Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 10/09/2020: **Soluzioni**

Esercizio 1 [9 pti].

1. Fissato $\beta = 0$, il vettore $\bar{x} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\end{bmatrix}^\top$ è un equilibrio del sistema se e solo se soddisfa

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \alpha^2 \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 &= -\bar{x}_1^2 - \alpha \bar{x}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Se $\alpha \neq \pm 1$, dalla prima equazione di (1) abbiamo $\bar{x}_1 = 0$, che sostituita nella seconda porge $\bar{x}_2 = 0$. Quindi se $\alpha \neq \pm 1$ l'unico equilibrio è l'origine $\bar{x} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\top$. Distinguiamo ora i casi $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$:

- Caso $\alpha = 1$. In questo caso la prima equazione di (1) non porge nessun vincolo su $\bar{x}_1$, mentre dalla seconda equazione abbiamo $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2/2$. Quindi abbiamo infiniti equilibri della forma $\bar{x} = \begin{bmatrix}\gamma & -\gamma^2/2\end{bmatrix}^\top$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
- Caso $\alpha = -1$. Anche in questo caso la prima equazione di (1) non porge nessun vincolo su $\bar{x}_1$, mentre dalla seconda equazione abbiamo $\bar{x}_1^2 = 0$. Da quest'ultima equazione segue che il sistema ammette infiniti equilibri della forma $\bar{x} = \begin{bmatrix}0 & \gamma\end{bmatrix}^\top$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

2. Fissato $\beta = 0$, la matrice Jacobiana del sistema valutata in un generico equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\end{bmatrix}^\top$ è

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ -2\bar{x}_1 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di $J(\bar{x})$ sono proprio i suoi elementi sulla diagonale: α^2, $-\alpha$. Quindi dal Teorema di linearizzazione segue che gli equilibri del sistema non lineare di partenza sono asintoticamentse stabili se $|\alpha| < 1$ e instabili se $|\alpha| > 1$. Per $\alpha = \pm 1$, $J(\bar{x})$ ha autovalori di modulo unitario: questo è il caso critico del Teorema di linearizzazione per cui, in questo caso, non è possibile concludere nulla sulla stabilità degli equilibri.

3. Osserviamo innanzitutto che la candidata funzione di Lyapunov è positiva definita in un intorno dell'origine. Calcoliamo ora la differenza $\Delta V(x_1, x_2)$ per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t)) \\ &= x_2^2 + x_1^4 - x_1^2 - x_2^2 = -x_1^2(1 - x_1^2). \end{aligned}$$

Dall'ultima equazione notiamo che $\Delta V(x_1, x_2)$ è semidefinita negativa in un intorno dell'origine. Dal Teorema di Lyapunov possiamo quindi concludere che l'origine è (almeno) un equilibrio semplicemente stabile del sistema. Per capire se abbiamo stabilità asintotica o solo semplice, usiamo il Teorema di Krasowskii. L'insieme dei punti che annullano $\Delta V(x_1, x_2)$ in un intorno dell'origine è:

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \Delta V(x_1, x_2) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 = 0, x_2 = \gamma, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Quindi se $x(t) \in \mathcal{N}$ allora $x_1(t) = 0$. Sostituendo questa condizione nelle equazioni della dinamica, otteniamo

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t), \\ x_2(t+1) &= 0. \end{aligned}$$

Da queste due equazioni segue che $x_1(t+2) = x_2(t+2) = 0$, per ogni $t \geq 0$. Quindi, partendo da una qualsiasi condizione iniziale in $\mathcal{N}$, tutte le traiettorie convergono all'origine. Per il Teorema di Krasowskii possiamo quindi concludere che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 2 [9 pti].

1. Dalla forma della matrice F, si può notare subito che essa ha autovalori in 1 e α. In particolare, per $\alpha = 1$, F presenta un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 3$, mentre per $\alpha \neq 1$, F presenta due autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha$ con molteplicità algebriche $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, rispettivamente. Distinguiamo quindi i due casi:

   - Caso $\alpha = 1$. In questo caso la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 1$ è:
   $$g_1 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$
   Quindi la forma di Jordan di F presenta un solo miniblocco relativo a $\lambda_1 = 1$ e ha la forma:
   $$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   I modi elementari del sistema sono e^t, te^t, $\frac{t^2}{2}e^t$ (tutti divergenti).
   - Caso $\alpha \neq 1$. In questo caso la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 1$ è:
   $$g_1 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & -1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \neq 0, \\ 2 & \text{se } \alpha = 0, \end{cases}$$
   mentre la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = \alpha$ è $g_2 = 1$. La forma di Jordan di F dipende da g_1 e, pertanto, dal valore di α. Distinguiamo quindi i due sottocasi:
     - Caso $\alpha \neq 0$. La forma di Jordan di F è (a meno di permutazioni dei miniblocchi sulla diagonale):
     $$F_J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
     e i modi elementari del sistema sono $e^{\alpha t}$ (convergente se $\alpha < 0$, divergente se $\alpha > 0$), e^t e te^t (entrambi divergenti).
     - Caso $\alpha = 0$. La forma di Jordan di F è (a meno di permutazioni degli elementi sulla diagonale):
     $$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
     e i modi elementari del sistema sono 1 (limitato) e e^t (divergente).

