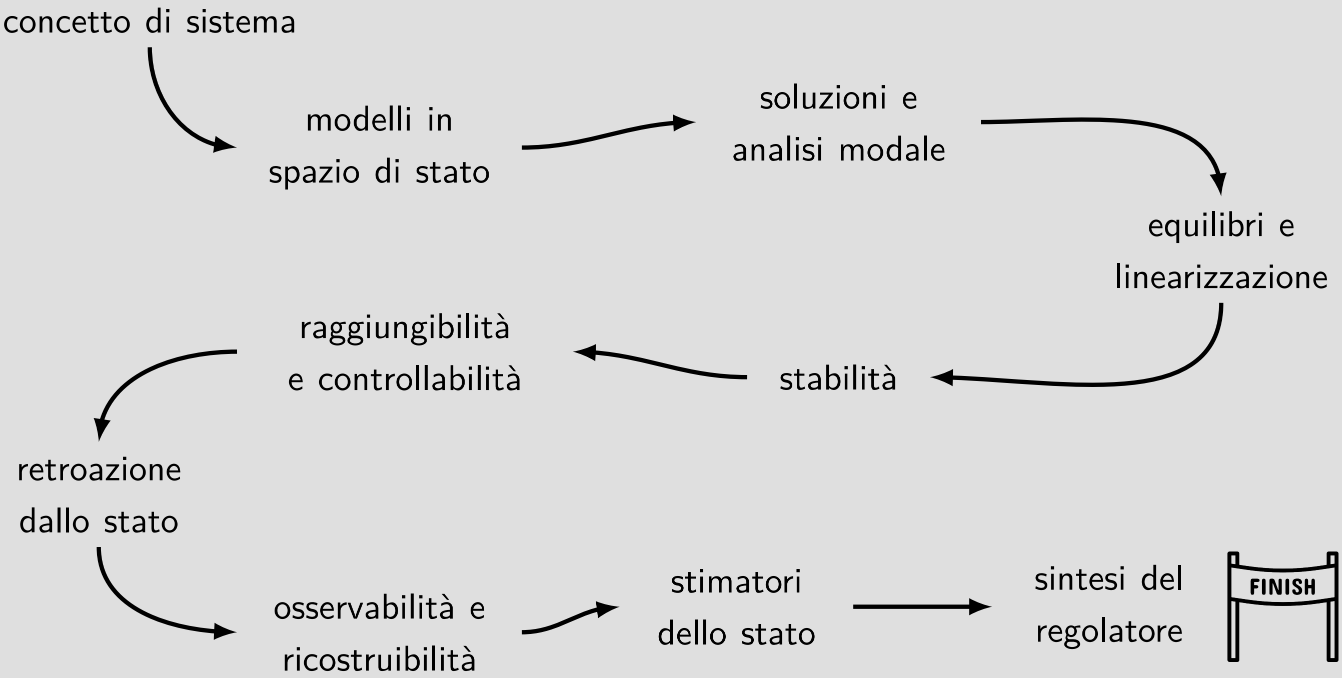
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

In questa lezione

- Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

note

Esercizio 1: soluzione

1. Sistema raggiungibile solo se $\alpha \neq 0$. Sistema controllabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $X_R(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\quad X_R(t) = \begin{cases}\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} & \alpha = 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0,\end{cases} \quad t \geq 2,$

$$X_C(1) = \begin{cases}\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0, \\ \mathbb{R}^3 & \alpha = 0,\end{cases} \qquad X_C(t) = \mathbb{R}^3, \quad t \geq 2.$$

In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- ▷ Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- ▷ Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 2

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Kalman di raggiungibilità?

2. Ingresso che porta nel minor numero possibile di passi lo stato

$$\text{da} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

note

Esercizio 2: soluzione

1. Prendendo $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$: $F_K = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$, $G_K = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$

2. L'ingresso $u(0) = 1$, $u(1) = -2$ porta lo stato da $x(0)$ a x^* in 2 passi.

In questa lezione

- Esercizio 1: raggiungibilità e controllabilità
- Esercizio 2: forma di Kalman e ingressi di controllo
- Esercizio 3: controllo in retroazione dallo stato

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 7 Febbraio 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Controllore dead-beat per il sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Per $\alpha = 1$ controllore dead-beat che porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi?

note

Esercizio 3: soluzione

1. $\alpha = -1$: controllore dead-beat non esiste.

