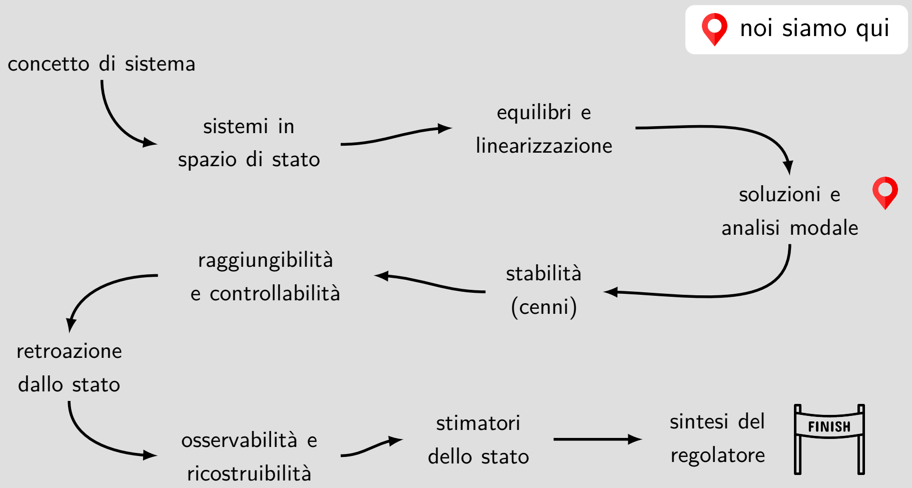
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

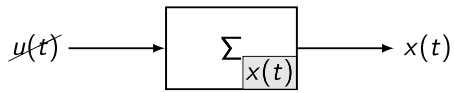
A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Analisi modale ed evoluzione libera di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Evoluzione complessiva di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0$$

Come calcolare e^{Ft}?

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\downarrow$$

$\boxed{\text{Trovare una matrice } T \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ tale che } T^{-1}FT = F_J \text{ !!}}$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

1. $F = TF_J T^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_J}T^{-1}$

2. $$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \implies e^{F_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array}\right]$$

3. $$J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right] \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_i,g_i} t} \end{array}\right]$$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

4. $$J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco di J_{λ_i}

2. F diagonalizzabile $\implies$ modi elementari $= e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

3. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \bar{\lambda}$ autovalore $\Rightarrow$ modi reali $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

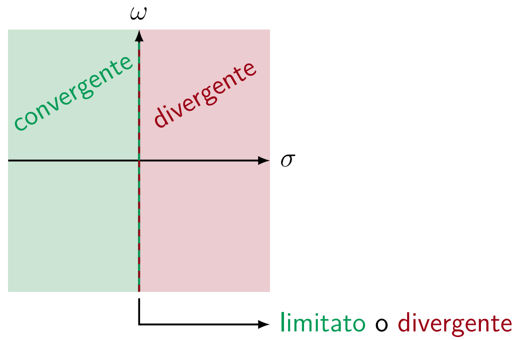
$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

$=$ combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!

Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \xrightarrow{t \to \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$\Re[\lambda_i] \leq 0, \ \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $\Re[\lambda_i] = 0$ $\quad \Longleftrightarrow \quad$ e^{Ft} limitata $\Rightarrow$ $y(t) = He^{Ft}x_0$ limitata

$\exists\, \lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$ o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $\nu_i > g_i$ $\quad \Longleftrightarrow \quad$ e^{Ft} non limitata $\Rightarrow$ $y(t) = He^{Ft}x_0$?

Evoluzione complessiva (libera + forzata)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t) \ ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t) \ ??$$

Evoluzione complessiva (libera + forzata)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione complessiva con Laplace

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$X(s) = \underbrace{(sI-F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sI-F)^{-1}GU(s)}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI-F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI-F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI-F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI-F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\, G' = T^{-1}G,\, H' = HT,\, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) \text{ !!}$$

Poli della matrice di trasferimento

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + J = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1}(s) & \cdots & W_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} = \text{funzioni razionali proprie } (\deg D_{ij}(s) \geq \deg N_{ij}(s))$$

N.B. $p \in \mathbb{C}$ è un polo di $W(s)$ se $p \in \mathbb{C}$ è un polo di almeno un $W_{ij}(s)$

$$\boxed{(sI - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)} \implies \{\text{poli } W(s)\} \subseteq \{\text{autovalori } F\}}$$