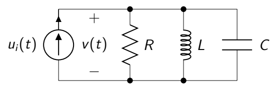
Circuito RLC



$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

note

$V_R(t)$ = tensione sul resistore
$V_C(t)$ = tensione sul condensatore
$V_L(t)$ = tensione sull'induttore
$i_R(t)$ = corrente sul resistore
$i_C(t)$ = corrente sul condensatore
$i_L(t)$ = corrente sull'induttore

Leggi componenti:

1) $V_R = R\, i_R$
2) $C \dfrac{dV_C}{dt} = i_C$
3) $L \dfrac{di_L}{dt} = V_L$

Legge di circuito:

A) $V = V_R = V_C = V_L$

B) $u_i = i_R + i_C + i_L$

$$\text{B)}\quad \frac{du_i}{dt} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt} + \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV_R}{dt} + C\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{V_L}{L}$$

A

$$= \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} + C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{V}{L}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC}V - \frac{1}{C}\frac{du_i}{dt} = 0 \qquad + \text{ c.i.}$$

Laplace

$$s^2V(s) + \frac{1}{RC}sV(s) + \frac{1}{LC}V(s) - \frac{s}{C}U_i(s) = 0$$

$$W(s) = \frac{V(s)}{U_i(s)} = \frac{s/C}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \qquad \text{F.d.T.}$$

Rappresentazione interna / spazio di stato?

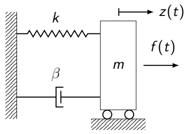
Circuiti elettrici: scelta canonica di variabili di stato $x = \begin{cases} \text{tensioni sui condensatori} \\ \text{correnti sugli induttori} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = v_C \\ x_2 = i_L \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C} i_C = \dfrac{1}{C}\left(u_i - i_R - i_L\right) = \dfrac{1}{C}\left(u_i - \dfrac{\overset{= v_C}{v_R}}{R} - x_2\right) = \dfrac{1}{C}\left(u_i - \dfrac{x_1}{R} - x_2\right) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{v_L}{L} = \dfrac{x_1}{L} \end{cases}$$

$y(t) = v(t) = v_C(t) = x_1$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \quad \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x + \underbrace{0}_{J} \cdot u \end{cases}$$

Massa-molla-smorzatore



$f(t) = $ input, $z(t) = $ output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

$z(t)$ = posizione carrello = output

$f(t)$ = forza esterna = input

Legge di Newton: $m\ddot{z} = f - Kz - \beta\dot{z}$

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + Kz - f = 0$$

Laplace

$$m s^2 Z(s) + \beta s Z(s) + K Z(s) = F(s)$$

$$W(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + \beta s + K} \qquad \text{F.d.T.}$$

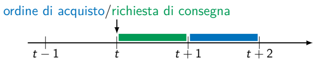
Rappresentazione interna?

Scelta canonica di variabili di stato: $x = \begin{cases} \text{posizioni delle masse} \\ \text{velocità delle masse} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = z \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \\ x_2 = \dot{z} \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{1}{m}\left(-\beta\dot{z} - Kz + f\right) = -\frac{\beta}{m}x_2 - \frac{K}{m}x_1 + \frac{f}{m} \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}^{G} f \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x + \underbrace{0}_{J} \cdot f \end{cases}$$

Magazzino merci



$u_1(t)$, $u_2(t)$ = input, $y(t)$ = output

$y(t)$ = quantità merce in magazzino al mese t
$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al mese t
$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al mese t

note

Rappresentazione esterna:

$$y(t+1) = y(t) + u_1(t-1) - u_2(t)$$

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0 \quad + \text{ c.i.}$$

Zeta

$$z\,Y(z) - Y(z) - z^{-1} U_1(z) + U_2(z) = 0$$

$$W_1(z) = \frac{Y(z)}{U_1(z)} = \frac{z^{-1}}{z-1}$$

$$W_2(z) = \frac{Y(z)}{U_2(z)} = \frac{-1}{z-1}$$

Rappresentazione interna:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = u_1(t-1) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

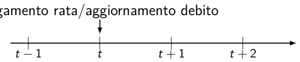
$$x_1(t) = y(t) \longrightarrow x_1(t+1) = y(t+1) = y(t) + u_1(t-1) - u_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - u_2(t)$$

$$x_2(t) = u_1(t-1) \longrightarrow x_2(t+1) = u_1(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} : \begin{cases} x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{F} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{G} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J} \cdot u(t) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Estinzione debito



$y(t)$ = debito al mese t = output
$u(t)$ = rata al mese t = input
I = tasso di interesse (decimale)

note

Rappresentazione esterna:

$$y(t+1) = y(t) + I \cdot y(t) - u(t+1)$$

$$y(t+1) - (1+I)\, y(t) + u(t+1) = 0 \qquad + \text{ c.i.}$$

Zeta

$$z\,Y(z) - (1+I)\,Y(z) + z\,U(z) = 0 \longrightarrow W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{-z}{z-(1+I)}$$

