

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

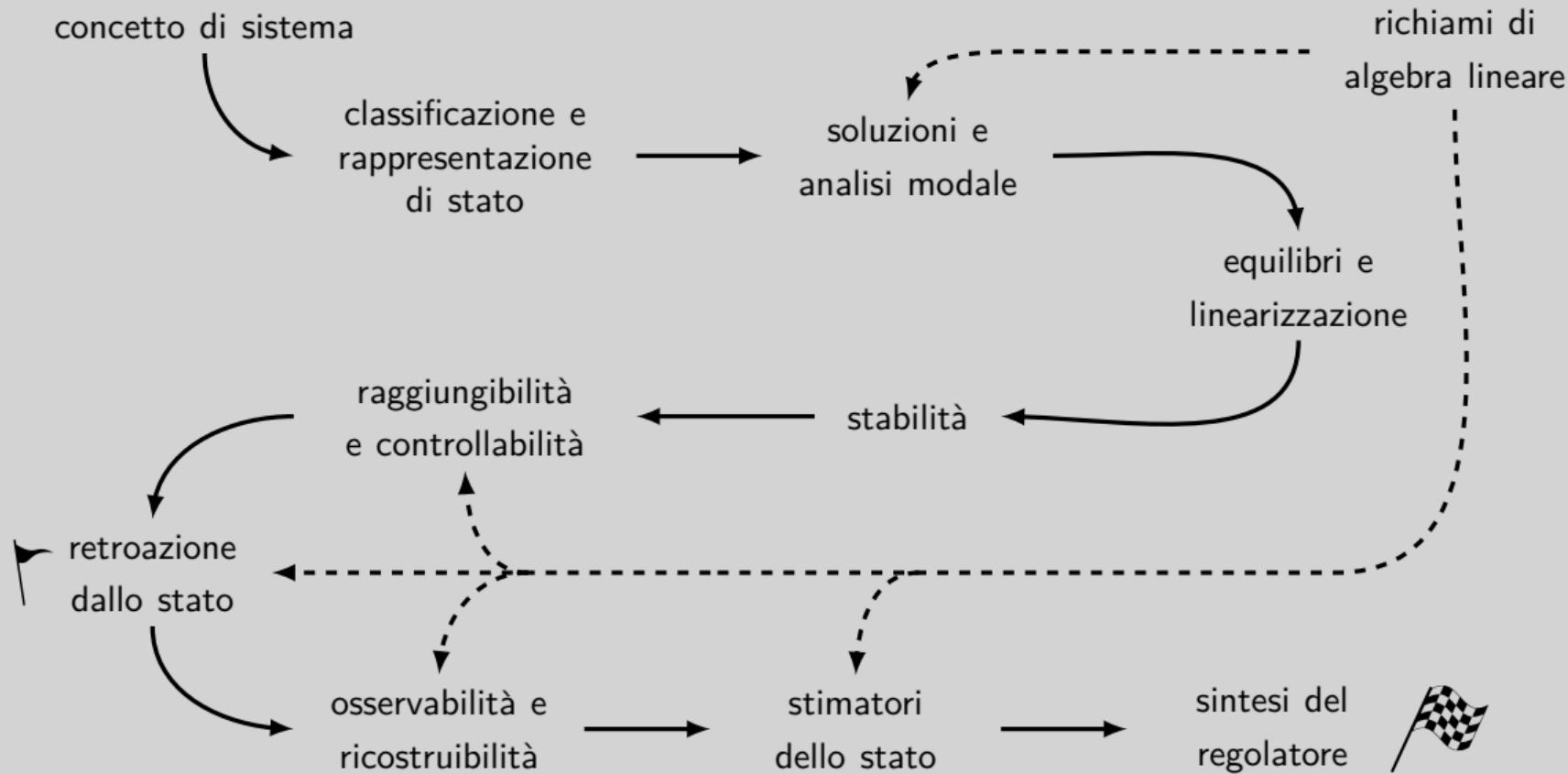
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



concetto di sistema

classificazione e
rappresentazione
di stato

soluzioni e
analisi modale

richiami di
algebra lineare

raggiungibilità
e controllabilità

stabilità

equilibri e
linearizzazione

•  retroazione
dallo stato

osservabilità e
ricostruibilità

stimatori
dello stato

sintesi del
regolatore 

• noi siamo qui

In queste lezioni

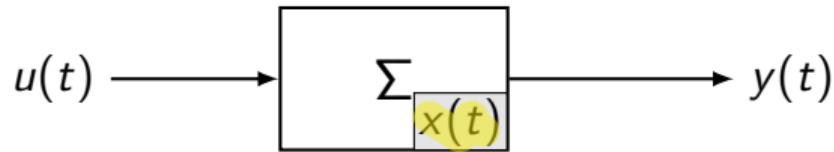
- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
- ▷ Stabilizzabilità

In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
 - ▷ Stabilizzabilità

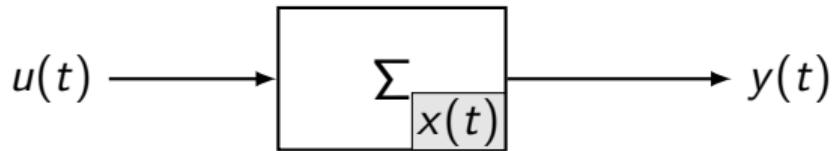
Il problema del controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Il problema del controllo

