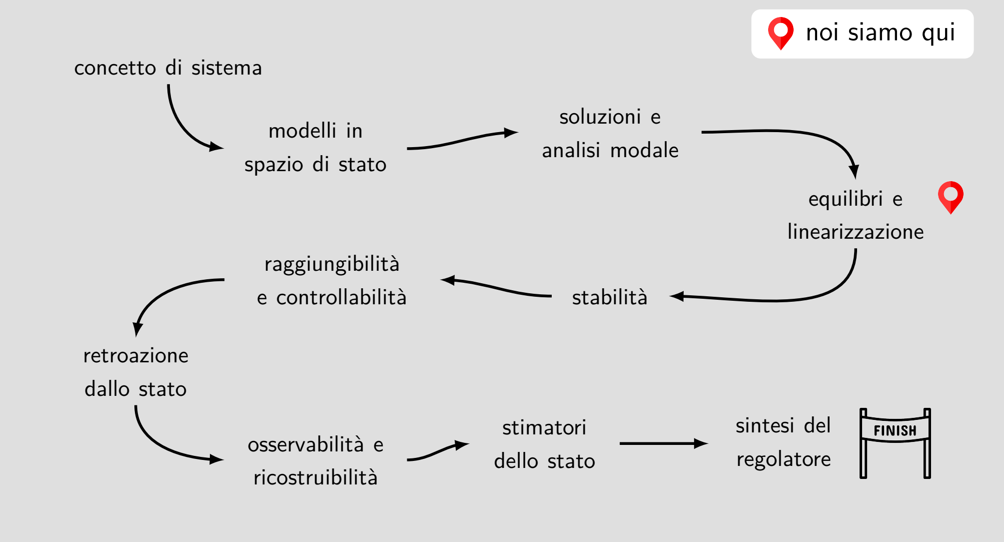
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Traiettorie di stato e ritratto di fase

$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$

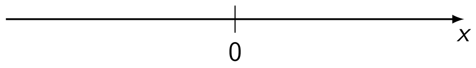
Ritratto di fase del sistema = insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 1$

$\dot{x}(t) = fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$f \in \mathbb{R}$,



$x(t) = e^{ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = f^t x_0$ (t.d.)

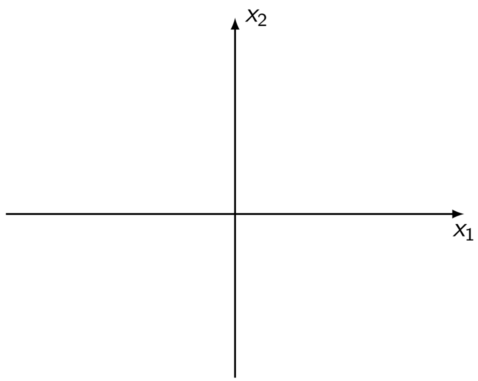
Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 > \lambda_2 > 0$ o $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2



$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

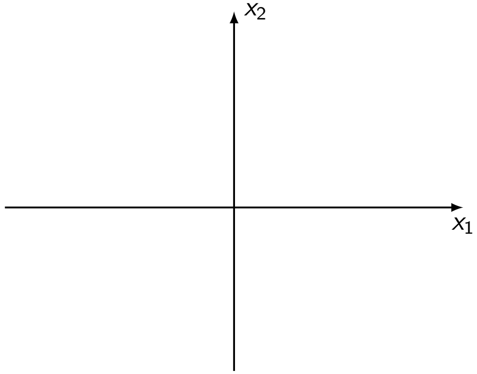
$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

$\dot{x}(t) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

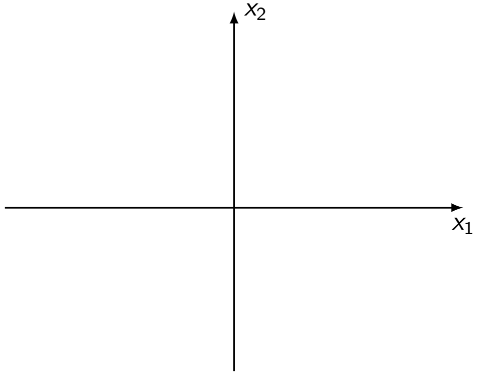
$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complessi coniugati)

$\dot{x}(t) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complessi coniugati)

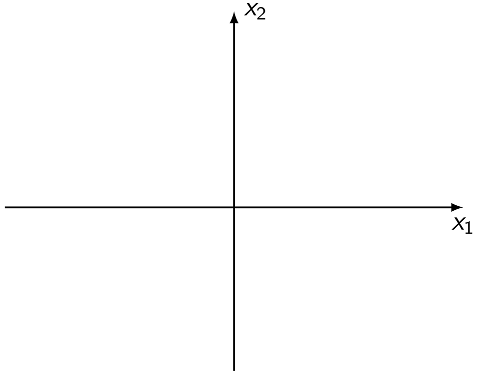
$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq 0,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2$

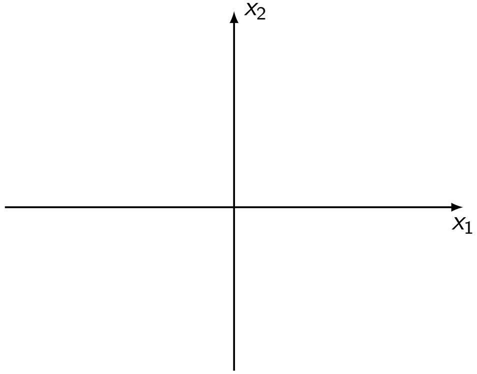
$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

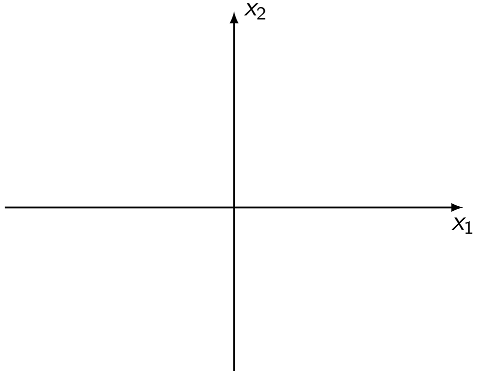


Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq 0,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

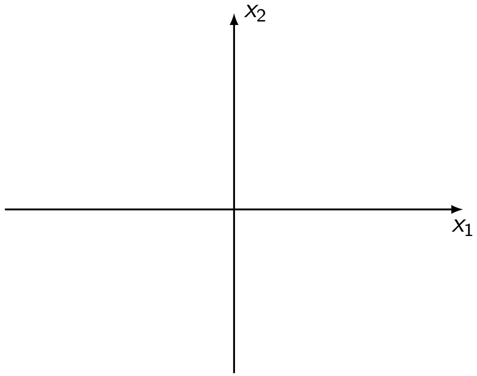
$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq 0\ (= 0),\ \lambda_2 = 0\ (\neq 0)$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

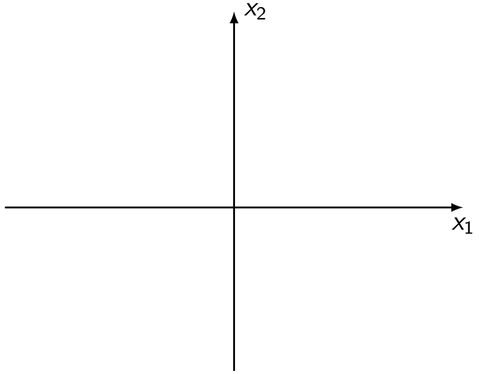
$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\dot{x}(t) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n generico

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$\dot{x}(t) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) $x(t) = e^{Ft}x_0$

$x(t+1) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) $x(t) = F^t x_0$

Fatto generale: Una traiettoria $x(t)$ giace su una retta passante per l'origine se e solo se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di F relativo ad un autovalore reale.

Punti di equilibrio

$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) $\bar{x}$ equilibrio $\iff f(\bar{x}) = 0$

$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) $\bar{x}$ equilibrio $\iff \bar{x} = f(\bar{x})$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Caso lineare: $\bar{x}$ equilibrio $\iff$ $\bar{x} \in \ker F$ (t.c.)
$\bar{x} \in \ker(F - I)$ (t.d.)

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \implies$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \implies$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \implies$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \implies$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$\boxed{u(t) \text{ costante},\ u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$

caso lineare

$\bar{x}$ equilibrio $\iff$

$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$	$F\bar{x} = -G\bar{u}$	(t.c.)
$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$	$(F - I)\bar{x} = -G\bar{u}$	(t.d.)

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u},\ \ \bar{u} \neq 0$ $\implies$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$ $\implies$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$ $\implies$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

Stabilità semplice

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Stabilità asintotica

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si ha stabilità semplice/asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

3. Per sistemi lineari stabilità locale = stabilità globale. Inoltre:

$$\text{stabilità semplice} \iff \begin{array}{ll} e^{Ft} \text{ limitata} & \text{(t.c.)} \\ F^t \text{ limitata} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

$$\text{stabilità asintotica} \iff \begin{array}{ll} e^{Ft} \text{ convergente} & \text{(t.c.)} \\ F^t \text{ convergente} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots \\ &\approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\, z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Jacobiano di f valutato in x

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \ldots, \qquad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{z} = J_f(\bar{x})\, z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \begin{matrix} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{matrix} \dot{x} = x \\ \dot{z} = -z,\ z \triangleq x - \pi \end{matrix}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$