Rappresentazione interna:

$$x(t) = x_1(t) = y(t) + u(t) \longrightarrow y(t) = x(t) - u(t)$$

$$\begin{cases} x(t+1) = y(t+1) + u(t+1) = (1+I)\,y(t) - \cancel{u(t+1)} + \cancel{u(t+1)} \\ \qquad = (1+I)\,(x(t) - u(t)) \\ \qquad = (1+I)\,x(t) - (1+I)\,u(t) \\ y(t) = x(t) - u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = \overbrace{(1+I)}^{F}\, x(t) + \overbrace{(-1-I)}^{G}\, u(t) \\ y(t) = \underbrace{1}_{H} \cdot x(t) + \underbrace{(-1)}_{J}\, u(t) \end{cases}$$

Funzione di trasferimento → spazio di stato

Caso SISO tempo continuo, $W(s)$ solo poli

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad W(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

note

$$W(s) \xrightarrow{?} (F, G, H, J)$$

$$Y(s) = \underbrace{W(s)}_{1/A(s)} U(s) \rightarrow A(s)Y(s) = U(s) \quad (\text{c.i. nulle})$$

$$\rightarrow (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = U(s)$$

$$\rightarrow s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = U(s)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = y \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ x_2 = dy/dt \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ x_3 = d^2y/dt^2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \dot{x}_{n-1} = x_n \\ x_n = d^{n-1}y/dt^{n-1} \longrightarrow \dot{x}_n = \frac{d^n y}{dt^n} = -a_{n-1}\overbrace{\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}}^{x_n} - \cdots - a_1 \overbrace{\frac{dy}{dt}}^{x_2} - a_0 \overbrace{y}^{x_1} + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : \begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{H} x + \overbrace{0}^{J} \cdot u \end{cases}$$

Funzione di trasferimento → spazio di stato

Caso SISO tempo continuo, $W(s)$ strettamente propria

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

note

$$W(s) \xrightarrow{?} (F, G, H, J)$$

1) $$Y(s) = W(s)U(s) = B(s)\underbrace{\frac{1}{A(s)}U(s)}_{\bar{Y}(s)}$$

2) $$Y(s) = B(s)\bar{Y}(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0)\bar{Y}(s)$$
$$= b_{n-1}s^{n-1}\bar{Y}(s) + \cdots + b_1 s\bar{Y}(s) + b_0\bar{Y}(s) \qquad \text{(c.i. nulle)}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

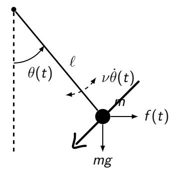
$$y(t) = b_{n-1}\frac{d^{n-1}\bar{y}(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2}\frac{d^{n-2}\bar{y}}{dt^{n-2}} + \cdots + b_1\frac{d\bar{y}}{dt} + b_0\bar{y}$$

3) $$\bar{Y}(s) = \frac{1}{A(s)}U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{d^n\bar{y}}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\bar{y}}{dt^n} + \cdots + a_0\bar{y} = u$$

$$\begin{cases} x_1 = \bar{y} \\ x_2 = \bar{y}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n = \bar{y}^{(n-1)} \end{cases} \longrightarrow F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \; 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [\, b_0 \;\; b_1 \;\; \cdots \;\; b_{n-1} \,] \qquad J = 0$$

Pendolo semplice con attrito



$f(t) = \text{input}$, $\theta(t) = \text{output}$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

note

Rappresentazione esterna: $\theta(t) = \text{output}$, $f(t) = \text{input}$

$$\underset{\substack{\| \\ ml^2}}{J}\ddot{\theta} = -mg\sin\theta\, l + f\cos\theta\, l - \nu\dot{\theta}$$

ml^2 = momento d'inerzia del pendolo rispetto al centro di rotazione

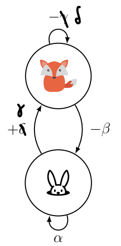
Rappresentazione interna:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} = -\frac{\cancel{m}g\sin\theta\,\cancel{l}}{\cancel{m}l^{\cancel{2}}} + \frac{f\cos\theta\,\cancel{l}}{ml^{\cancel{2}}} - \frac{\nu\dot{\theta}}{ml^2} \\ &= -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{f}{ml}\cos x_1 - \frac{\nu}{ml^2}x_2 \end{aligned}$$

$$y = \theta = x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 + \dfrac{f}{ml}\cos x_1 - \dfrac{\nu}{ml^2}x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Dinamica di popolazioni preda-predatore



$n_1(t)$ = numero di ~~predatori~~ prede al tempo t
$n_2(t)$ = numero di ~~prede~~ predatori al tempo t } output
α = tasso crescita prede, se isolate
δ ~~λ~~ = tasso decrescita predatori, se isolati
β = tasso decrescita prede causato da predatori
γ ~~λ~~ = tasso crescita predatori per la presenza di prede

Rappresentazione interna?

note

Ipotesi:

1) In assenza di predatori ($n_2 = 0$), le prede crescono esponenzialmente con tasso di crescita $\alpha > 0$

2) In assenza di prede ($n_1 = 0$), i predatori decrescono esponenzialmente con tasso di decrescita δ

3) Quando sono presenti entrambe le popolazioni, la frequenza degli incontri è proporzionale $n_1 \cdot n_2$. Gli incontri inducono una diminuzione delle prede con tasso β e una crescita dei predatori con tasso γ.

$x_1 = n_1$, $x_2 = n_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \gamma x_1 x_2 - \delta x_2 \end{cases}$$