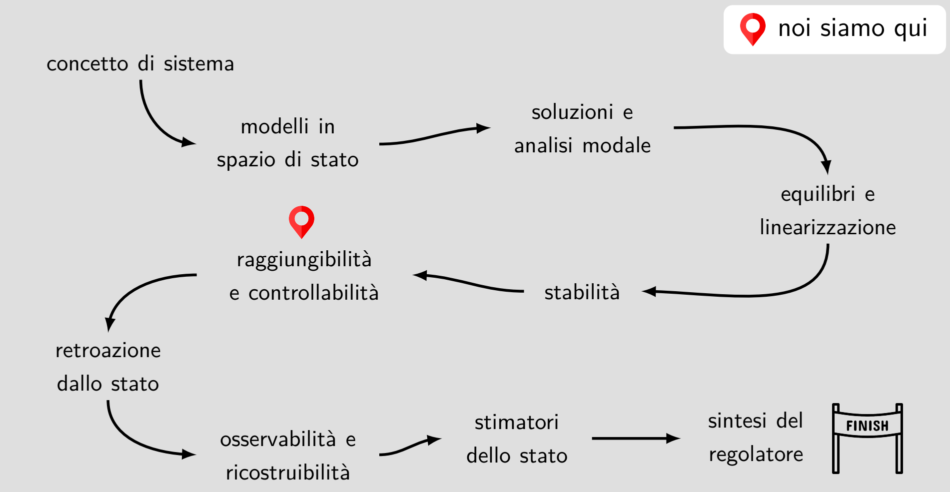
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Esercizi

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)} Gu(\tau)\, d\tau$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità del rango

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile al tempo } t$$
$$X_R = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \mathrm{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

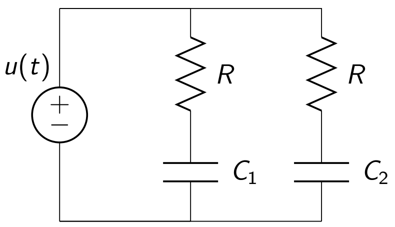
N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$!!

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

1. X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{im}(G)$
2. Forma canonica di Kalman:
$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x,\ F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix},\ G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
3. Criterio PBH:
$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \mathrm{rank}\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t),\ x_2(t) = v_{C_2}(t)$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile !

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\text{Insieme di stati } x_0 \text{ controllabili al tempo } t \text{ allo stato } x(t) = 0?}$$

$$\boxed{\text{Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati } x_0 \in \mathbb{R}^n?}$$

Controllabilità = raggiungibilità

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$$

$$X_C = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R$$

$$\boxed{X_C = X_C(t) = X_R}$$

controllabilità = raggiungibilità !!

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^3$ tale da rendere il sistema controllabile.

---

1. Non esiste una tale G.
2. Una $G \in \mathbb{R}^3$ qualsiasi.

Esercizio 2 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0\ 0\ 1]^\top$ a $x(1) = [e\ e\ e^{-1}]^\top$.

---

1. Il sistema non è raggiungibile.
2. Un tale ingresso esiste.