

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

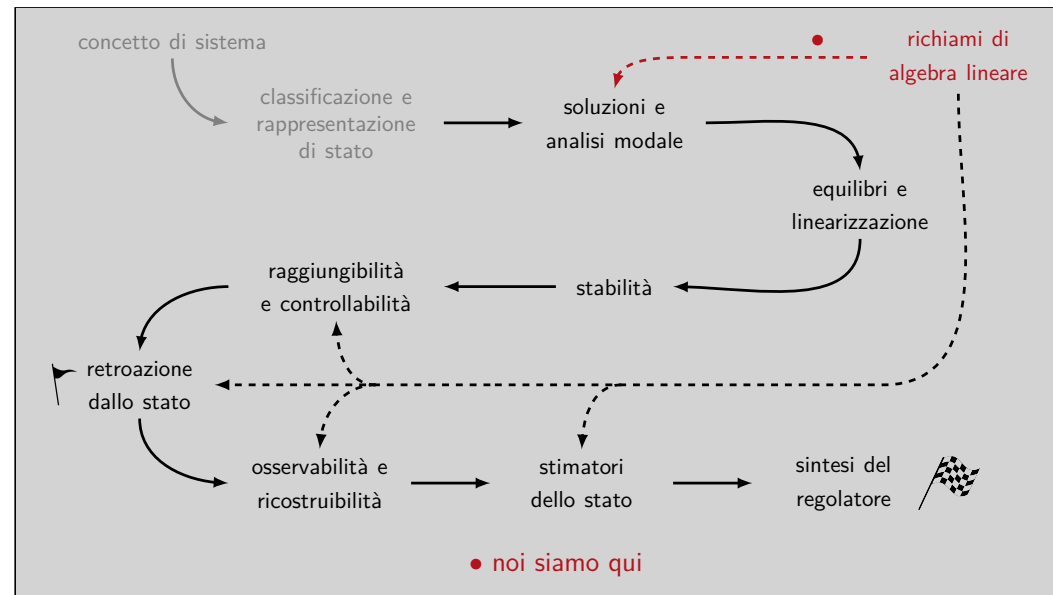
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3 & 4: Esponenziale di Matrice e Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



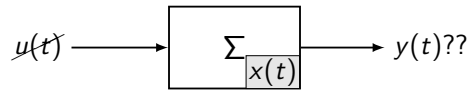
Nella scorsa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?

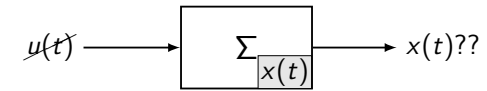


Σ lineare, tempo invariante e autonomo $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^p, u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad x(0) = x_0$$

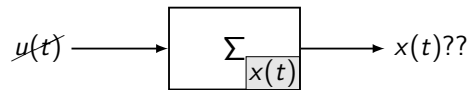
Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso scalare $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= fx(t), \quad x(0) = x_0 \\ x(t) &= e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2t^2}{2!} + \dots + \frac{f^nt^n}{n!} + \dots\right)x_0 \end{aligned}$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t), \quad x(0) = x_0 \\ x(t) &= e^{Ft}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \dots + \frac{F^nt^n}{n!} + \dots\right)x_0 \end{aligned}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale: F diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$
 (ii) $e^{I+N} = e^I e^N \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$
 (ii) $e^{I+N} = e^I e^N \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale: F “quasi”-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \dots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \dots & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{ft} & te^{ft} \\ 0 & \dots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici”...

....ma come fare in casi più complessi (F “piena” e senza “struttura”)?

Strategia: Trasformare F in una forma “semplice” (diagonale o quasi-diagonale)!

Vettori e basi in \mathbb{R}^n

1. L'insieme (di vettori) \mathbb{R}^n con campo (di scalari) \mathbb{R} dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (**dipendenti**) se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0, \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\nRightarrow) \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di \mathbb{R}^n se:

- (i) generano \mathbb{R}^n : $\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ t.c. } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$
- (ii) sono linearmente indipendenti

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

- (i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$
- (ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è completamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^m .

3. Viceversa, data una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^m , una trasformazione $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ si può estendere linearmente in modo unico all'intero spazio \mathbb{R}^m .

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base \mathcal{B}_1 di \mathbb{R}^m e una base \mathcal{B}_2 di \mathbb{R}^n è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ che descrive come le coordinate (rispetto a \mathcal{B}_1) di vettori di \mathbb{R}^m vengono mappate da f in coordinate di vettori (rispetto a \mathcal{B}_2) di \mathbb{R}^n .

2. Fissata una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^n , sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice di cambio di base da \mathcal{B} di \mathbb{R}^n ad una “nuova” base \mathcal{B}' di \mathbb{R}^n . La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0\},$$

$$\operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n : w = Av, \exists v \in \mathbb{R}^m\}.$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ .

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i .

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfa

$$(F - \lambda_i I)v = 0.$$

5. La molteplicità algebrica g_i di autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente indipendenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(F - \lambda_i I).$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

Esempio: diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F \text{ diagonalizzabile?} \quad \text{Se sì, calcolare } T.$$

$$\lambda_1 = i, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = -i, \nu_2 = 1, g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile} \quad \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile ($\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i)



Esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $F_D = T^{-1}FT$ diagonale

Come ci aiuta questo nel calcolo di e^{Ft} ?

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile ($\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i)

$$F = TF_D T^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_D T^{-1}t}$$

$$(TF_D T^{-1}t)^n = T(F_D t)^n T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Obiettivo

Calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T ?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ “quasi” diagonale!

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 2 \Rightarrow \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = 0, \nu_2 = 1, g_2 = 1$
 $\Rightarrow \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 1 \Rightarrow \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \Rightarrow F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \Rightarrow F$ non diagonalizzabile ✗

↓
possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi "quasi" diagonali hanno la forma di slide 12!

$$\begin{bmatrix} f & 1 & \dots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \dots & 0 & f \end{bmatrix}$$