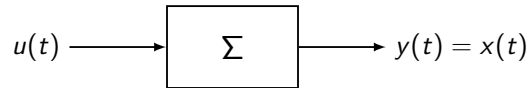


Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

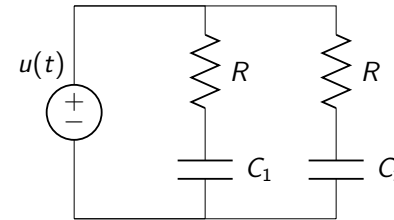


Definizione: Uno stato \bar{x} si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo \bar{t} se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(\bar{t}) = \bar{x}$.

Definizione: L'insieme $X_R(\bar{t})$ di tutti gli stati raggiungibili dallo stato x_0 al tempo \bar{t} è detto spazio raggiungibile al tempo \bar{t} .

(tipicamente: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$)

Esempio introduttivo



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

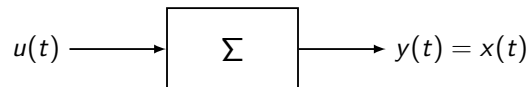
Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0)$:

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t), \quad \forall u(t), \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}, \quad \forall t \geq 0$$

Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

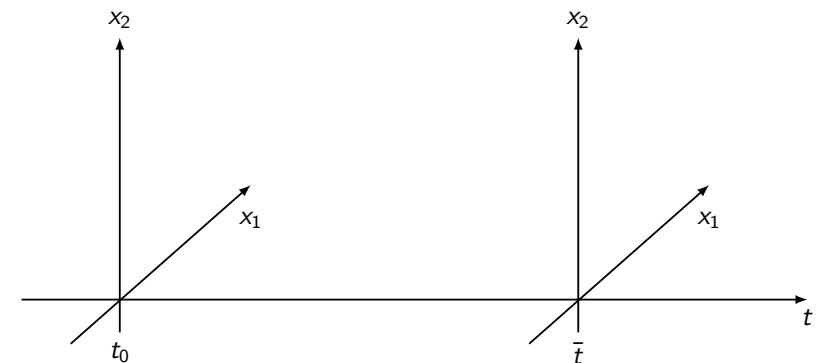


Definizione: Uno stato \bar{x} si dice controllabile allo stato x_0 al tempo \bar{t} se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = \bar{x}$ e $x(\bar{t}) = x_0$.

Definizione: L'insieme $X_C(\bar{t})$ di tutti gli stati controllabili allo stato x_0 al tempo \bar{t} è detto spazio controllabile al tempo \bar{t} .

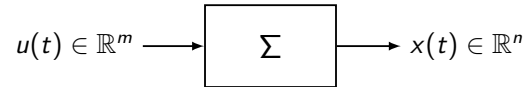
(tipicamente: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$)

Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = x_0$$



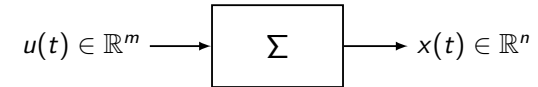
$$x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_T u_t$$

$$\mathcal{R}_T = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \quad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = 0$$



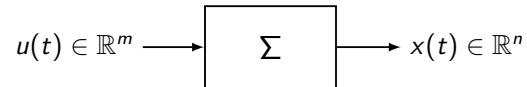
$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_T u_t$$

$$\mathcal{R}_T = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \quad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = 0$$



$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = \mathcal{R}_T u_t$$

Insieme di stati \bar{x} raggiungibili al tempo t (= in t passi) a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \text{Im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un indice $k \leq n$ tale che

$$X_R(k) = X_R(j), \quad \forall j \geq k.$$

k = indice di raggiungibilità

$$X_R \triangleq X_R(k) = (\text{massimo}) \text{ spazio raggiungibile}$$

Criterio di raggiungibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ e (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n$ = matrice di raggiungibilità del sistema

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

$$m = 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) = n$$

$$m > 1: \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) = n$$

Esempi

$$1. \ x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies \text{non raggiungibile}$$

$$2. \ x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies \text{raggiungibile (in 2 passi)}$$

$$3. \ x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \implies \text{raggiungibile (in 2 passi)}$$

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z=T^{-1}x} z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \ \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{\mathcal{R}} = [\bar{G} \ \bar{F}\bar{G} \ \dots \ \bar{F}^{n-1}\bar{G}] = T^{-1}\mathcal{R}$$

$$\text{rank}(\bar{\mathcal{R}}) = \text{rank}(\mathcal{R}) \implies \text{cambio di base non modifica la raggiungibilità !!}$$

$$\text{Inoltre, se } \Sigma \text{ raggiungibile: } \bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top)^{-1}$$

Calcolo dell'ingresso di controllo

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire un ingresso u_t per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

- Caso $x_0 = 0$:
1. $\bar{x} = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
 2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t, \ \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$
 3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} \bar{x}$

Caso $x_0 \neq 0$: $u_t = \mathcal{R}_t^\top (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top)^{-1} (\bar{x} - F^t x_0)$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u}, \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}.$$

2. Ingresso u_t = ingresso a **minima energia**:

$$u_t = \arg \min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2$$

3. Gramiano di raggiungibilità del sistema in t passi:

$$\mathcal{W}_t = \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} B B^\top (A^\top)^{t-1-k}.$$

Autovalori di \mathcal{W}_t quantificano l'energia richiesta per controllare il sistema.

Esempi

$$1. \ x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

$$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ min. energia}$$

Proprietà importante

Definizione: Data una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F -invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F -invariante e contiene $\text{Im}(G)$.

Forma canonica di Kalman

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da “separare” la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}, \quad X_R = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R, \ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_w, \quad \forall v_1 \implies F_{21} = 0$$

$$\text{Im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G}, \quad G_2 = 0$$

Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}_K) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix} \right) = k$$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ sistema in forma di Kalman con

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ sistema **non** in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$ = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$. Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di z che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di Σ .

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli z che sono autovalori di F !

Test di Jordan

$$\Sigma : z(t+1) = F_J z(t) + G_J u(t), z(0) = z_0$$

Corollario: Il sistema Σ (in forma di Jordan) è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore λ_i di F_J , le righe di G_J in posizione corrispondente alle ultime righe dei miniblocchi di Jordan relativi a λ_i sono linearmente indipendenti.

Esempi

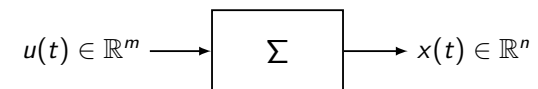
$$1. F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{raggiungibile}$$

$$2. F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile}$$

$$3. F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile}$$

Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

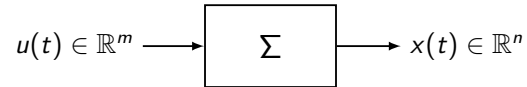
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = \bar{x}$$



$$x_0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_T u_t$$

Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = \bar{x}$$



$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_T u_t$$

Insieme di stati \bar{x} controllabili al tempo t (= in t passi) allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{Im}(\mathcal{R}_T)\}$$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \dots$$

Inoltre, esiste un indice $k \leq n$ tale che

$$X_C(k) = X_C(j), \quad \forall j \geq k.$$

$$X_C \triangleq X_C(k) = (\text{massimo}) \text{ spazio controllabile}$$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ e (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{Im}(F^n) \subseteq \text{Im}(\mathcal{R}_T) = X_C$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile} !!!$$

Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{non raggiungibile } \forall f_1, f_2 \\ \text{ma controllabile se } f_1 = 0$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{raggiungibile e quindi} \\ \text{controllabile}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \Rightarrow \quad \text{non raggiungibile} \\ \text{ma controllabile (in 2 passi)}$$

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$$

1. Σ controllabile $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^{\bar{t}} = 0 \iff$ autovalori di F_{22} tutti nulli
2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile
3. Σ reversibile (F invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F !