2. La matrice di raggiungibilità del sistema è
$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
che ha rango pieno per ogni $\alpha \neq 0$. Concludiamo quindi che il sistema è raggiungibile se e solo se $\alpha \neq 0$. In corrispondenza di $\alpha = 0$, osserviamo che la matrice PBH di raggiungibilità valutata nell'autovalore $\lambda_1 = 1$
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
ha rango pari a due. Poiché λ_1 ha parte reale positiva, ne segue che il sistema non è stabilizzabile per $\alpha = 0$. Concludiamo che il sistema è stabilizzabile se e solo se $\alpha \neq 0$.

3. Sia $H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}$. Per $\alpha = -1$, la matrice PBH di osservabilità del sistema valutata nei due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ ha la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix}.$$

Affinché il sistema sia rivelabile ma non osservabile, dobbiamo avere

$$\begin{cases} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = 3, \\ \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} < 3. \end{cases}$$

Una matrice H che soddisfa questi requisiti è, ad esempio, $H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3 [9 pti].

1. Affinché un controllore dead-beat esista, il sistema deve essere controllabile. Gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3$. Per verificare se il sistema è controllabile calcoliamo il rango della matrice PBH di raggiungibilità valutata negli autovalori di F diversi da zero, cioè in $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 I - F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice PBH contiene tre colonne linearmente indipendenti, quindi il suo rango pieno è pieno. Concludiamo che il sistema è controllabile e pertanto ammette un controllore dead-beat. Procediamo ora con il calcolo del matrice di retroazione $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ del controllore dead-beat. Come prima cosa osserviamo che F e G possono essere partizionate come

$$F = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right], \quad G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline G_2 \end{array}\right],$$

dove $F_{22} = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ e $G_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Quindi la scelta di k_1 non influenza gli autovalori di $F + GK$ e quindi possiamo restringerci al problema di trovare una matrice $K_2 = \begin{bmatrix} k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ tale per cui $F_{22} + G_2 K_2$ abbia tutti gli autovalori in zero. Per trovare una tale K_2 possiamo ricorrere al metodo di calcolo diretto imponendo

$$\Delta_{F_{22}+G_2K_2}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{22} - G_2 K_2) \overset{!}{=} \lambda^2.$$

Svolgendo i calcoli, si arriva al seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} k_3 - 3 = 0 \\ k_3 + k_2 = 0 \end{cases},$$

che ha come soluzione $k_3 = 3$, $k_2 = -3$. Quindi la matrice $K = \begin{bmatrix} \alpha & -3 & 3 \end{bmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, è la matrice di retroazione di un controllore dead-beat.

2. Per ammettere un regolatore dead-beat, il sistema deve ammettere un controllore dead-beat dallo stato e uno stimatore dead-beat dello stato. In altri termini, il sistema deve essere sia controllabile che ricostruibile. Il sistema è controllabile, come verificato nel punto precedente, rimane quindi da verificare la ricostruibilità

del sistema. Dal punto precedente, sappiamo che l'unico autovalore non nullo di F è $\lambda_2 = -3$. Valutiamo la matrice PBH di osservabilità calcolata in questo autovalore:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che la matrice PBH presenta solo due righe linearmente indipendenti. Quindi essa non ha rango pieno e, di conseguenza, il sistema non è ricostruibile e non ammette uno stimatore dead-beat. Concludiamo pertanto che un regolatore dead-beat del sistema non esiste.

3. La funzione di trasferimento del sistema si calcola come $W(z) = H(zI - F)^{-1}G$. Possiamo semplificare il calcolo notando che le matrici F, G, H possono essere partizionate nella forma

$$F = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right], \quad G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline G_2 \end{array}\right], \quad H = \left[\begin{array}{c|c} 0 & H_2 \end{array}\right],$$

dove $F_{22} = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $G_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $H_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Da questo osservazione segue che

$$\begin{aligned}
W(z) &= H(zI - F)^{-1}G \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 0 & H_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} zI & 0 \\ \hline 0 & zI - F_{22} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline G_2 \end{array}\right], \\
&= \left[\begin{array}{c|c} 0 & H_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} z^{-1}I & 0 \\ \hline 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline G_2 \end{array}\right], \\
&= H_2(zI - F_{22})^{-1}G_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+2 & -2 \\ -1 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z(z+3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & 2 \\ 1 & z+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2(z+3)}{z(z+3)} = \frac{2}{z}.
\end{aligned}$$