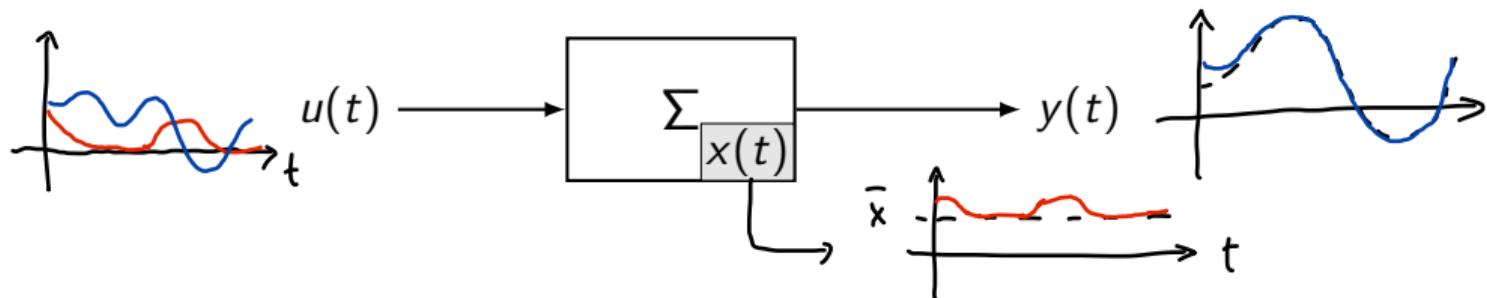
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Controllo = manipolare il sistema per raggiungere
un dato obiettivo agendo sull'ingresso $u(t)$

Problemi di controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Problema di regolazione:

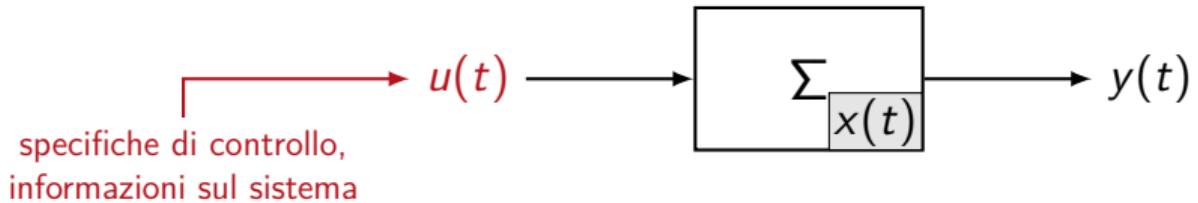
stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

Problema di asservimento (tracking):

inseguire un andamento desiderato dell'uscita

Controllo in “catena aperta” o open-loop

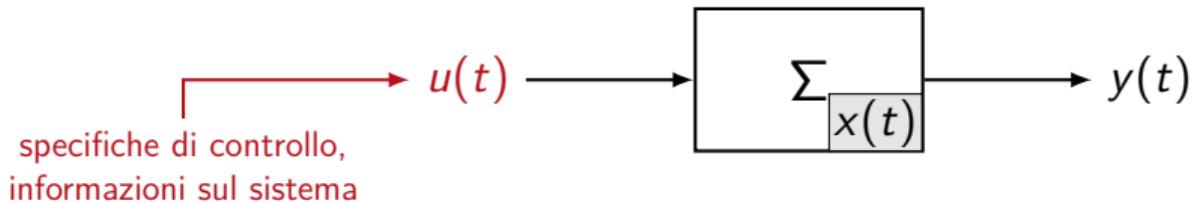
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

Controllo in “catena aperta” o open-loop

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

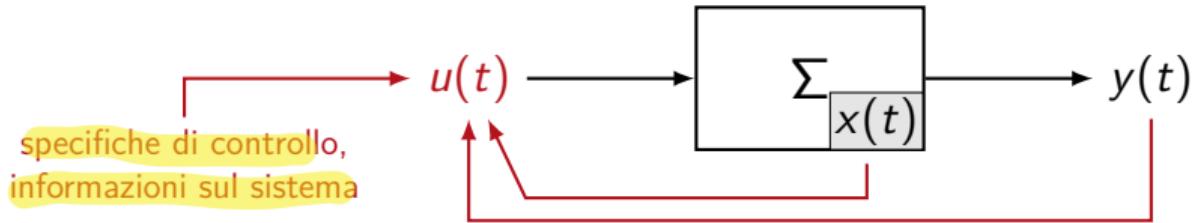


legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

*approccio semplice, ma non ideale se il sistema
è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!*

Controllo in retroazione o feedback

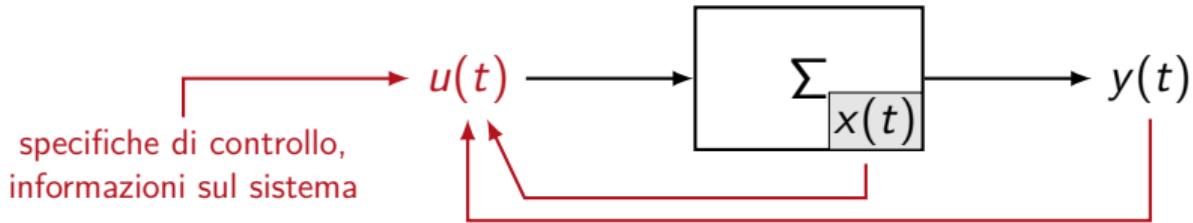
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

