

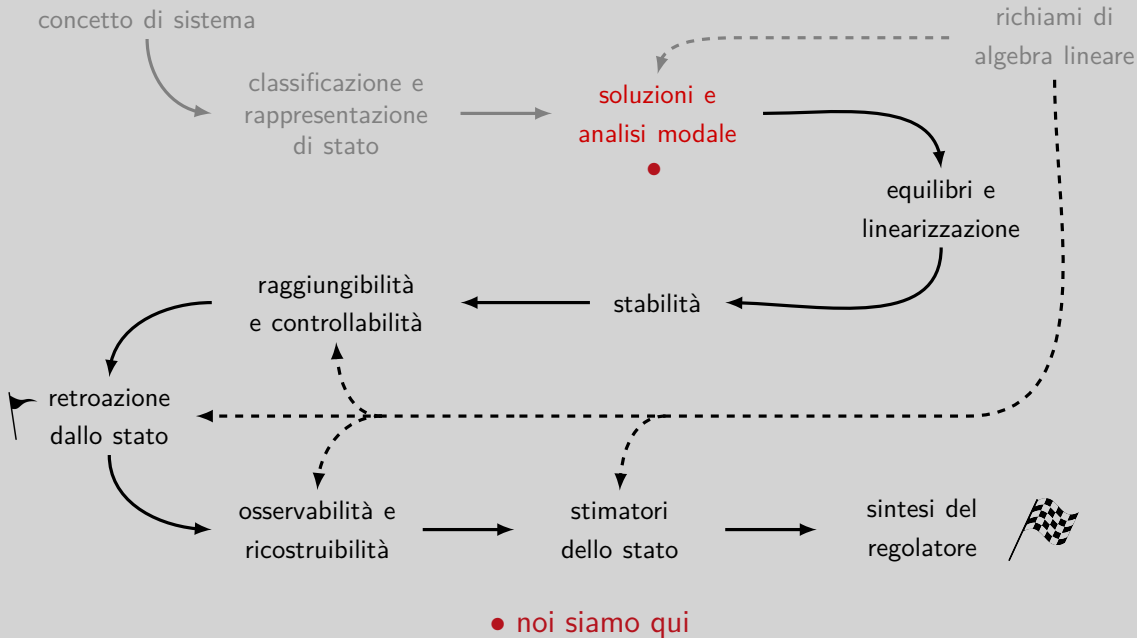
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata  
(tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020



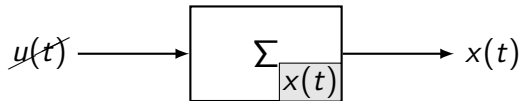
## Nella scorsa lezione

- ▷ Forma canonica di Jordan: costruzione
- ▷ Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- ▷ Forma canonica di Jordan: osservazioni
- ▷ Polinomi annullatori e polinomio minimo

# In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di  $e^{Ft}$  tramite Laplace

# Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale  $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0$$

# Usiamo Jordan!

$$1. F = TF_J T^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_J} T^{-1}$$

$$2. F_J = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array} \right] \implies e^{F_J t} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array} \right]$$

$$3. J_{\lambda_i} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{array} \right] \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & e^{J_{\lambda_i,\ell_i} t} \end{array} \right]$$

## Usiamo Jordan!

$$4. J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$

## Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a  $\lambda_i = \dim.$  del più grande miniblocco in  $J_{\lambda_i}$   
=  $h_i$  = molteplicità di  $\lambda_i$  nel pol. minimo
2. Numero di modi distinti complessivi =  $n$  (dim. di  $F$ )  
quando  $F$  ha un unico miniblocco per ogni autovalore ( $F$  ciclica)
3.  $F$  diagonalizzabile  $\implies$  modi elementari =  $e^{\lambda_i t}$  (esponenziali puri)
4.  $\lambda \in \mathbb{C}$  autovalore  $\Rightarrow \bar{\lambda}$  autovalore  $\Rightarrow$  modi reali  $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t), t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$



# Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \quad x(0) = x_0$$

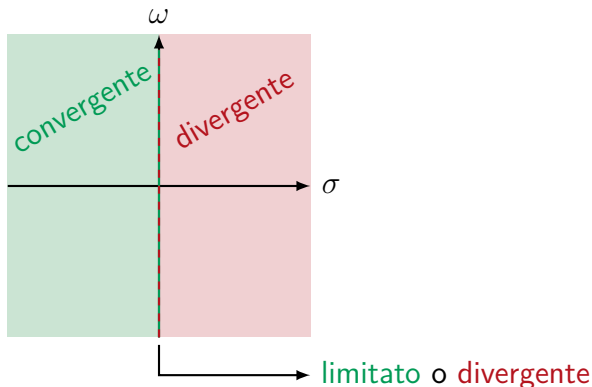
$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

= combinazione lineare di vettori contenenti  
i modi elementari!

# Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{h_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



# Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata}$$

$$\begin{aligned} \exists \lambda_i \text{ tale che } \Re[\lambda_i] > 0 \\ \text{o } \Re[\lambda_i] = 0 \text{ e } \nu_i > g_i \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \text{ non limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 ?$$

# Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \quad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \quad x_f(t) ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \quad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \quad y_f(t) ??$$

# Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau) d\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

# Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - F)^{-1}G}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

# Equivalenze dominio temporale/Laplace

1.  $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J =$  matrice di trasferimento

2.  $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} =$  metodo alternativo per calcolare  $e^{Ft}$  !!

# Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia  $z \triangleq T^{-1}x$  dove  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?



# Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) !!$$

# Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

# Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad G_J = \left[ \begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad H_J = \left[ H_{\lambda_1,1} \mid H_{\lambda_1,2} \mid \cdots \mid H_{\lambda_k,\ell_k} \right]$$

# Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad G_J = \left[ \begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad H_J = \left[ H_{\lambda_1,1} \mid H_{\lambda_1,2} \mid \cdots \mid H_{\lambda_k,\ell_k} \right]$$

$$\begin{aligned} W(s) &= H_{\lambda_1,1}(sI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(sI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,\ell_k}(sI - J_{\lambda_k,\ell_k})^{-1}G_{\lambda_k,\ell_k} + J \\ &= W_{\lambda_1,1}(s) + W_{\lambda_1,2}(s) + \cdots + W_{\lambda_k,\ell_k}(s) + J \end{aligned}$$

# Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s - \lambda_i} + \frac{A_2}{(s - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s - \lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s) U(s) + JU(s) \right]$$

# Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - F)^{-1}]$$

**Esempio:**  $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

# Condizioni “pratiche” su ciclicità e polinomio minimo

1.  $F$  ciclica  $\iff$  non ci sono semplificazioni tra num. e den. nel calcolo di

$$(sI - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$$

2.  $\Psi_F(s) =$  polinomio a den. in  $(sI - F)^{-1}$ , dopo tutte le possibili semplificazioni