

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

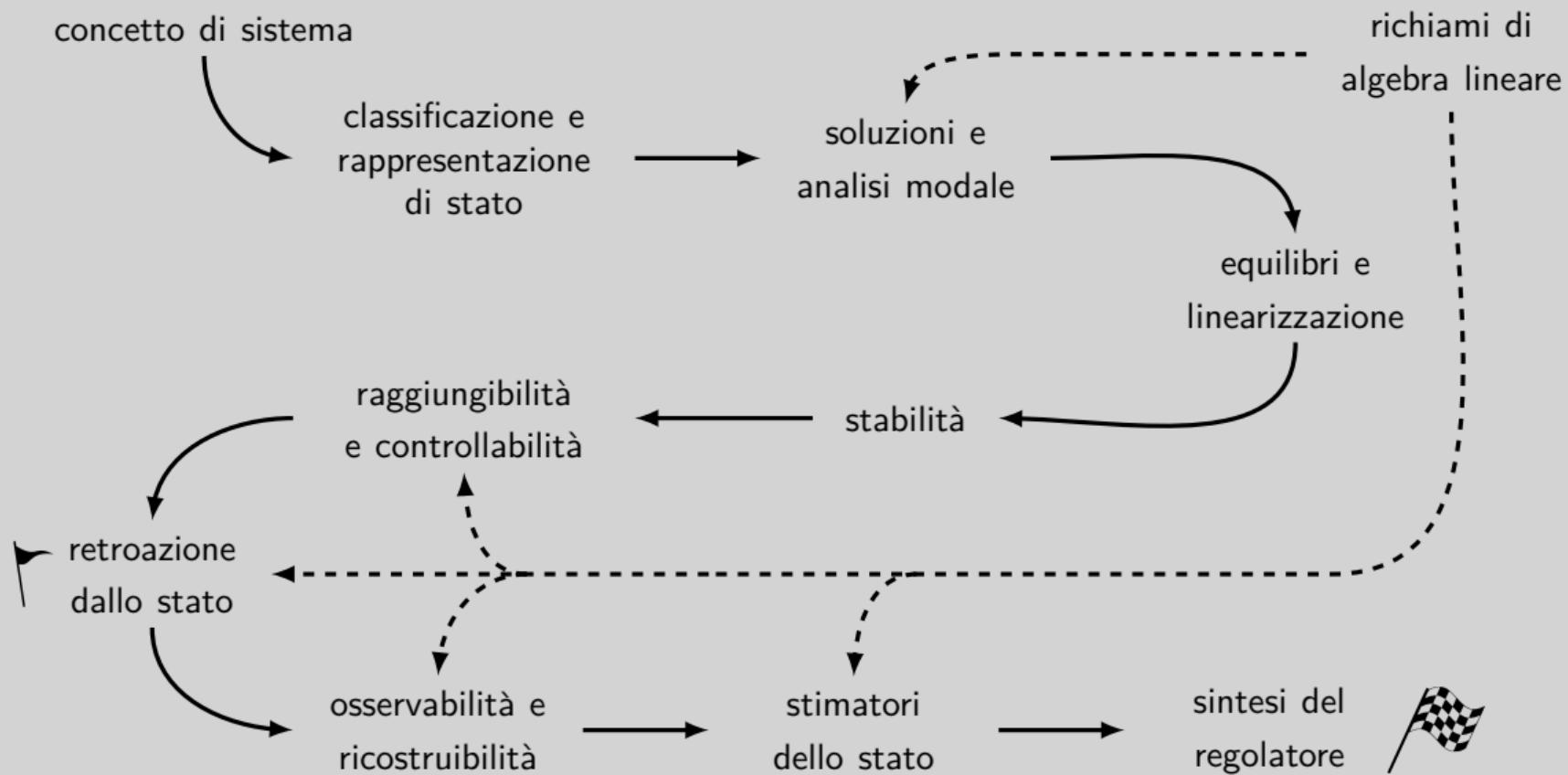
## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13 & 14: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo discreto

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



concetto di sistema

classificazione e  
rappresentazione  
di stato

soluzioni e  
analisi modale

richiami di  
algebra lineare

raggiungibilità  
e controllabilità

stabilità

equilibri e  
linearizzazione

retroazione  
dallo stato

osservabilità e  
ricostruibilità

stimatori  
dello stato

sintesi del  
regolatore

• noi siamo qui

## In questa lezione

▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali \*

▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d. \*

▷ Calcolo dell'ingresso di controllo \*

▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman \*

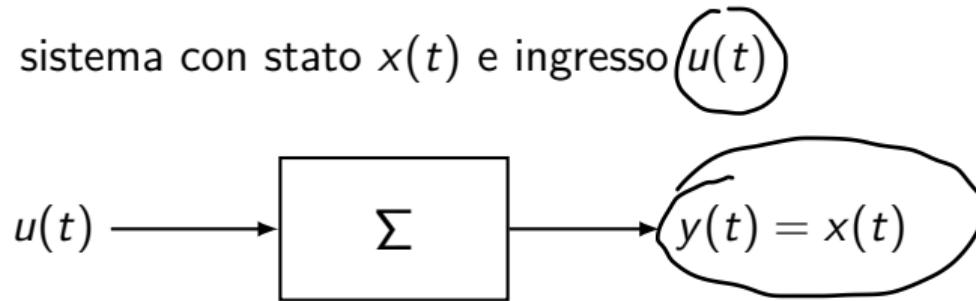
▷ Test PBH di raggiungibilità \*

▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d. \*

# In questa lezione

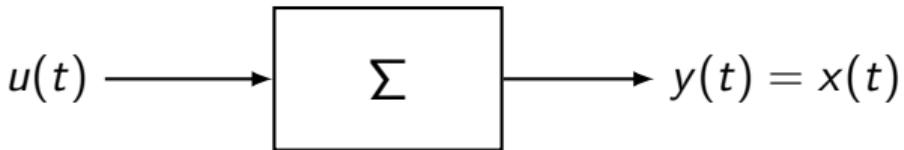
- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
  - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
    - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
  - ▷ Test PBH di raggiungibilità
  - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Raggiungibilità e controllabilità



# Raggiungibilità e controllabilità

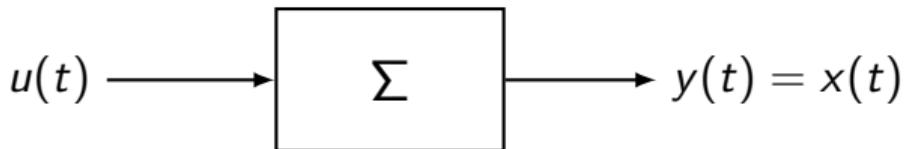
sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$



**Raggiungibilità** = possibilità di raggiungere un **qualsiasi stato** desiderato  $\bar{x}$  a partire da uno stato  $x_0$  **fissato** agendo su  $u(t)$

# Raggiungibilità e controllabilità

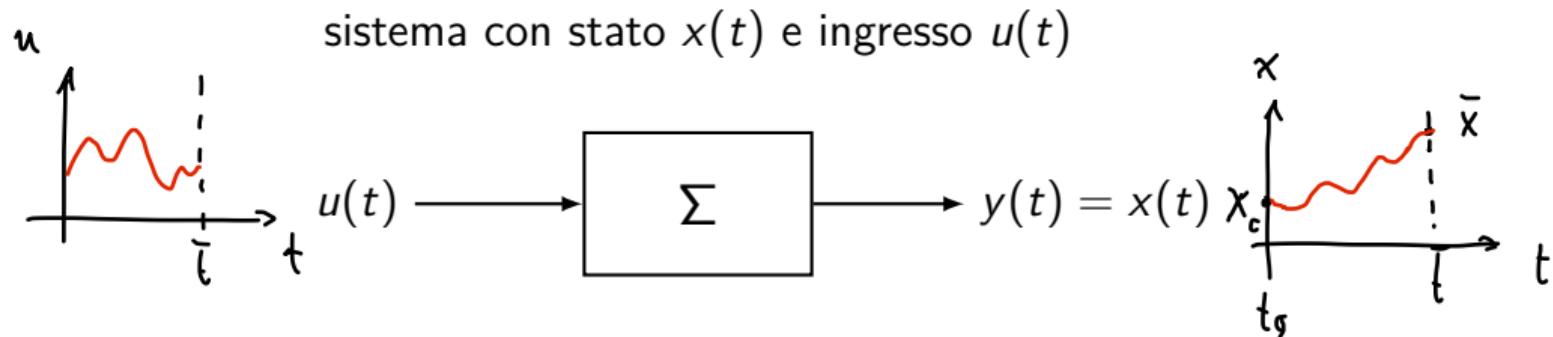
sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$



**Raggiungibilità** = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato  $\bar{x}$  a partire da uno stato  $x_0$  **fissato** agendo su  $u(t)$

**Controllabilità** = possibilità di raggiungere uno stato desiderato  $x_0$  **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato  $\bar{x}$  agendo su  $u(t)$

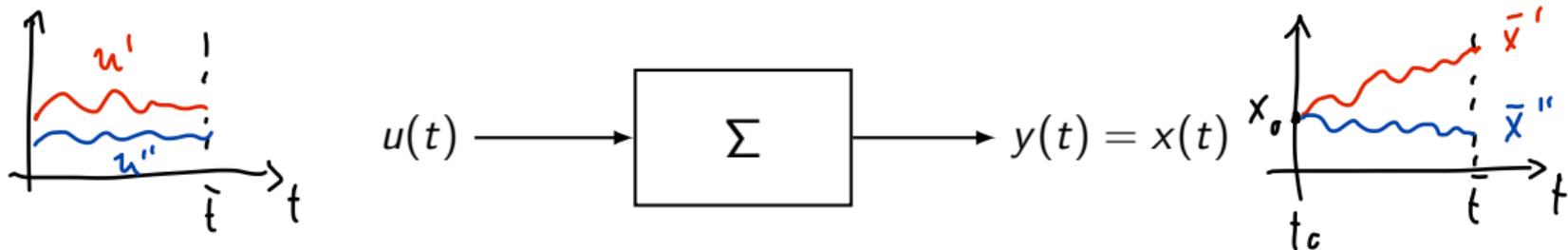
# Stati e spazi raggiungibili



**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice raggiungibile dallo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(\bar{t}) = \bar{x}$ .

# Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

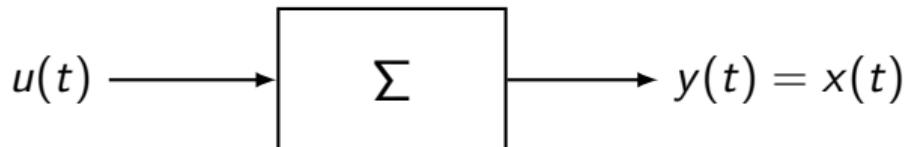


**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice raggiungibile dallo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(\bar{t}) = \bar{x}$ .

**Definizione:** L'insieme  $X_R(\bar{t})$  di tutti gli stati raggiungibili dallo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  è detto spazio raggiungibile al tempo  $\bar{t}$ .

# Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$



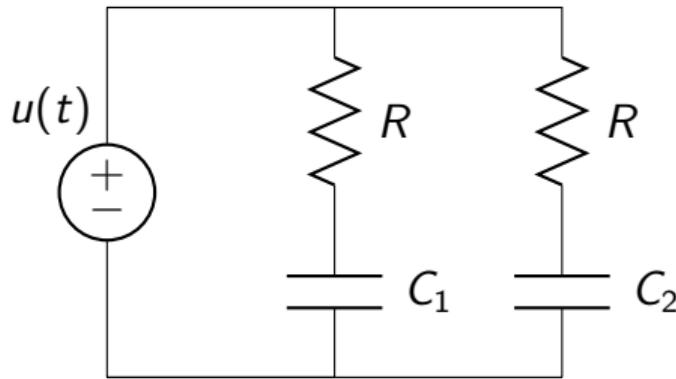
**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice raggiungibile dallo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(\bar{t}) = \bar{x}$ .

**Definizione:** L'insieme  $X_R(\bar{t})$  di tutti gli stati raggiungibili dallo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  è detto spazio raggiungibile al tempo  $\bar{t}$ .

(tipicamente:  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ )

# Esempio introduttivo

extra



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

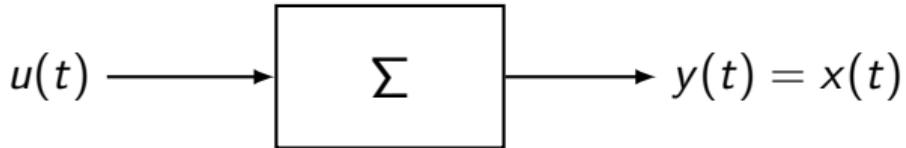
Se  $C_1 = C_2$  e  $x_1(0) = x_2(0)$ :

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \forall u(t), \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}, \forall t \geq 0$$

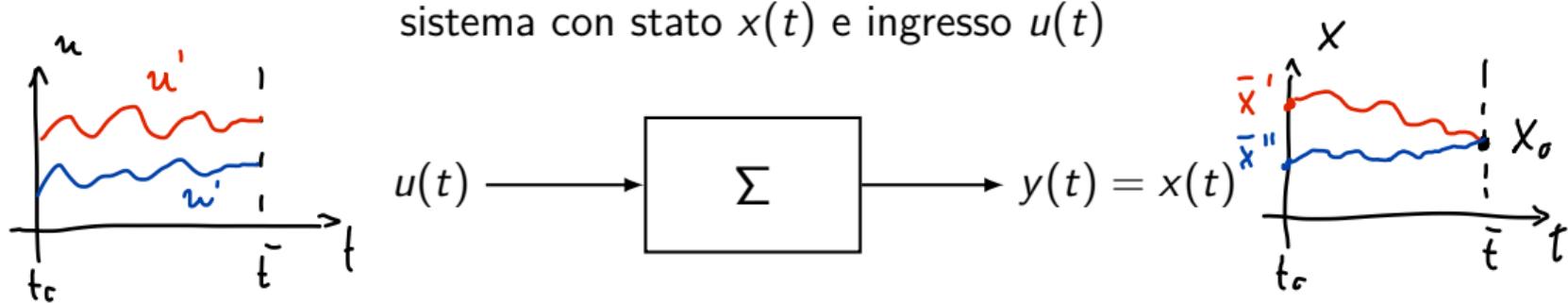
# Stati e spazi controllabili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$



**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice controllabile allo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = \bar{x}$  e  $x(\bar{t}) = x_0$ .

# Stati e spazi controllabili

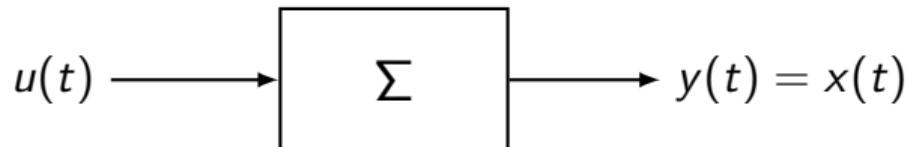


**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice controllabile allo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = \bar{x}$  e  $x(\bar{t}) = x_0$ .

**Definizione:** L'insieme  $X_C(\bar{t})$  di tutti gli stati controllabili allo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  è detto **spazio controllabile al tempo  $\bar{t}$** .

# Stati e spazi controllabili

sistema con stato  $x(t)$  e ingresso  $u(t)$

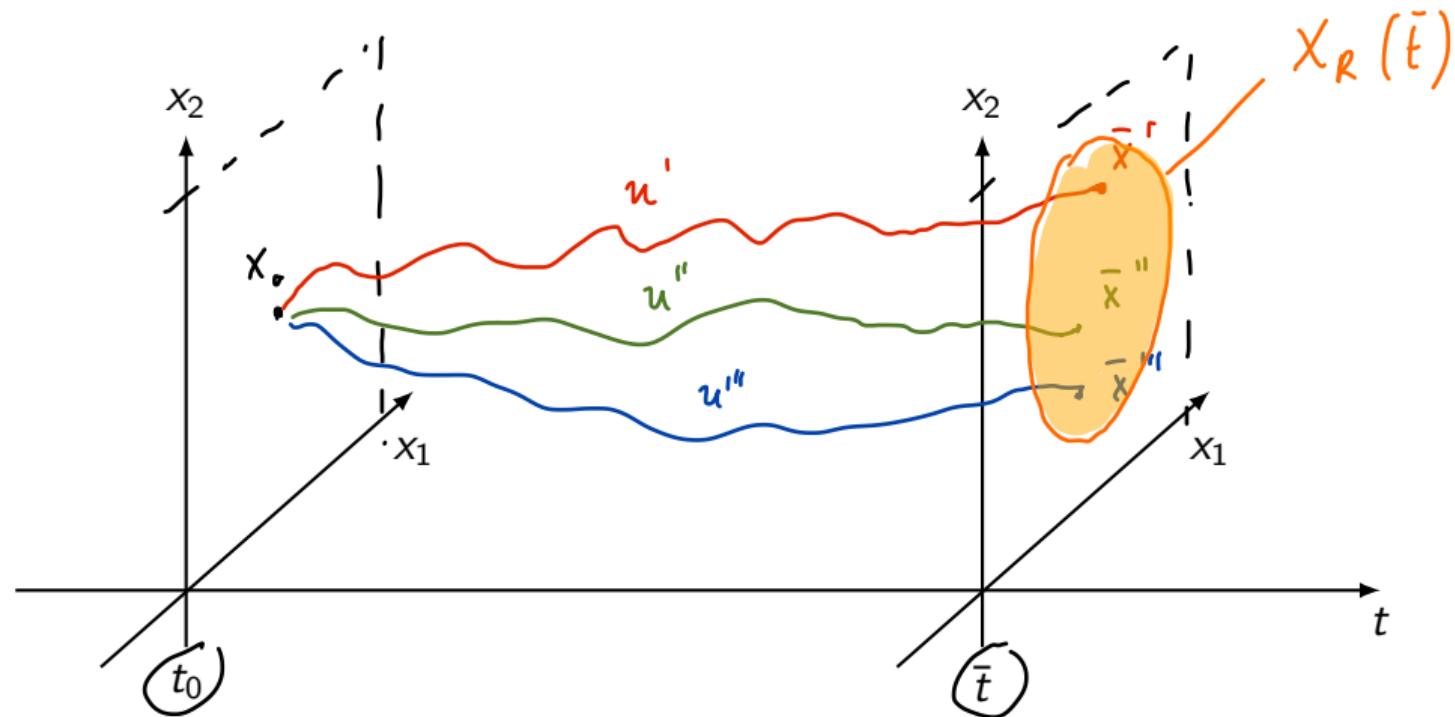


**Definizione:** Uno stato  $\bar{x}$  si dice controllabile allo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  se esiste un ingresso  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ , tale che  $x(t_0) = \bar{x}$  e  $x(\bar{t}) = x_0$ .

