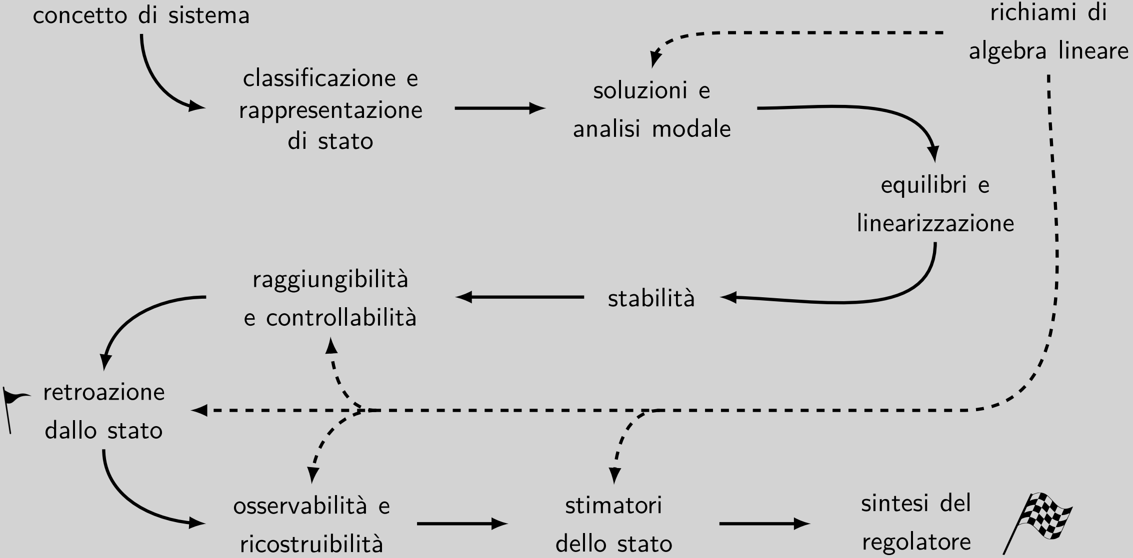
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

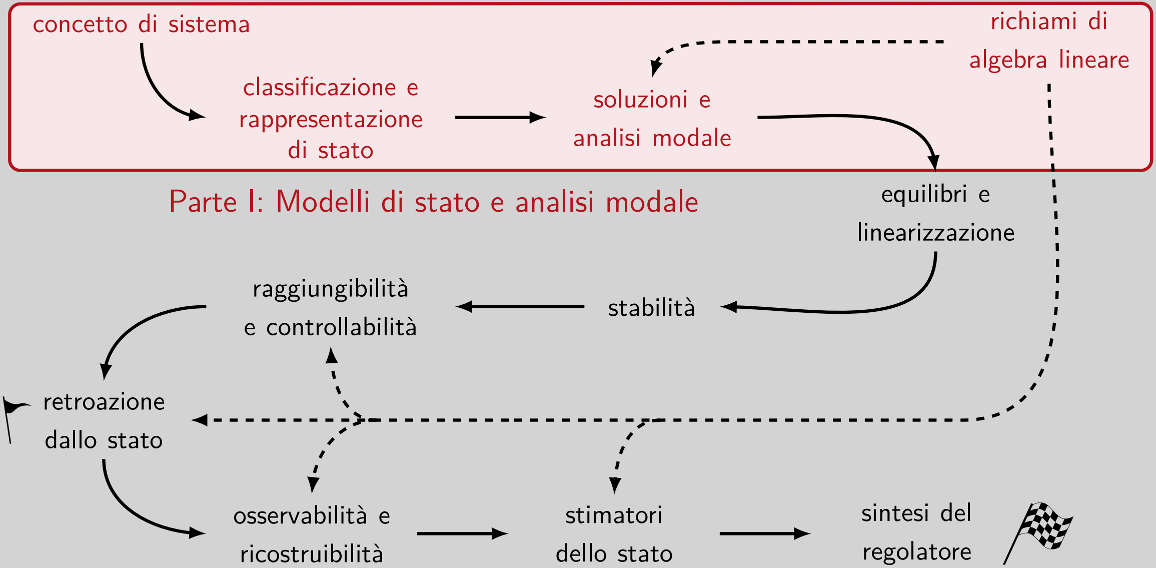
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 8: Esercizi di ricapitolazione su modelli di stato e analisi modale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
Parte I: Modelli di stato e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore

In questa lezione: esercizi!

