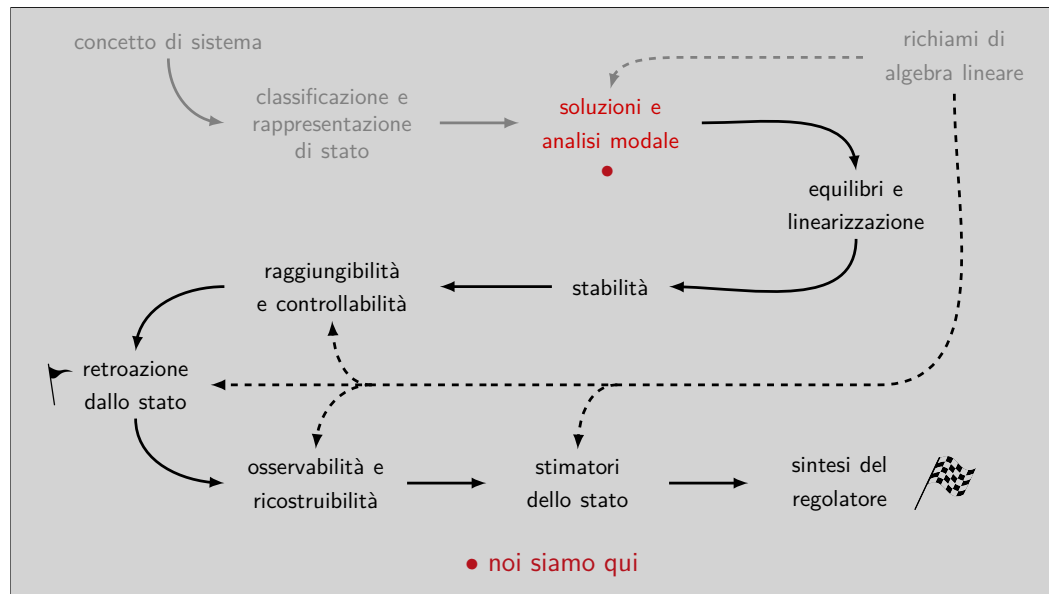# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo discreto)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

---

concetto di sistema

richiami di
algebra lineare

classificazione e
rappresentazione
di stato

soluzioni e
analisi modale

equilibri e
linearizzazione

raggiungibilità
e controllabilità

stabilità

retroazione
dallo stato

osservabilità e
ricostruibilità

stimatori
dello stato

sintesi del
regolatore

● noi siamo qui

Nella scorsa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo

    ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo

        ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo

            ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica

                ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

In questa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto

    ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto

        ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \Sigma \\ \hline x(t) \end{array}} \longrightarrow x(t)$$
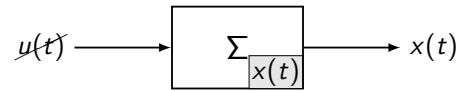
Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$x(t+1) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = F^t x_0$$

Usiamo Jordan!

1. $F = TF_J T^{-1} \implies F^t = TF_J^t T^{-1}$

2. $F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{bmatrix} \implies F_J^t = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k}^t \end{bmatrix}$

3. $J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{bmatrix} \implies J_{\lambda_i}^t = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i}^t \end{bmatrix}$

Usiamo Jordan!

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}}$ $\quad$ $\lambda_i \neq 0$ $\quad \implies J_{\lambda_i,j}^t = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\implies J_{\lambda_i,j}^t = \begin{bmatrix} \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} & \cdots & \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t \end{bmatrix}$$

Usiamo Jordan!

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}}$ $\quad$ $\lambda_i = 0$ $\quad \implies J_{\lambda_i,j}^t = N^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\implies J_{\lambda_i,j}^t = \begin{bmatrix} \delta(t) & \delta(t-1) & \delta(t-2) & \cdots & \delta(t-r_{ij}+1) \\ 0 & \delta(t) & \delta(t-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta(t) \end{bmatrix}$$

Modi elementari

$$\binom{t}{0}\lambda_i^t, \ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1}, \ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2}, \ \ldots, \ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1}$$

$$\delta(t), \ \delta(t-1), \ \delta(t-2), \ \ldots, \ \delta(t-r_{ij}+1)$$

= Modi elementari del sistema

1. $\lambda_i \neq 0$: $\binom{t}{k}\lambda_i^{t-k} \sim t^k \lambda_i^t = t^k e^{t(\ln \lambda_i)}$ ($\ln(\cdot)$ = logaritmo naturale complesso)

2. $\lambda_i = 0$: modo elementari si annullano dopo un numero finito di passi !

