

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

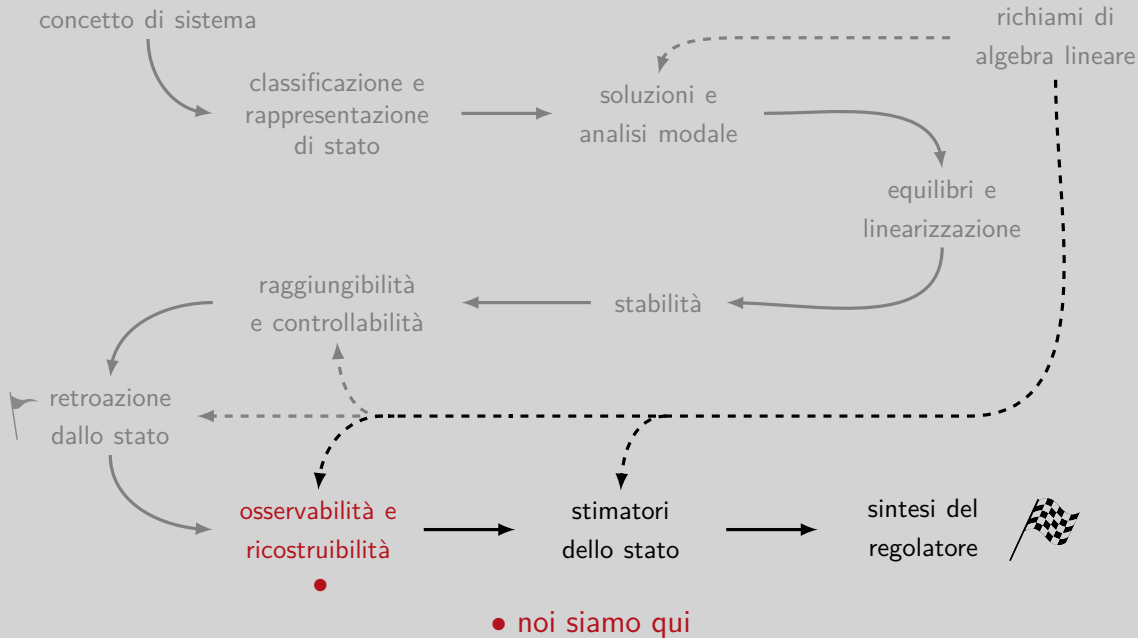
## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

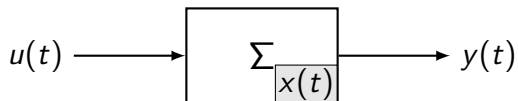


# In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

# Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$

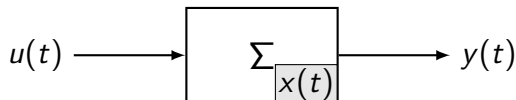


**Osservabilità** = possibilità di stimare lo stato iniziale  $x(0)$  del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo  $[0, \bar{t}]$

**Ricostruibilità** = possibilità di stimare lo stato finale  $x(\bar{t})$  del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo  $[0, \bar{t}]$

# Stati e spazi non osservabili

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$

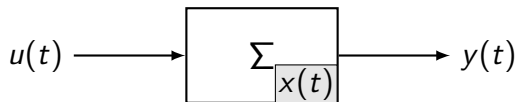


**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice non osservabile nell'intervallo  $[0, \bar{t}]$  se per ogni ingresso  $u(\cdot)$ , l'uscita  $y(\cdot)$  corrispondente allo stato iniziale  $x(0) = \bar{x}$  coincide su  $[0, \bar{t}]$  con l'uscita corrispondente allo stato iniziale  $x(0) = 0$ .

**Definizione:** L'insieme di tutti gli stati non osservabili nell'intervallo  $[0, \bar{t}]$  è detto spazio non osservabile in  $[0, \bar{t}]$ .

# Stati indistinguibili (nel futuro)

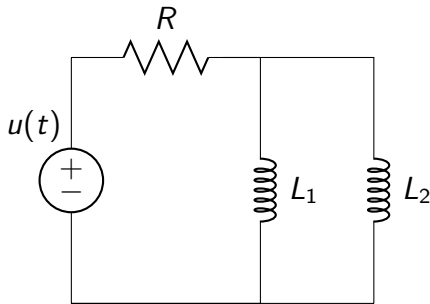
sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$



**Definizione:** Due stati  $\bar{x}'$  e  $\bar{x}''$  si dicono indistinguibili (nel futuro) nell'intervallo  $[0, \bar{t}]$  se per ogni ingresso  $u(\cdot)$ , l'uscita  $y'(\cdot)$  corrispondente allo stato iniziale  $x(0) = \bar{x}'$  e l'uscita  $y''(\cdot)$  corrispondente allo stato iniziale  $x(0) = \bar{x}''$  coincidono su  $[0, \bar{t}]$ .

