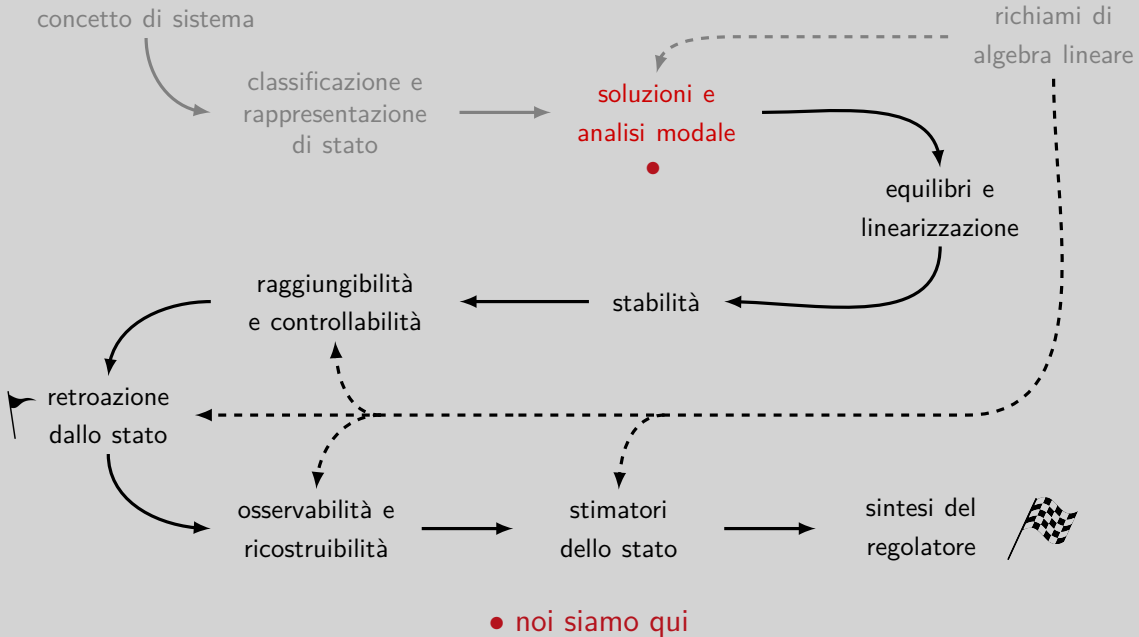# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo discreto)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

concetto di sistema

classificazione e rappresentazione di stato

soluzioni e analisi modale

richiami di algebra lineare

equilibri e linearizzazione

raggiungibilità e controllabilità

stabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

● noi siamo qui

Nella scorsa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica

▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

In questa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto

▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto

▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?
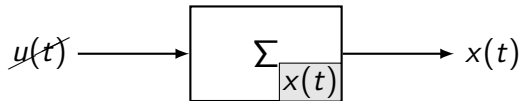
Caso vettoriale $\qquad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = F^t x_0$$

Usiamo Jordan!

1. $F = TF_J T^{-1} \implies F^t = TF_J^t T^{-1}$

2. $F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{bmatrix} \implies F_J^t = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k}^t \end{bmatrix}$

3. $J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{bmatrix} \implies J_{\lambda_i}^t = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i,2}^t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i}^t \end{bmatrix}$

Usiamo Jordan!

$$
\textbf{4. } J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \quad {\color{red} \lambda_i \neq 0 \implies } J_{\lambda_i,j}^t = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\implies J_{\lambda_i,j}^t = \begin{bmatrix} \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} & \cdots & \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t \end{bmatrix}
$$

Usiamo Jordan!

$$
\textbf{4. } J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \xrightarrow{\lambda_i = 0} J_{\lambda_i,j}^t = N^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\implies J_{\lambda_i,j}^t = \begin{bmatrix} \delta(t) & \delta(t-1) & \delta(t-2) & \cdots & \delta(t-r_{ij}+1) \\ 0 & \delta(t) & \delta(t-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta(t) \end{bmatrix}
$$

Modi elementari

$$\binom{t}{0}\lambda_i^t, \ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1}, \ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2}, \ \dots, \ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1}$$
$$\delta(t), \ \delta(t-1), \ \delta(t-2), \ \dots, \ \delta(t-r_{ij}+1)$$
$$= \text{Modi elementari del sistema}$$

1. $\lambda_i \neq 0$: $\binom{t}{k}\lambda_i^{t-k} \sim t^k \lambda_i^t = t^k e^{t(\ln \lambda_i)}$ ($\ln(\cdot) = $ logaritmo naturale complesso)

2. $\lambda_i = 0$: modo elementari si annullano dopo un numero finito di passi !