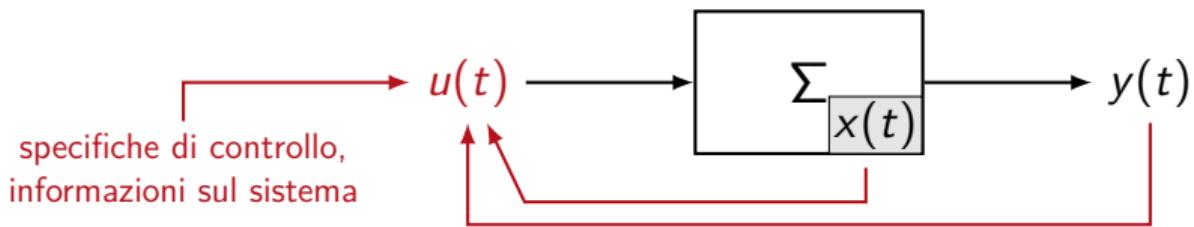


legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

*approccio più complesso (richiede sensori di misura),
ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!*

Controllo in retroazione o feedback

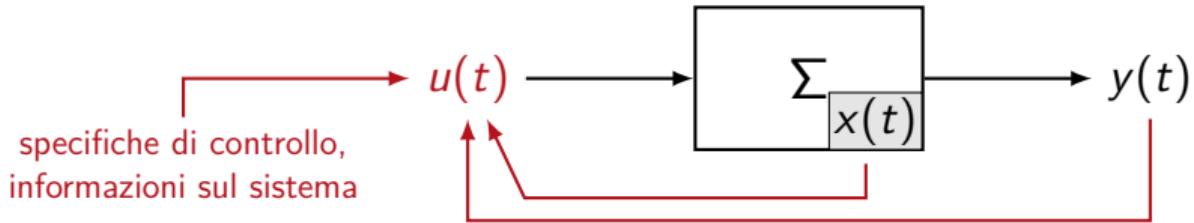
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



1. **Retroazione statica**
 - dallo stato: $u(t) = f(x(t))$ (allo stesso istante $t!$)
 - dall'uscita: $u(t) = f(y(t))$ (allo stesso istante $t!$)

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



2. Retroazione **dinamica**
- dallo stato: $u(t) = f(x(\tau)), \tau \in [t_0, t] \quad t_o < t$
 - dall'uscita: $u(t) = f(y(\tau)), \tau \in [t_0, t] \quad t_o < t$

In questo corso

*Problemi di **regolazione** per sistemi **lineari**
in catena aperta e
con **retroazione statica dallo stato/uscita***

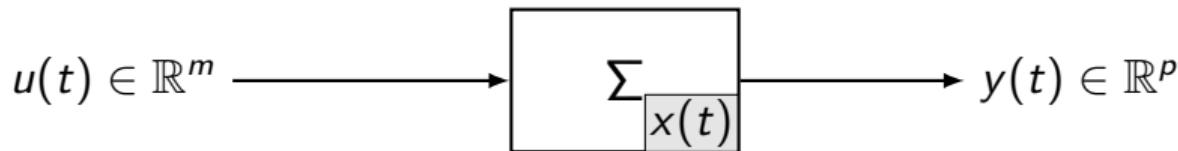
In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
 - ▷ Stabilizzabilità

Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

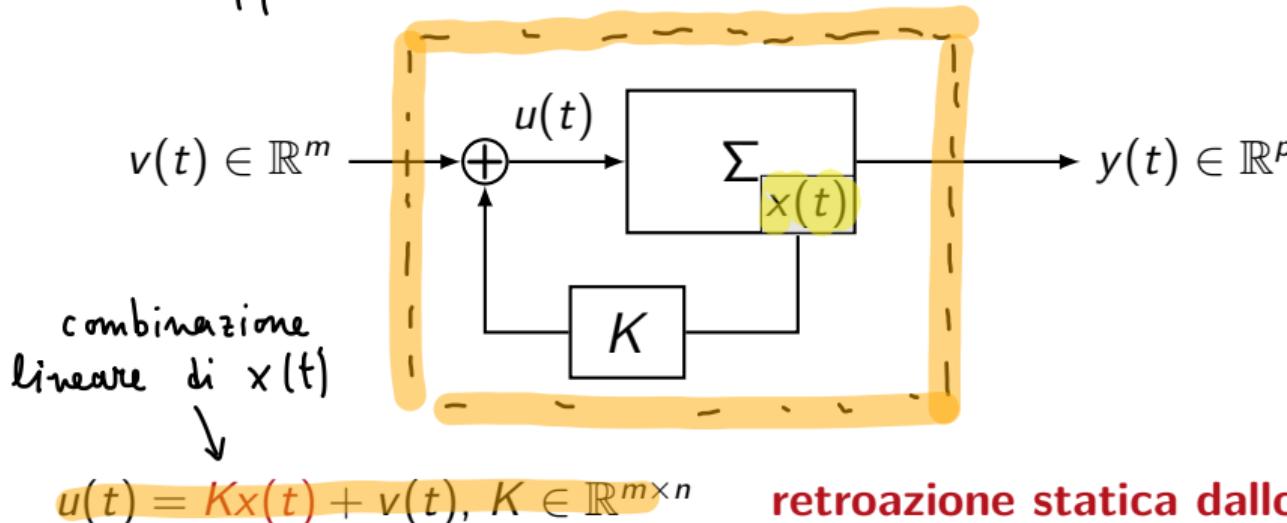
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t) + (\mathcal{J}u(t))$$



Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t+1) = (\textcolor{yellow}{F} + \textcolor{red}{GK})x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) = Hx(t) \end{array} \right.$$



Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

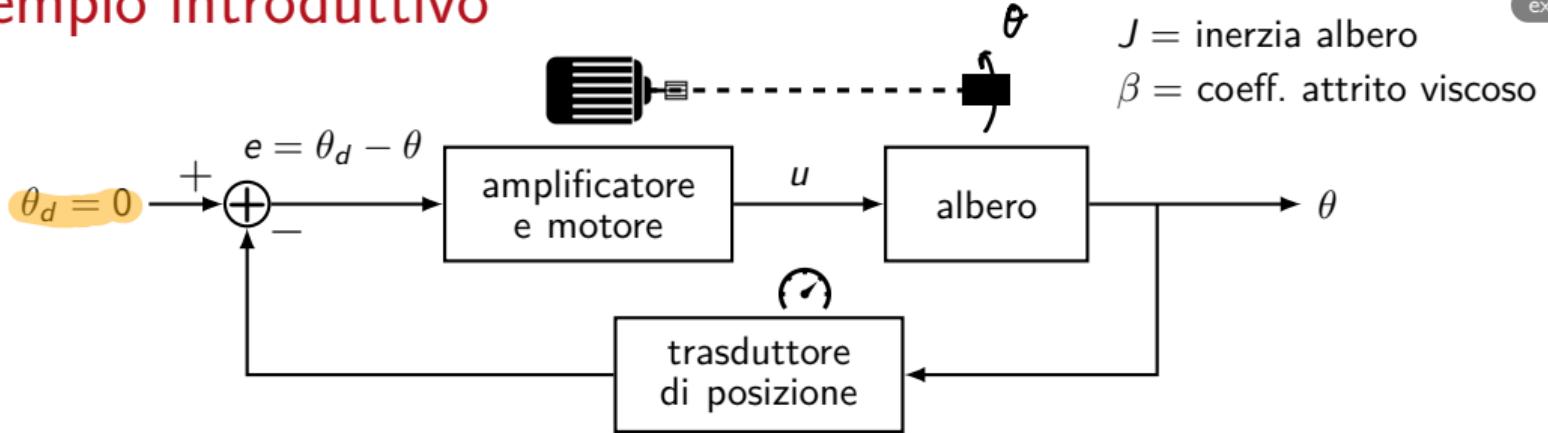
$$\left| \begin{array}{l} x(t+1) = \underbrace{(F + G\bar{K}H)}_{\bar{F}} x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) = Hx(t) \end{array} \right.$$

The diagram illustrates a linear control system setup. An input $v(t) \in \mathbb{R}^m$ is fed into a summing junction. A feedback signal $u(t)$ from a controller \bar{K} is also fed into the same summing junction. The output of the summing junction is the state $x(t)$. The state $x(t)$ is fed into a block labeled Σ containing $x(t)$. The output of Σ is the output $y(t) \in \mathbb{R}^p$. The output $y(t)$ is also fed back through a block labeled \bar{K} to the summing junction.

$$u(t) = \underbrace{\bar{K}Hx(t)}_{y(t)} + v(t), \quad \bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad \text{retroazione statica dall'uscita}$$

