Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 4: Equilibri, stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

noi siamo qui

concetto di sistema

sistemi in spazio di stato

equilibri e linearizzazione

soluzioni e analisi modale

stabilità (cenni)

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

Nella scorsa lezione

- Esempi di modelli di stato lineari
- Funzione di trasferimento $\rightarrow$ spazio di stato
- Esempi di modelli di stato non lineari

In questa lezione

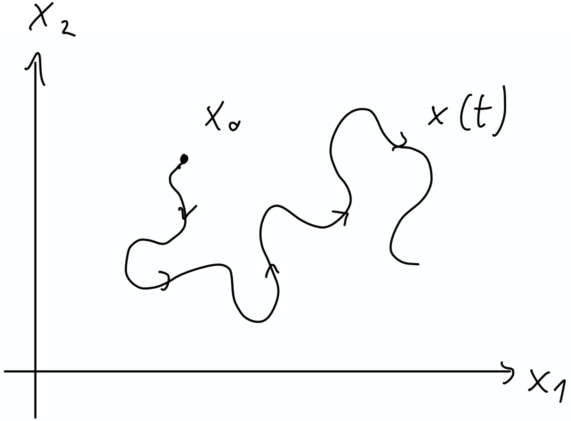
- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Traiettorie di stato e ritratto di fase

autonomi

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t)), \; t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)}$$



Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\{x(t) \in \mathbb{R}^n, \; t \geq 0\}$

Ritratto di fase del sistema = insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

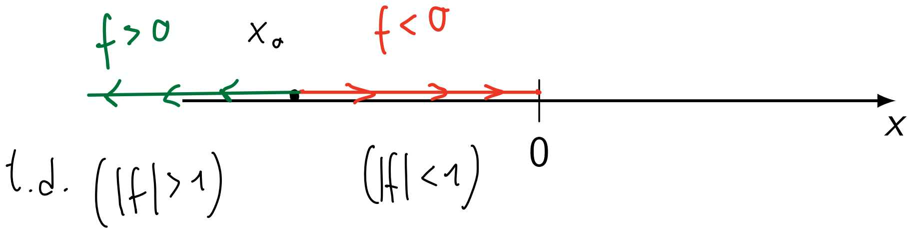
Sistema lineare tempo invariante scalare ($f \in \mathbb{R}$):

$\dot{x}(t) = fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$x(t) = e^{ft}x_0$ (t.c.)

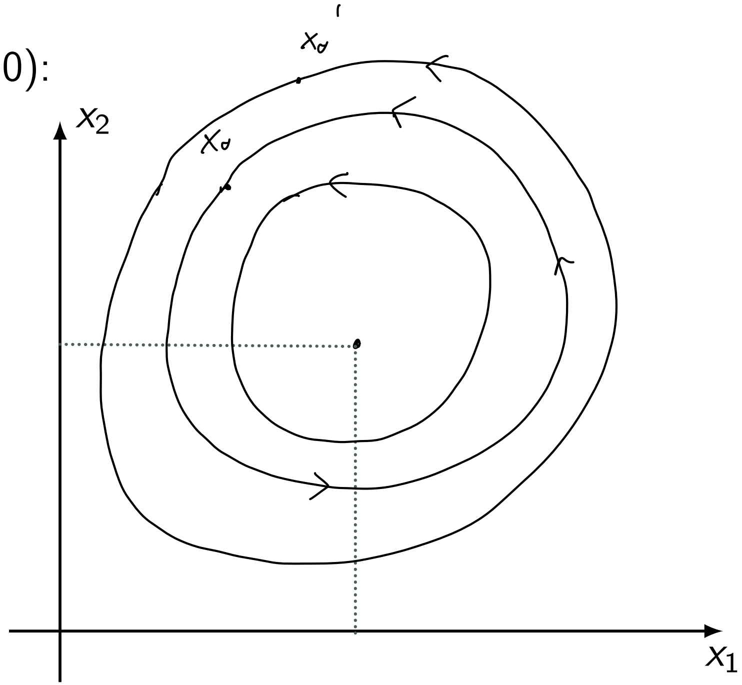
$x(t) = f^t x_0$ (t.d.)



Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

Dinamica preda-predatore ($\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \gamma x_1(t) x_2(t) - \delta x_2(t) \end{cases}$$



In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \to f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \longrightarrow \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\dot{x} = Fx,\ F \in \mathbb{R}^{n \times n}: \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \longrightarrow F\bar{x} = 0 \longrightarrow \bar{x} \in \operatorname{Ker} F$$

$$\operatorname{Ker} F = \{v \in \mathbb{R}^n : Fv = 0\}$$

$$x(t+1) = Fx(t): \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \longrightarrow \bar{x} = F\bar{x}$$

$$(F - I)\bar{x} = 0 \longrightarrow \bar{x} \in \operatorname{Ker}(F - I)$$

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio } \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio } \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{Caso lineare: } \bar{x} \text{ equilibrio } \iff \begin{array}{ll} \bar{x} \in \ker F = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Fx = 0\} & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} \in \ker(F - I) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, (F - I)x = 0\} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}$ eq $\Longleftrightarrow \bar{x}(1-\bar{x}) = 0$ $\nearrow \bar{x} = 0$, $\searrow \bar{x} = 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}$ eq. $\Longleftrightarrow \bar{x}^2 + 1 = 0 \quad \bar{x}^2 = -1 \quad \bar{x} = \pm i$

$\nexists$ equilibri

3. $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{F} x \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^2$ eq. $\Longleftrightarrow F\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} -\bar{x}_1 = 0 \\ 2\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F} x \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^2$ eq $\Longleftrightarrow F\bar{x} = 0$ $\quad \begin{cases} -\bar{x}_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

∞ equilibri

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \quad \Longrightarrow \quad$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \quad \Longrightarrow \quad$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad \Longrightarrow \quad$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad \dot{x} = Fx + Gu$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)} \qquad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante},\ u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

LINEARI

$$F\bar{x} = -G\bar{u}$$

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{cases} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \rightarrow F\bar{x} + G\bar{u} = 0 & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \rightarrow \bar{x} = F\bar{x} + G\bar{u} & \text{(t.d.)} \end{cases}$$

$$(F - I)\bar{x} = -G\bar{u}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante, } u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

caso lineare

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \quad \iff \quad \begin{array}{ll} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & \boxed{F\bar{x} = -G\bar{u}} \quad \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) & \boxed{(F - I)\bar{x} = -G\bar{u}} \quad \text{(t.d.)} \end{array}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$ $\longrightarrow$ $\bar{x} \in \mathbb{R}$ eq. $\Longleftrightarrow$ $\bar{u} = 0$ $\quad \emptyset$ equilibri

2. $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G} \bar{u}$ $\longrightarrow$ $F\bar{x} + G\bar{u} = 0 \rightarrow F\bar{x} = -G\bar{u}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -\bar{x}_2 = -\bar{u} \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

∞ equilibri

note

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0 \quad \Longrightarrow$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \quad \Longrightarrow$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

note

In questa lezione

- Traiettorie di stato di un sistema
- Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Stabilità semplice

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Stabilità asintotica

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

note

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale.
   Se la condizione (ii) della stabilità asintotica vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si parla di stabilità asintotica globale.

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se la condizione (ii) della stabilità asintotica vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si parla di stabilità asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un opportuno cambio di variabile, si può sempre "spostare" l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

In questa lezione

- Traiettorie di stato di un sistema
- Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})\delta_x^2 + \dots \quad \approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x}) \delta_x + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x}) \delta_x^2 + \dots \quad \approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x}) \delta_x$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\, \delta_x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x + \ldots \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x$$

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{Jacobiano di } f$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x + \dots \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x$$

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{Jacobiano di } f$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = J_f(\bar{x})\,\delta_x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\qquad \bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

note

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \begin{array}{l} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \dot{\delta}_x = \delta_x \\ \dot{\delta}_x = -\delta_x, \ \delta_x \triangleq x - \pi \end{array}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\delta}_x = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta_x$

note

Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x} = f(x, u), \; t \in \mathbb{R}_+$

sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x} = f(x,u),\ t \in \mathbb{R}_+$$

sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x},\ \delta_u \triangleq u - \bar{u}$$

$$f(x,u) = f(\bar{x},\bar{u}) + J_f^{(x)}(\bar{x},\bar{u})\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x},\bar{u})\delta_u + \dots$$

$$J_f^{(x)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n},\quad J_f^{(u)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x} = f(x, u),\ t \in \mathbb{R}_+$

sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x},\ \delta_u \triangleq u - \bar{u}$$

$$f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + J_f^{(x)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_u + \dots$$

$$J_f^{(x)}(x, u) = \left[\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad J_f^{(u)}(x, u) = \left[\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial u_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = J_f^{(x)}(\bar{x}, \bar{u})\,\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x}, \bar{u})\,\delta_u}$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 4: Equilibri, stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

note

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ equilibrio $\iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 + \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ \bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + \bar{u} = 0 \end{cases}$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

$$\bar{x}_1^{(1,2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2}$$

1) $1 - 4\bar{u} < 0 \to \bar{u} > 1/4 \to \bar{x}_1^{(1,2)}$ hanno una parte immaginaria $\neq 0$

$\to \emptyset$ equilibri

2) $1 - 4\bar{u} = 0 \to \bar{u} = 1/4 \to \bar{x}_1 = 1/2$

$\to \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ 1 eq.

3) $1 - 4\bar{u} > 0 \to \bar{u} < 1/4 \longrightarrow \bar{x}_1^{(1,2)} \in \mathbb{R}$

$\bar{x}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ 2 eq.