Lezione 10: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - 4\sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -2\sin^2(x_1(t)) + x_2(t)e^{x_1(t)} \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha - 1)x_1(t) - x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione, o, nei casi critici, usando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha x_1(t)(1 - x_1^2(t)) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione, o, nei casi critici, usando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$.

Soluzioni

Esercizio 1. L'equilibrio è instabile, perchè il linearizzato ha un autovalore in $+1$.

Esercizio 2. L'equilibrio è asintoticamente stabile per $0 \leq \alpha \leq 1$ e instabile per $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$ (caso critico: $\alpha = 0, 1$ si risolve con il teorema di Lyapunov notando che $\dot{V}(x_1, x_2) = -2((1-\alpha)x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_1^4 + x_2^3) < 0$, che è definita negativa per $\alpha = 0, 1$).

Esercizio 3. L'equilibrio è asintoticamente stabile per $|\alpha| \leq 1$ e instabile per $|\alpha| > 1$ (caso critico: $|a| = 1$ si risolve con il teorema di Lyapunov notando che $\Delta V(x_1, x_2) = -x_1^4(1-x_1^2) - x_2^4$ che è definita negativa).