> Non esiste una controparte modale a tempo continuo !!

Evoluzione libera
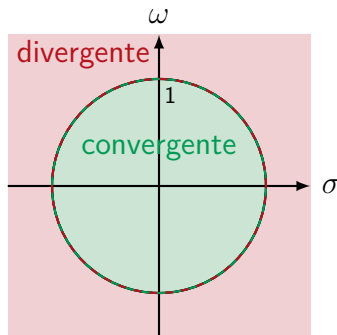
$$x(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = HF^t x_0 = \sum_{i,j} t^j \lambda_i^t v_{ij}$$

$$= \text{combinazione lineare dei modi elementari}$$

Carattere dei modi elementari

modo associato a $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$|\lambda_i| < 1, \forall i \qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t \xrightarrow{t \to \infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$

 $F^t = 0$ per t finito se $\lambda_i = 0$!

$|\lambda_i| \leq 1, \; \forall i$ e
$\nu_i = g_i$ se $|\lambda_i| = 1$ $\qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t$ limitata $\Rightarrow y(t) = HF^t x_0$ limitata

$\exists \, \lambda_i$ tale che $|\lambda_i| > 1$
o $|\lambda_i| = 1$ e $\nu_i > g_i$ $\qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t$ non limitata $\Rightarrow y(t) = HF^t x_0$?

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = F^t x_0, \qquad x_f(t) \ ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = HF^t x_0, \qquad y_f(t) \ ??$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = \text{ risposta impulsiva } = \begin{cases} J, & t = 0 \\ HF^t G, & t \geq 1 \end{cases}$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{=x_f(t)} = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\mathcal{R}_t u_t}_{=x_f(t)} \qquad u_t \triangleq \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)} = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{H\mathcal{R}_t u_t + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$$\mathcal{R}_t \triangleq \begin{bmatrix} G & | & FG & | & F^2 G & | & \cdots & | & F^{t-1} G \end{bmatrix} = \text{matrice di raggiungibilità in } t \text{ passi}$$

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t)z^{-t}$$

$$X(z) = \underbrace{z(zI - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - F)^{-1}G}_{=X_f(z)}$$

$$Y(z) = \underbrace{Hz(zI - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(z)} + \underbrace{[H(zI - F)^{-1}G + J]U(z)}_{=Y_f(z)}$$

Equivalenze dominio temporale/Zeta

1. $W(z) = \mathcal{Z}[w(t)] = H(zI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{Z}[F^t] = z(zI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare F^t !!

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, \ G_J = T^{-1}G, \ H_J = HT, \ J_J = J)$$

$$W(z) = W_J(z) = H_J(zI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{bmatrix}, \quad G_J = \begin{bmatrix} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{bmatrix}, \quad H_J = \begin{bmatrix} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{bmatrix}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$
F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{bmatrix}, \quad G_J = \begin{bmatrix} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{bmatrix}, \quad H_J = \begin{bmatrix} H_{\lambda_1,1} & | & H_{\lambda_1,2} & | & \cdots & | & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{bmatrix}
$$

$$
W(z) = H_{\lambda_1,1}(zI - J_{\lambda_1,1})^{-1} G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(zI - J_{\lambda_1,2})^{-1} G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,\ell_k}(zI - J_{\lambda_k,\ell_k})^{-1} G_{\lambda_k,\ell_k} + J
$$

$$
= W_{\lambda_1,1}(z) + W_{\lambda_1,2}(z) + \cdots + W_{\lambda_k,\ell_k}(z) + J
$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(z) = \frac{A_1}{z - \lambda_i} + \frac{A_2}{(z - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(z - \lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(z)U(z) + JU(z) \right]$$