

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

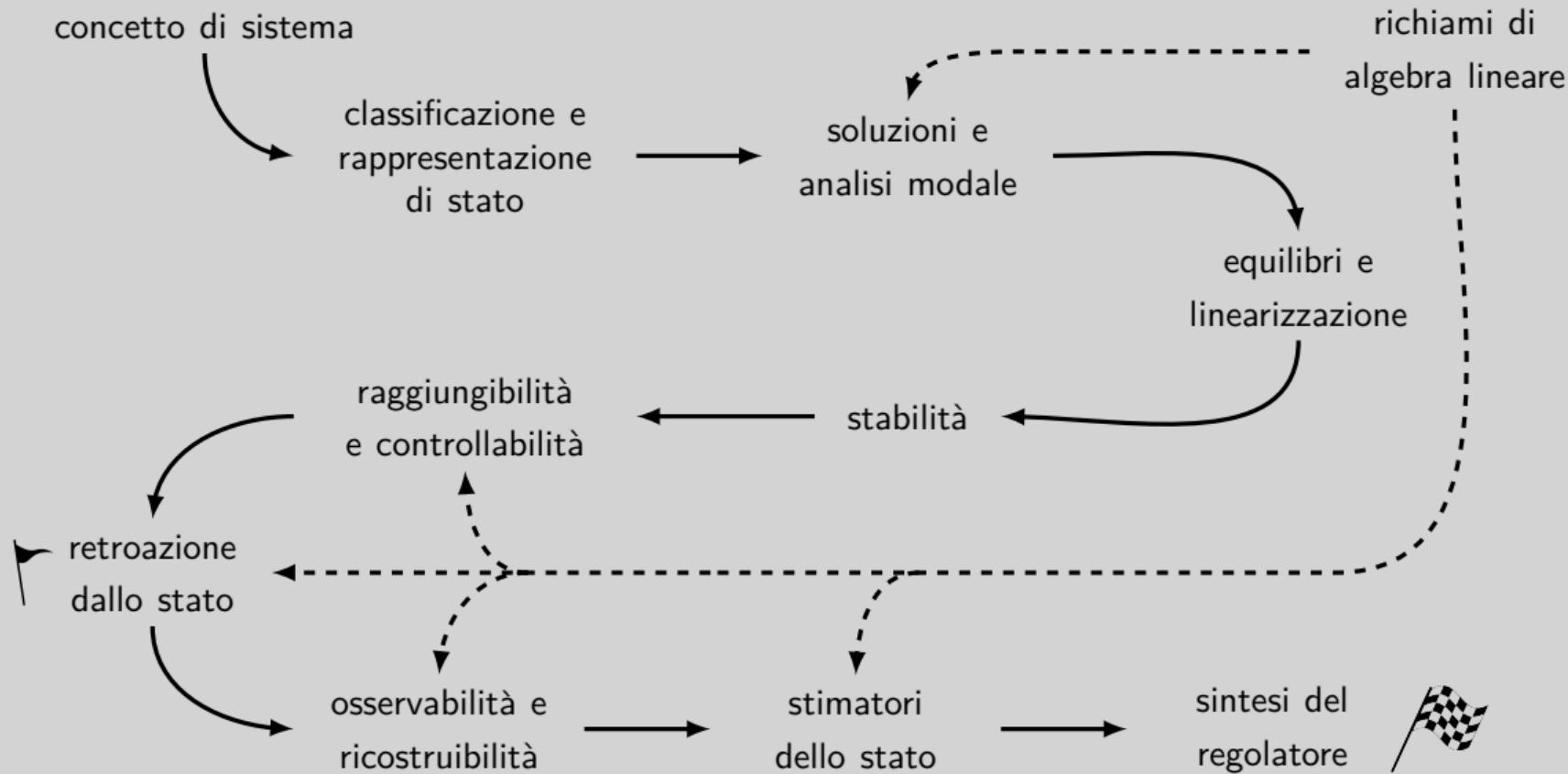
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

