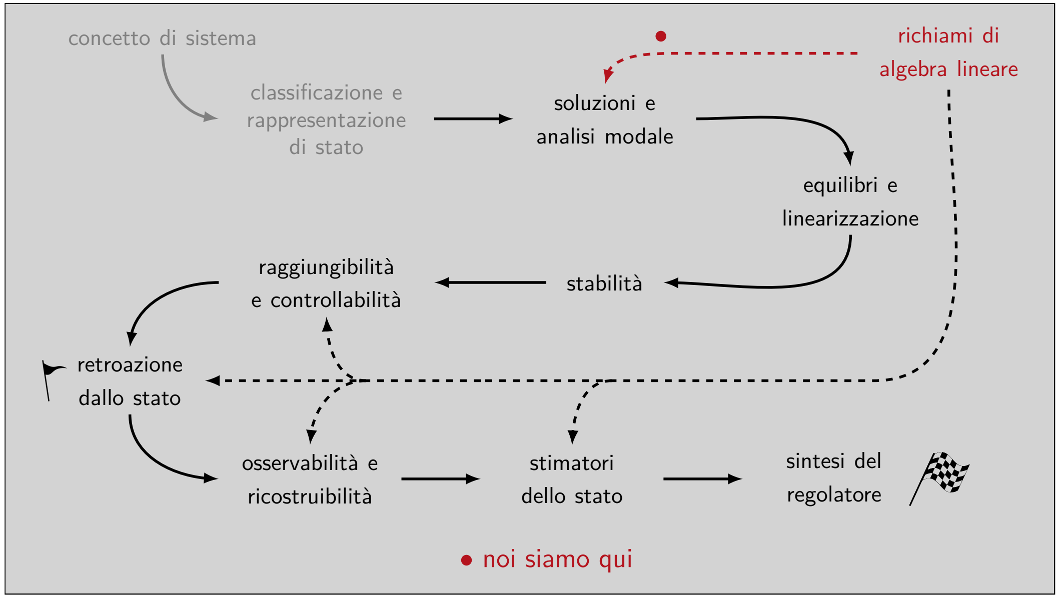
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Forma di Jordan e Polinomio Minimo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



Nelle scorse lezioni

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

In questa lezione

- ▷ Forma canonica di Jordan: costruzione
- ▷ Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- ▷ Forma canonica di Jordan: osservazioni
- ▷ Polinomi annullatori e polinomio minimo

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\ell}$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\Downarrow$

Non esistono ν_i vettori lin. indip. in $\ker(F - \lambda_i)$

Però possiamo aggiungere agli autovettori di λ_i altri $\nu_i - g_i$ vettori lin. indip. in modo da formare ν_i vettori lin. indip.!

Tante scelte possibili, ma ne esiste una "furba"...

Fatto importante

$$\ker(F - \lambda_i I)^{\ell} \subseteq \ker(F - \lambda_i I)^{\ell+1}, \text{ per ogni } \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

ed esiste $\bar{\ell}$ tale che $\dim\ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}} = \nu_i$

Forma di Jordan: costruzione

$F \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con 1 autovalore λ_1 con $\nu_1 = 10$ e $g_1 = 5$

$\dim\ker(F - \lambda_1 I) = 5$	v_1, v_2, v_3, v_4, v_5	autovettori lin. indip.
$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^2 = 8$	v_6, v_7, v_8	
$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^3 = 9$	v_9	autovettori generalizzati
$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^4 = 10$	v_{10}	

$\{v_1, \ldots, v_{10}\}$ base di $\mathbb{R}^{10}$

Forma di Jordan: costruzione

$v_{10} : (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0,\ (F - \lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$

$\omega_9 \triangleq (F - \lambda_1 I)v_{10} : (F - \lambda_1 I)^3\omega_9 = 0,\ (F - \lambda_1 I)^2\omega_9 \neq 0$

$v_9 \leftarrow \omega_9$

$\omega_8 \triangleq (F - \lambda_1 I)\omega_9 : (F - \lambda_1 I)^2\omega_8 = 0,\ (F - \lambda_1 I)\omega_8 \neq 0$

$v_8 \leftarrow \omega_8$

$\omega_5 \triangleq (F - \lambda_1 I)\omega_8 : (F - \lambda_1 I)\omega_5 = 0$

catena di autovettori generalizzati $\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$v_5 \leftarrow \omega_5$

Forma di Jordan: costruzione

$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$

$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$

$\mathcal{C}_4 = v_2$

$\mathcal{C}_5 = v_1$

matrice di cambio base

$T = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5]$

oppure $T = [\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1]$

oppure $T = [\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$

...ma mai spezzare le catene!

Forma di Jordan: costruzione

che forma ha $F' = T^{-1}FT$?

$(F - \lambda_1 I)\omega_5 = 0 \implies F\omega_5 = \lambda_1\omega_5$

$(F - \lambda_1 I)\omega_8 = \omega_5 \implies F\omega_8 = \omega_5 + \lambda_1\omega_8$

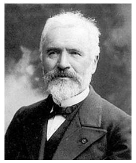
$(F - \lambda_1 I)\omega_9 = \omega_8 \implies F\omega_9 = \omega_8 + \lambda_1\omega_9$

$(F - \lambda_1 I)v_{10} = \omega_9 \implies Fv_{10} = \omega_9 + \lambda_1 v_{10}$

$F\omega_4 = \lambda_1\omega_4$ $\quad F\omega_3 = \lambda_1\omega_3$ $\quad Fv_2 = \lambda_2 v_2$ $\quad Fv_1 = \lambda_1 v_1$

$Fv_6 = \omega_4 + \lambda_1 v_6$ $\quad Fv_7 = \omega_3 + \lambda_1 v_7$

Forma di Jordan: costruzione



$$F_J \triangleq F' = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1
\end{array}\right]$$

Forma di Jordan: caso generale

F ha autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\ell}$ (possibilmente con $\nu_i > g_i$)

Fatto importante: autovettori (veri o generalizzati) corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.

$$F_J = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_\ell}
\end{array}\right] \qquad J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i}
\end{array}\right] \qquad J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix}
\lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\
0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 1 \\
0 & \cdots & 0 & \lambda_i
\end{bmatrix}$$

blocco di Jordan

miniblocco di Jordan

Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, calcolare autovalori λ_i, molt. algebriche ν_i e geometriche g_i
2. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i = g_i$ calcolare ν_i autovettori lin. indip.
3. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i > g_i$ (se esistono) calcolare ν_i vettori lin. indip. completando i g_i autovettori con $\nu_i - g_i$ autovettori generalizzati in

$$\ker(F-\lambda_i I)^2, \ker(F-\lambda_i I)^3, \dots, \ker(F-\lambda_i I)^{\bar{\ell}}$$

4. Calcolare le catene di Jordan partendo dagli ultimi autovettori generalizzati
5. Calcolare la matrice di cambio di base T ottenuta concatenando le catene *(nell'ordine inverso e senza spezzarle!)*
6. $F_J = T^{-1}FT$

Forma di Jordan: osservazioni

1. La Forma canonica di Jordan: idea generale F_J è univocamente determinata a meno di una permutazione dei suoi blocchi/miniblocchi.
2. Dimensione blocco = molteplicità algebrica autovalore corrispondente
   Dimensione miniblocco = lunghezza catena corrispondente
   Numero miniblocchi = molteplicità geometrica autovalore corrispondente
3. Per calcolare F_J non è sempre necessario il calcolo esplicito delle catene!!!
   (i) $F:\ \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \nu_2 = 2,\ g_2 = 2$
   (ii) $F:\ \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 2$
   (iii) $F:\ \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 1$

Polinomio annullatore di una matrice

Definizione: Un polinomio $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si dice *polinomio annullatore* di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se

$$p(F) = a_\ell F^\ell + a_{\ell-1}F^{\ell-1} + \cdots + a_1 F + a_0 I = 0.$$

$$p(F) = 0 \iff p(T^{-1}FT) = 0,\ T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{matrice di cambio di base}$$

$$\iff p(F_J) = 0$$

$$\iff p(J_{\lambda_{i,j}}) = 0,\ \forall i,j$$

Polinomio annullatore di una matrice

$$p(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_\ell)^{\alpha_\ell} \implies p(F) = (F-x_1 I)^{\alpha_1}\cdots(F-x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

$$\implies p(J_{\lambda_{i,j}}) = (J_{\lambda_{i,j}}-x_1 I)^{\alpha_1}\cdots(J_{\lambda_{i,j}}-x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

Per avere $p(F) = 0$:

- $p(\lambda_i) = 0$, per ogni autovalore λ_i di F
- $\alpha_i \geq$ dimensione del più grande miniblocco associato a $\lambda_i \triangleq h_i$

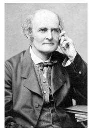
Polinomio minimo di una matrice

Definizione: Il polinomio annullatore di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di grado più piccolo possibile si dice *polinomio minimo* di F e lo denotiamo con $\Psi_F(x)$.

$$\Psi_F(x) = (x-\lambda_1)^{h_1}(x-\lambda_2)^{h_2}\cdots(x-\lambda_\ell)^{h_\ell}$$

$\boxed{\text{Notare che: } \nu_i \geq h_i}$

Teorema di Cayley–Hamilton



Teorema: Il polinomio caratteristico di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è sempre un polinomio annullatore di F stessa:

$$\Delta_F(F) = 0.$$

Più precisamente $\Delta_F(x)$ è un multiplo di $\Psi_F(x)$ e

$\Delta_F(x) = \Psi_F(x)$ quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore!