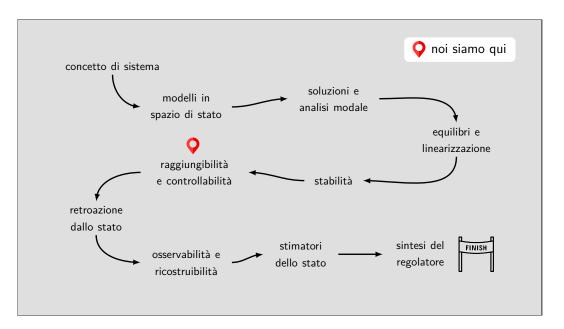
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020-2021



| | |
|--|------|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

In questa lezione

- ▶ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▶ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▶ Esercizi

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \ x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \sum x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t- au)} Gu(au) d au$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t a partire da x(0) = 0?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità del rango

 $X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$ $X_R =$ (massimo) spazio raggiungibile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

 $\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \mathsf{matrice} \; \mathsf{di} \; \mathsf{raggiungibilit\^{a}} \; \mathsf{del} \; \mathsf{sistema}$

 Σ raggiungibile \iff Im $(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff$ rank $(\mathcal{R}) = n$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni t > 0!!

G. Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

26 Marzo 2021 5 / 11

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

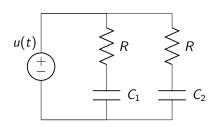
- **1.** $X_R
 in F$ -invariante e contiene im(G)
- 2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \ F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \ G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

$$\Sigma$$
 raggiungibile \iff rank $\begin{bmatrix} zI-F & G \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

 $x_1(0) = x_2(0) = 0$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile!

G. Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

26 Marzo 2021 7 / 11

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \sum x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t allo stato x(t) = 0?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

G. Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

26 Marzo 2021 8 / 11

Controllabilità = raggiungibilità

 $X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

 $X_C = (massimo)$ spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R$$

$$X_C = X_C(t) = X_R$$

controllabilità = raggiungibilità !!

G. Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

26 Marzo 2021 9 / 11

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
- 2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.
- 1. Non esiste una tale G.
- 2. Una $G \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi.

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = egin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \ -1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = egin{bmatrix} 1 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}.$$

- 1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
- 2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $au \in [0,1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^{\top}$ a $x(1) = [e \ e \ e^{-1}]^{\top}$.
- 1. Il sistema non è raggiungibile.
- 2. Un tale ingresso esiste.

G. Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

26 Marzo 2021 11 / 11

