

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021




noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in
spazio di stato

soluzioni e
analisi modale

equilibri e
linearizzazione


raggiungibilità
e controllabilità

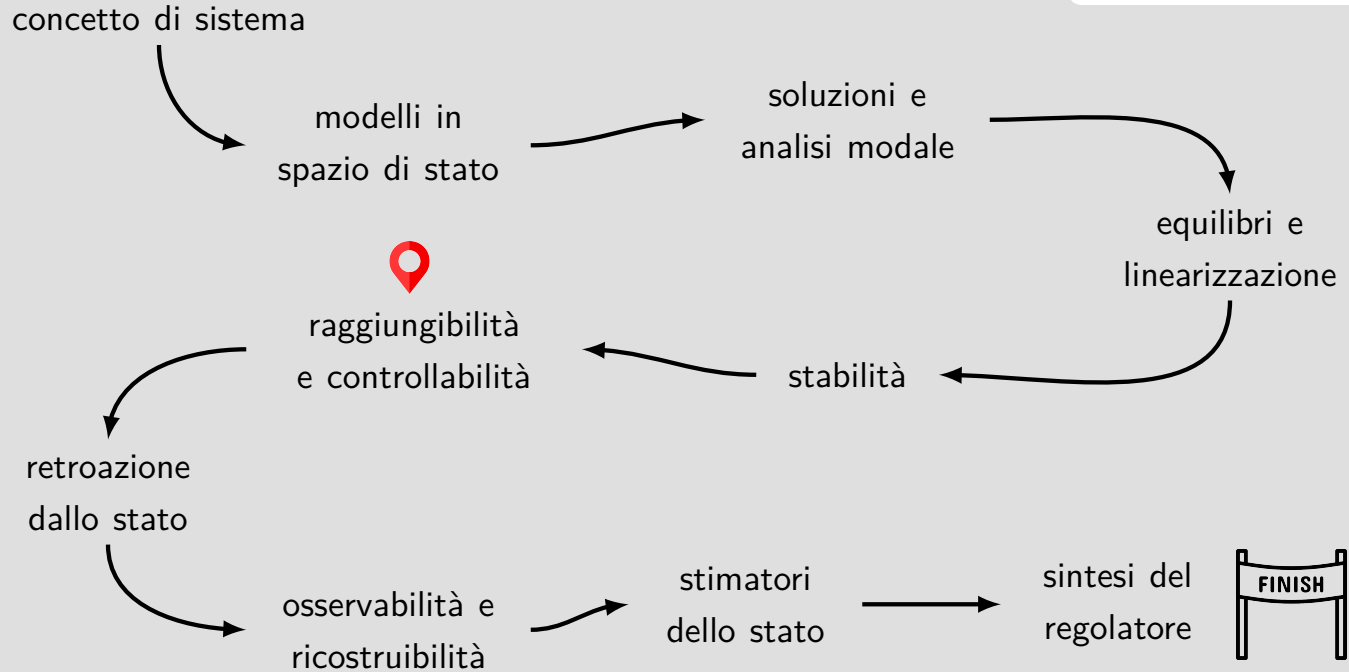
stabilità

retroazione
dallo stato

osservabilità e
ricostruibilità

stimatori
dello stato

sintesi del
regolatore



Nella scorsa lezione

▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman

▷ Test PBH di raggiungibilità

▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.



$$X_c(t) \subseteq X_c(t+1) \quad \forall t \geq 0$$

$$\exists i \leq n \text{ t.c. } X_c(j) = X_c(i) \quad \forall j \geq i$$

Criterio di controllabilità: Σ controllabile $\iff \text{im } F^n \subseteq \text{im } R = X_R$

$$\exists T \in \mathbb{R}^{n \times n} : \Sigma = (F, G) \quad \downarrow \quad z = T^{-1}x$$

$$\Sigma_K = (F_K, G_K)$$

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Sigma_R = (F_{11}, G_1)$ è sottosistema
ragg.

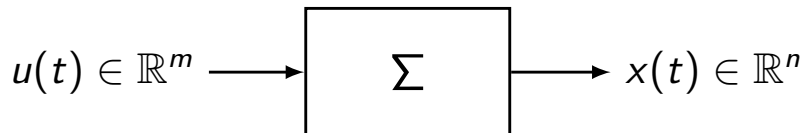
$\Sigma_{NR} = (F_{22}, 0)$ è sottosistema
non ragg.

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

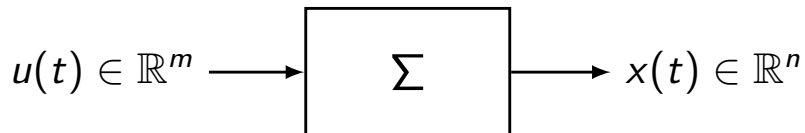
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = x_0$$



$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau$$

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

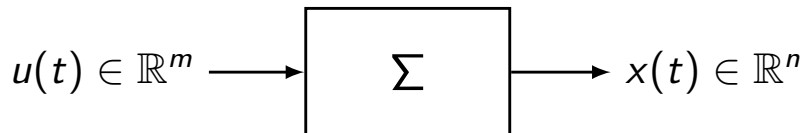
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = 0$$



$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau) d\tau$$

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = 0$$



$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau) d\tau$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità del rango

$X_R(t)$ = spazio raggiungibile al tempo t

X_R = (massimo) spazio raggiungibile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

Criterio di raggiungibilità del rango

$X_R(t)$ = spazio raggiungibile al tempo t

X_R = (massimo) spazio raggiungibile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$ = matrice di raggiungibilità del sistema

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

Criterio di raggiungibilità del rango

$X_R(t)$ = spazio raggiungibile al tempo t

X_R = (massimo) spazio raggiungibile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$ = matrice di raggiungibilità del sistema

