⚠ **Esame in modalità telematica** ⚠

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 06/09/2021

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha-2 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F e i modi elementari del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 2}$**, determinare **l'evoluzione libera dell'uscita** del sistema a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$.
3. Indicare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) compaiono modi **puramente oscillatori** tra i modi elementari del sistema.

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (\alpha-1)^2 x_1(t) - x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (\alpha-1) x_1^2(t) x_2(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la stabilità dell'**equilibrio nell'origine** $\bar{x} = (0,0)$ utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Per gli eventuali **casi critici** della linearizzazione del punto 2., studiare la stabilità di $\bar{x} = (0,0)$ usando la candidata funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ e i teoremi di Lyapunov e, se necessario, Krasowskii.

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è: (i) osservabile, (ii) ricostruibile.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 2}$**, calcolare gli spazi non osservabili del sistema $X_{NO}(t)$ per ogni $t \geq 1$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 2}$**, costruire, se possibile, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema. Dire inoltre se un regolatore dead-beat del sistema esiste, giustificando la risposta.