

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
 - ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
 - ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
 - ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Traiettorie di stato e ritratto di fase

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = f(x(t)), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\{x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$

Ritratto di fase del sistema = insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 1D

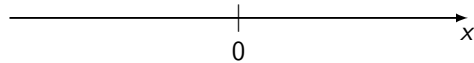
$$\dot{x}(t) = fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$f \in \mathbb{R},$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t) = f^t x_0 \quad (\text{t.d.})$$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 > \lambda_2 > 0 \text{ o } \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

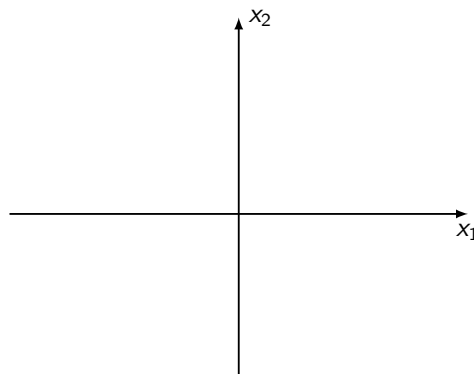
$$\dot{x}(t) = Fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t) = F^t x_0 \quad (\text{t.d.})$$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 > 0 > \lambda_2$$

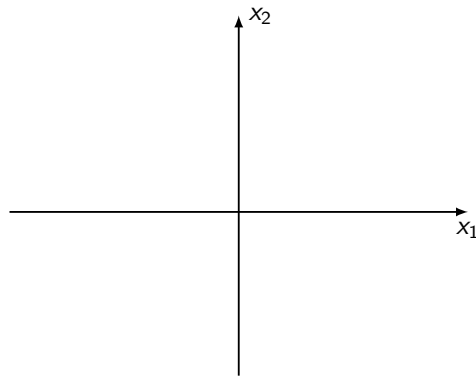
$$\dot{x}(t) = Fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t) = F^t x_0 \quad (\text{t.d.})$$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ (complessi coniugati)}$$

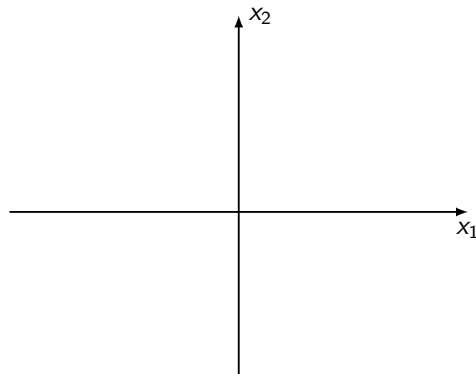
$$\dot{x}(t) = Fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t) = F^t x_0 \quad (\text{t.d.})$$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$$

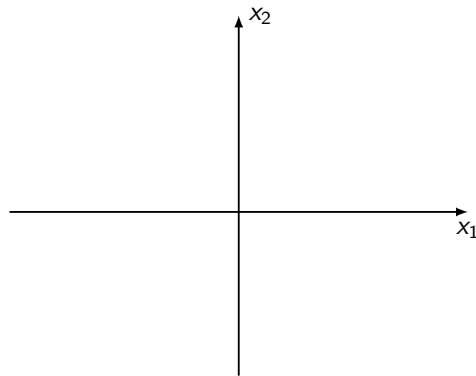
$$\dot{x}(t) = Fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t) = F^t x_0 \quad (\text{t.d.})$$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

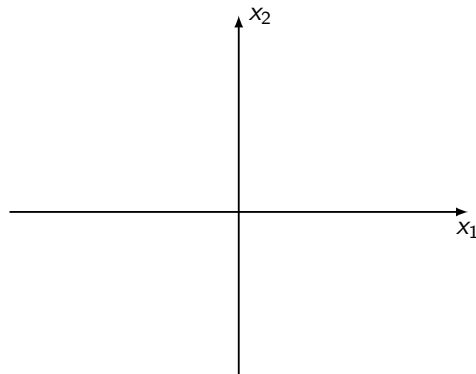
$$\dot{x}(t) = Fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t) = F^t x_0 \quad (\text{t.d.})$$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari nD

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.}) \quad x(t) = e^{Ft}x_0$$

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.}) \quad x(t) = F^t x_0$$

Fatto generale: Una traiettoria $x(t)$ giace su una retta passante per l'origine se e solo se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di F relativo ad un autovalore reale.

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.}) \quad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.}) \quad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Caso lineare: } \bar{x} \text{ equilibrio} & \iff & \begin{array}{ll} \bar{x} \in \ker F & (\text{t.c.}) \\ \bar{x} \in \ker(F - I) & (\text{t.d.}) \end{array} \end{array}$$

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1 - x) \implies$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \implies$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \implies$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \implies$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$u(t) \text{ costante, } u(t) = \bar{u}, \forall t \geq 0$$

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{array}{ll} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & \text{caso lineare} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) & \begin{array}{l} F\bar{x} = -G\bar{u} \quad (\text{t.c.}) \\ (I - F)\bar{x} = -G\bar{u} \quad (\text{t.d.}) \end{array} \end{array}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u} \implies$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \implies$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \implies$ nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$
un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$
due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

Stabilità semplice

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto **semplicemente stabile** se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Stabilità asintotica

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto **asintoticamente stabile** se:

1. \bar{x} è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a \bar{x} .

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere **locale**. Se le condizioni valgono $\forall x_0$ allora si parla di stabilità semplice/asintotica **globale**.
2. Per sistemi lineari si può parlare di **stabilità del sistema** invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.
3. Per sistemi lineari **stabilità locale = stabilità globale**. Inoltre:

stabilità semplice $\iff e^{Ft}$ limitata

stabilità asintotica $\iff e^{Ft}$ convergente

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x), t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x), t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots \approx f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x), t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots \approx f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Sistema linearizzato attorno a \bar{x} :

$$\dot{z} = \frac{d}{dx}f(\bar{x})z, \quad z \triangleq x - \bar{x}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}_+$ sistema n -dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio

Jacobiano di f valutato in x

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots, \quad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato attorno a \bar{x} :

$$\dot{z} = J_f(\bar{x})z, \quad z \triangleq x - \bar{x}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

$$1. \quad \dot{x} = \sin x \quad \begin{array}{l} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{z} = -z, \quad z \triangleq x - \pi \end{array}$$

$$2. \quad \dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 0$$

$$3. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$