*stato non osservabile = stato indistinguibile da zero*

## Esempio introduttivo



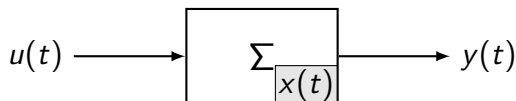
$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \text{ è non osservabile } \forall t > 0$$

# Stati e spazi non ricostruibili

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$



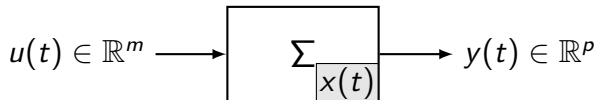
**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice non ricostruibile nell'intervallo  $[0, \bar{t}]$  se ogni ingresso  $u(\cdot)$  e uscita  $y(\cdot)$  in  $[0, \bar{t}]$  "compatibili" con un'evoluzione di stato  $x'(t)$  con stato finale  $x'(\bar{t}) = \bar{x}$  sono anche "compatibili" con un'evoluzione di stato  $x''(t)$  con  $x''(\bar{t}) \neq \bar{x}$ .

**Definizione:** L'insieme di tutti gli stati non ricostruibili nell'intervallo  $[0, \bar{t}]$  è detto spazio non ricostruibile in  $[0, \bar{t}]$ .



# Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

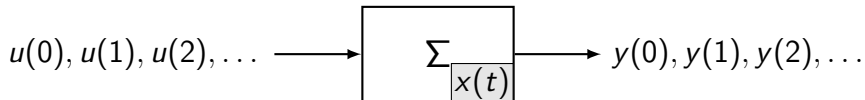
$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}\quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(t) = HF^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) = HF^t x_0 + H\mathcal{R}_t u_t$$

# Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}\quad x(0) = \bar{x}$$



$$y(k) = HF^k \bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati  $\bar{x}$  osservabili da misure  $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}$ ,  $\{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$ ?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ?

## Spazio non osservabile

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = HF^k \bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y(k) - y_0(k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-1 \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathcal{O}_t} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \bar{x} \in \ker \mathcal{O}_t$$

$\mathcal{O}_t$  = matrice di osservabilità in  $t$  passi

# Spazio non osservabile

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t) \\ \text{(o nell'intervallo } [0, t-1]) \\ \text{(o con } t \text{ misure)}$$

**Teorema:** Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = (\text{massimo}) \text{ spazio non osservabile}$$

# Criterio di osservabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) osservabile se  $X_{NO} = \{0\}$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) osservabile in  $t$  passi (o con  $t$  misure) se  $t$  è il più piccolo intero tale che  $X_{NO}(t) = \{0\}$ .

$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n =$  matrice di osservabilità del sistema

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

$$p = 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

$$p > 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}^\top \mathcal{O}) \neq 0$$

# Esempi

1.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$   
 $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Rightarrow$  non osservabile

2.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$   
 $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\Rightarrow$  osservabile (in 2 passi)

## Osservabilità ed equivalenza algebrica

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z=T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$
$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{H} = HT$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{O}}) = \text{rank}(\mathcal{O}) \implies$  cambio di base non modifica l'osservabilità !!

---

Inoltre, se  $\Sigma$  osservabile:  $\mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^\top \mathcal{O} T \implies T = (\mathcal{O}^\top \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}}$

## Calcolo dello stato iniziale

Se  $\Sigma$  è osservabile in  $t$  passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema  $\bar{x} = x(0)$  a partire da dati ingresso/uscita?

$$y_\ell(k) = HF^k \bar{x} = y(k) - H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{t-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \mathcal{O}_t \bar{x} \implies \bar{x} = (\mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t)^{-1} \mathcal{O}_t^\top \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{V}_t \triangleq \mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t = \text{Gramiano di osservabilità in } t \text{ passi}$



## Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Calcolare  $x(0)$  dalle misure  $u(0) = 1$ ,  $u(1) = 1$  e  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y(2) = 2$ ?

