# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

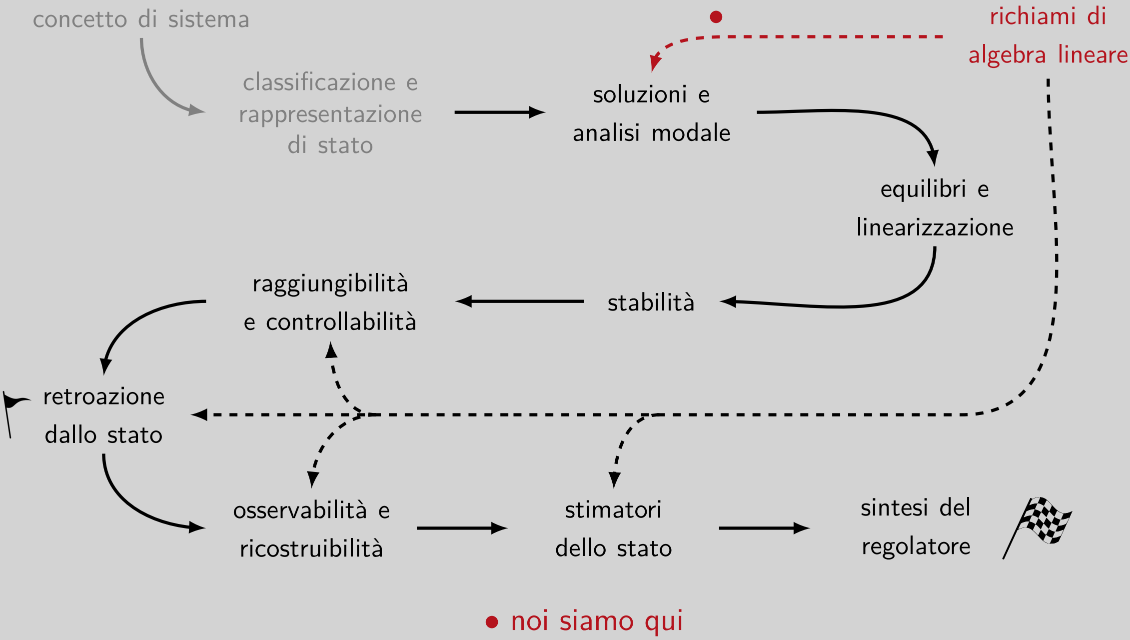
# Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Forma di Jordan e Polinomio Minimo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

# Nelle scorse lezioni

- Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- Concetti base di algebra lineare
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- Forma canonica di Jordan: idea generale

# In questa lezione

- Forma canonica di Jordan: costruzione
- Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- Forma canonica di Jordan: osservazioni
- Polinomi annullatori e polinomio minimo

# Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica $\lambda_i$

$g_i =$ molteplicità geometrica $\lambda_i$

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste $i$ tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$$\Downarrow$$

Non esistono $\nu_i$ vettori lin. indip. in $\ker(F - \lambda_i I)$

*Però possiamo aggiungere agli autovettori di $\lambda_i$ altri $\nu_i - g_i$ vettori lin. indip. in modo da formare $\nu_i$ vettori lin. indip.!*

*Tante scelte possibili, ma ne esiste una "furba"...*

# Fatto importante

$$\ker(F - \lambda_i I)^{\ell} \subseteq \ker(F - \lambda_i I)^{\ell+1}, \text{ per ogni } \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\text{ed esiste } \bar{\ell} \text{ tale che } \dim \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}} = \nu_i$$

# Forma di Jordan: costruzione

$$F \in \mathbb{R}^{10\times 10} \text{ con 1 autovalore } \lambda_1 \text{ con } \nu_1 = 10 \text{ e } g_1 = 5$$

$\dim\ker(F - \lambda_1 I) = 5$ $\quad v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5$ $\quad$ autovettori lin. indip.

$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^2 = 8$ $\quad v_6,\ v_7,\ v_8$

$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^3 = 9$ $\quad v_9$ $\quad$ autovettori generalizzati

$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^4 = 10$ $\quad v_{10}$

$$\{v_1, \dots, v_{10}\} \text{ base di } \mathbb{R}^{10}$$

# Forma di Jordan: costruzione

$$v_{10} : (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0, \; (F - \lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$$

$$\omega_9 \triangleq (F - \lambda_1 I) v_{10} : (F - \lambda_1 I)^3 \omega_9 = 0, \; (F - \lambda_1 I)^2 \omega_9 \neq 0$$

$$v_9 \leftarrow \omega_9$$

$$\omega_8 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_9 : (F - \lambda_1 I)^2 \omega_8 = 0, \; (F - \lambda_1 I) \omega_8 \neq 0$$

$$v_8 \leftarrow \omega_8$$

$$\omega_5 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_8 : (F - \lambda_1 I) \omega_5 = 0$$

catena di autovettori generalizzati
$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$$v_5 \leftarrow \omega_5$$

# Forma di Jordan: costruzione

$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$

$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$

$\mathcal{C}_4 = v_2$

$\mathcal{C}_5 = v_1$

matrice di cambio base

$T = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5]$

oppure $T = [\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1]$

oppure $T = [\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$

*...ma mai spezzare le catene!*

# Forma di Jordan: costruzione

che forma ha $F' = T^{-1}FT$?

