Lezione 6: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema autonomo a tempo continuo $\dot{x}(t) = Fx(t)$, dove

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determinino i modi elementari del sistema e il loro carattere (limitato/convergente/divergente). Inoltre, si calcoli l'evoluzione del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$x'(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x''(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x'''(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Si determini la funzione di trasferimento del sistema e l'evoluzione forzata del sistema in corrispondenza degli ingressi

$$u'(t) = e^{-t}, t \geq 0, \quad \text{e} \quad u''(t) = t + e^{-t},\ t \geq 0.$$

Esercizio 3. Sia

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli e^{Ft}, $t \geq 0$, usando Laplace.

Soluzioni

Esercizio 1. Modi: e^{3t} (divergente), e^{-2t} (convergente), $e^{0t} = 1$ (limitato).

Evoluzione libera: $x'(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x''(t) = \begin{bmatrix} \frac{13}{15}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{13}{15}e^{3t} - \frac{1}{6} \\ \frac{26}{15}e^{3t} - \frac{2}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $x'''(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $t \geq 0$.

Esercizio 2. F.d.T. $W(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}$.

Evoluzione forzata: $y'(t) = te^{-t} - t^2e^{-t}$, $y''(t) = -1 + e^{-t} + 3te^{-t} - t^2e^{-t}$, $t \geq 0$.

Esercizio 3. $e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$.