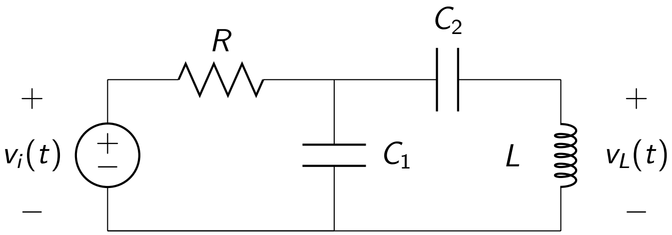
- Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 1

extra



Rappresentazione interna o di stato con $u(t) = v_i(t)$ e $y(t) = v_L(t)$?

Esercizio 1: soluzione

Variabili: $x(t) = \begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$, $u(t) = v_i(t)$, $y(t) = v_L(t)$

Matrici: $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = 0$

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 2

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0, \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Jordan F_J?
2. Polinomio minimo $\Psi_F(x)$?
3. Esponenziale e^{Ft}?
4. Evoluzione libera per $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$?

Esercizio 2: soluzione

1. $F_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\Psi_F(x) = x(x+1)^2$

3. $e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

4. $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 2te^{-t} \end{bmatrix}^\top$

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 3 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 1 Febbraio 2012]

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Forma di Jordan F_J e i modi del sistema al variare di $f \in \mathbb{R}$?
2. Funzione di trasferimento $W(s)$ al variare di $f \in \mathbb{R}$?
3. Per $f = 0$, ingresso $u(t)$ tale che $y_f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t$, $t \geq 0$?

Esercizio 3: soluzione

1. $F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = 1,\ \text{modi: } e^t, te^t, e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & f = 2,\ \text{modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, e^{2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = -2,\ \text{modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} 2-f^2 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f \neq 1, 2, -2,\ \text{modi: } e^{(2-f^2)t}, e^{ft}, e^{-2t} \end{cases}$

2. $W(s) = \frac{(3-5f)-s}{(s-f)(s+2)}$

3. $u(t) = 1 + 2t,\ t \geq 0.$

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 4 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 24 Giugno 2019]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1. Modi del sistema e loro carattere?
2. Matrice di trasferimento $W(z)$?
3. Evoluzione del sistema per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = -2^{t+2}$, $t \geq 0$?

Esercizio 4: soluzione

1. $(-3)^t, 2^t$, entrambi divergenti

2. $W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z+3)(z-2)} \\ \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$

3. $y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{19}2^{t+2} - \frac{3}{19}t2^{t+2} - \frac{5}{19}(-3)^{t+1} \\ -t2^{t+2} \end{bmatrix}, \; t \geq 0$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 8: Esercizi di ricapitolazione su modelli di stato e analisi modale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

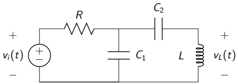
A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

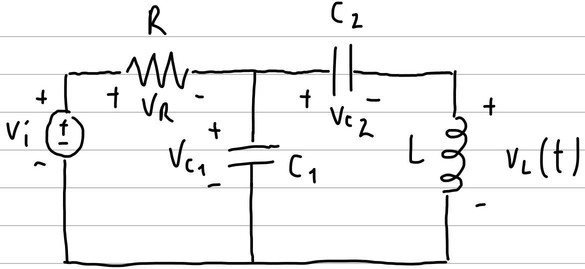
Esercizio 1

extra



Rappresentazione interna o di stato con $u(t) = v_i(t)$ e $y(t) = v_L(t)$?

back



$$v_R = R\, i_R$$

$$v_L = L \frac{d i_L}{dt}$$

$$i_C = C \frac{d v_C}{dt}$$

Rappresentazione interna ?

