

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Soluzioni di sistemi lineari autonomi

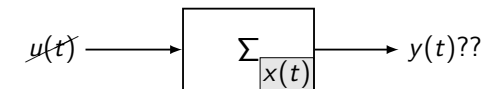
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica
A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Soluzioni di sistemi lineari autonomi a t.c.
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Soluzioni di un sistema LTI autonomo

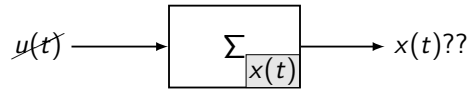


Σ lineare, tempo invariante e autonomo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}\quad x(0) = x_0$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare

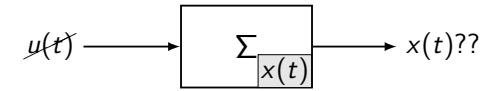


Caso scalare $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{f^k t^k}{k!} + \dots\right) x_0$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{F^k t^k}{k!} + \dots\right) x_0$$

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

(Alcune) proprietà:

- ❶ $e^0 = I$
- ❷ $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
- ❸ $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile: $e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}$
- ❹ $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A, \quad t \in \mathbb{R}$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

caso più in generale: F diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$(i) N^0 = I, N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$(ii) e^{I+N} = e^I e^N$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$(i) N^0 = I, N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$(ii) e^{I+N} = e^I e^N$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

caso più in generale: F "quasi"-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \dots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \dots & 0 & f \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{ft} & te^{ft} \\ 0 & \dots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici” e/o “strutturati”...

....ma come fare in casi più complessi (F “piena” e senza “struttura”)?

Strategia: Trasformare F in una forma “semplice” (diagonale o quasi-diagonale)!