$$(F - \lambda_1 I)\omega_5 = 0 \implies F\omega_5 = \lambda_1\omega_5$$

$$(F - \lambda_1 I)\omega_8 = \omega_5 \implies F\omega_8 = \omega_5 + \lambda_1\omega_8$$

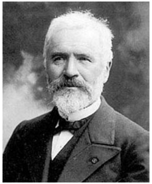
$$(F - \lambda_1 I)\omega_9 = \omega_8 \implies F\omega_9 = \omega_8 + \lambda_1\omega_9$$

$$(F - \lambda_1 I)v_{10} = \omega_9 \implies Fv_{10} = \omega_9 + \lambda_1 v_{10}$$

$F\omega_4 = \lambda_1\omega_4$ $\quad$ $F\omega_3 = \lambda_1\omega_3$ $\quad$ $Fv_2 = \lambda_2 v_2$ $\quad$ $Fv_1 = \lambda_1 v_1$

$Fv_6 = \omega_4 + \lambda_1 v_6$ $\quad$ $Fv_7 = \omega_3 + \lambda_1 v_7$

# Forma di Jordan: costruzione



$$F_J \triangleq F' = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right]$$

# Forma di Jordan: caso generale

$F$ ha autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ (possibilmente con $\nu_i > g_i$)

**Fatto importante:** autovettori (veri o generalizzati) corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.

$$F_J = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_\ell} \end{array}\right] \qquad J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{array}\right] \qquad J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

blocco di Jordan

miniblocco di Jordan

# Forma di Jordan: algoritmo generale

**1.** Data $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, calcolare autovalori $\lambda_i$, molt. algebriche $\nu_i$ e geometriche $g_i$

**2.** Per tutti i $\lambda_i$ tali che $\nu_i = g_i$ calcolare $\nu_i$ autovettori lin. indip.

**3.** Per tutti i $\lambda_i$ tali che $\nu_i > g_i$ (se esistono) calcolare $\nu_i$ vettori lin. indip. completando i $g_i$ autovettori con $\nu_i - g_i$ autovettori generalizzati in

$$\ker(F - \lambda_i I)^2, \ker(F - \lambda_i I)^3, \dots, \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}}$$

**4.** Calcolare le catene di Jordan partendo dagli ultimi autovettori generalizzati

*(e ordinarle in maniera "crescente"!)*

**5.** Calcolare la matrice di cambio di base $T$ ottenuta concatenando le catene

*(senza spezzarle!)*

**6.** $F_J = T^{-1} F T$

# Forma di Jordan: osservazioni

**1.** La forma canonica di Jordan $F_J$ è univocamente determinata a meno di una permutazione dei suoi blocchi/miniblocchi.

**2.** Dimensione blocco = molteplicità algebrica autovalore corrispondente
Dimensione miniblocco = lunghezza catena corrispondente
Numero miniblocchi = molteplicità geometrica autovalore corrispondente

**3.** Per calcolare $F_J$ non è sempre necessario il calcolo esplicito delle catene!!!

(i) $F\,:\,\lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \nu_2 = 2,\ g_2 = 2$

(ii) $F\,:\,\lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 2$

(iii) $F\,:\,\lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 1$

# Polinomio annullatore di una matrice

**Definizione:** Un polinomio $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si dice *polinomio annullatore* di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se

$$p(F) = a_\ell F^\ell + a_{\ell-1}F^{\ell-1} + \cdots + a_1 F + a_0 I = 0.$$

$$p(F) = 0 \iff p(T^{-1}FT) = 0,\ T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{matrice di cambio di base}$$

$$\iff p(F_J) = 0$$

$$\iff p(J_{\lambda_{i,j}}) = 0,\ \forall i, j$$

# Polinomio annullatore di una matrice

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_\ell)^{\alpha_\ell} \implies p(F) = (F - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (F - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

Analizziamo un miniblocco: $p(J_{\lambda_{i,j}}) = (J_{\lambda_{i,j}} - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (J_{\lambda_{i,j}} - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$

---

Per avere $p(F) = 0$:

- $p(\lambda_i) = 0$, per ogni autovalore $\lambda_i$ di $F$
- $\alpha_i \geq$ dimensione del più grande miniblocco associato a $\lambda_i \triangleq h_i$

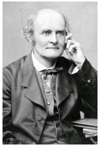
# Polinomio minimo di una matrice

**Definizione:** Il polinomio annullatore di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di grado più piccolo possibile si dice *polinomio minimo* di $F$ e verrà denotato con $\Psi_F(x)$.

$$\Psi_F(x) = (x - \lambda_1)^{h_1}(x - \lambda_2)^{h_2} \cdots (x - \lambda_k)^{h_k}$$

$\boxed{\text{Notare che: } \nu_i \geq h_i}$

# Teorema di Cayley–Hamilton



**Teorema:** Il polinomio caratteristico di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è sempre un polinomio annullatore di $F$ stessa:

$$\Delta_F(F) = 0.$$

Più precisamente $\Delta_F(x)$ è un multiplo di $\Psi_F(x)$ e

$\Delta_F(x) = \Psi_F(x)$ quando $F$ ha un solo miniblocco per ogni autovalore!