Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 14/02/2020: **Soluzioni**

Esercizio 1 [9 pti].

1. Il vettore $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix}^\top$ è un equilibrio del sistema se e solo se

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \alpha\bar{x}_2 + (\alpha-1)^2\bar{x}_2^3 = \bar{x}_2(\alpha + (\alpha-1)^2\bar{x}_2^2) \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

La seconda equazione di (1) sostituita nella prima porge

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_2\left(\alpha + (\alpha-1)^2\bar{x}_2^2\right) \implies \bar{x}_2\left(\alpha - 1 + (\alpha-1)^2\bar{x}_2^2\right) = 0. \tag{2}$$

Quest'ultima equazione pone vincoli diversi sulla variabile $\bar{x}_2$ a seconda dei casi: $\alpha = 1$, $\alpha \neq 1$. Trattiamo separatamente questi due casi:

- Caso $\alpha = 1$. In questo caso l'equazione (2) diventa $0 = 0$, condizione che è sempre verificata. Quindi, dalla seconda equazione di (1), concludiamo che esistono infiniti equilibri della forma $\begin{bmatrix} \beta & \beta \end{bmatrix}^\top$, con $\beta \in \mathbb{R}$ uno scalare arbitrario.
- Caso $\alpha \neq 1$. In questo caso le soluzioni di (2) sono $\bar{x}_2 = 0$ (che, a sua volta, implica $\bar{x}_1 = 0$) e le soluzioni di $(\alpha-1)^2\bar{x}_2^2 = 1 - \alpha$. Quest'ultima equazione ammette soluzioni reali ($\pm 1/\sqrt{1-\alpha}$) se e solo se $\alpha < 1$. Distinguiamo quindi i due sottocasi:
  - Caso $\alpha < 1$. Abbiamo tre equilibri in $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\begin{bmatrix} \pm 1/\sqrt{1-\alpha} & \pm 1/\sqrt{1-\alpha} \end{bmatrix}^\top$.
  - Caso $\alpha > 1$. Abbiamo un solo equilibrio in $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

2. La matrice Jacobiana del sistema è

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha + 3(\alpha-1)^2 x_2^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

che valutata in $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ porge

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Gli autovalori di $J(\bar{x})$ sono $\pm\sqrt{\alpha}$. Quindi, dal Teorema di Linearizzazione possiamo concludere che $\bar{x}$ è asintoticamente stabile se $|\alpha| < 1$ e instabile se $|\alpha| > 1$. I casi critici sono $\alpha = \pm 1$.

3. Consideriamo l'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ a cui corrispondono i due casi critici $\alpha = \pm 1$ (trovati al punto 2).

- Caso $\alpha = 1$. In questo caso il sistema di partenza si riduce ad un sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t). \end{aligned}$$

La matrice di stato del sistema è

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quest'ultima ha autovalori in ± 1, a cui corrispondono modi elementari limitati. Il punto di equilibrio $\bar{x}$ è quindi semplicemente stabile.

- Caso $\alpha = -1$. In questo caso utilizziamo la funzione candidata di Lyapunov proposta $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, che è definita positiva in un intorno dell'origine. Per capire se è una "buona" funzione di Lyapunov, valutiamo la differenza $\Delta V(x_1, x_2)$ (assumendo $\alpha = -1$):

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1, x_2) &= V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t))\\ &= (-x_2 + 4x_2^3)^2 + x_1^2 - x_1^2 - x_2^2\\ &= x_2^2 + 16x_2^6 - 8x_2^4 - x_2^2\\ &= -8x_2^4(1 - 2x_2^2)\end{aligned}$$

Notiamo che $\Delta V(x_1, x_2)$ è semidefinita negativa in un intorno dell'origine. Quindi, per il Teorema di Lyapunov, possiamo concludere che $\bar{x}$ è *almeno* semplicemente stabile. Per capire se $\bar{x}$ è asintoticamente stabile o solo semplicemente stabile, usiamo il Teorema di Krasowskii. L'insieme dei punti che annullano $\Delta V(x_1, x_2)$ in un intorno dell'origine ha la forma:

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \Delta V(x_1, x_2) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 = \beta, x_2 = 0, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che $x(t) \in \mathcal{N}$ implica $x_2(t) = 0$. Sostituendo questa condizione nelle equazioni della dinamica, otteniamo

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= 0,\\ x_2(t+1) &= x_1(t).\end{aligned}$$

Da queste due equazioni segue che $x_1(t+2) = x_2(t+2) = 0$, per ogni $t \geq 0$. Quindi, partendo da una qualsiasi condizione iniziale in $\mathcal{N}$ (purché sufficientemente vicina a $\bar{x}$), tutte le traiettorie convergono all'equilibrio $\bar{x}$. Per il Teorema di Krasowskii possiamo quindi concludere che $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.