back

$x_1 = v_{C1}, \quad x_2 = v_{C2}, \quad x_3 = i_L$

$$\dot{x}_1 = \frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_{C1} = \frac{1}{C_1}(i_R - i_L)$$

$$= \frac{1}{C_1}(i_R - x_3)$$

$$= \frac{1}{C_1}\left(\frac{v_R}{R} - x_3\right) \qquad v_R = v_i - v_{C1}$$

$$= \frac{1}{C_1}\left(\frac{v_i - v_{C1}}{R} - x_3\right) = \frac{1}{C_1}\left(\frac{v_i}{R} - \frac{x_1}{R} - x_3\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{C2} = \frac{1}{C_2} i_L = \frac{1}{C_2} x_3$$

back

$$\dot{x}_3 = \frac{d i_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L = \frac{1}{L}\left(V_{C_1} - V_{C_2}\right) = \frac{1}{L}\left(x_1 - x_2\right)$$

$$y = V_L = V_{C_1} - V_{C_2} = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 1/C_2 \\ 1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix}}^{F} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1/RC_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{G} V_i \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{J} \cdot V_i \end{cases}$$

Esercizio 2

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Jordan F_J?
2. Polinomio minimo $\Psi_F(x)$?
3. Esponenziale e^{Ft}?
4. Evoluzione libera per $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$?

back

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1) F_J?

- Autovalori: $\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda-1 \end{bmatrix}$

$= -\lambda(\lambda+1)^2 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \nu_1 = 1$

$\lambda_2 = -1 \quad \nu_2 = 2$

back

- Autovettori:

λ_1: $\quad v_1 \in \operatorname{Ker}(F - \lambda_1 I)$: $\quad (F - 0 \cdot I)\, v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_{1,1} = 0 \\ 0 = 0 \\ 2v_{1,1} - v_{1,3} = 0 \longrightarrow v_{1,3} = 0 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$g_1 = 1$

back

λ_2 : $(F + I)\, v_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ v_{2,2} = 0 \\ v_{2,1} = 0 \end{cases} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad g_2 = 1$$

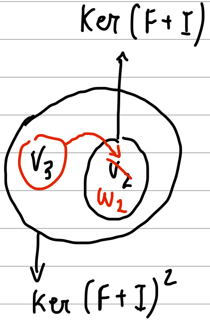
Costruzione della catena di Jordan relativa a $\lambda_2 = -1$:

$(F + I)^2\, v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ v_{3,2} = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ autovettore generalizzato



$$v = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = (F+I)\, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}_1 = v_1$ $\qquad$ $\mathcal{C}_2 = [w_2 \;\; v_3]$ $\qquad$ Catene di Jordan

$$T = [\,\mathcal{C}_1 \mid \mathcal{C}_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_J = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

2) $\Psi_F(x) = \Delta_F(x) = -x\,(1+x)^2$

3) e^{Ft} ?

Metodo Jordan: $e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overbrace{e^{0\cdot t}}^{1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-t} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{-t} & 2te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

back

Metodo Laplace: $\mathcal{L}\left[e^{Ft}\right] = (sI - F)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -2 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)^2} \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 & 0 \\ 2s & 0 & s(s+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ \frac{2}{(s+1)^2} & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

back

$$e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

4) $$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_\ell(t) = e^{Ft} x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 2t\,e^{-t} \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 1 Febbraio 2012]

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Forma di Jordan F_J e i modi del sistema al variare di $f \in \mathbb{R}$?
2. Funzione di trasferimento $W(s)$ al variare di $f \in \mathbb{R}$?
3. Per $f = 0$, ingresso $u(t)$ tale che $y_f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t$, $t \geq 0$?

back

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1) F_J, $f \in \mathbb{R}$? Modi?