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$!!

$$X_R(t) = X_R \quad \forall t > 0$$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F -invariante e contiene $\text{im}(G)$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F -invariante e contiene $\text{im}(G)$

2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F -invariante e contiene $\text{im}(G)$

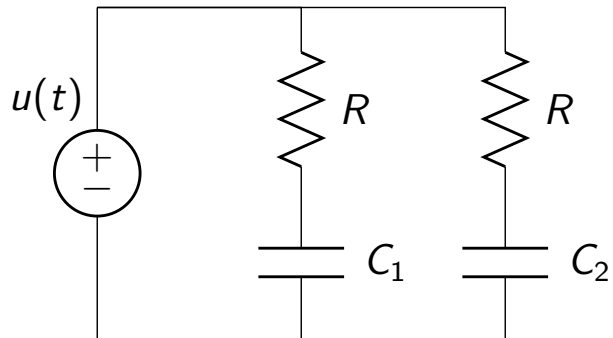
2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{rank} \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \\ \text{[z autovalori di F]}$$

Esempio

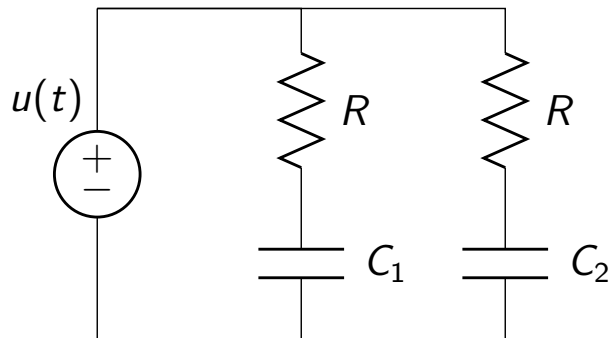


$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

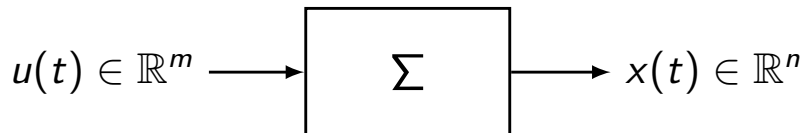
Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile !

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

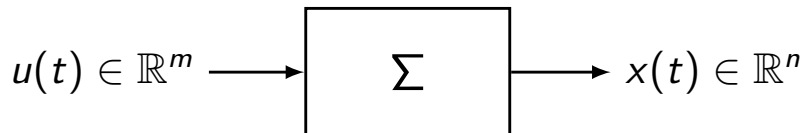
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$



$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau$$

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = x_0$$



$$0 = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Controllabilità = raggiungibilità

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

Controllabilità = raggiungibilità

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$\cancel{x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R}$$

$$X_C = X_C(t) = X_R$$

controllabilità = raggiungibilità !!

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
 2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.
-

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
 2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.
-

1. Non esiste una tale G .
2. Una $G \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi.

Esercizio 2

[riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
 2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ a $x(1) = [e \ e \ e^{-1}]^\top$.
-

Esercizio 2

[riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
 2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ a $x(1) = [e \ e \ e^{-1}]^\top$.
-

1. Il sistema non è raggiungibile.
2. Un tale ingresso esiste.

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

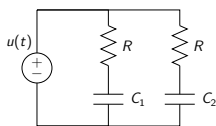
Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 [baggiogi.github.io](https://github.com/baggiogi)



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile?

$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_F x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_G u(t)$$

$$R = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2 C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2 C_2^2} \end{bmatrix} \quad R, C_1, C_2 > 0$$

$$\det R = -\frac{1}{R^3 C_1 C_2^2} + \frac{1}{R^3 C_1^2 C_2} = \frac{1}{R^3 C_1 C_2} \left(-\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right) \quad \begin{cases} = 0 & C_1 = C_2 \\ \neq 0 & C_1 \neq C_2 \end{cases}$$

Se $C_1 = C_2$: Σ non è raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$: Σ è raggiungibile

Controllabilità = raggiungibilità

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

G. Baglio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

28 Marzo 2021

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\downarrow \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} = T^{-1}x \quad (T, \text{base di Kalman})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_{NR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_R = F_{11}x_R + F_{12}x_{NR} + G_1u & \Sigma_R \text{ raggiungibile} \\ \dot{x}_{NR} = F_{22}x_{NR} & \Sigma_{NR} \text{ non raggiungibile} \end{cases}$$

$$\Sigma_R \text{ raggiungibile} \implies \Sigma_R \text{ controllabile}$$

$$\Sigma_{NR}: x_{NR}(t) = e^{F_{22}t} x_{NR}(0)$$

Quando $x_{NR}(t) = 0 \quad \forall t \geq \bar{t}$ e $\forall x_{NR}(0)$?

Mai, perché a t.c. non abbiamo modi convergenti in tempo finito!

$\implies \Sigma_{NR}$ non controllabile

Raggiungibilità \iff Controllabilità
--

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$$

1) G t.c. Σ raggiungibile?

Usiamo il test PBH:

1) Calcolo autovalori F : $\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22}^0)$

$$\Delta_{F_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1) + 1 = \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2$$

Autovalori F : $\lambda_1 = 0, \quad v_1 = 3$

$$PBH(0) = [-F \quad G] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & g_1 \\ -1 & 1 & 0 & g_2 \\ -4 & 4 & 0 & g_3 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(PBH(0)) \leq 2 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Sigma \text{ non raggi. } \forall G \in \mathbb{R}^3$$

2) G t.c. Σ controllabile?

L'unico autovalore di F è 0 (F nilpotente)

$$\Rightarrow \Sigma \text{ controllabile } \forall G \in \mathbb{R}^3$$