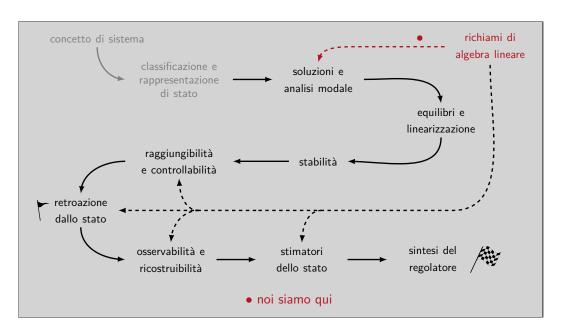
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3 & 4: Esponenziale di Matrice e Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2019-2020



-	

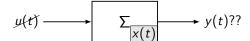
Nella scorsa lezione ▷ Classificazione di sistemi ▷ Rappresentazione di sistemi ▷ Sistemi lineari in spazio di stato ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

In questa lezione

Motivazione: solu	zioni di u	un sistema	autonomo
-------------------	------------	------------	----------

- ▶ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
 - ▶ Concetti base di algebra lineare
 - ▶ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
 - ▶ Forma canonica di Jordan: idea generale

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



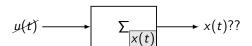
 Σ lineare, tempo invariante e autonomo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \equiv 0$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 5 / 26

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso scalare $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \quad x(0) = x_0$$

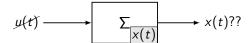
$$x(t) = e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2t^2}{2!} + \dots + \frac{f^nt^n}{n!} + \dots\right)x_0$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 6 / 26

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^nt^n}{n!} + \ldots\right)x_0$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 7 / 26

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n>0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esemplo 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 8 / 26

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n>0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale: F diagonale

$$F = \left[\begin{array}{cccc} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{array} \right] \implies e^{Ft} = \left[\begin{array}{cccc} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{array} \right]$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 9 / 26

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n>0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esemplo 2:
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i)
$$N^0 = I$$
, $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,...
$$\iff e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 3:
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i)
$$N^{0} = I$$
, $N^{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,...
$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} & \frac{t^{2}}{2!}e^{t} \\ 0 & e^{t} & te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

11 / 26

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n>0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale: F "quasi"-diagonale

$$F = \left[egin{array}{cccc} f & 1 & \cdots & 0 \ 0 & f & \ddots & dots \ dots & \ddots & f & 1 \ 0 & \cdots & 0 & f \end{array}
ight] \implies e^{Ft} = \left[egin{array}{cccc} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & rac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \ 0 & e^{ft} & \ddots & dots \ dots & \ddots & \ddots & te^{ft} \ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{array}
ight]$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n>0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esemplo 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^{0} = I, F^{1} = F, F^{2} = -I, F^{3} = -F, F^{4} = I,... \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi "semplici"...

....ma come fare in casi più complessi (F "piena" e senza "struttura")?

Strategia: Trasformare F in una forma "semplice" (diagonale o quasi-diagonale)!

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 14 / 26

Vettori e basi in \mathbb{R}^n

- **1.** L'insieme (di vettori) \mathbb{R}^n con campo (di scalari) \mathbb{R} dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.
- **2.** I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (dipendenti) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0, \ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\Rightarrow) \ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

- **3.** I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di \mathbb{R}^n se:
 - (i) generano \mathbb{R}^n : $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$
 - (ii) sono linearmente indipendenti

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

5 / 26

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

(i)
$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$$

(i)
$$f(\alpha v) = \alpha f(v)$$
, $\forall v \in \mathbb{R}^m$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

- **2.** Una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è completamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^m .
- **3.** Viceversa, data una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^m , una trasformazione $f: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ si può estendere linearmente in modo unico all'intero spazio \mathbb{R}^m .

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

- **1.** Fissata una base \mathcal{B}_1 di \mathbb{R}^m e una base \mathcal{B}_2 di \mathbb{R}^n è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ che descrive come le coordinate (rispetto a \mathcal{B}_1) di vettori di \mathbb{R}^m vengono mappate da f in coordinate di vettori (rispetto a \mathcal{B}_2) di \mathbb{R}^n .
- **2.** Fissata una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^n , sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice di cambio di base da \mathcal{B} di \mathbb{R}^n ad una "nuova" base \mathcal{B}' di \mathbb{R}^n . La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 17

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\ker F \triangleq \{ v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0 \},$$

$$\operatorname{im} F \triangleq \{ w \in \mathbb{R}^n : w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m \}.$$

- **2.** Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ .
- **3.** Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i .

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

-	

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfa

$$(F - \lambda_i I)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica g_i di autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(F - \lambda_i I).$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT$$
 è diagonale.

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

Esempio: diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
, F diagonalizzabile? Se sì, calcolare T .

$$\lambda_1 = i, \ \nu_1 = 1, \ g_1 = 1, \ \lambda_2 = -i, \ \nu_2 = 1, \ g_2 = 1 \implies F$$
 diagonalizzabile \checkmark

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 20 / 26

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

 $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile $(\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$



Esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $F_D = T^{-1}FT$ diagonale

Come ci aiuta questo nel calcolo di e^{Ft} ?

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 21 / 26

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

 $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile $(\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$

$$F = TF_DT^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_DT^{-1}t}$$

$$(TF_DT^{-1}t)^n = T(F_Dt)^nT^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_Dt}T^{-1}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019 22 / 26



Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
, calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$
, $F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$$e^{Ft} = Te^{F_D t} T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

23 / 26

Obiettivo

Calcolare
$$e^{Ft}$$
, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ "quasi" diagonale!

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

Esempi

1.
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1$$
, $\nu_1 = 2$, $g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile \checkmark

2.
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2, \ \nu_1 = 1, \ g_1 = 1, \ \lambda_2 = 0, \ \nu_2 = 1, \ g_2 = 1$$

$$\implies \nu_i = g_i \text{ diagonalizzabile } \checkmark$$

3.
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1$$
, $\nu_1 = 2$, $g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! \times

Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019

5 / 26

Forma di Jordan: idea generale

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
 con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

 $\nu_i = \text{molteplicità algebrica } \lambda_i$

 $g_i = \text{molteplicità geometrica } \lambda_i$

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile \checkmark

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile \times

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi "quasi" diagonali hanno la forma di slide 12!



Giacomo Baggio

IMC-TdS-1920: Lez. 3 & 4

October 8 & 14 2019