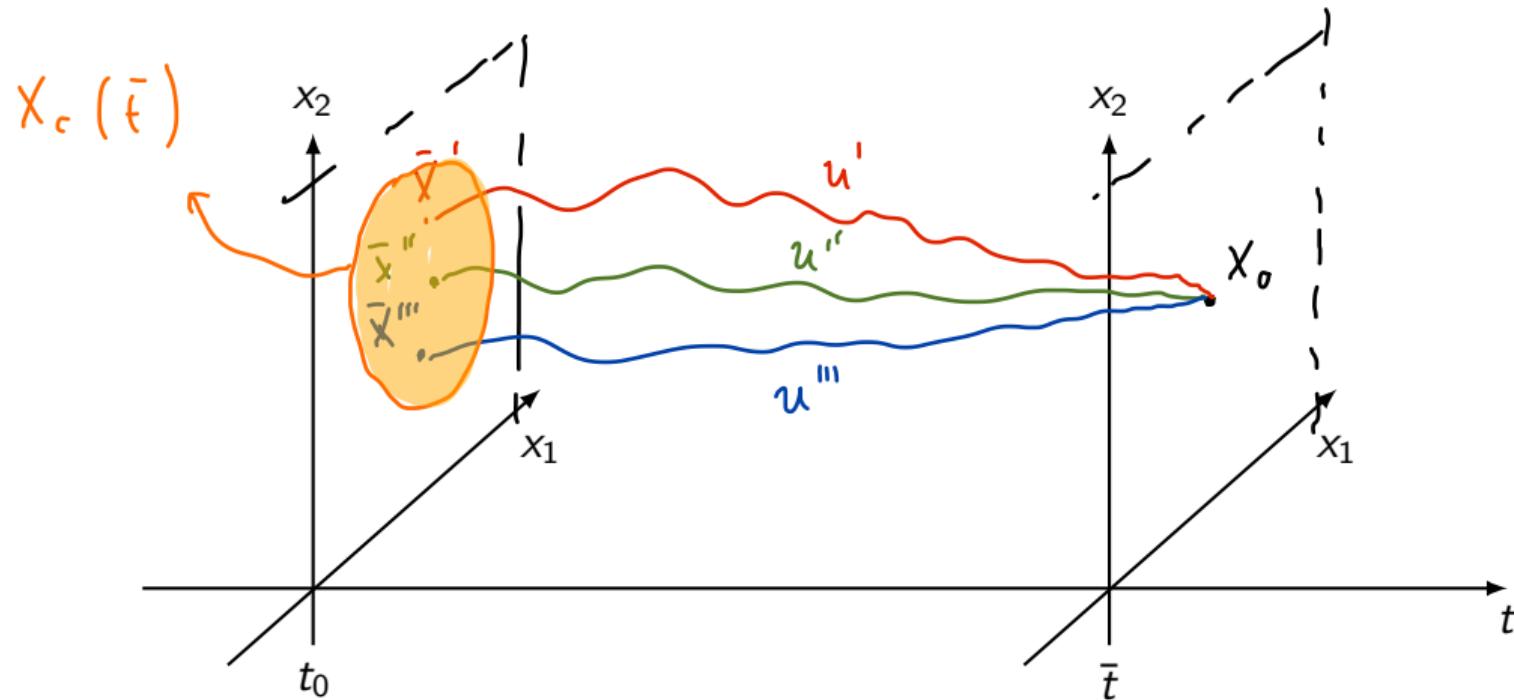
**Definizione:** L'insieme  $X_C(\bar{t})$  di tutti gli stati controllabili allo stato  $x_0$  al tempo  $\bar{t}$  è detto spazio controllabile al tempo  $\bar{t}$ .

(tipicamente:  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ )

## Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



## Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica

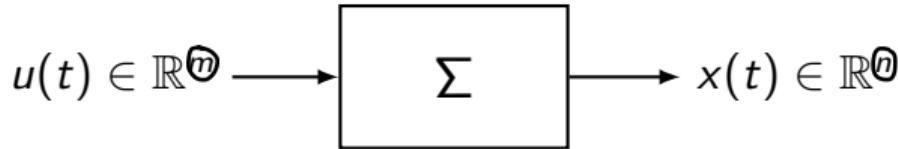


# In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
  - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
    - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
    - ▷ Test PBH di raggiungibilità
  - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\underbrace{x(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}}_{\text{discrete state transition}} \quad x(0) = x_0$$

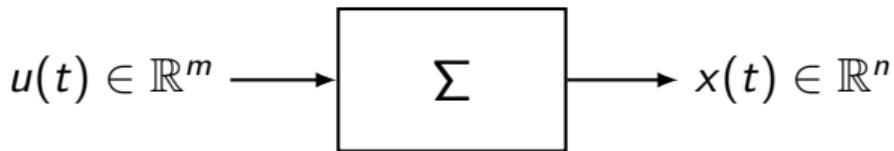


$$x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k)$$

↓                      ⌊ ⌋  
ev.                    ev.  
libera                forzata

# Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

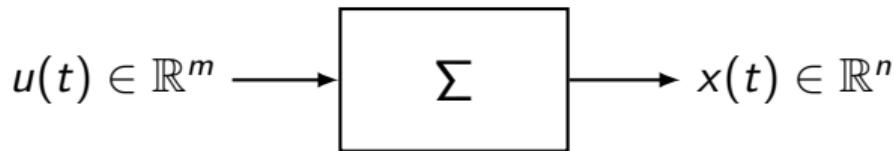


$$x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{t-1}G \end{bmatrix}}_{\text{matrice di raggiungibilità in } t \text{ passi}}$$
$$u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

# Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \underline{x(0) = 0}$$



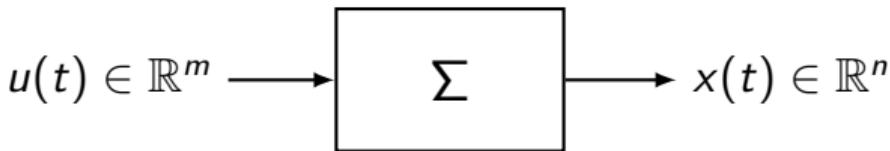
$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \quad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in  $t$  passi

# Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = 0$$



$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati  $\bar{x}$  raggiungibili al tempo  $t$  (= in  $t$  passi) a partire da  $x(0) = 0$ ?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ?

# Spazio raggiungibile

extra

$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{Im}(\mathcal{R}_t)$

$$x = R_t u_t$$

$$\text{Im}(R_t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u_t \in \mathbb{R}^{m_t} \text{ t.c. } x = R_t u_t \right\}$$

# Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{Im}(\mathcal{R}_t)$$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

# Spazio raggiungibile

extra

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{Im}(\mathcal{R}_t)$$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

*i = indice di raggiungibilità*

*$X_R \triangleq X_R(i) = (\text{massimo}) \text{ spazio raggiungibile}$*

# Criterio di raggiungibilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se  $X_R = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in  $t$  passi se  $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ ,  
con  $t$  indice di raggiungibilità.

# Criterio di raggiungibilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se  $X_R = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in  $t$  passi se  $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ , con  $t$  indice di raggiungibilità.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n =$  matrice di raggiungibilità del sistema

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

# Criterio di raggiungibilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se  $X_R = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in  $t$  passi se  $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ , con  $t$  indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

$$m = 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$$

$$m > 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(AA^\top)$$

# Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

# Esempi

extra

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile}$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{raggiungibile (in 2 passi)}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \Rightarrow \text{raggiungibile (in 2 passi)}$$

# Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{G} = T^{-1}G$$

# Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \dots & \bar{F}^{n-1}\bar{G} \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{R}}) = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$  cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

# Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \dots & \bar{F}^{n-1}\bar{G} \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{R}}) = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies$  cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

Inoltre, se  $\Sigma$  raggiungibile:  $\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top)^{-1}$

# In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
    - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
    - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
    - ▷ Test PBH di raggiungibilità
  - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se  $\Sigma$  è raggiungibile in  $t$  passi, come costruire un ingresso  $u_t$  per raggiungere un qualsiasi stato  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $t$  passi?

# Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se  $\Sigma$  è raggiungibile in  $t$  passi, come costruire un ingresso  $u_t$  per raggiungere un qualsiasi stato  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $t$  passi?

Caso  $x_0 = 0$ :    1.  $\bar{x} = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$

$$2. \quad u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t, \quad \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$$

$$3. \quad u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$$

# Calcolo dell'ingresso di controllo

extra

Se  $\Sigma$  è raggiungibile in  $t$  passi, come costruire un ingresso  $u_t$  per raggiungere un qualsiasi stato  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $t$  passi?

Caso  $x_0 = 0$ :    1.  $\bar{x} = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$

2.  $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t, \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$

3.  $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$

Caso  $x_0 \neq 0$ :     $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (\bar{x} - F^t x_0)$

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso  $u_t$  generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{ u'_t = u_t + \bar{u}, \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t) \}.$$

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso  $u_t$  generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{ u'_t = u_t + \bar{u}, \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t) \}.$$

2. Ingresso  $u_t$  = ingresso a **minima energia**:

$$u_t = \arg \min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2$$

# Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso  $u_t$  generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u}, \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}.$$

2. Ingresso  $u_t$  = ingresso a **minima energia**:

$$u_t = \arg \min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2$$

3. Gramiano di raggiungibilità del sistema in  $t$  passi:

$$\mathcal{W}_t = \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1} B B^\top (A^\top)^{t-1}.$$

Autovalori di  $\mathcal{W}_t$  quantificano l'energia richiesta per controllare il sistema.

# Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ingressi  $u'(t)$  per raggiungere  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  da  $x_0 = 0$  in 2 passi?

# Esempi

extra

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ingressi  $u'(t)$  per raggiungere  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  da  $x_0 = 0$  in 2 passi?

---

$$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ min. energia}$$

# In questa lezione

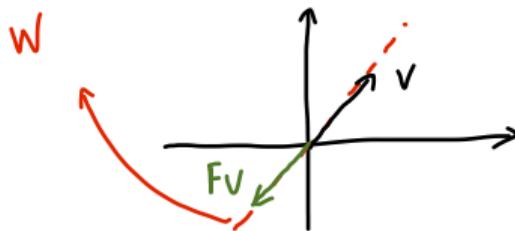
- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
  - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
    - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
  - ▷ Test PBH di raggiungibilità
  - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Proprietà importante

extra

**Definizione:** Data una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uno spazio vettoriale  $W$  si dice  $F$ -invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$



**Proprietà:** Lo spazio raggiungibile  $X_R$  è  $F$ -invariante e contiene  $\text{Im}(G)$ .

# Forma canonica di Kalman

$\Sigma$  non raggiungibile  $\implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da “separare” la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

# Forma canonica di Kalman

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da “separare” la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

$$T = [v_1 \ \cdots \ v_k \ \tilde{v}_1 \ \cdots \ \tilde{v}_{n-k}], \quad X_R = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

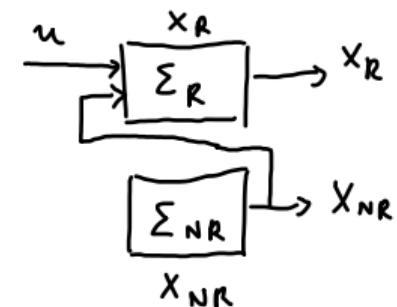
$$\forall v \in X_R, w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{=0} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_w, \quad \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

$$\text{Im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G}, \quad G_2 = 0$$

## Forma canonica di Kalman (di raggiungibilità)

$$x \in \mathbb{R}^k \quad \left\{ \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$



$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$  sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$ : sottosistema non raggiungibile

# Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} G_K & F_K G_K & \cdots & F_K^{n-1} G_K \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{R}_K = \underbrace{T^{-1}\mathcal{R}}_{=} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \}^K \}^{n-k}$$

$$\text{rank } (\mathcal{R}_K) = \text{rank } (\mathcal{R})$$

$$\text{rank } \mathcal{R}_K = \text{rank } [G_1 \ F_{11}G_1 \ \cdots \ F_{11}^{n-1}G_1] \stackrel{\substack{\rightarrow k \\ \text{circled } n-1}}{=} k$$

## Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}_K) = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix} \right) = k$$

# Esempi

extra

$$1. \quad F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Esempi

1.  $F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$  sistema in forma di Kalman con  
 $F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.  $F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$  sistema **non** in forma di Kalman

# Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = [H_1 \quad H_2]$$

# Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$  = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

# In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
  - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
    - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
  - ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

extra

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$[zI - F \quad G]$$

ha rango pieno per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di  $z$  che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ .

# Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

extra

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad F \rightarrow \begin{bmatrix} F_{11} & * \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$[zI - F \quad G]$$

ha rango pieno per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di  $z$  che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ .

**N.B.** La matrice PBH può essere valutata solo per gli  $z$  che sono autovalori di  $F$ !

## Test di Jordan

$$\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\ell \end{bmatrix} \quad G_J = T^{-1} G$$

$\uparrow$        $\uparrow$

$$\Sigma : z(t+1) = (F_J z(t) + G_J u(t), z(0) = z_0$$

**Corollario:** Il sistema  $\Sigma$  (in forma di Jordan) è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore  $\lambda_i$  di  $F_J$ , le righe di  $G_J$  in posizione corrispondente alle ultime righe dei miniblocchi di Jordan relativi a  $\lambda_i$  sono linearmente indipendenti.

$$F_J = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right]$$

$$G_J = \left[ \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{array} \right] \quad g_2 = [1 \ 0] \quad g_4 = [0 \ 1] \Rightarrow \Sigma \text{ ragg.} \\ g_2 = [1 \ 1] \quad g_4 = [2 \ 2] \Rightarrow \Sigma \text{ non e' ragg.}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} z & -F_J | G_J \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 \end{array} \right]$$

$\downarrow$   
 $= 1$

# Esempi

extra

1.  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  } sono lin. indip  $\Rightarrow \Sigma$  raggiungibile

2.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  } non sono lin. indip

3.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

# Esempi

$$1. \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{raggiungibile}$$

$$2. \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile}$$

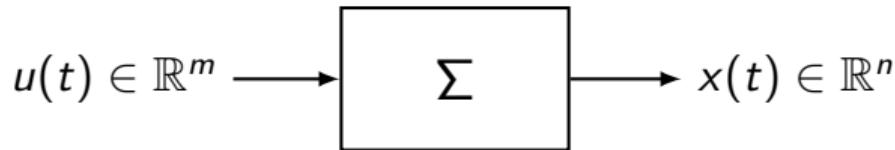
$$3. \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile}$$

# In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
  - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
  - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
    - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
    - ▷ Test PBH di raggiungibilità
  - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

## Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = \bar{x}$$

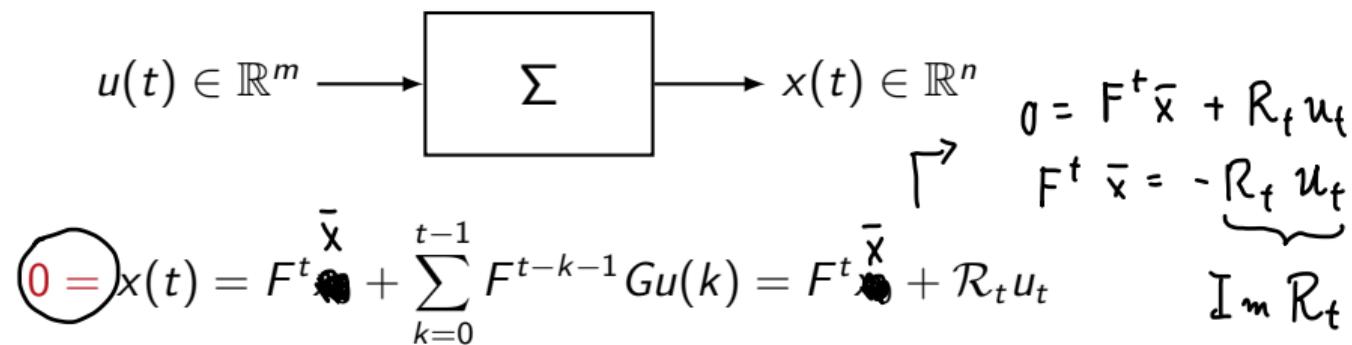


$$\textcircled{1} \quad x_0 = x(t) = F^t \bar{x} + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t \bar{x} + \mathcal{R}_t u_t$$

↓  
 e.v.  
 libera      e.v.  
 fortata

# Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = \bar{x}$$



Insieme di stati  $\bar{x}$  controllabili al tempo  $t$  (= in  $t$  passi) allo stato  $x(t) = 0$ ?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ?

# Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{Im}(\mathcal{R}_t)\}$$

**Teorema:** Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$i$  = indice di controllabilità

$X_C \triangleq X_C(i)$  = (massimo) spazio controllabile

# Criterio di controllabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile se  $X_C = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile in  $t$  passi se  $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ ,  
con  $t$  indice di controllabilità.

# Criterio di controllabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile se  $X_C = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile in  $t$  passi se  $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ , con  $t$  indice di controllabilità.

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{Im}(F^n) \subseteq \text{Im}(\mathcal{R}) = X_R$$

# Criterio di controllabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile se  $X_C = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile in  $t$  passi se  $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ , con  $t$  indice di controllabilità.

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{Im}(F^n) \subseteq \text{Im}(\mathcal{R}) = X_R$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

# Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

# Esempi

extra

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile } \forall f_1, f_2 \\ \text{ma controllabile se } f_1 = 0$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \text{raggiungibile e quindi} \\ \text{controllabile}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile} \\ \text{ma controllabile (in 2 passi)}$$

# Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$$

1.  $\Sigma$  controllabile  $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^{\bar{t}} = 0 \iff$  autovalori di  $F_{22}$  tutti nulli
2.  $X_R \subseteq X_C$  e  $X_R = X_C$  se  $F_{22}$  invertibile
3.  $\Sigma$  **reversibile** ( $F$  invertibile)  $\implies F_{22}$  invertibile  $\implies X_R = X_C$

# Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ .

# Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ .

**N.B.** La matrice PBH può essere valutata solo per gli  $z \neq 0$  che sono autovalori di  $F$ !

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13 & 14: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo discreto

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

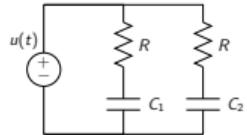
A.A. 2019-2020

✉ [baggio@dei.unipd.it](mailto:baggio@dei.unipd.it)

🌐 [baggiogi.github.io](https://baggiogi.github.io)

## Esempio introduttivo

back



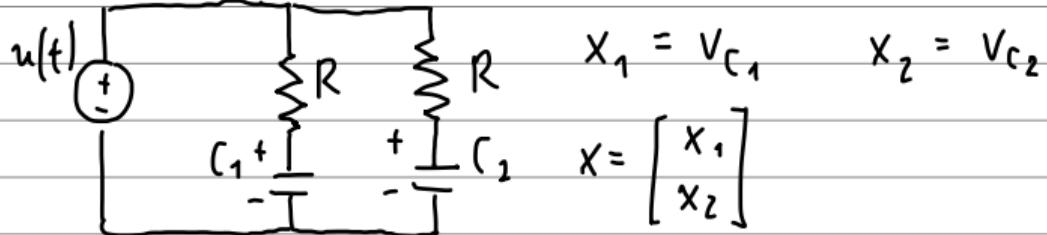
$$x_1(t) = v_{C_1}(t), x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } C_1 = C_2 \text{ e } x_1(0) = x_2(0): \\ \Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \forall u(t), \forall t \geq 0 \\ \Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Giacomo Biggio

IMC-Tesi-1820: Lec. 13 & 14

November 11-12, 2019 7 / 54



$$\dot{x}_1 = \dot{v}_{C_1} = \frac{1}{C_1} i_{C_1} = \frac{1}{C_1} i_R = \frac{1}{C_1} \left( \frac{u - v_{C_1}}{R} \right) = \frac{1}{RC_1} (u - x_1)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{v}_{C_2} = \frac{1}{RC_2} (u - x_2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_F x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_G u$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{Rc_1}t} x_{0,1} \\ e^{-\frac{1}{Rc_2}t} x_{0,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\frac{1}{Rc_1}(t-\tau)} \frac{1}{Rc_1} u(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{-\frac{1}{Rc_2}(t-\tau)} \frac{1}{Rc_2} u(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2, \quad x_{o,1} = x_{o,2}$$

$$x_1(t) = x_2(t)$$

$$X_R(t) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1(t) = x_2(t) \right\} \quad t \geq 0$$

$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{Im}(\mathcal{R}_t)$

**Teorema:** Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$1) \quad X_R(k) \subseteq X_R(k+1) \quad \forall k$$

$$X_R(k) = \text{Im } R_k = \text{Im} \left[ G \ F G \ F^2 G \ \cdots \ F^{k-1} G \right]$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \quad \underset{|}{=} \text{span} \left\{ g_1, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, \dots, F^{k-1}g_1, \dots, F^{k-1}g_m \right\}$$

$$X_R(k+1) = \text{Im } R_{k+1} = \text{Im} \left[ G \ F G \ F^2 G \ \cdots \ F^k G \right]$$

$$\underset{|}{=} \text{span} \left\{ g_1, \dots, g_m, \dots, F^{k-1}g_1, \dots, F^{k-1}g_m, F^k g_1, \dots, F^k g_m \right\}$$

$$\Rightarrow X_R(k) \subseteq X_R(k+1)$$

$$2) \exists i : X_R(i) = X_R(i+1) = X_R(i+2) = \dots$$

$$\bullet X_R(n) = X_R(n+1)$$

$$X_R(n) = \text{Im } R_n = \text{Im} [G \quad FG \cdots F^{n-1} G]$$

$$= \underset{|}{\text{span}} \left\{ g_1, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, \dots, F^{n-1}g_1, \dots, F^{n-1}g_m \right\}$$

$$X_R(n+1) = \text{Im } R_{n+1} = \text{Im} [G \quad FG \cdots F^n G]$$

$$= \text{span} \left\{ g_1, \dots, g_m, \dots, F^{n-1}g_1, \dots, F^{n-1}g_m, \underbrace{F^n g_1, \dots, F^n g_m}_{\dots} \right\}$$

Teorema di Cayley-Hamilton:

$$\Delta_F(F) = 0 \Rightarrow F^n + \alpha_{n-1} F^{n-1} + \alpha_{n-2} F^{n-2} + \dots + \alpha_1 F + \alpha_0 I = 0$$

$$F^n = -\alpha_{n-1} F^{n-1} - \alpha_{n-2} F^{n-2} - \dots - \alpha_0 I$$

$$F^n g_i \in \text{span} \left\{ g_1, \dots, g_m, Fg_1, \dots, Fg_m, F^{n-1}g_1, \dots, F^{n-1}g_m \right\}$$

$$X_R(n+1) = X_R(n)$$

$\exists i : X_R(i) = \underbrace{X_R(i+1)}_{\text{da dim.}} = \underbrace{X_R(i+2)}_{\text{da dim.}} = \dots$

$$X_R(i+1) = \text{Im } R_{i+1} = \text{Im } [G \ FG \ \dots \ F^i G]$$

$$X_R(i+2) = \text{Im } R_{i+2} = \text{Im } [G \ FG \ \dots \ F^i G \ F^{i+1} G]$$

$$\text{Im}(F^{i+1}G) \subseteq \text{Im } R_{i+1} = X_R(i+1)$$

$$G = g \in \mathbb{R}^n \quad (n=1)$$

$$X_R(i+1) = X_R(i)$$

$$F^{i+1}g = F F^i g \stackrel{?}{=} F \left( \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j F^j g \right)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\alpha_{i-1} F^i g}_{\in X_R(i+1)} + \underbrace{\sum_{j=c}^{i-2} \alpha_j F^{j+1} g}_{\in X_R(i)} \\ &\qquad\qquad\qquad X_R''(i) \end{aligned}$$

$$F^{i+1} g \in X_R(i) = X_R(i+1)$$

$$X_R(i+2) = X_R(i+1) = X_R(i)$$

## Esempi

ck

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

François Blasius

IMC-785-1920; Lax 13 & 14

November 11-12, 2019 16 / 54

$$1) \quad x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix}}_F x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G u(t) \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$R = R_2 = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(R) = 1 \Rightarrow$  sistema NON e' raggr.  
 $\det(R) = 0 \quad \forall f_1, f_2$

$$2) \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$R = R_2 = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(R) = 2 \quad \det(R) = 1$$

sistema è raggiungibile  $\forall f_1, f_2$

$$3) \quad x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_F x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_G u(t)$$

$$R = R_3 = [G \quad FG \quad F^2G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(R) = 3$  sistema è ragg. in 2 parti

$$X_R(1) = \text{Im } G = \text{span} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$X_R(2) = \text{Im} [G \quad FG] = \mathbb{R}^3$$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{x = T^{-1}z} z(t+1) = \tilde{F}z(t) + \tilde{G}u(t)$$

$$\tilde{F} = T^{-1}FT, \tilde{G} = T^{-1}G$$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$z = T^{-1}x$$

$$z(t+1) = \tilde{F}z(t) + \tilde{G}u(t)$$

$$\tilde{F} = T^{-1}FT \quad \tilde{G} = T^{-1}G$$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= [\bar{G} \quad \bar{F}G \quad \cdots \quad \bar{F}^{n-1}\bar{G}] \stackrel{|}{=} [T^{-1}G \quad T^{-1}FTT^{-1}G \quad \cdots \quad T^{-1}F^nTT^{-1}G] \\ &\stackrel{|}{=} T^{-1}[G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G] \\ &\stackrel{|}{=} T^{-1}R\end{aligned}$$

$$\text{rank}(\bar{R}) = \text{rank}(R)$$

Sistema sia raggiungibile ( $\det(RR^T) \neq 0$ )  
 $\det(\bar{R}\bar{R}^T) \neq 0$ )

$$\bar{R}R^T = T^{-1}RR^T$$

$$\hookrightarrow T^{-1} = \bar{R}R^T(RR^T)^{-1} \Rightarrow T = RR^T(\bar{R}\bar{R}^T)^{-1}$$

Se  $\Sigma$  è raggiungibile in  $t$  passi, come costruire un ingresso  $u_t$  per raggiungere un qualsiasi stato  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $t$  passi?

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$$

sistema ragg. in  $t$  passi

$$\text{rank } K(R_t) = n \Leftrightarrow \det(R_t R_t^\top) \neq 0$$

1)  $| x_0 = 0 |$

$$\bar{x} = x(t) = R_t u_t \quad (\text{se } R_t \text{ } n \times n : u_t = R_t^{-1} \bar{x})$$

$$u_t = R_t^\top \eta_t \quad \eta_t \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \bar{x} = R_t R_t^\top \eta_t \\ \eta_t = (R_t R_t^\top)^{-1} \bar{x} \end{cases}$$

$$\boxed{u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} \bar{x}}$$

$$u_t' = u_t + \bar{u}, \quad \bar{u} \in \text{Ker } R_t$$

$$R_t u_t' = R_t (u_t + \bar{u}) = \underbrace{R_t u_t}_{\bar{x}} + \underbrace{R_t \bar{u}}_0 = \bar{x}$$

2)  $x_c \neq 0$

$$\begin{cases} \bar{x} = x(t) = F^t x_0 + R_t u_t \\ \bar{x} - F^t x_0 = R_t u_t \end{cases}$$

$$\leftarrow u_t = R_t^T (R_t R_t^T)^{-1} (\bar{x} - F^t x_c)$$

## Esempi

back

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ingressi  $u'(t)$  per raggiungere  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  da  $x_0 = 0$  in 2 passi?

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t = 2$$

$$u_2 = R_2^T (R_2 R_2^T)^{-1} \bar{x}$$

$$R_2 = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 R_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u(1) \\ u(0) \end{array} \right\}$$

$$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2' = u_2 + \bar{u} \quad \bar{u} \in \text{Ker } R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad u'(c) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Proprietà importante

**Definizione:** Data una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uno spazio vettoriale  $W$  si dice  $F$ -invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

**Proprietà:** Lo spazio raggiungibile  $X_R$  è  $F$ -invariante e contiene  $\text{Im}(G)$ .

back

$$X_R = \text{Im } R = \text{Im } [G \ FG \ \dots \ F^{n-1} G]$$

$$G = [g_1 \ \dots \ g_m]$$

$$v \in X_R : v = \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} F^i g_j$$

$$Fv : Fv = F \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} F^i g_j = \underbrace{\sum_{j=1}^m \alpha_{n-1,j} F^n g_j}_{\in X_R} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_{ij} F^{i+1} g_j}_{\text{Cayley-Hamilton}} \in X_R$$

$F^n g_j \in \text{span} \{g_i, Fg_j, \dots, F^{n-1} g_j\}$

$\forall v \in X_R$   
 $F_v \in X_R \Rightarrow X_R \text{ ist } F\text{-invariante}$

$X_n \in \text{Im } G$

## Forma canonica di Kalman

back

$\Sigma$  non raggiungibile  $\implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

$$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$$

$$\text{rank}(R) = k < n \implies \dim(X_R) = k$$

$$X_R = \text{span} \{ v_1, \dots, v_k \} \quad v_i \text{ lin. indip.}$$

$$T = [v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-k}] \quad \{v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-k}\} \text{ base di } \mathbb{R}^n$$

$$v \in X_R \xrightarrow{\text{nella base } T} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \} v^{(1)}$$

$$w = Fv, v \in X_R \Rightarrow w \in X_R \xrightarrow{\text{nella base } T} w = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \} w^{(1)}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \left[ \begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array} \right] \quad F_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k} \quad F_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$$

$$w = \bar{F}v \Rightarrow \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = F_{21}v^{(1)}$$

$\forall v \in X_R$

$$\Rightarrow F_{21} = 0$$

$$\bar{F} = \left[ \begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array} \right]$$

$$\bar{G} = T^{-1} G = \begin{bmatrix} \underline{G_1} \\ \underline{G_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \\ \} \end{matrix} \begin{matrix} k \\ n-k \end{matrix}$$

$$\text{Im } G \in X_R \Rightarrow \bar{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1. F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$2. F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right]$$

$F_{11}$

$$1) F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad G_1 = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right]$$

$(F_{11}, G_1)$  è raggiungibile?

$$R_2 = [G_1 \ F_{11} \ G_1] = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \quad \text{rank}(R_2) = 2 \Rightarrow \text{raggiung.}$$

$\Rightarrow$  sistema è  
in forma di Kalman

$$2) \bar{F} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{F_{11}} \quad \bar{G} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] \} G_1$$

$(F_{11}, G_1)$  è raggiungibile?

$$R = [G_1 \ F_{11} G_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(R) = 1$$

$\Rightarrow (F_{11}, G_1)$  NON  
è raggiungibile

$$\det(R) = 0$$

$\Rightarrow$  sistema NON è  
in forma di Kalman

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_K = HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G = H_K (zI - F_K)^{-1}G_K$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & | & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & | & -F_{12} \\ 0 & | & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= H_1 (zI - F_{11})^{-1} G_1$$

matrice di trasferimento  
del sottosistema raggr. !!!

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$[zI - F \mid G]$$

ha rango pieno per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di  $z$  che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ .

1)  $\Sigma$  raggiungibile  $\Rightarrow [zI - F \mid G]$  ha rango pieno  $\forall z \in \mathbb{C}$

Per assurdo,  $\Sigma$  è raggiungibile ma  $[zI - F \mid G]$  ha rango non pieno per  $z = \bar{z} \in \mathbb{C}$

$[\bar{z}I - F \mid G]$  ha rango non pieno, allora

$$\exists v \in \mathbb{R}^n : v^T [\bar{z}I - F \mid G] = \underbrace{[0 \cdots 0]}_{m+n}$$

$$([\bar{z}v^T \cdot v^T F \mid v^T G] = [0 \cdots 0])$$

$$\left( \begin{array}{l} \bar{z} v^\top - v^\top F = 0 \Rightarrow v^\top F = \bar{z} v^\top \\ v^\top G = 0 \end{array} \right)$$

$$v^\top R = v^\top [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G]$$

$$= [v^\top G \quad v^\top FG \quad v^\top F^2G \quad \cdots \quad v^\top F^{n-1}G]$$

$$= [0 \quad \underbrace{\bar{z} v^\top G}_0 \quad \underbrace{\bar{z}^2 v^\top G}_0 \quad \cdots \quad \underbrace{\bar{z}^{n-1} v^\top G}_0] = [0 \cdots 0]$$

$\Rightarrow R$  non è di rango pieno  $\Rightarrow \Sigma$  non è raggiungibile  
 $\Rightarrow$  ASSURDO!

" $\Sigma$  non è magg.  $\Rightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{C}$  t.c.  $[\bar{z}I - F|G]$  non ha range pieno"

$$F_k = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_k = T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\bar{z}I - F_k | G_k] &= [\bar{z}I - T^{-1}FT | T^{-1}G] \\ &= T^{-1} [\bar{z}I - F | G] \begin{bmatrix} I & \\ & \bar{I} \end{bmatrix} \\ &\quad \uparrow \text{inv} \qquad \downarrow \text{m x m} \\ &\quad \uparrow \text{inv} \end{aligned}$$

$$\text{rank } [\bar{z}I - F_k | G_k] = \text{rank } [\bar{z}I - F | G]$$

Possiamo assumere che il sistema sia in forma di Kalman:

$$\left[ \begin{matrix} zI - F[G] \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} G_1 \\ 0 \end{matrix} \right]$$

$$\text{rank} [zI - F[G]] = \text{rank} \left[ \begin{matrix} zI - F_{11} & G_1 & -F_{12} \\ 0 & 0 & zI - F_{22} \end{matrix} \right] \} \text{ lin indip. } \forall z$$

$$\exists \bar{z} \text{ t.c. } v^\top (\bar{z}I - F_{22}) = 0, \quad v \neq 0 ?$$

$$\bar{z}v^\top = v^\top F_{22} \Rightarrow F_{22}^\top v = \bar{z}v \Rightarrow \bar{z} \text{ e' autovalore di } F_{22}^\top$$

$$\Rightarrow \bar{z} \text{ e' autovalore di } F_{22}$$

rank  $[zI - F | G]$  non pieno per tutti e soli gli  $z$  che sono  
autovalori di  $F_{22}$ !

## Esempi

back

$$1. F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \text{raggiungibile}$$

$$2. F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \text{non raggiungibile}$$

$$3. F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \text{non raggiungibile}$$

3)  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\sum \text{ ragg. } \Leftrightarrow [zI - F | G] \text{ range pieno } \forall z \in \mathbb{C}$

$\forall z$  autovalore di  $F$

$$[zI - F | G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ha range non pieno}$$

$\Rightarrow \sum$  non è ragg.