$  “piena” e senza “struttura”)?

Strategia: Trasformare  $F$  in una forma “semplice” (diagonale o quasi-diagonale)!

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

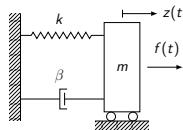
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ [baggio@dei.unipd.it](mailto:baggio@dei.unipd.it)

🌐 [baggiogi.github.io](https://baggiogi.github.io)

### Massa-molla-smorzatore



$f(t)$  = input,  $z(t)$  = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

G. Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

4 Marzo 2021

note

$z(t)$  = posizione del carrello al tempo  $t$  = output

$f(t)$  = forza esterna al tempo  $t$  = input

Rappresentazione esterna:

$$m \ddot{z} = f(t) - kz - \beta \dot{z}$$

$$m \ddot{z} + \beta \dot{z} + kz - f(t) = 0$$

$\xrightarrow{\substack{\text{dominio} \\ \text{Laplace}}}$

$$m s^2 Z(s) + \beta s Z(s) + k Z(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

Rappresentazione interna:

$x(t) = \begin{cases} \text{posizioni} \\ \text{velocità} \end{cases}$  delle masse

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad x_1(t) = z(t), \quad x_2(t) = \dot{z}(t) \quad u(t) = f(t)$$

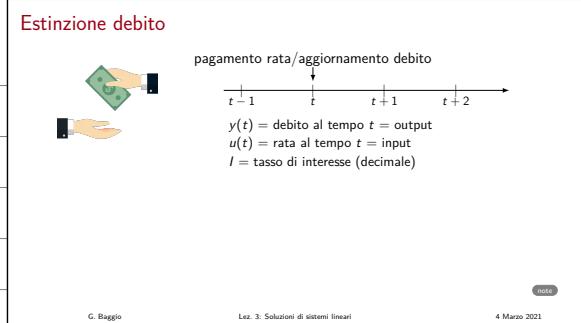
$$\dot{x}_1 = \dot{z} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{1}{m} (-\beta \dot{z} - kz + f) = \frac{1}{m} (-\beta x_2 - kx_1 + u)$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}}_F x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_G u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_H x + \underbrace{0}_{J} u$$

## Estinzione debito



$y(t)$  = debito al tempo  $t$  = output

$u(t)$  = rata al tempo  $t$  = input

Rappresentazione esterna:

$$y(t+1) = (1+I)y(t) - u(t+1)$$

$$y(t+1) - (1+I)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\underbrace{z Y(z) - (1+I)Y(z)}_{\substack{\text{transformate} \\ \text{zeta}}} = z U(z) \Rightarrow G(z) = \frac{z}{z - (1+I)} \quad \text{F.d.T.}$$

Rappresentazione interna:

$$x(t) = y(t) + u(t)$$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= y(t+1) + u(t+1) = (1+I)y(t) - u(t+1) + u(t+1) \\ &\stackrel{|}{=} (1+I)(x(t) - u(t)) \\ &\stackrel{|}{=} (1+I)x(t) - (1+I)u(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = x(t) - u(t)$$

F

G

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = \overbrace{(1+I)}^F x(t) - \overbrace{(1+I)}^G u(t) \\ y(t) = \underbrace{x(t)}_H - \underbrace{u(t)}_J \end{array} \right.$$

## Esponenziale di matrice e sue proprietà

**Definizione:** L'esponenziale di una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

**NB:**  $e^A$  è sempre ben definito perché la serie  $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$  converge sempre!

(Alcune) proprietà:

- $e^0 = I$
- $(e^A)^T = e^{(A^T)}$
- $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
- $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertibile:  $e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}$

G. Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

4 Marzo 2021

$$1) e^0 = I$$

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0^k = \underbrace{\frac{0^0}{0!}} + \underbrace{\frac{0^1}{1!}} + \underbrace{\frac{0^2}{2!}} + \dots$$

$$2) (e^A)^T = e^{A^T}$$

$$(e^A)^T = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)^T}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^T)^k}{k!} = e^{A^T}$$

$$(A \cdots A)^T = A^T \cdots A^T$$

$$3) A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}: AB = BA \quad (A, B \text{ commutano}) \quad \left[ \begin{array}{l} A, B \text{ commutano:} \\ (A+B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \end{array} \right]$$

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

$$\text{Corollari: 1) } \alpha A, \beta A \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad e^{\alpha A + \beta A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$$

$$2) A, -A: \quad e^{A-A} = e^A e^{-A} = e^0 = I$$

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

$$4) T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ invertibile:}$$

$$e^{TAT^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (TAT^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} TA^k T^{-1} = T \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) T^{-1} =$$

$$(TAT^{-1})^2 = TAT^{-1} TAT^{-1} = TA^2 T^{-1}$$

$$(TAT^{-1})^k = TA^k T^{-1}$$

$$Te^A T^{-1}$$

Come calcolare  $e^{Ft}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 1:  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

G. Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

4 Marzo 2021

$$\begin{aligned} e^{Ft} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ft)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} t^k & 0 \\ 0 & 2^k t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2t)^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Come calcolare  $e^{Ft}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 2:  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$ ,  $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i)  $N^0 = I$ ,  $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , ...,  $\Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

(ii)  $e^{I+N} = e^I e^N$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

G. Baggio

Lec. 3: Soluzioni di sistemi lineari

4 Marzo 2021

Osservazione:  $I, N$  commutano  $IN = NI$

$$e^{Ft} = e^{(N+I)t} = e^{It} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \quad e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k t^k = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \dots$$

$$N^2 = NN = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad k \geq 2$$

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione:  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è detta nilpotente se  $\exists \bar{k} \geq 1$  t.c.

$$N^{\bar{k}} = 0 \quad \bar{k} \geq \bar{k}$$

Indice di nilpotenza è il più piccolo valore di  $\bar{k}$

Come calcolare  $e^{Ft}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

$$\text{Esempio 3: } F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(i) \quad N^0 = I, \quad N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

G. Baggio

Lec. 2 - Soluzioni di sistemi lineari

4 Marzo 2021

Osservazione:  $I, N$  commutano

$$e^{Ft} = e^{(I+N)t} = e^{It} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \quad e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k t^k = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \frac{N^3 t^3}{3!} \dots$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = N^2 N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^k = 0 \quad k \geq 3$$

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come calcolare  $e^{Ft}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?



Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 4:  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

G. Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

4 Marzo 2021

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e^{Ft} ?$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k = I + Ft + \frac{F^2}{2} t^2 + \frac{F^3}{3!} t^3 + \frac{F^4}{4!} t^4 + \frac{F^5}{5!} t^5 + \dots$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^2 = FF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$F^3 = F^2 F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -F$$

$$F^4 = F^3 F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$F^5 = F^4 F = F$$

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$