Autovalori: $\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \left[\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ 2f & f-2-\lambda & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2-f^2-\lambda \end{array}\right]$

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 2f & f-2-\lambda \end{bmatrix} \cdot (2-f^2-\lambda)$$

back

$$= \left[-\lambda(t-2-\lambda)-2t\right](2-t^2-\lambda)$$

$$\lambda_1 = t$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$\lambda_3 = 2-t^2$$

$$t = 2-t^2$$

$$t^2+t-2=0$$

$$(t+2)(t-1)=0$$

$$= \left[\lambda^2+(2-t)\lambda-2t\right](2-t^2-\lambda)$$

$$= (\lambda-t)(\lambda+2)(2-t^2-\lambda)$$

1. $t=-2$ $\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3 \longrightarrow \lambda_1=-2, \nu_1=3$
2. $t=2, \lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=-2 \longrightarrow \lambda_1=2, \ \nu_1=1, \ \lambda_2=-2, \ \nu_2=2$
3. $t=1, \quad \lambda_1=\lambda_3=1, \ \lambda_2=-2 \longrightarrow \lambda_1=1, \ \nu_1=2, \ \lambda_2=-2, \ \nu_2=1$
4. $t\neq-2,1,2 \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distinti $\quad \nu_1=\nu_2=\nu_3=1$

back

(1) $f = -2$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\dim \operatorname{Ker} [F + 2I]$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F + 2I$$

$\text{rango}(F + 2I) = 2$

$A \quad n \times n$

Teorema del rango: $\text{rango}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim(A) = n$

back

$$\dim \operatorname{Ker}(F+2I) = 3 - \operatorname{rango}(F+2I) = \underline{1} = g_1$$

$$F_J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \\ & -2 & 1 \\ & & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow e^{-2t},\ t\,e^{-2t},\ \frac{t^2}{2} e^{-2t}$$

(2) $f = 2$ $\qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \nu_2 = 2$

$$g_2 = \dim \operatorname{Ker}[F - 2I] \qquad F - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rango}(F - 2I) = 2$$

$g_2 = 1$

$$F_J = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & -2 & 1 \\ & & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \text{modi: } e^{2t},\ e^{-2t},\ t e^{-2t}$$

3 $f = 1$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \nu_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 & \nu_2 = 1 \end{array}$$

$$g_1 = \dim \operatorname{Ker} [F - I] \qquad F - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rango $(F - I) = 2 \Rightarrow g_1 = 1$

$$F_J = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right] \rightarrow \text{modi: } e^{-2t},\ e^{t},\ t e^{t}$$

4) $t \neq -2, 1, 2 \Rightarrow F$ diagonalizzabile, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distinti

$$F_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ e^{\lambda_3 t}$$

2) F. d. T. $W(s)$?

N.B. $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline * & B^{-1} \end{array}\right]$

$$W(s) = H\,(sI - F)^{-1}\,G + J$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} s & -1 & 0 \\ -2f & s-f+2 & 0 \\ \hline -2 & 0 & s-2+f^2 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2f & s-f+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\underbrace{s(s-f+2)-2f}_{(s-f)(s+2)}} \begin{bmatrix} s-f+2 & +1 \\ 2f & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-f+2}{(s-f)(s+2)} & \frac{1}{(s-f)(s+2)} \\ \frac{2f}{(s-f)(s+2)} & \frac{s}{(s-f)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{s-f+2-4f}{(s-f)(s+2)} \;\middle|\; \frac{1-2s}{(s-f)(s+2)} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

back

$$= \frac{-s - 5f + 3}{(s-f)(s+2)}$$

4) $y_f = \frac{3}{2} t^2 - t \qquad u(t)\,?$ $\boxed{f = 0}$

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) \Rightarrow U(s) = \frac{Y_f(s)}{W(s)} = \frac{\frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^2}}{\frac{-s+3}{s(s+2)}}$$

$$= \frac{\cancel{3-s}}{s^3} \cdot \frac{s(s+2)}{\cancel{3-s}} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

back

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = 1 + 2t, \quad t \geq 0$$

Esercizio 4 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 24 Giugno 2019]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1. Modi del sistema e loro carattere?
2. Matrice di trasferimento $W(z)$?
3. Evoluzione del sistema per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = -2^{t+2}$, $t \geq 0$?

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1) $F = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$

$F_J = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow (-3)^t, \quad 2^t$ divergenti

2) $W(z) = H\,(zI - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} z+3 & -1 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots$

3) $Y(z) = z\,(zI - F)^{-1}x_0 + W(z)\,U(z)$

$V(z) \longrightarrow V'(z = \frac{V(z)}{z} \longrightarrow$ fratti semplici $\left[\frac{A}{(z+a)} + \frac{B}{(z+a)^2} + \dots\right] z$