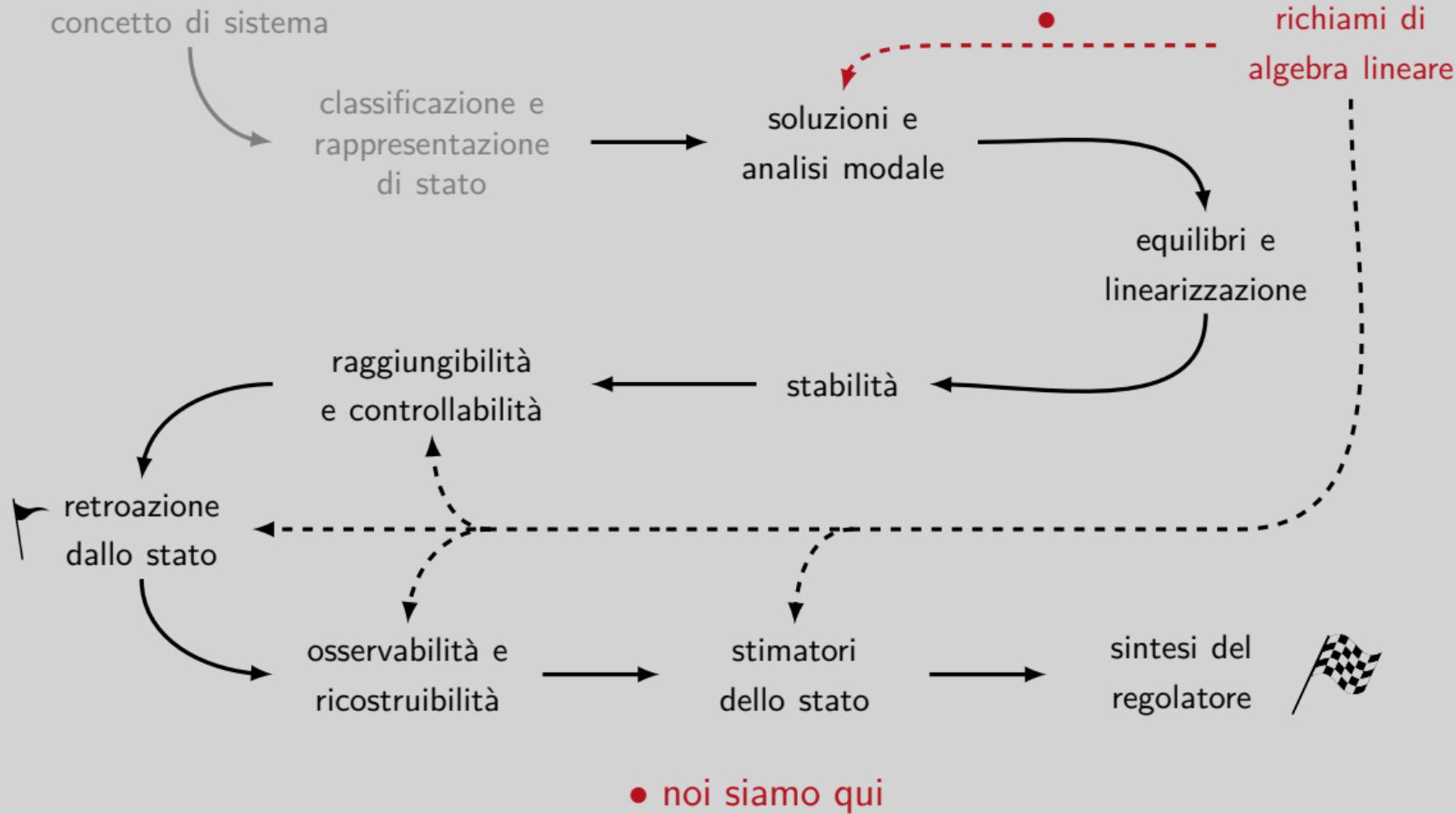
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020





Nella scorsa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
 - ▷ Rappresentazione di sistemi
 - ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
 - ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
 - ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

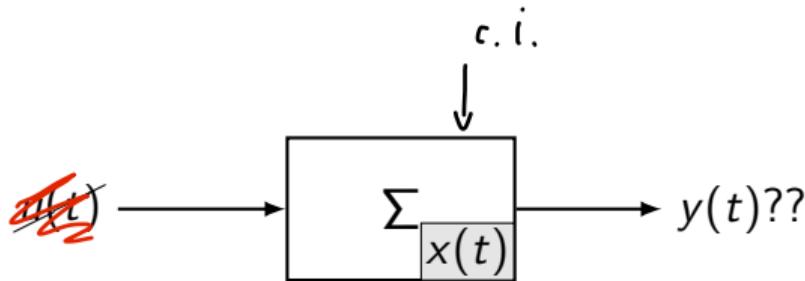
In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
 - ▷ Concetti base di algebra lineare
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
 - ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
 - ▷ Concetti base di algebra lineare
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
 - ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



