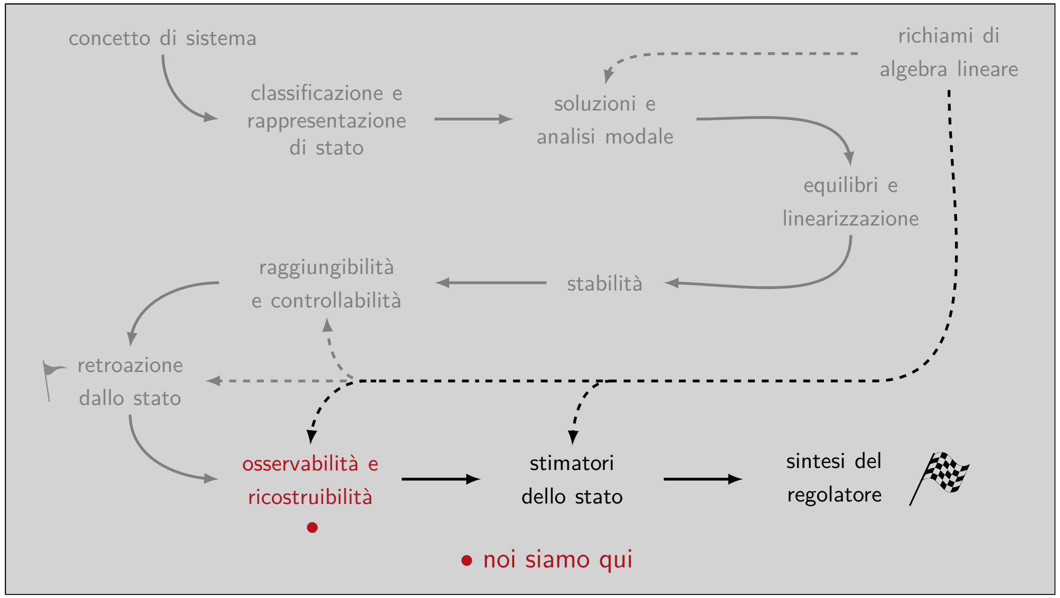
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

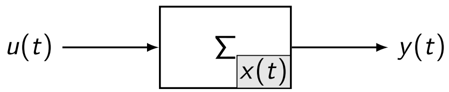


## In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

## Osservabilità e ricostruibilità

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

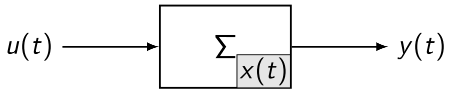



**Osservabilità** = possibilità di stimare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

**Ricostruibilità** = possibilità di stimare lo stato finale $x(\bar{t})$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

## Stati e spazi non osservabili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



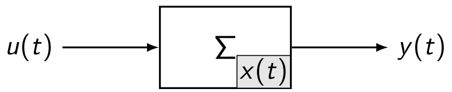

**Definizione:** Uno stato $\bar{x}$ si dice non osservabile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}$ coincide su $[0, \bar{t}]$ con l'uscita corrispondente allo stato iniziale $x(0) = 0$.

**Definizione:** L'insieme di tutti gli stati non osservabili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto spazio non osservabile in $[0, \bar{t}]$.



## Stati indistinguibili (nel futuro)

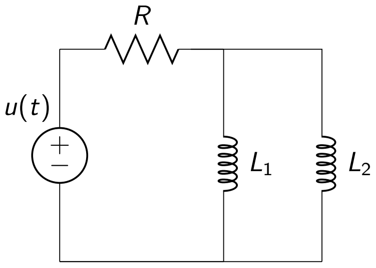
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$




**Definizione:** Due stati $\bar{x}'$ e $\bar{x}''$ si dicono indistinguibili (nel futuro) nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}''$ coincidono su $[0, \bar{t}]$.

*stato non osservabile* $=$ *stato indistinguibile da zero*

# Esempio introduttivo




$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

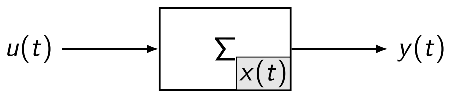
$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è non osservabile $\forall t > 0$



# Stati e spazi non ricostruibili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$




**Definizione:** Uno stato $\bar{x}$ si dice non ricostruibile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se ogni ingresso $u(\cdot)$ e uscita $y(\cdot)$ in $[0, \bar{t}]$ "compatibili" con un'evoluzione di stato $x'(t)$ con stato finale $x'(\bar{t}) = \bar{x}$ sono anche "compatibili" con un'evoluzione di stato $x''(t)$ con $x''(\bar{t}) \neq \bar{x}$.

**Definizione:** L'insieme di tutti gli stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto spazio non ricostruibile in $[0, \bar{t}]$.

## Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$y(t) = HF^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) = HF^t x_0 + H\mathcal{R}_t u_t$$



## Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = \bar{x}$$

$$u(0), u(1), u(2), \ldots \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(0), y(1), y(2), \ldots$$

$$y(k) = HF^k \bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

Insieme di stati $\bar{x}$ osservabili da misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}$, $\{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

## Spazio non osservabile

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = HF^k\bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H\mathcal{R}_k u_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1$$

$$y(k) - y_0(k) = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots, t-1 \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathcal{O}_t} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \bar{x} \in \ker \mathcal{O}_t$$

$\mathcal{O}_t$ = matrice di osservabilità in $t$ passi



## Spazio non osservabile

$X_{NO}(t)$ = spazio non osservabile in $t$ passi = $\ker(\mathcal{O}_t)$
(o nell'intervallo $[0, t-1]$)
(o con $t$ misure)

**Teorema:** Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

## Criterio di osservabilità

**Definizione:** Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) osservabile in $t$ passi (o con $t$ misure) se $t$ è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

$$p = 1\text{: } \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

$$p > 1\text{: } \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}^\top \mathcal{O}) \neq 0$$



## Esempi

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\implies$ non osservabile

**2.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\implies$ osservabile (in 2 passi)

## Osservabilità ed equivalenza algebrica

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z=T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \; \bar{H} = HT$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{O}}) = \text{rank}(\mathcal{O}) \implies$ cambio di base non modifica l'osservabilità !!

---

Inoltre, se $\Sigma$ osservabile: $\mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^\top \mathcal{O} T \implies T = (\mathcal{O}^\top \mathcal{O})^{-1}\mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}}$



## Calcolo dello stato iniziale

Se $\Sigma$ è osservabile in $t$ passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

$$y_\ell(k) = HF^k\bar{x} = y(k) - H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{t-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \mathcal{O}_t \bar{x} \implies \bar{x} = (\mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t)^{-1}\mathcal{O}_t^\top \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_t \triangleq \mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t = \text{Gramiano di osservabilità in } t \text{ passi}$$

## Esempi

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

Calcolare $x(0)$ dalle misure $u(0) = 1,\ u(1) = 1$ e $y(0) = 1,\ y(1) = 2,\ y(2) = 2$?

---

Poichè il sistema è osservabile lo stato iniziale è unico e pari a $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



## Indistinguibilità

$$x(0) = \bar{x}',\ u(\cdot) \implies y'(k) = HF^k\bar{x}' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$x(0) = \bar{x}'',\ u(\cdot) \implies y''(k) = HF^k\bar{x}'' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$\begin{aligned} \bar{x}',\ \bar{x}'' \text{ indistinguibili in } t \text{ passi} &\implies y'(k) = y''(t), \qquad k = 0, 1, \ldots, t-1 \\ &\implies HF^k(\bar{x}' - \bar{x}'') = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, t-1 \\ &\implies \bar{x}' - \bar{x}'' \in X_{NO}(t) \end{aligned}$$

$\boxed{\bar{x} + X_{NO}(t)\text{: classe di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } \bar{x}}$

$\boxed{\bar{x} + X_{NO}\text{: classe di stati indistinguibili da } \bar{x}}$

## Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0$$

$$u(0), u(1), u(2), \dots \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(0), y(1), y(2), \dots$$

$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$



## Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0$$

$$u(0), u(1), u(2), \dots \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(0), y(1), y(2), \dots$$

$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati $\bar{x} = x(t-1)$ ricostruibili da misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}$, $\{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$?

Quando possiamo ricostruire tutti i possibili stati $\bar{x} = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$?

## Spazio non ricostruibile

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t-1) = F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$F^{t-1}X_{NO}(t) =$ insieme di stati non ricostruibili in $t$ passi



## Spazio non ricostruibile

$X_{NR}(t) =$ spazio non ricostruibile in $t$ passi $= \{F^{t-1}x,\ x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$
(o nell'intervallo $[0, t-1]$)
(o con $t$ misure)

**Teorema:** Gli spazi non ricostruibili soddisfano:

$$X_{NR}(1) \supseteq X_{NR}(2) \supseteq X_{NR}(3) \supseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NR}(i) = X_{NR}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$X_{NR} \triangleq X_{NR}(i) =$ (minimo) spazio non ricostruibile

## Criterio di non ricostruibilità

**Definizione:** Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema $\Sigma$ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in $t$ passi (o con $t$ misure) se $t$ è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}}$$

$$\Sigma \text{ osservabile } (X_{NO} = \{0\}) \Rightarrow \Sigma \text{ ricostruibile}$$

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ osservabile !!!}$$



## Esempi

**1.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ non osservabile
ma ricostruibile se $f_1 = 0$

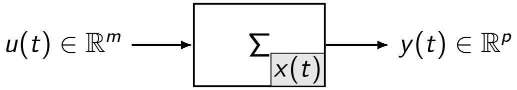
**2.** $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\Longrightarrow$ osservabile e (quindi) ricostruibile

## Osservabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$




$$y(t) = He^{Ft}\bar{x} + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Insieme di stati $\bar{x}$ osservabili da misure nell'intervallo $[0, t]$?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?



## Criterio di osservabilità

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$$X_{NO} = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

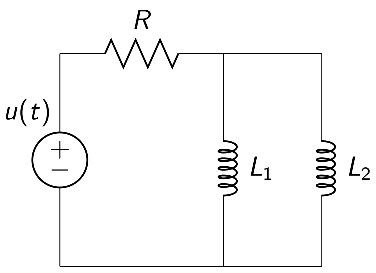
**Definizione:** Un sistema $\Sigma$ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

**N.B.** Se un sistema $\Sigma$ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$ !!

## Esempio




$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma$ non osservabile



## Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

misure $u(\tau)$, $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t)$ = insieme di stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, t]$

$e^{Ft}$ invertibile $\implies X_{NR}(t) = X_{NO}(t)$

osservabilità = ricostruibilità !!