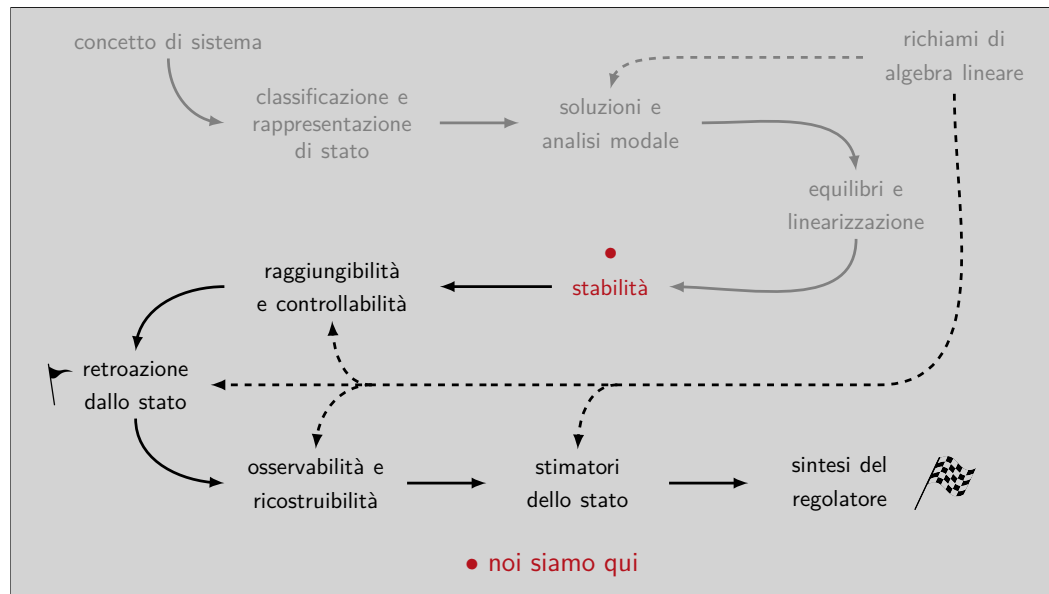


Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020



## Nella scorsa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi nonlineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.d.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$\dot{z} = Fz$ , sistema linearizzato attorno a  $\bar{x}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  autovalori di  $F$

1. Se  $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies \bar{x}$  asintoticamente stabile
2. Se  $\exists i$  tale che  $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$  instabile
3. Se  $\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i$ , e  $\exists i$  tale che  $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$  caso critico!

Con una funzione di Lyapunov  $V(x)$ : **3.1.**  $\dot{V}(x)$  semidef. neg.  $\implies \bar{x}$  sempl. stabile

**3.2.**  $\dot{V}(x)$  def. neg.  $\implies \bar{x}$  asint. stabile

## Teorema di Krasowskii (t.c.)

Se abbiamo una  $V(x)$  con  $\dot{V}(x)$  semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di  $\bar{x}$  ?

**Teorema:** Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un'intorno  $\mathcal{I}$  di  $\bar{x}$  tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale  $x(t) = \bar{x}, \forall t$ ) che sia interamente contenuta in  $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ , allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile. Altrimenti,  $\bar{x}$  è semplicemente stabile.

## Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ( $m = k = 1$ ):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$$

$$\implies \bar{x} = 0 \text{ semplicemente stabile}$$

## Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ( $m = k = \nu = 1$ ):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\implies \bar{x} = 0 \text{ asintoticamente stabile}$$

## Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ( $m = \ell = 1$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \dot{V}(x_1, x_2) = 0, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$$

$$\implies \bar{x} = 0 \text{ semplicemente stabile}$$

## Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ( $m = \ell = \nu = 1$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\implies \bar{x} = 0 \text{ asintoticamente stabile}$$

## Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

$$5. \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2), \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\implies \bar{x} = 0$  semplicemente stabile

## Teorema di Krasowskii (t.d.)

$$\dot{x}(t+1) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

**Teorema:** Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \Delta V(x) = 0\}.$$

Se esiste un'intorno  $\mathcal{I}$  di  $\bar{x}$  tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale  $x(t) = \bar{x}, \forall t$ ) che sia interamente contenuta in  $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ , allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile. Altrimenti,  $\bar{x}$  è semplicemente stabile.

## Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, TT^\top = I \text{ tale che } T^\top P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \|y_1\|^2 + \lambda_2 \|y_2\|^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1, \lambda_2\} \|y\|^2 \leq V(x_1, x_2) \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \|y\|^2$$

$$\implies V(x_1, x_2) \text{ positiva (semi)definita} \iff \lambda_1, \lambda_2 > (\geq) 0$$

## Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

**Definizione:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica ( $P = P^\top$ ) con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , si dice (semi)definita positiva se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq) 0$ . Se  $P$  è (semi)definita positiva, scriviamo  $P \succ (\succeq) 0$ .

