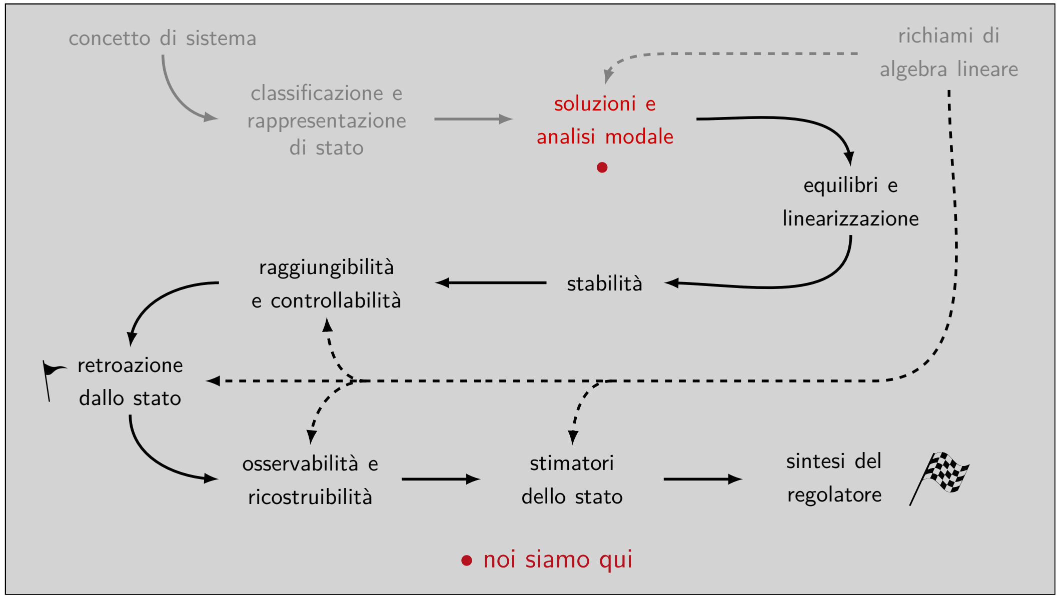
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



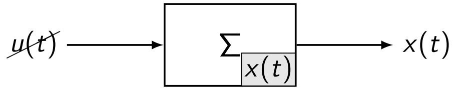
Nella scorsa lezione

- ▷ Forma canonica di Jordan: costruzione
- ▷ Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- ▷ Forma canonica di Jordan: osservazioni
- ▷ Polinomi annullatori e polinomio minimo

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0$$

Usiamo Jordan!

1. $F = TF_J T^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_J t}T^{-1}$

2. $F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \implies e^{F_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array}\right]$

3. $J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{array}\right] \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_i,\ell_i} t} \end{array}\right]$

Usiamo Jordan!

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in $J_{\lambda_i,j}$
= h_i = molteplicità di λ_i nel pol. minimo

2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)
quando F ha un unico miniblocco per ogni autovalore (F ciclica)

3. F diagonalizzabile $\Longrightarrow$ modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

4. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \bar{\lambda}$ autovalore $\Rightarrow$ modi reali $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

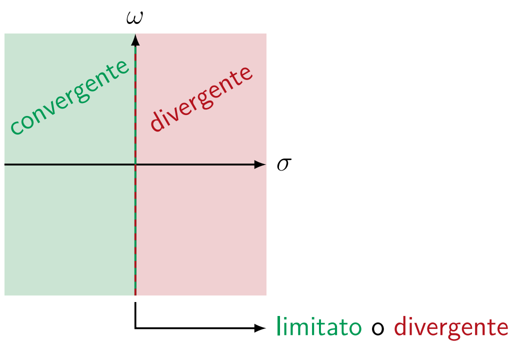
$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

= combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!

Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{h_i} e^{\lambda_i t} = t^{h_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{h_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$	$\Longrightarrow$	$e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \Longrightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$
$\Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $\Re[\lambda_i] = 0$	$\Longrightarrow$	e^{Ft} limitata $\Rightarrow$ $y(t) = He^{Ft}x_0$ limitata
$\exists\, \lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$ o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $\nu_i > g_i$	$\Longrightarrow$	e^{Ft} non limitata $\Rightarrow$ $y(t) = He^{Ft}x_0$?

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t) \ ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t) \ ??$$

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$X(s) = \underbrace{(sI-F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sI-F)^{-1}G}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI-F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI-F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq Tx$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=Tx} (F' = T^{-1}FT,\, G' = T^{-1}G,\, H' = HT,\, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) \text{ !!}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=Tx} (F_J = T^{-1}FT,\, G_J = T^{-1}G,\, H_J = HT,\, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right]$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} W(s) &= H_{\lambda_1,1}(sI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(sI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,\ell_k}(sI - J_{\lambda_k,\ell_k})^{-1}G_{\lambda_k,\ell_k} + J \\ &= W_{\lambda_1,1}(s) + W_{\lambda_1,2}(s) + \cdots + W_{\lambda_k,\ell_k}(s) + J \end{aligned}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s-\lambda_i} + \frac{A_2}{(s-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s)U(s) + JU(s)\right]$$

Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-F)^{-1}\right]$$

Esempio: $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

Condizioni "pratiche" su ciclicità e polinomio minimo

1. F ciclica $\iff$ non ci sono semplificazioni tra num. e den. in $\dfrac{\mathrm{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$

2. $\Psi_F(s) =$ polinomio a den. in $\dfrac{\mathrm{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$, dopo tutte le possibili semplificazioni