   $\alpha \neq -1$: $K = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha+1} & -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 18: Esercizi di ricapitolazione su raggiungibilità, controllabilità e retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esercizio 1 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 28 Gennaio 2010]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Raggiungibilità e controllabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ al variare di $t \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

note

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1)+2): Calcoliamo gli spazi ragg. e contr. e poi verifichiamo ragg. e contr. completa

<u>N.B.</u>: i) Per il primo i t.c. $X_R(i) = X_R(i+1) \implies X_R(j) = X_R(i)\ \forall j \geq i$

ii) Se $X_R(t) = \mathbb{R}^n \implies X_C(t) = \mathbb{R}^n$

Calcolo spazi ragg. e raggiungibilità:

$$X_R(1) = \operatorname{im} R_1 = \operatorname{im} G = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$X_R(2) = \operatorname{im} R_2 = \operatorname{im} [G \ \ FG] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{cases} \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha = 0 \\ \mathbb{R}^3 & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Quindi:

- $\alpha = 0$: per i) $X_R(1) = X_R(2) \implies X_R(t) = X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}\ \forall t \geq 1$

  $\implies \Sigma$ non ragg.

- $\alpha \neq 0$: $X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

  $X_R(t) = \mathbb{R}^3 \quad t \geq 2 \implies \Sigma$ ragg. (in 2 passi)

Calcolo spazi controllabili e controllabilità: $\qquad \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$X_c(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ Fx \in X_R(1) = \operatorname{im} R_1 = \operatorname{im} G \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & \alpha & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ 0\end{bmatrix},\ \beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \quad '' \quad : \begin{bmatrix}x_1\\ -x_1+x_2+x_3\\ \alpha(x_2+x_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ 0\end{bmatrix},\ \beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{cases} \left\{ \begin{bmatrix}\beta\\ \delta\\ \gamma+\beta-\delta\end{bmatrix},\ \beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3 & \alpha = 0 \\[2ex] \left\{ \begin{bmatrix}\beta\\ \delta\\ -\delta\end{bmatrix},\ \beta,\delta \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Quindi:

- $\alpha = 0$: $\ X_c(t) = \mathbb{R}^3 \quad \forall t \geq 1 \implies \Sigma$ controllabile (in 1 passo)
- $\alpha \neq 0$: $\ X_c(1) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\} \ [\neq X_R(1)]$

  per ii) $\ X_c(t) = \mathbb{R}^3 \quad \forall t \geq 2 \implies \Sigma$ controllabile (in 2 passi)

Esercizio 2

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Kalman di raggiungibilità?
2. Ingresso che porta nel minor numero possibile di passi lo stato da

$$\text{da} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ?$$

note

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Forma di Kalman:

$$X_R = \operatorname{im} R = \operatorname{im} \left[G \;\; FG \;\; F^2G \right] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & \tilde{v}_1 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad T^{-1} = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (T \text{ matrice di permutazione})$$

$$F_K = T^{-1}FT = TFT = T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G_K = T^{-1}G = TG = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

2) Calcolare $u(t)$ t.c. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad x(\bar{t}) = x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $\bar{t}$ più piccolo possibile

- Esistenza di $u(t)$:

$$x^* \in X_R\,? \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{sì}$$

- Calcolo di u:

$t=1: \quad \underset{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}{\overset{\shortparallel}{x^*}} \in X_R(1) = \mathrm{im}\, G = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$? No

$t=2: \quad x^* \in X_R(2) = \mathrm{im}[G \;\; FG] = X_R = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$? Sì

$$u_2 = \begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

$$x^* = x(2) = R_2 u_2 = [G \;\; FG]\, u_2$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix} \qquad \begin{cases} u(1)+2u(0)=0\\ 0=0\\ 1 = u(0)\end{cases} \qquad \begin{cases} u(1) = -2\\ u(0) = 1\end{cases}$$