

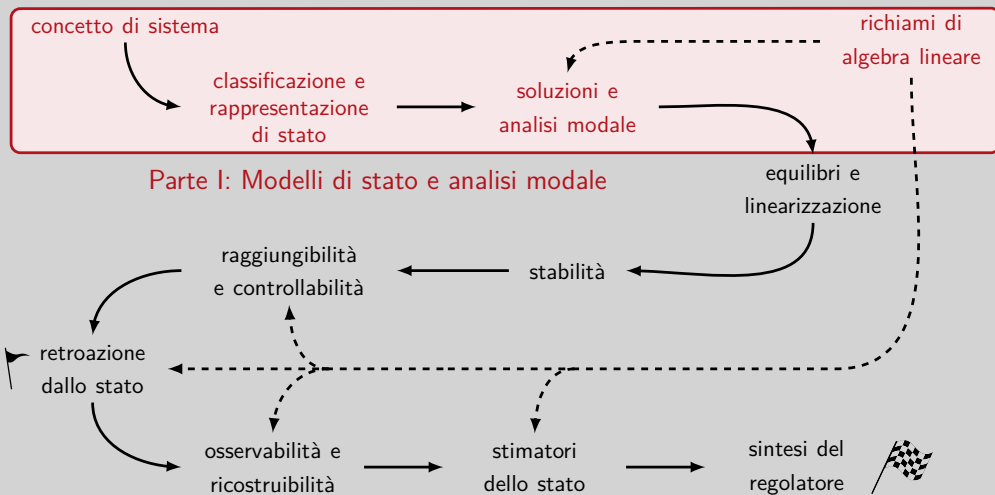
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 8: Esercizi di ricapitolazione su modelli di stato e analisi modale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020



## In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

---

---

---

---

---

---

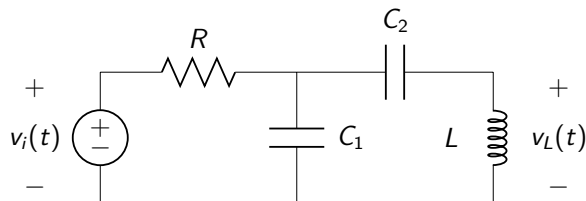
---

---

---

---

## Esercizio 1



Rappresentazione interna o di stato con  $u(t) = v_i(t)$  e  $y(t) = v_L(t)$ ?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Esercizio 1: soluzione

Variabili:  $x(t) = \begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$ ,  $u(t) = v_i(t)$ ,  $y(t) = v_L(t)$

Matrici:  $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $G = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $J = 0$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Esercizio 2

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Jordan  $F_J$ ?
2. Polinomio minimo  $\Psi_F(x)$ ?
3. Esponenziale  $e^{Ft}$ ?
4. Evoluzione libera per  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ ?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Esercizio 2: soluzione

$$1. F_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \Psi_F(x) = x(x+1)^2$$

$$3. e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$4. x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 2te^{-t} \end{bmatrix}^\top$$

## Esercizio 3 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 1 Febbraio 2012]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Forma di Jordan  $F_J$  e i modi del sistema al variare di  $f \in \mathbb{R}$ ?

2. Funzione di trasferimento  $W(s)$  al variare di  $f \in \mathbb{R}$ ?

3. Per  $f = 0$ , ingresso  $u(t)$  tale che  $y_f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t$ ,  $t \geq 0$ ?

### Esercizio 3: soluzione

$$1. F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = 1, \text{ modi: } e^t, te^t, e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & f = 2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^t, e^{2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = -2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} 2-f^2 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f \neq 1, 2, -2, \text{ modi: } e^{(2-f^2)t}, e^{ft}, e^{-2t} \end{cases}$$

$$2. W(s) = \frac{(3-5f)-s}{(s-f)(s+2)}$$

$$3. u(t) = 1 + 2t, t \geq 0.$$

### Esercizio 4 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 24 Giugno 2019]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1. Modi del sistema e loro carattere?

2. Matrice di trasferimento  $W(z)$ ?

3. Evoluzione del sistema per  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u(t) = -2^{t+2}$ ,  $t \geq 0$ ?

## Esercizio 4: soluzione

1.  $(-3)^t, 2^t$ , entrambi divergenti

$$2. W(z) = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{(z+3)(z-2)} \\ \frac{1}{z-2} \end{array} \right]$$

$$3. y(t) = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{19}2^{t+2} - \frac{3}{19}t2^{t+2} - \frac{5}{19}(-3)^{t+1} \\ -t2^{t+2} \end{array} \right], t \geq 0$$