Lezione 11: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + x_2(t) - \alpha x_2^3(t) + \alpha(x_1(t) - x_2(t))^3 \\ \dot{x}_2(t) = -(1+\alpha)x_1(t) + \alpha(x_1(t) - x_2(t))^3 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando la linearizzazione e, negli eventuali casi critici, la funzione $V(x_1, x_2) = x_2^4 + (x_1 - x_2)^4$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)x_1^2(t)x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)x_2^2(t)x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando la linearizzazione e, negli eventuali casi critici, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t)$$

Si calcolino le soluzioni (se esistono) P dell'equazione di Lyapunov $F^\top P + PF = -Q$ per $Q = I$. In base alle soluzioni trovate si discuta la stabilità del sistema.

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t)$$

Si calcolino le soluzioni (se esistono) P dell'equazione di Lyapunov $F^\top PF - F = -Q$ per $Q = I$. In base alle soluzioni trovate si discuta la stabilità del sistema.

Soluzioni

Esercizio 1. L'equilibrio è asintoticamente stabile per $-1 < \alpha < 0$ e instabile per $\alpha < -1$ e $\alpha > 0$. Nel caso critico $\alpha = -1, 0$ l'equilibrio è semplicemente stabile per $\alpha = 0$ (il sistema diventa lineare) e asintoticamente stabile per $\alpha = -1$ applicando i teoremi di Lyapunov e Krasowskii.

Esercizio 2. L'equilibrio è asintoticamente stabile per $|\alpha| < 1$ e instabile per $|\alpha| > 1$. Nel caso critico $|\alpha| = 1$ l'equilibrio è semplicemente stabile applicando i teoremi di Lyapunov e Krasowskii.

Esercizio 3. Esiste un'unica soluzione $P = \begin{bmatrix} \frac{17}{40} & \frac{7}{40} \\ \frac{7}{40} & \frac{9}{40} \end{bmatrix}$. Il sistema è asintoticamente stabile perchè $P \succ 0$.

Esercizio 4. Esiste un'unica soluzione $P = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$. Il sistema non è asintoticamente stabile perchè P è indefinita (calcolando gli autovalori di F, ci si accorge che il sistema è instabile).