Esempio introduttivo

extra



J = inerzia albero

β = coeff. attrito viscoso

Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

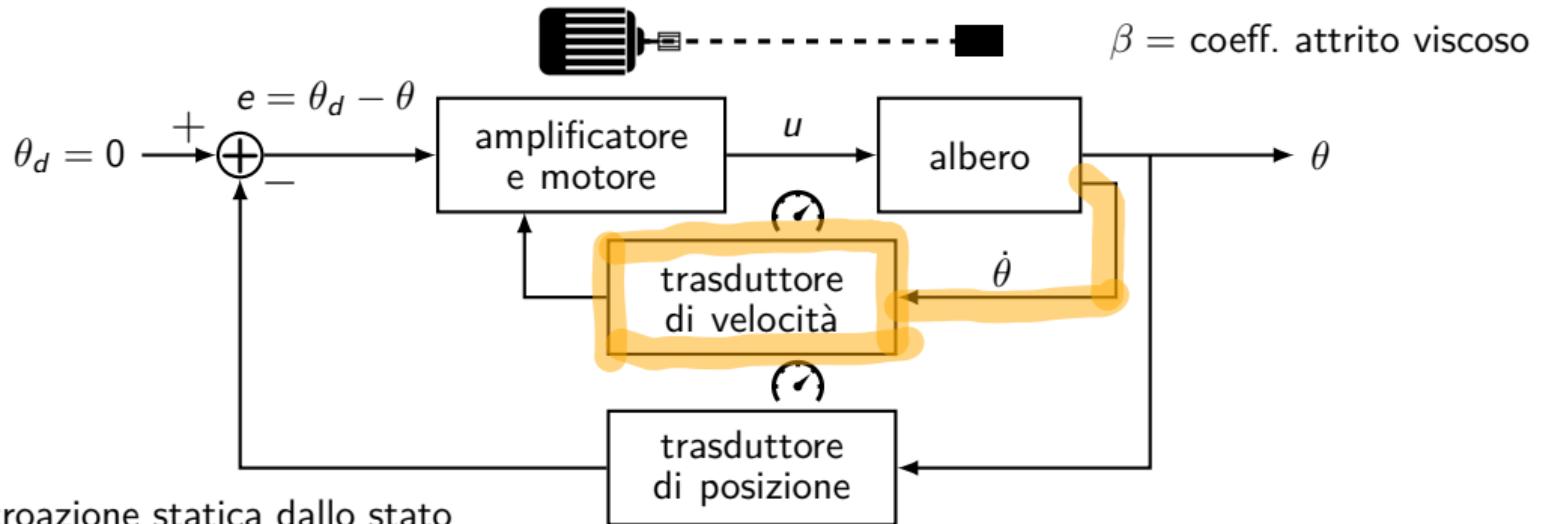
$$u = ke, k \in \mathbb{R}$$

$$y = \theta$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Esempio introduttivo

extra



Retroazione statica dallo stato

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = k_1 e + k_2 \dot{\theta}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$y = \theta$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta-k_2}{J} \end{bmatrix} x & x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

J = inerzia albero

β = coeff. attrito viscoso

In queste lezioni

*Problemi di regolazione per sistemi lineari
con retroazione statica dallo stato*

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

extra

$$\begin{aligned}\Sigma^{(K)} : \quad x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T ?

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

extra

$$\begin{aligned}\Sigma^{(K)} : \quad x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T ?

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT, \quad \bar{K} = KT$$

Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$X_R(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di Σ

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$X_R^{(K)}(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di $\Sigma^{(K)}$

Teorema: $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$, per ogni scelta della matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$X_R(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di Σ

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$X_R^{(K)}(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di $\Sigma^{(K)}$

Teorema: $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$, per ogni scelta della matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \Sigma^{(K)} \text{ raggiungibile}$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = [K_1 \quad K_2]$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)} : \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
 - ▷ Stabilizzabilità

Basi cicliche di \mathbb{R}^n

veffore



$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Basi cicliche di \mathbb{R}^n

Σ : $x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($m = 1$ = singolo ingresso)

Σ raggiungibile $\implies \text{rank}(\mathcal{R}) = n$

$$\implies \text{rank} \left(\begin{bmatrix} g & Fg & F^2g & \dots & F^{n-1}g \end{bmatrix} \right) = n$$

$\implies \{g, Fg, F^2g, \dots, F^{n-1}g\}$ base di \mathbb{R}^n

base ciclica di \mathbb{R}^n

Basi cicliche di \mathbb{R}^n

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Consideriamo il cambio di base $T = \mathcal{R}$

Basi cicliche di \mathbb{R}^n

extra

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m=1 = \text{singolo ingresso})$$

Consideriamo il cambio di base $T = \mathcal{R}$

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo

$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($m = 1$ = singolo ingresso)

Con un ulteriore cambio di base Q arriviamo alla **forma canonica di controllo**

$$F_c = Q^{-1}\bar{F}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g_c = Q^{-1}\bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo: osservazioni

$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($m = 1$ = singolo ingresso)

\Rightarrow

1. Σ raggiungibile $\iff \Sigma$ può essere portato in **forma canonica di controllo**.

\Leftarrow

$$R_c = [g_c \quad F_c g_c \quad \cdots \quad F_c^{n-1} g_c] = \begin{bmatrix} 0 & - & - & \circ & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Forma canonica di controllo: osservazioni

$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($m = 1$ = singolo ingresso)

1. Σ raggiungibile $\iff \Sigma$ può essere portato in forma canonica di controllo.
2. Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base $T_c \triangleq TQ$ ma solo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$.

Forma canonica di controllo: osservazioni

$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($m = 1$ = singolo ingresso)

1. Σ raggiungibile $\iff \Sigma$ può essere portato in forma canonica di controllo.
2. Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base $T_c \triangleq TQ$ ma solo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$.
3. Se \mathcal{R} e \mathcal{R}_c sono le matrici di raggiungibilità del sistema di partenza e del sistema in forma canonica di controllo allora $T_c = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$.

$$\mathcal{R} = T_c \mathcal{R}_c \Rightarrow T_c = \mathcal{R} \mathcal{R}_c^{-1}$$

In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
- ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
- ▷ Stabilizzabilità

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati ?

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati ?

$\Sigma^{(K)}$ raggiungibile \implies trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo !

$$F_c = T_c^{-1}FT_c, \quad g_c = T_c^{-1}g, \quad K_c = KT_c = [k_{1,c} \quad \cdots \quad k_{n,c}]$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati ?