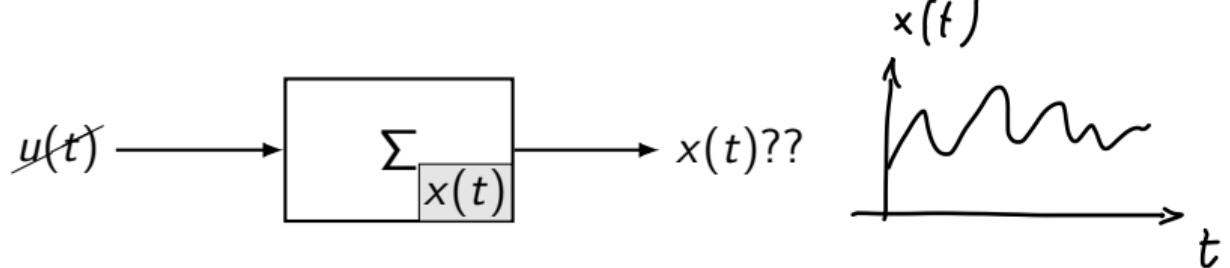
Σ lineare, tempo invariante e autonomo $x(t) \in \underline{\mathbb{R}^n}$, $y(t) \in \underline{\mathbb{R}^p}$, $u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:

$$\left\| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array} \right. \quad \underline{x(0) = x_0}$$

Come sono fatte le soluzioni di Σ
 $x(t)$? $y(t)$?

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



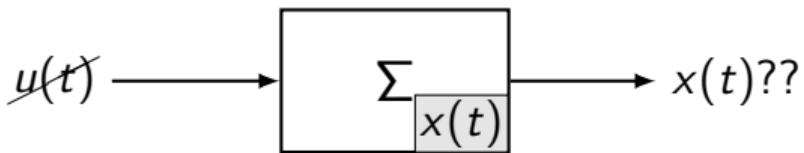
Caso scalare $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\begin{matrix} \epsilon \\ \downarrow \\ \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?

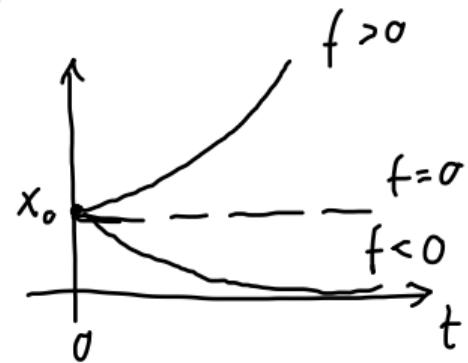


Caso scalare $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

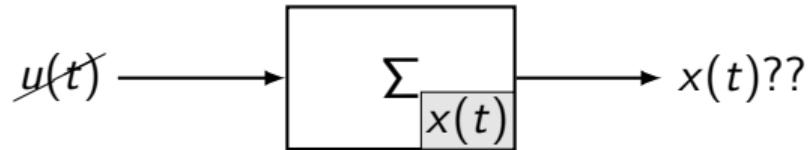
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} (e^{ft} x_0) \\ &= f e^{ft} x_0 = f x(t)\end{aligned}$$
$$\left\| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f x(t), \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

$x(t) = e^{ft} x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n t^n}{n!} + \dots \right) x_0$

serie di Taylor



Soluzioni di un sistema LTI autonomo?

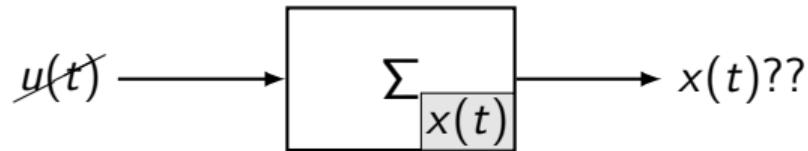


Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \underline{\mathbb{R}^{n \times n}}$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^{n \times n} \\ \uparrow \\ \underline{\dot{x}(t) = Fx(t)}, \quad x(0) = x_0 \end{array}$$

$$x(t) = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



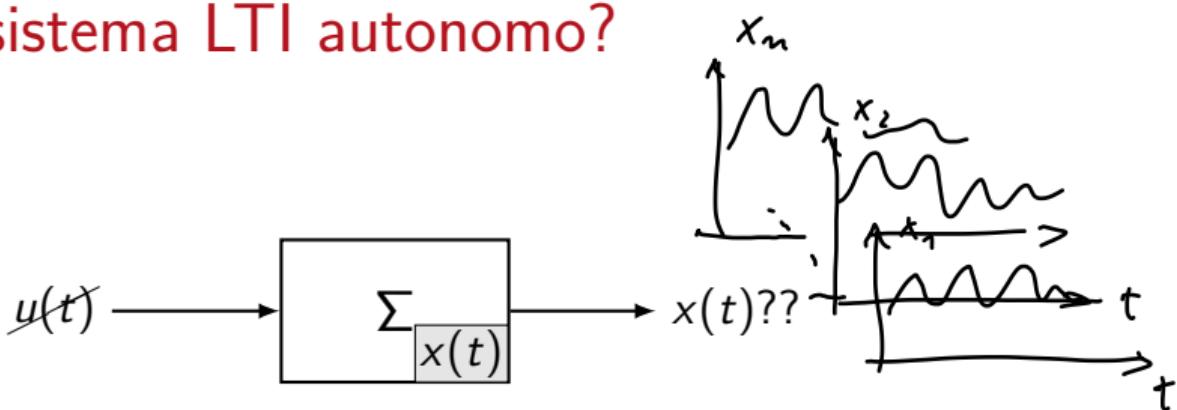
Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 = ??$$

↓
esponenziale di matrice

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

- serie ben def.
- converge sempre

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = \boxed{e^{Ft}} x_0 \triangleq \left(I + \underset{\text{matrice}}{\cancel{Ft}} + \frac{F^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^n t^n}{n!} + \cdots \right) x_0 = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!}}$$

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
 - ▷ Concetti base di algebra lineare
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
 - ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:

$$e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale: F diagonale \approx n casi "scalari"

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I, N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$(i) \quad N^0 = I, \quad N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \quad \Rightarrow \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale: F “quasi”-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici”...

....ma come fare in casi più complessi (F “piena” e senza “struttura”)?

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici”...

....ma come fare in casi più complessi (F “piena” e senza “struttura”)?

Strategia: Trasformare F in una forma “semplice” (diagonale o quasi-diagonale)!

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
 - ▷ Concetti base di algebra lineare
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
 - ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Vettori e basi in \mathbb{R}^n

1. L'insieme (di vettori) \mathbb{R}^n con campo (di scalari) \mathbb{R} dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.
2. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (**dipendenti**) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\propto) \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di \mathbb{R}^n se:
 - (i) generano \mathbb{R}^n : $\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$
 - (ii) sono linearmente indipendenti

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

$$(i) f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$$

$$(ii) f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è completamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^m .

3. Viceversa, data una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^m , una trasformazione $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ si può estendere linearmente in modo unico all'intero spazio \mathbb{R}^m .

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

extra

1. Fissata una base \mathcal{B}_1 di \mathbb{R}^m e una base \mathcal{B}_2 di \mathbb{R}^n è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tale che

$$f(v) = Fv, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

2. Fissata una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^n , sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice di cambio di base da \mathcal{B} di \mathbb{R}^n ad una “nuova” base \mathcal{B}' di \mathbb{R}^n . La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0\},$$

$$\text{im } F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n : w = Av, \exists v \in \mathbb{R}^m\}.$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ .

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i .

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfa

$$(F - \lambda_i I)v = 0_n.$$

5. La molteplicità algebrica g_i di autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente indipendenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(F - \lambda_i I).$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

Esempio: diagonalizzazione

extra

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F \text{ diagonalizzabile?} \quad \text{Se sì, calcolare } T.$$

$\lambda_1 = i, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = -i, \nu_2 = 1, g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile}$ ✓

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
 - ▷ Concetti base di algebra lineare
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
 - ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile ($\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i)

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile ($\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i)



Esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $F_D = T^{-1}FT$ diagonale

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile ($\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i)



Esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $F_D = T^{-1}FT$ diagonale

Come ci aiuta questo nel calcolo di e^{Ft} ?

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

extra

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile ($\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i)

$$F = TF_D T^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_D T^{-1} t}$$

$$(TF_D T^{-1} t)^n = T(F_D t)^n T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = Te^{F_D t}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
 - ▷ Concetti base di algebra lineare
 - ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
 - ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Obiettivo

Calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Obiettivo

Calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T ?

Obiettivo

Calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T ?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ “quasi” diagonale!

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 2 \Rightarrow \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = 0, \nu_2 = 1, g_2 = 1$
 $\Rightarrow \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 2 \Rightarrow \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = 0, \nu_2 = 1, g_2 = 1$
 $\Rightarrow \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 1 \Rightarrow \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗



possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o “quasi” diagonali (forma di Jordan)

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗



possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o “quasi” diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi “quasi” diagonali hanno la forma di slide 15!

$$\begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix}$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 baggiogi.github.io

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

back

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n t^n}{n!}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = I + Ft + F^2 \frac{t^2}{2} + F^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\dots & 0 \\ 0 & 1+2t+4\frac{t^2}{2}+\frac{8t^3}{3!}+\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

back

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{(i) } N^0 &= I, \quad N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \\ \text{(ii) } e^{I+N} &= e^I e^N \end{aligned} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n t^n}{n!}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \text{ metodi}$$

$$1) \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2}}_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!}}_{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + \dots$$

$$= \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} \frac{t^n}{n!} & \cancel{n \frac{t^n}{n!}} \\ 0 & \frac{t^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & \cancel{[t e^t]} \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \quad \text{comportamento non presente nel caso scalare}$$

$$\sum_{n \geq 0} n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = t e^t$$

2) metodo "furbo"

matriç A e B commutano

Proprietà: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se $\boxed{AB = BA} \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

N e I commutano? ✓

$$IN = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad NI = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = e^{(I+N)t} = e^{It} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \frac{t^2}{2} + \dots \quad (N^k = 0, k \geq 2)$$