Esercizio 2 [9 pti].

1. Dalla struttura di F (o tramite calcolo esplicito delle radici del polinomio caratteristico di F), abbiamo che F ha autovalori in α, 1. Distinguiamo quindi due casi:

   - Caso $\alpha \neq 1$. In questo caso F ha due autovalori distinti $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebriche $\nu_1 = 1$ e $\nu_2 = 2$, rispettivamente. Le molteplicità geometrica di λ_1 è $g_1 = 1$, mentre quella di λ_2 si può trovare calcolando:

   $$g_2 = 3 - \text{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

   Da queste informazioni concludiamo che all'autovalore λ_2 è associato un miniblocco di Jordan di dimensione 2. La forma di Jordan di F è quindi (a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale):

   $$F_J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   I modi elementari del sistema sono α^t (convergente se $|\alpha| < 1$, divergente se $|\alpha| > 1$, limitato se $\alpha = -1$), 1 (limitato) e t (divergente).

- Caso $\alpha = 1$. In questo caso F ha un unico autovalore distinto $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 3$. La molteplicità geometrica di λ_1 si può calcolare come:

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

  Da queste informazioni concludiamo che all'autovalore λ_2 è associato un unico miniblocco di Jordan di dimensione 3. La forma di Jordan di F è quindi:

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

  I modi elementari del sistema sono 1 (limitato), t e $\frac{1}{2}t^2$ (entrambi divergenti).

2. Per lo studio della raggiungibilità, controllabilità e stabilizzabilità usiamo il test PBH, analizzando separatamente i casi $\alpha \neq 1$ e $\alpha = 1$.

   - Caso $\alpha \neq 1$. Dobbiamo valutare la matrice PBH per i due autovalori di F: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1$. Abbiamo:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha - 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

     da cui segue che rank $\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F & G \end{bmatrix} = 2$ e rank $\begin{bmatrix} \lambda_2 I - F & G \end{bmatrix} = 3$. Concludiamo che $\lambda_1 = \alpha$ rappresenta l'unico autovalore non raggiungibile del sistema e, di conseguenza, il sistema (i) non è mai raggiungibile per alcun valore di α, (ii) è controllabile per $\alpha = 0$, e (iii) è stabilizzabile per $|\alpha| < 1$.

   - Caso $\alpha = 1$. La matrice PBH valutata nell'unico autovalore $\lambda_1 = 1$ ha la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

     Poichè rank $\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F & G \end{bmatrix} = 2$, il sistema non è né raggiungibile, né controllabile, né stabilizzabile.

   Riassumendo, il sistema (i) non è mai raggiungibile per alcun valore di α (ii) è controllabile per $\alpha = 0$, e (iii) è stabilizzabile per $|\alpha| < 1$.

3. Per $\alpha = 0$ il sistema è controllabile, e, poiché x_f è il vettore nullo, esiste una sequenza d'ingresso che porta il sistema da x_0 a x_f. La sequenza d'ingresso u_t cercata deve soddisfare:

$$x_\mathrm{f} - F^t x_0 = -F^t x_0 = \mathcal{R}_t u_t. \tag{5}$$

   Per calcolare la sequenza di lunghezza minima che soddisfa l'equazione (5) possiamo procedere per tentativi, partendo dal caso $t = 1$. In questo caso, dalla (5) abbiamo

$$-F x_0 = \mathcal{R}_1 u_1 \implies \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0),$$

   equazione che non è mai soddisfatta per alcuno valore di $u(0)$, per cui non esiste una sequenza d'ingresso di lunghezza 1. Consideriamo ora $t = 2$. Dalla (5) abbiamo

$$-F^2 x_0 = \mathcal{R}_2 u_2 \implies \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

   equazione che è soddisfatta prendendo $u(0) = 2$ e $u(1) = -1$. Concludiamo che questa è la sequenza d'ingresso di lunghezza minima cercata.

Esercizio 3 [9 pti].

1. La matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno, quindi il sistema è raggiungibile ed esiste il controllore in retroazione richiesto. Per calcolarlo possiamo utilizzare il metodo di calcolo diretto. Sia $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ la matrice di retroazione, abbiamo

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) = \lambda^3 + (1 - k_2)\lambda^2 + (-1 - k_1 - k_2)\lambda - 1 - k_1 - k_3,$$

e imponendo l'uguaglianza $\Delta_{F+GK}(\lambda) \overset{!}{=} (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$, otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1 - k_2 = 3, \\ -1 - k_1 - k_2 = 3, \\ -1 - k_1 - k_3 = 1. \end{cases}$$

Il sistema ha come unica soluzione $k_1 = k_2 = -2$, $k_3 = 0$. Concludiamo che la matrice di retroazione cercata è $K = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Per studiare l'osservabilità del sistema utilizziamo il test PBH di osservabilità. La matrice F presenta due autovalori distinti: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Valutando la matrice PBH per questi due autovalori, otteniamo

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Abbiamo che rank $\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F & G \end{bmatrix} = 3$ e rank $\begin{bmatrix} \lambda_2 I - F & G \end{bmatrix} = 2$. Poiché la matrice PBH cade di rango per l'autovalore $\lambda_2 = -1$, concludiamo che il sistema non è osservabile e l'unico autovalore non osservabile è -1.

3. Affinché la dinamica dell'errore di stima contenga tutti e soli i modi e^{-t}, te^{-t}, la matrice $F + LH$, con L guadagno dello stimatore, deve avere un autovalore in $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 3$ e geometrica $g_1 = 2$. Come prima cosa, osserviamo che, siccome l'unico autovalore non osservabile del sistema è in -1, è possibile trovare un guadagno $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$ tale per cui $F + LH$ abbia -1 come unico autovalore. Per calcolarlo, possiamo utilizzare il metodo di calcolo diretto. Calcoliamo quindi

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \lambda^3 + (-\ell_1 - \ell_2 + 1)\lambda^2 + (-2\ell_1 - 2\ell_2 - 1)\lambda - 1 - \ell_1 - \ell_2,$$

e, imponendo l'uguaglianza $\Delta_{F+GK}(\lambda) \overset{!}{=} (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$, otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} -\ell_1 - \ell_2 + 1 = 3, \\ -2\ell_1 - 2\ell_2 - 1 = 3, \\ -1 - \ell_1 - \ell_2 = 1. \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione $\ell_1 = -2 - \ell_2$. Concludiamo che il guadagno cercato è $L = \begin{bmatrix} -2 - \ell_2 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$, con $\ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$ scalari arbitrari. Sostituendo il guadagno trovato in $F + LH$, abbiamo che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_1 = -1$ di $F + LH$ è data da

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F - LH) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 + \ell_2 & 1 + \ell_2 & 0 \\ -1 - \ell_2 & -1 - \ell_2 & 0 \\ -1 - \ell_3 & -\ell_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per avere $g_1 = 2$, dobbiamo imporre $\text{rank}(\lambda_1 I - F - LH) = 1$. Per soddisfare questo vincolo basta imporre che le prime due righe di $\lambda_1 I - F - LH$ siano nulle. Questo porge la soluzione $\ell_2 = -1$. Concludiamo quindi che lo stimatore richiesto esiste e ha guadagno $L = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$, con $\ell_3 \in \mathbb{R}$ uno scalare arbitrario.

In alternativa, dalla struttura di F, si poteva fin da subito osservare che il guadagno $L = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$ rendeva la matrice $F + LH$ triangolare inferiore con elementi sulla diagonale tutti uguali a -1. Quindi, con questa scelta gli autovalori di $F + LH$ venivano allocati in -1 e, calcolando la molteplicità geometrica dell'autovalore in -1, si poteva arrivare più rapidamente alla soluzione.

Domanda di Teoria [6 pti].

1. Si vedano gli appunti delle lezioni (Lezione 21) e/o il capitolo 7.1 del testo di riferimento del corso.

2. Il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se è stabilizzabile e rilevabile. Per la giustificazione, si vedano gli appunti delle lezioni (Lezione 21) e/o il capitolo 7.1 del testo di riferimento del corso.