Non esiste una controparte modale a tempo continuo !!

Evoluzione libera

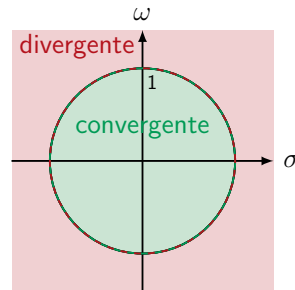$$x(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = HF^t x_0 = \sum_{i,j} t^j \lambda_i^t v_{ij}$$

= combinazione lineare dei modi elementari

Carattere dei modi elementari

modo associato a $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$

Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$
$$\textcolor{red}{F^t = 0 \text{ per } t \text{ finito se } \lambda_i = 0 \ !}$$

$$\begin{array}{l} |\lambda_i| \leq 1, \ \forall i \ \text{e} \\ \nu_i = g_i \ \text{se} \ |\lambda_i| = 1 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t \ \text{limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \ \text{limitata}$$

$$\begin{array}{l} \exists \, \lambda_i \ \text{tale che} \ |\lambda_i| > 1 \\ \text{o} \ |\lambda_i| = 1 \ \text{e} \ \nu_i > g_i \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t \ \text{non limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \ ?$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = F^t x_0, \qquad x_f(t) \;??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = HF^t x_0, \qquad y_f(t) \;??$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = HF^t G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{=x_f(t)} = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\mathcal{R}_t u_t}_{=x_f(t)} \qquad u_t \triangleq \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)} = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{H\mathcal{R}_t u_t + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$\mathcal{R}_t \triangleq \begin{bmatrix} G \mid FG \mid F^2 G \mid \cdots \mid F^{t-1} G \end{bmatrix} =$ matrice di raggiungibilità in t passi

---

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$X(z) = \underbrace{z(zI - F)^{-1} x_0}_{=X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - F)^{-1} G}_{=X_f(z)}$$

$$Y(z) = \underbrace{Hz(zI - F)^{-1} x_0}_{=Y_\ell(z)} + \underbrace{[H(zI - F)^{-1} G + J]U(z)}_{=Y_f(z)}$$

Equivalenze dominio temporale/Zeta

1. $W(z) = \mathcal{Z}[w(t)] = H(zI - F)^{-1}G + J = $ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{Z}[F^t] = z(zI - F)^{-1} = $ metodo alternativo per calcolare F^t !!

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, \; G_J = T^{-1}G, \; H_J = HT, \; J_J = J)$$

$$W(z) = W_J(z) = H_J(zI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$
F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k}
\end{array}\right], \quad
G_J = \left[\begin{array}{c}
G_{\lambda_1,1} \\
\hline
G_{\lambda_1,2} \\
\hline
\vdots \\
\hline
G_{\lambda_k,\ell_k}
\end{array}\right], \quad
H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k}
\end{array}\right]
$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$
F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k}
\end{array}\right], \quad
G_J = \left[\begin{array}{c}
G_{\lambda_1,1} \\
\hline
G_{\lambda_1,2} \\
\hline
\vdots \\
\hline
G_{\lambda_k,\ell_k}
\end{array}\right], \quad
H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k}
\end{array}\right]
$$

$$
W(z) = H_{\lambda_1,1}(zI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(zI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,\ell_k}(zI - J_{\lambda_k,\ell_k})^{-1}G_{\lambda_k,\ell_k} + J
$$

$$
= W_{\lambda_1,1}(z) + W_{\lambda_1,2}(z) + \cdots + W_{\lambda_k,\ell_k}(z) + J
$$

Struttura della matrice di trasferimento

miniblocco $J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(z) = \dfrac{A_1}{z - \lambda_i} + \dfrac{A_2}{(z - \lambda_i)^2} + \cdots + \dfrac{A_{r_{ij}}}{(z - \lambda_i)^{r_{ij}}}$

$$y_f(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(z)U(z) + JU(z)\right]$$