$\Sigma^{(K)}$ raggiungibile \implies trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo !

$$F_c = T_c^{-1}FT, \quad g_c = T_c^{-1}g, \quad K_c = KT_c = [k_{1,c} \quad \cdots \quad k_{n,c}]$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{1,c} & -\alpha_1 + k_{2,c} & -\alpha_2 + k_{3,c} & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Delta_{F_c+g_c K_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0$ = polinomio con autovalori desiderati

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0$ = polinomio con autovalori desiderati

1. Siano $k_{1,c}^* \triangleq \alpha_0 - p_0, \dots, k_{n,c}^* \triangleq \alpha_{n-1} - p_{n-1}$
2. Sia $K_c^* \triangleq [k_{1,c}^* \ \cdots \ k_{n,c}^*]$
3. $K^* \triangleq K_c^* T_c^{-1}$ = matrice di retroazione desiderata !

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori **a nostro piacimento!** L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

- Il procedimento permette di allocare gli autovalori **a nostro piacimento!** L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).

sistemi a tempo discreto: $p(\lambda) = \lambda^n$

- Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)**!

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori **a nostro piacimento!** L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).
2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)** !
3. Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Mentre, Il cambio di base T_c^{-1} per ottenere K^* si può calcolare come $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1}$.

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori **a nostro piacimento!** L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).
2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)** !
3. Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Mentre, Il cambio di base T_c^{-1} per ottenere K^* si può calcolare come $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1}$.
4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo.

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \right]$$

Allocazione autovalori ($m = 1$): metodo alternativo

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0$ = polinomio con autovalori desiderati

Risolvere $\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda)$ con incognita K



Sistema di equazioni lineari con incognite k_1, \dots, k_n , $K = [k_1 \quad \cdots \quad k_n]$!

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \right]$$

Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$\begin{aligned}\Sigma^{(K)} : \quad x(t+1) &= (F + gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t. $W(z)$ di $\Sigma^{(K)}$?

Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$\begin{aligned}\Sigma^{(K)} : \quad & x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t) \\ & y(t) = Hx(t)\end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t. $W(z)$ di $\Sigma^{(K)}$?

$$\begin{aligned}W(z) &= H(zI - F - gK)^{-1}g = H_c(zI - F_c - g_c K_c)^{-1}g_c \\ &= \frac{\beta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \beta_1z + \beta_0}{z^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})z^n + \cdots + (\alpha_1 - k_{2,c})z + (\alpha_0 - k_{1,c})}\end{aligned}$$

La funzione modifica solo i poli della funzione di trasferimento !

In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
 - ▷ Stabilizzabilità

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + \underbrace{Gu(t)}_{Gv(t)}, \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati ?

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati ?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \underbrace{F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m}_{g_i k_i}$$

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati ?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima ($m = 1$)!

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati ?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima ($m = 1$)!

Problema: Il sistema potrebbe **non** essere raggiungibile da un singolo ingresso anche se Σ raggiungibile !!

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati
se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati
se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso !!

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati
se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso !!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G , esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

Esempio (cont.)

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1 .

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

extra

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M .

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

extra

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M .
2. L'approccio appena visto è piuttosto intuitivo ma ha delle limitazioni.

Ad esempio, usando un singolo ingresso si può ottenere un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi **non inferiore a n** . Con più ingressi invece esistono casi in cui è possibile costruire un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi **inferiore a n !**

Quindi, usando tecniche più avanzate (che sfruttano la cosiddetta **forma canonica di controllo multivariabile**) si possono ottenere prestazioni di controllo migliori.

In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
 - ▷ Stabilizzabilità

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice **stabilizzabile** se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con modulo minore di 1.
3. La matrice PBH $[zI - F \ G]$ ha rango n , $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice **stabilizzabile in tempo finito** se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile in tempo finito se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile in tempo finito.
2. Σ ammette un DBC.
3. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori nulli.
4. Σ è controllabile (a zero).
5. La matrice PBH $[zI - F \ G]$ ha rango n , $\forall z$ con $z \neq 0$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con parte reale minore di 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \ G]$ ha rango n , $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Esempio

extra

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esempio

extra

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Il sistema è stabilizzabile se $\alpha > 0$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

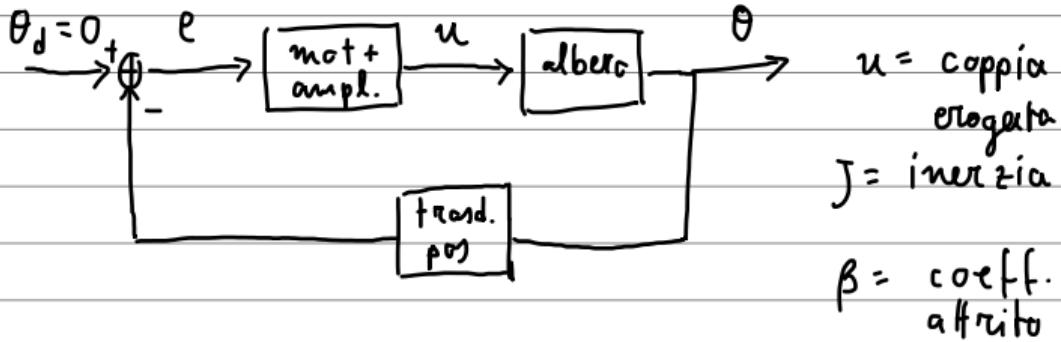
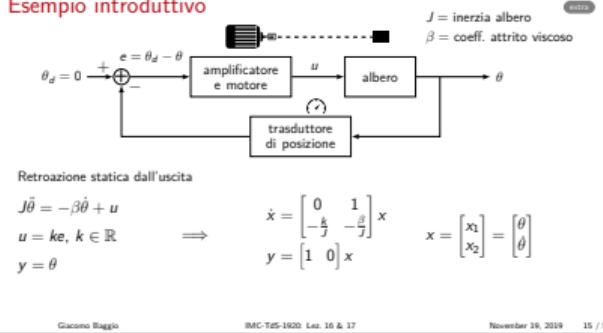
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 baggiogi.github.io

Esempio introduttivo



Assunzione: Costante elettrica e del trasduttore sono **francucabili** rispetto alla costante meccanica

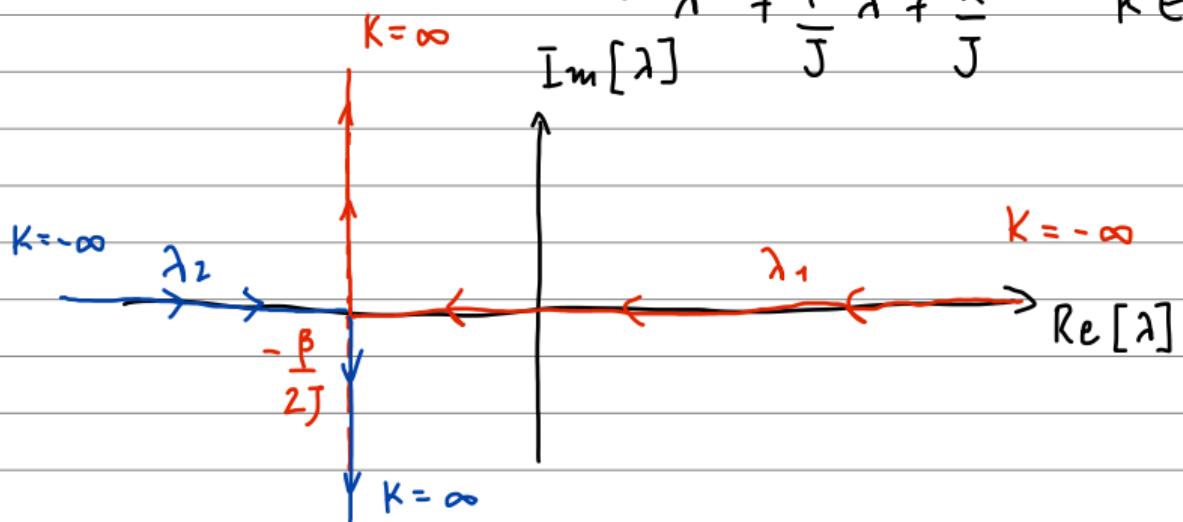
$$\underbrace{J\ddot{\theta}}_{F} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad u = ke = k(\theta_d - \theta)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \ 0] x$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_F(\lambda) &= \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{J} & \lambda + \frac{\beta}{J} \end{bmatrix} \\
 &= \lambda \left(\lambda + \frac{\beta}{J} \right) + \frac{k}{J} \\
 &= \lambda^2 + \frac{\beta}{J} \lambda + \frac{k}{J} \quad k \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$



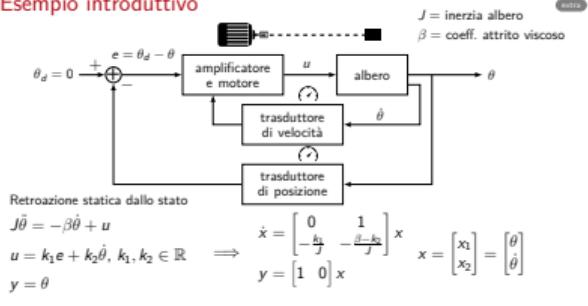
$$\max \operatorname{Re} [\lambda_i] \geq -\frac{\beta}{2\gamma}$$

$$e^{-\frac{\beta}{2\gamma} t}$$

↪ modo dominante
nella condizione più favorevole

Limiti alla prontezza del sistema refrigerativo!

Esempio introduttivo



Giacomo Biaggio

IMC-TsS-1620: Lec. 16 & 17

November 19, 2019 16 / 58

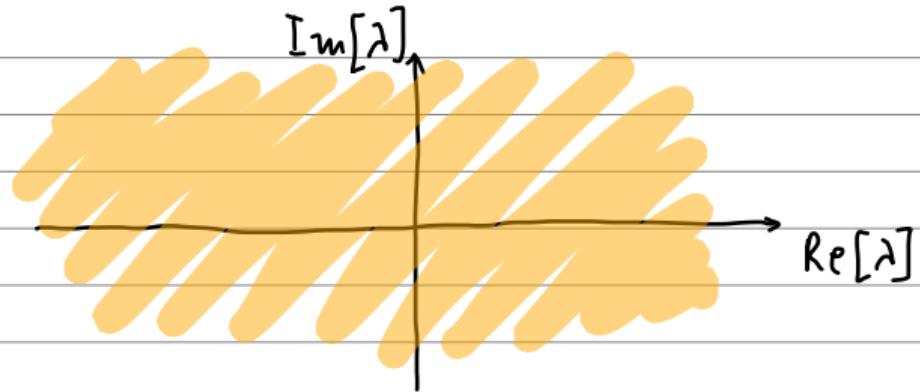
$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$u = k_1 e + k_2 \dot{\theta} = -k_1 x_1 + k_2 x_2 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta-k_2}{J} \end{bmatrix}}_{F} x \quad y = [1 \ 0] x$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det (\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_1}{J} & \lambda + \frac{\beta-k_2}{J} \end{bmatrix} = \lambda \left(\lambda + \frac{\beta-k_2}{J} \right) + \frac{k_1}{J}$$

