

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020

In questa lezione: esercizi misti!

▷ Esercizio 1: forma di Jordan e analisi modale

▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari

▷ Esercizio 3: raggiungibilità/controllabilità

▷ Esercizio 4: retroazione dallo stato

## Esercizio 1

[riadattato da Es. 3 tema d'esame 4 Luglio 2018]

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t), & F &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ y(t) &= Hx(t), & H &= [\alpha \quad 1 \quad 1], \quad \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

1. Forma di Jordan e modi del sistema?
2. Insieme di stati iniziali che generano evoluzioni di stato non divergenti?
3. Valori di  $\alpha$  tali che  $y(t)$  converga a zero per ogni stato iniziale  $x(0)$ ?

## Esercizio 1: soluzione

1.  $F_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . Modi:  $2^{-t}$ ,  $2^t$ .

2.  $\mathcal{X}_0 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

3.  $\alpha = 0$ .

## Esercizio 2

[riadattato da Es. 1 tema d'esame 20 Gennaio 2017]

$$\dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) - x_2^3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$

1. Per  $u(t) = 0, \forall t$ , carattere di stabilità di  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ?

2. Per  $u(t) = Kx(t)$ , matrice  $K$  tale che  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  sia asintoticamente stabile?

(Utilizzare la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ , se necessario)

## Esercizio 2: soluzione

1.  $\bar{x}$  instabile.

2.  $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & k_2 \end{bmatrix}, k_2 < 1$ .

### Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 4 Settembre 2018]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Raggiungibilità, controllabilità, stabilizzabilità del sistema?

2. Ingresso  $u(t)$  che porta il sistema da  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  a  $x(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ ?

### Esercizio 3: soluzione

1. Sistema non raggiungibile, non controllabile e non stabilizzabile.

2.  $u(0) = u(1) = \frac{3}{2}$ .

## Esercizio 4 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 12 Settembre 2017]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Stabilizzabilità del sistema da un singolo ingresso?
2. Matrice  $K$  tale che il polinomio minimo di  $F + GK$  sia  $\Psi_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$ ?

## Esercizio 4: soluzione

1. Sistema stabilizzabile solo dal secondo ingresso.

2. Ad esempio,  $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .