



## Nelle scorse lezioni

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## In questa lezione

- ▷ Forma canonica di Jordan: costruzione
- ▷ Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- ▷ Forma canonica di Jordan: osservazioni
- ▷ Polinomi annullatori e polinomio minimo

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$  molteplicità algebrica  $\lambda_i$

$g_i =$  molteplicità geometrica  $\lambda_i$

Caso 1:  $\nu_i = g_i$  per ogni  $i \implies F$  diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste  $i$  tale che  $\nu_i > g_i \implies F$  non diagonalizzabile ✗

↓

Non esistono  $\nu_i$  vettori lin. indep. in  $\ker(F - \lambda_i I)$

*Però possiamo aggiungere agli autovettori di  $\lambda_i$  altri  $\nu_i - g_i$  vettori lin. indep. in modo da formare  $\nu_i$  vettori lin. indep.!*

*Tante scelte possibili, ma ne esiste una "furba"...*

## Fatto importante

$\ker(F - \lambda_i I)^\ell \subseteq \ker(F - \lambda_i I)^{\ell+1}$ , per ogni  $\ell = 1, 2, 3, \dots$

ed esiste  $\bar{\ell}$  tale che  $\dim \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}} = \nu_i$

## Forma di Jordan: costruzione

$F \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$  con 1 autovalore  $\lambda_1$  con  $\nu_1 = 10$  e  $g_1 = 5$

$\dim \ker(F - \lambda_1 I) = 5$        $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  autovettori lin. indep.

$\dim \ker(F - \lambda_1 I)^2 = 8$        $v_6, v_7, v_8$

$\dim \ker(F - \lambda_1 I)^3 = 9$        $v_9$       autovettori generalizzati

$\dim \ker(F - \lambda_1 I)^4 = 10$        $v_{10}$

$\{v_1, \dots, v_{10}\}$  base di  $\mathbb{R}^{10}$

## Forma di Jordan: costruzione

$v_{10} : (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0, (F - \lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$

$\omega_9 \triangleq (F - \lambda_1 I) v_{10} : (F - \lambda_1 I)^3 \omega_9 = 0, (F - \lambda_1 I)^2 \omega_9 \neq 0$

$v_9 \leftarrow \omega_9$

$\omega_8 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_9 : (F - \lambda_1 I)^2 \omega_8 = 0, (F - \lambda_1 I) \omega_8 \neq 0$

$v_8 \leftarrow \omega_8$

$\omega_5 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_8 : (F - \lambda_1 I) \omega_5 = 0$

catena di autovettori generalizzati  
 $\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$v_5 \leftarrow \omega_5$

## Forma di Jordan: costruzione

$$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$$

$$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$$

$$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$$

$$\mathcal{C}_4 = v_2$$

$$\mathcal{C}_5 = v_1$$

matrice di cambio base

$$T = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5]$$

oppure  $T = [\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1]$

oppure  $T = [\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$

*...ma mai spezzare le catene!*

## Forma di Jordan: costruzione

che forma ha  $F' = T^{-1}FT$ ?

$$(F - \lambda_1 I)\omega_5 = 0 \implies F\omega_5 = \lambda_1\omega_5$$

$$(F - \lambda_1 I)\omega_8 = \omega_5 \implies F\omega_8 = \omega_5 + \lambda_1\omega_8$$

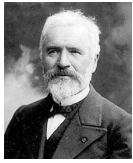
$$(F - \lambda_1 I)\omega_9 = \omega_8 \implies F\omega_9 = \omega_8 + \lambda_1\omega_9$$

$$(F - \lambda_1 I)v_{10} = \omega_9 \implies Fv_{10} = \omega_9 + \lambda_1v_{10}$$

$$F\omega_4 = \lambda_1\omega_4 \quad F\omega_3 = \lambda_1\omega_3 \quad Fv_2 = \lambda_2v_2 \quad Fv_1 = \lambda_1v_1$$

$$Fv_6 = \omega_4 + \lambda_1v_6 \quad Fv_7 = \omega_3 + \lambda_1v_7$$

## Forma di Jordan: costruzione



$$F_J \triangleq F' = T^{-1}FT =$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc|c|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right]$$

## Forma di Jordan: caso generale

$F$  ha autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  (possibilmente con  $\nu_i > g_i$ )

**Fatto importante:** autovettori (veri o generalizzati) corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.

$$F_J = T^{-1}FT = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_\ell} \end{array} \right] \quad J_{\lambda_i} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{array} \right] \quad J_{\lambda_i,j} = \left[ \begin{array}{cccc} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{array} \right]$$

blocco di Jordan

miniblocco di Jordan

## Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , calcolare autovalori  $\lambda_i$ , molt. algebriche  $\nu_i$  e geometriche  $g_i$
2. Per tutti i  $\lambda_i$  tali che  $\nu_i = g_i$  calcolare  $\nu_i$  autovettori lin. indep.
3. Per tutti i  $\lambda_i$  tali che  $\nu_i > g_i$  (se esistono) calcolare  $\nu_i$  vettori lin. indep. completando i  $g_i$  autovettori con  $\nu_i - g_i$  autovettori generalizzati in

$$\ker(F - \lambda_i I)^2, \ker(F - \lambda_i I)^3, \dots, \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}}$$

4. Calcolare le catene di Jordan partendo dagli ultimi autovettori generalizzati  
(e ordinarle in maniera "crescente"!)
5. Calcolare la matrice di cambio di base  $T$  ottenuta concatenando le catene  
(senza spezzarle!)
6.  $F_J = T^{-1}FT$

## Forma di Jordan: osservazioni

1. La forma canonica di Jordan  $F_J$  è univocamente determinata a meno di una permutazione dei suoi blocchi/miniblocchi.
2. Dimensione blocco = molteplicità algebrica autovalore corrispondente  
Dimensione miniblocco = lunghezza catena corrispondente  
Numero miniblocchi = molteplicità geometrica autovalore corrispondente
3. Per calcolare  $F_J$  non è sempre necessario il calcolo esplicito delle catene!!!

(i)  $F : \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 1, \lambda_2 = 5, \nu_2 = 2, g_2 = 2$

(ii)  $F : \lambda_1 = 2, \nu_1 = 3, g_1 = 2$

(iii)  $F : \lambda_1 = 2, \nu_1 = 3, g_1 = 1$

## Polinomio annullatore di una matrice

**Definizione:** Un polinomio  $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \dots + a_1x + a_0$  si dice *polinomio annullatore* di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se

$$p(F) = a_\ell F^\ell + a_{\ell-1}F^{\ell-1} + \dots + a_1F + a_0I = 0.$$

$$p(F) = 0 \iff p(T^{-1}FT) = 0, \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{matrice di cambio di base}$$

$$\iff p(F_J) = 0$$

$$\iff p(J_{\lambda_{i,j}}) = 0, \quad \forall i, j$$

## Polinomio annullatore di una matrice

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_\ell)^{\alpha_\ell} \implies p(F) = (F - x_1I)^{\alpha_1} \dots (F - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

$$\text{Analizziamo un miniblocco: } p(J_{\lambda_{i,j}}) = (J_{\lambda_{i,j}} - x_1I)^{\alpha_1} \dots (J_{\lambda_{i,j}} - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

---

Per avere  $p(F) = 0$ :

- $p(\lambda_i) = 0$ , per ogni autovalore  $\lambda_i$  di  $F$
- $\alpha_i \geq$  dimensione del più grande miniblocco associato a  $\lambda_i \triangleq h_i$



## Polinomio minimo di una matrice

**Definizione:** Il polinomio annullatore di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  di grado più piccolo possibile si dice *polinomio minimo* di  $F$  e verrà denotato con  $\Psi_F(x)$ .

$$\Psi_F(x) = (x - \lambda_1)^{h_1} (x - \lambda_2)^{h_2} \cdots (x - \lambda_k)^{h_k}$$

Notare che:  $\nu_i \geq h_i$

## Teorema di Cayley–Hamilton



**Teorema:** Il polinomio caratteristico di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è sempre un polinomio annullatore di  $F$  stessa:

$$\Delta_F(F) = 0.$$

Più precisamente  $\Delta_F(x)$  è un multiplo di  $\Psi_F(x)$  e

$\Delta_F(x) = \Psi_F(x)$  quando  $F$  ha un solo miniblocco per ogni autovalore!