---

Poichè il sistema è osservabile lo stato iniziale è unico e pari a  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

# Indistinguibilità

$$x(0) = \bar{x}', u(\cdot) \implies y'(k) = HF^k \bar{x}' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$x(0) = \bar{x}'', u(\cdot) \implies y''(k) = HF^k \bar{x}'' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$\bar{x}', \bar{x}'' \text{ indistinguibili in } t \text{ passi} \implies y'(k) = y''(t), \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\implies HF^k(\bar{x}' - \bar{x}'') = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\implies \bar{x}' - \bar{x}'' \in X_{NO}(t)$$

$\bar{x} + X_{NO}(t)$ : classe di stati indistinguibili in  $t$  passi da  $\bar{x}$

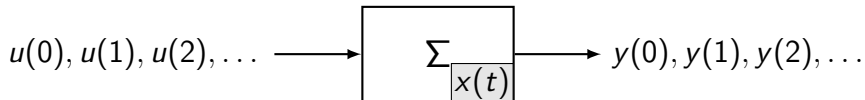
$\bar{x} + X_{NO}$ : classe di stati indistinguibili da  $\bar{x}$

# Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t)$$



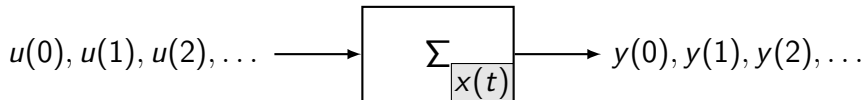
$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

## Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t)$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati  $\bar{x} = x(t-1)$  ricostruibili da misure  $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}$ ,  $\{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$ ?

Quando possiamo ricostruire tutti i possibili stati  $\bar{x} = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$ ?

## Spazio non ricostruibile

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

stati iniziali compatibili con le misure:  $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t-1) = F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$F^{t-1}X_{NO}(t)$  = insieme di stati non ricostruibili in  $t$  passi

# Spazio non ricostruibile

$X_{NR}(t)$  = spazio non ricostruibile in  $t$  passi =  $\{F^{t-1}x, x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$   
(o nell'intervallo  $[0, t-1]$ )  
(o con  $t$  misure)

**Teorema:** Gli spazi non ricostruibili soddisfano:

$$X_{NR}(1) \supseteq X_{NR}(2) \supseteq X_{NR}(3) \supseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_{NR}(i) = X_{NR}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$X_{NR} \triangleq X_{NR}(i)$  = (massimo) spazio non ricostruibile

## Criterio di non ricostruibilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se  $X_{NR} = \{0\}$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in  $t$  passi (o con  $t$  misure) se  $t$  è il più piccolo intero tale che  $X_{NR}(t) = \{0\}$ .

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}$$

$\Sigma$  osservabile ( $X_{NO} = \{0\}$ )  $\Rightarrow$   $\Sigma$  ricostruibile

$\Sigma$  ricostruibile  $\nRightarrow$   $\Sigma$  osservabile !!!

## Esempi

1.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$   
 $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Rightarrow$  non osservabile  
ma ricostruibile se  $f_1 = 0$

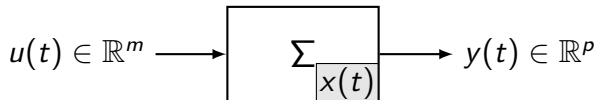
2.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$   
 $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\Rightarrow$  osservabile e (quindi) ricostruibile



# Osservabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}\quad x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$



$$y(t) = He^{Ft}\bar{x} + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

Insieme di stati  $\bar{x}$  osservabili da misure nell'intervallo  $[0, t]$ ?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ?

## Criterio di osservabilità

$X_{NO}(t)$  = spazio non osservabile nell'intervallo  $[0, t]$

$X_{NO}$  = (massimo) spazio non osservabile

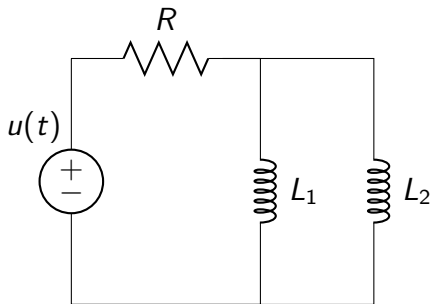
**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.c. si dice (completamente) osservabile se  $X_{NO} = \{0\}$ .

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

**N.B.** Se un sistema  $\Sigma$  a t.c. è osservabile allora  $X_{NO}(t) = \{0\}$  per ogni  $t > 0$  !!

## Esempio



$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

## Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

misure  $u(\tau)$ ,  $y(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$

stati iniziali compatibili con le misure:  $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t)$  = insieme di stati non ricostruibili nell'intervallo  $[0, t]$

$$e^{Ft} \text{ invertibile} \implies X_{NR}(t) = X_{NO}(t)$$

osservabilità = ricostruibilità !!