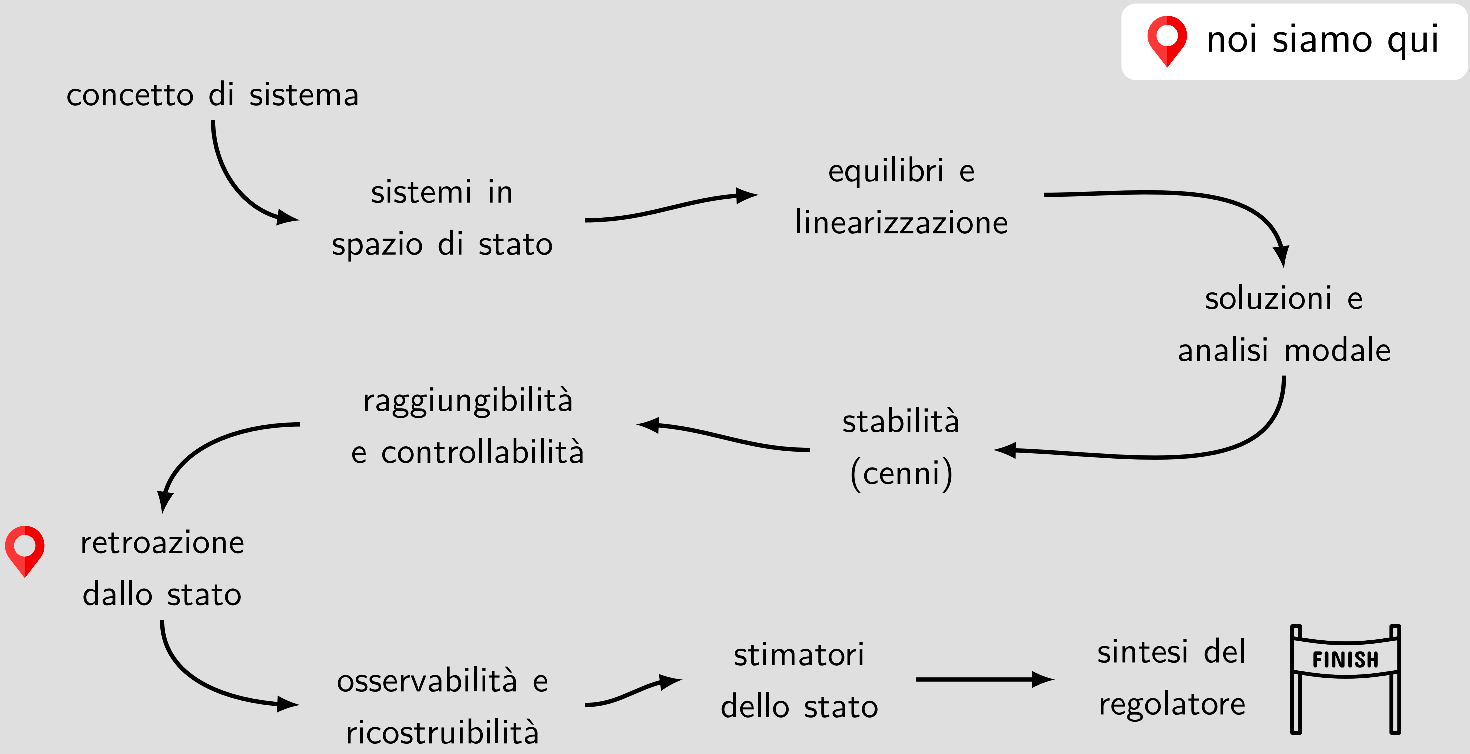
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Controllo di sistemi dinamici in Matlab® (parte 1)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

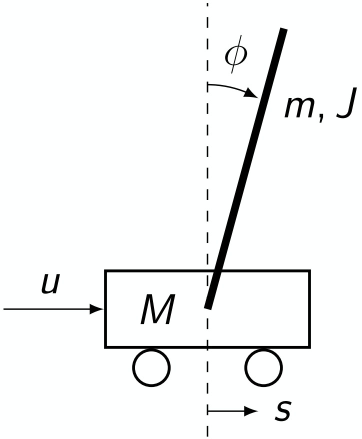

noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

In questa lezione

- ▷ Controllo in retroazione dallo stato di un segway
- ▷ Discretizzazione di un sistema a t.c.
- ▷ Esercizio Matlab®

Segway, a.k.a. pendolo su carrello

$=$



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

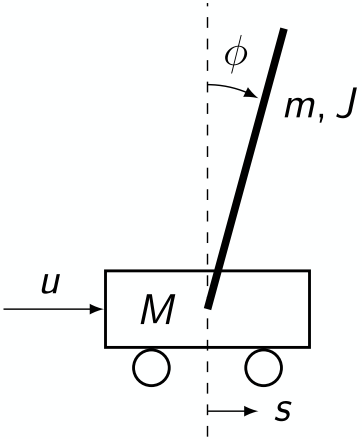
$$\boxed{M \gg m} \implies M\ddot{s} = u$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{\ell'} \sin(x_1) - \frac{1}{M\ell'} u \cos(x_1) \\ y = x_1 \end{cases} \qquad \ell' = \frac{J + m\ell^2}{m\ell}$$

Segway linearizzato (attorno a $\bar{x}_1 = [0\ 0]^\top$ per $\bar{u} = 0$)

=



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

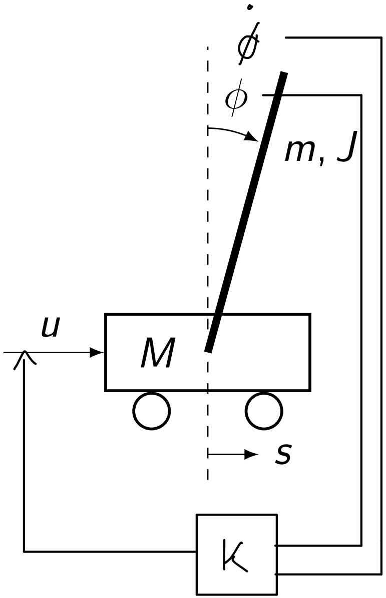
$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ equilibrio

per ingresso costante $\bar{u} = 0$

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} & 0 \end{bmatrix} \delta_x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \end{bmatrix} \delta_u \\ \delta_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \delta_x \end{cases} \implies \bar{x}_1 \text{ instabile}$$

Segway linearizzato e retroazionato dallo stato

=



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

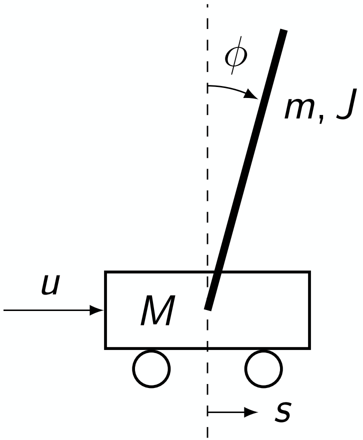
J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

note

Segway linearizzato e retroazionato dallo stato

$=$



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} - \frac{k_1}{M\ell'} & -\frac{k_2}{M\ell'} \end{bmatrix} \delta_x, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ \delta_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \delta_x \end{cases}$$

sistema raggiungibile

autovalori desiderati λ_1, λ_2

$$\implies \begin{cases} k_1 = M(g + \ell' \lambda_1 \lambda_2) \\ k_2 = -M\ell'(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

note

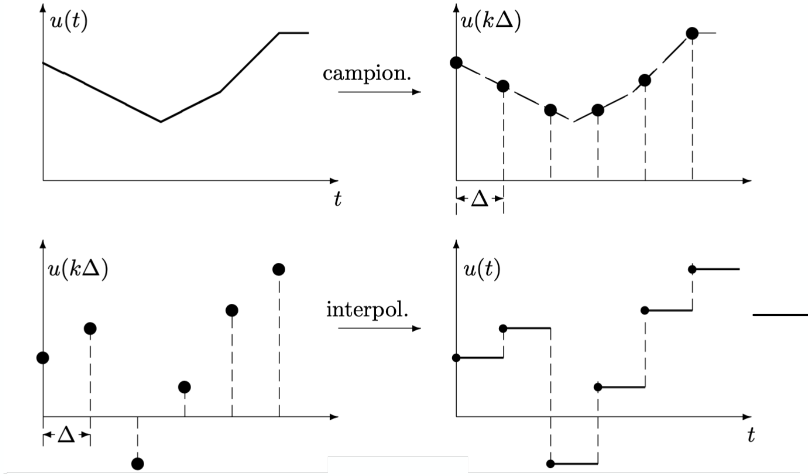
Comandi Matlab® – Control System Toolbox

`R = ctrb(F,G)`	calcola matrice di raggiungibilità del sistema con matrice di stato F e degli ingressi G;
`K = place(F,G,v)`	calcola matrice di retroazione K tale che $F - GK$ ha come autovalori gli elementi del vettore v (**N.B.** numericamente robusto ma non funziona per autovalori multipli);
`K = acker(F,G,v)`	calcola matrice di retroazione K tale che $F - GK$ ha come autovalori gli elementi del vettore v (**N.B.** numericamente instabile ma funziona anche per autovalori multipli);

In questa lezione

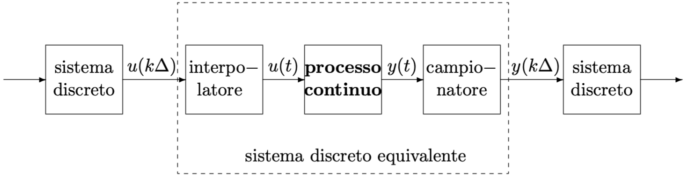
- ▷ Controllo in retroazione dallo stato di un segway
- ▷ Discretizzazione di un sistema a t.c.
- ▷ Esercizio Matlab®

Sistemi a segnali campionati e interpolazione di ordine zero



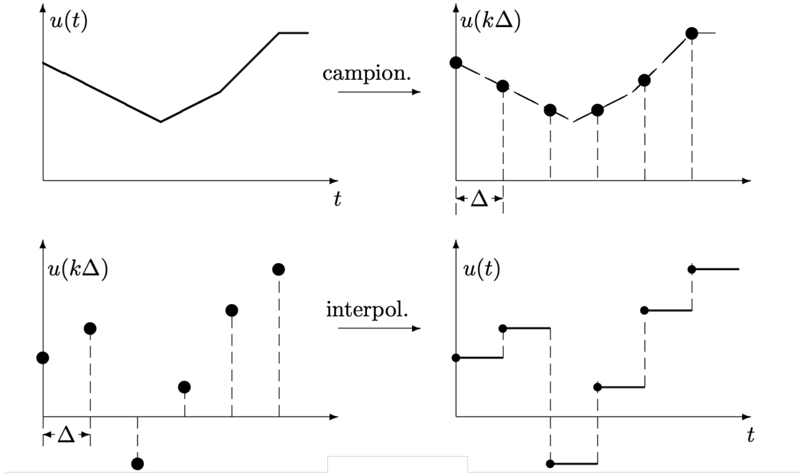
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

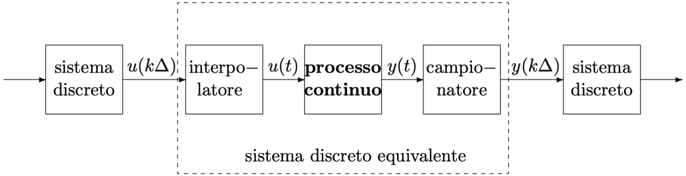
interpolatore di ordine zero
(zero order hold, ZOH



note

Sistemi a segnali campionati e interpolazione di ordine zero





$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$\Downarrow$$

$$x((k+1)\Delta) = F_d x(k\Delta) + G_d u(k\Delta)$$
$$y(k\Delta) = H_d x(k\Delta) + J_d u(k\Delta)$$

$$F_d = e^{F\Delta},\ G_d = \int_0^{\Delta} e^{F\tau} G \, d\tau,$$

$$H_d = H,\ J_d = J$$

note

Comandi Matlab® – Control System Toolbox

```
sysd = c2d(sysc,Ts)
```

↓

$[F_d, G_d, H_d, J_d] = \text{ssdata}(\text{sysd})$

restituisce la versione discretizzata del sistema a tempo continuo `sysc` con tempo di campionamento `Ts` e interpolazione di ordine zero;

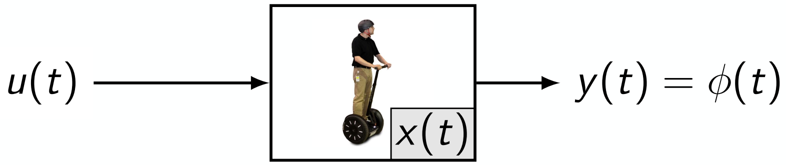
N.B. È possibile specificare il metodo di discretizzazione usando un terzo argomento di input. Se questo terzo argomento non viene specificato, Matlab® usa di default il metodo `'zoh'` (interpolatore di ordine zero);

In questa lezione

- ▷ Controllo in retroazione dallo stato di un segway
- ▷ Discretizzazione di un sistema a t.c.
- ▷ Esercizio Matlab®

Controllo numerico del sistema linearizzato

[y, t, x] = initial



parametri: $m = 0.01$, $M = 10$, $\ell = 0.5$, $J = 0.005$

ctrb, place/acker

1. Costruire una retroazione statica dall~~a~~o stato in modo che il sistema linearizzato abbia modi elementari che tendono a zero più velocemente di e^{-3t}.

initial

2. Si plotti l'evoluzione libera dello stato del sistema linearizzato e del sistema retroazionato come al punto 1 partendo da una condizione iniziale scelta a piacere.

3. Si discretizzi il sistema linearizzato con tempo di campionamento $\Delta = 0.01$. Si calcoli quindi la sequenza di ingresso a minima energia (se esiste) che porta lo stato del sistema discretizzato da $x(0) = [0\ 0]^\top$ a $x(10\Delta) = [1\ 1]^\top$.

c2d
ssdata

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Controllo di sistemi dinamici in Matlab® (parte 1)

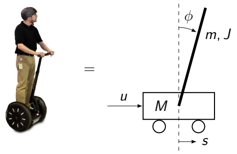
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Segway linearizzato e retroazionato dallo stato



ϕ = posizione angolare pendolo
s = posizione carrello
M = massa carrello
m = massa pendolo
ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera
J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro
u = forza esterna

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

1) Verifichiamo se $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile.

$$R = \begin{bmatrix} g & Fg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{M\ell'} \\ -\frac{1}{M\ell'} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } R = 2 \quad \forall M, \ell' > 0$$

Σ raggiungibile $\longrightarrow \exists K$ t.c. $\Delta_{F+gK}(\lambda) = p(\lambda) \quad \forall p(\lambda)$

2) Calcolo K per autovalori desiderati λ_1, λ_2 (reali o complessi coniugati)

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + \underbrace{(-\lambda_1 - \lambda_2)}_{p_1}\lambda + \underbrace{\lambda_1\lambda_2}_{p_0}$$

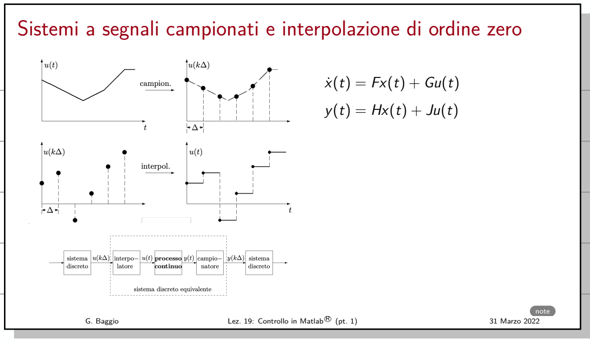
$$\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\underbrace{\lambda I - F - gK}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{g}{\ell'} + \frac{k_1}{M\ell'} & \lambda + \frac{k_2}{M\ell'} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M\ell'} & -\frac{k_2}{M\ell'} \end{bmatrix}$$

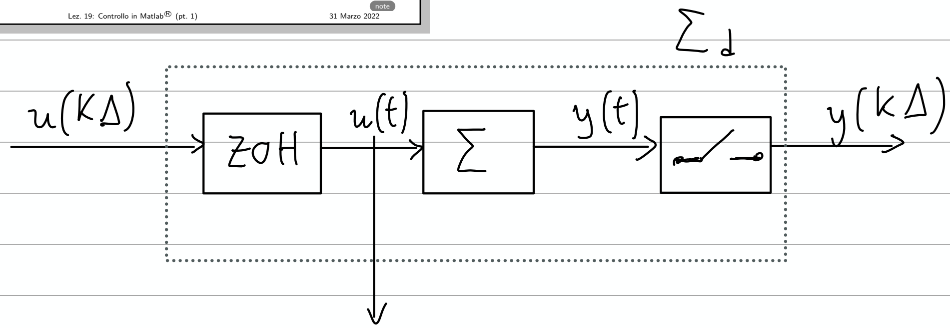
$$= \lambda\left(\lambda + \frac{k_2}{M\ell'}\right) + \left(-\frac{g}{\ell'} + \frac{k_1}{M\ell'}\right)$$

$$= \lambda^2 + \frac{k_2}{M\ell'}\lambda + \left(\frac{k_1}{M\ell'} - \frac{g}{\ell'}\right)$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{k_2}{M\ell'} \\ p_0 = \frac{k_1}{M\ell'} - \frac{g}{\ell'} \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = p_1 M\ell' \\ k_1 = \left(p_0 + \frac{g}{\ell'}\right) M\ell' \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2) M\ell' \\ k_1 = \left(\lambda_1\lambda_2 + \frac{g}{\ell'}\right) M\ell' \end{cases}$$



$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$



$$u(t) = u(K\Delta) \quad t \in [K\Delta, (K+1)\Delta)$$

$$t \in [K\Delta, (K+1)\Delta) : \quad x((K+1)\Delta) = e^{F\Delta} x(K\Delta) + \int_{K\Delta}^{(K+1)\Delta} e^{F((K+1)\Delta - \tau)} G \overbrace{u(\tau)}^{u(K\Delta)} d\tau$$

$$= e^{F\Delta} x(K\Delta) + \underbrace{\int_{K\Delta}^{(K+1)\Delta} e^{F((K+1)\Delta - \tau)} G \, d\tau}_{} \; u(K\Delta)$$

$$\sigma = (K+1)\Delta - \tau \qquad d\sigma = -d\tau$$

$$-\int_{\Delta}^{0} e^{F\sigma} G \, d\sigma = \int_{0}^{\Delta} e^{F\sigma} G \, d\sigma$$

$$y(K\Delta) = Hx(K\Delta) + Ju(K\Delta)$$

$$\Sigma_d = \left(e^{F\Delta}, \int_0^{\Delta} e^{F\tau} G \, d\tau, H, J \right) = \text{sistema "discretizzato"}$$

$e^{F\Delta}$ è sempre invertibile $\rightarrow$ Σ_d è reversibile $\rightarrow$ ragg. = contr.