**N.B.**  $P = P^\top$  positiva (semi)definita  $\implies V(x) = x^\top P x$  positiva (semi)definita

**Definizione:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica ( $P = P^\top$ ) con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , si dice (semi)definita negativa se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k < (\leq) 0$ . Se  $P$  è (semi)definita negativa, scriviamo  $P \prec (\preceq) 0$ .

**Definizione:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica ( $P = P^\top$ ) si dice indefinita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

## Test di Sylvester

**Fatto:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica ( $P = P^\top$ ) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di  $P$  sono positivi.

**Esempi:**

$$1. P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies P \text{ positiva definita}$$

$$2. P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \implies P \text{ indefinita}$$

## Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad \text{equilibrio } \bar{x} = 0$$

Consideriamo la forma quadratica:  $V(x) = x^\top Px$ ,  $P \succ 0$

Come scegliere  $P$  affinché  $V(x)$  sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

Per il teorema di Lyapunov:  $\dot{V}(x)$  deve essere negativa (semi)definita !!



## Sistemi lineari e teorema di Lyapunov (t.c.)

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = x^\top F^\top P x + x^\top P F x = x^\top (F^\top P + P F) x \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\implies F^\top P + P F = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.c.})$$

**Teorema:** Dato un sistema  $\dot{x} = Fx$  e una matrice  $P \succ 0$ :

1. Se  $F^\top P + P F = -Q$  con  $Q \succeq 0$  allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se  $F^\top P + P F = -Q$  con  $Q \succ 0$  allora il sistema è asintoticamente stabile.

## Esempi

$$1. F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + P F) \text{ positiva definita}$$

$$2. F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + P F) \text{ indefinita}$$

## Equazione di Lyapunov (t.c.)

extra

Come scegliere  $P$  affinché  $V(x)$  sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

**Teorema:** Dato un sistema  $\dot{x} = Fx$  asintoticamente stabile, per ogni  $Q \succ 0$  esiste un'unica matrice  $P \succ 0$  tale che

$$F^T P + P F = -Q.$$

Inoltre  $P$  è data dall'espressione

$$P = \int_0^\infty e^{F^T t} Q e^{F t} dt.$$

## Esempi

extra

1.  $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  positiva definita

2.  $F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$  positiva definita

## Test per la stabilità asintotica di sistemi lineari a t.c.

1. Fissare una  $Q \succ 0$  (presa a caso)
2. Risolvere il sistema di equazioni lineari  $F^\top P + PF = -Q$ 
  - 2.1 Se il sistema non ammette soluzioni o ne ammette infinite allora il sistema **non** è asintoticamente stabile
  - 2.2 Se il sistema ammette un'unica soluzione allora:
    - 2.2.1 Se  $P \succ 0$  allora il sistema è asintoticamente stabile
    - 2.2.2 Se  $P \not\succ 0$  allora il sistema **non** è asintoticamente stabile

## Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.
2. La condizione  $P \succ 0$  (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare la stabilità asintotica e non può essere sostituita con  $P \succeq 0$ .
3. Il test è vantaggioso da un punto di vista computazionale. Infatti permette di decidere circa la stabilità asintotica (o meno) del sistema **evitando completamente il calcolo esplicito degli autovalori di  $F$**  (spesso impraticabile per dimensioni  $n > 2$ ) !!

## Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.d.)

$$x(t+1) = Fx(t), \quad \text{equilibrio } \bar{x} = 0$$

Consideriamo la forma quadratica:  $V(x) = x^\top Px$ ,  $P \succ 0$

$$\begin{aligned}\Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) = x^\top(t+1)Px(t+1) - x^\top(t)Px(t) \\ &= x^\top(t)(F^\top PF - P)x(t) \quad \text{semidef. neg.}\end{aligned}$$

$$\implies F^\top PF - P = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.d.})$$

## Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

**Teorema:** Dato un sistema  $x(t+1) = Fx(t)$  e una matrice  $P \succ 0$ :

1. Se  $F^\top PF - P = -Q$  con  $Q \succeq 0$  allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se  $F^\top PF - P = -Q$  con  $Q \succ 0$  allora il sistema è asintoticamente stabile.

**Teorema:** Dato un sistema  $x(t+1) = Fx(t)$  asintoticamente stabile, per ogni  $Q \succ 0$  esiste un'unica matrice  $P \succ 0$  tale che

$$F^\top PF - P = -Q.$$

Inoltre  $P$  è data dall'espressione

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} (F^\top)^t Q F^t.$$