$$= \lambda^2 + \frac{\beta-k_2}{J} \lambda + \frac{k_1}{J}$$



Potiamo allocare gli autovalori del sistema retroazionato a nostro piacimento!
Non abbiamo nessun limite alla prontezza del sistema!

$$\Sigma^{(K)} : \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T ?

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= T^{-1}x & \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{K} ? \\ \downarrow \\ x &= Tz \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Tz(t+1) = \underbrace{FTz(t)}_{\bar{F}} + \underbrace{GK} \underbrace{Tz(t)}_{\bar{K}} + Gv(t) \\ y(t) = \underbrace{H} \underbrace{Tz(t)}_{\bar{H}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(t+1) = \underbrace{T^{-1}\bar{F}Tz(t)}_{\bar{F}} + \underbrace{\bar{T}^{-1}G}_{\bar{G}} \underbrace{\bar{K}Tz(t)}_{\bar{K}} + Gv(t) \\ y(t) = \underbrace{\bar{H}Tz(t)}_{\bar{H}} \end{cases}$$

$$\Sigma^{(K)} : \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{(K)} : \begin{aligned} x(t+1) &= (F + G_K) x(t) + G_K v(t) \\ y(t) &= H x(t) \end{aligned}$$

T = cambio di base di Kalman

$$F_K = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_K = T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K_K = KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$F_K + G_K K_K = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{I}} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 K_1 & G_1 K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} + G_1 k_1 & F_{12} + G_1 K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_{TK} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



parte non ragg.
non è influenzata dalla retroazione!

$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ($m = 1$ = singolo ingresso)

Consideriamo il cambio di base $T = R$

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t)$$

$$T = R = [g \quad Fg \quad F^2g \quad \cdots \quad F^{n-1}g]$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT \quad \bar{g} = T^{-1}g$$

Sia $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$ (vettore della base canonica)

$$\bar{F}e_1 = T^{-1}FTe_1 = T^{-1}Fg = T^{-1}Te_2 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}e_2 = T^{-1}FTe_2 = T^{-1}FFg = T^{-1}F^2g = T^{-1}Te_3 = e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\bar{F}e_{n-1} = T^{-1}FTe_{n-1} = T^{-1}FF^{n-2}g = T^{-1}F^{n-1}g = T^{-1}Te_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} e_n = T^{-1} F T e_n = T^{-1} F F^{n-1} g = T^{-1} F^n g \quad (*)$$

Cayley-Hamilton: $\Delta_F(F) = 0$

$$\begin{aligned}\Delta_F(\lambda) &= \det(\lambda I - F) \\ &= \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \\ \downarrow \quad F^n + \alpha_{n-1} F^{n-1} + \cdots + \alpha_1 F + \alpha_0 I &= 0\end{aligned}$$

$$F^n = -\alpha_{n-1} F^{n-1} + \cdots - \alpha_1 F - \alpha_0 I$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \bar{F}e_n &= T^{-1}F^n g = T^{-1}(-\alpha_{n-1}F^{n-1} + \cdots - \alpha_1 F - \alpha_0 I)g \\
 &= -\alpha_{n-1}T^{-1}F^{n-1}g - \alpha_{n-2}T^{-1}F^{n-2}g - \cdots - \alpha_1 T^{-1}Fg - \alpha_0 T^{-1}g \\
 &= -\alpha_{n-1}\cancel{T^{-1}}\cancel{F}e_n - \alpha_{n-2}\cancel{T^{-1}}\cancel{F}e_{n-1} - \cdots - \alpha_1\cancel{T^{-1}}\cancel{F}e_1 \\
 &\quad \left. \begin{array}{c} -\alpha_0\cancel{T^{-1}}\cancel{F}e_1 \\ \hline \end{array} \right\} \\
 &= -\alpha_{n-1}e_n - \alpha_{n-2}e_{n-1} - \cdots - \alpha_1 e_2 - \alpha_0 e_1 \\
 &= \begin{bmatrix} -\alpha_0 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} e_2 & e_3 & \cdots & e_{n-1} & * \end{bmatrix}$$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -d_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -d_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -d_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{g} = T^{-1}g = T^{-1}\bar{z}e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

back

$$\Sigma: \dot{x}(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \dot{x}(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati?

$$\Sigma^{(K)}: \dot{x}(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

T_c = cambio base forma canonica controllo

$$F_c = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \cdots & \cdots & -d_{n-1} \end{bmatrix} \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K_c = K\bar{T} \\ = [k_{1,c} \ \cdots \ k_{n,c}]$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \cdots & \cdots & -d_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ k_{1,c} & k_{2,c} & \cdots & k_{n,c} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c}) \lambda^{n-1} + (\alpha_{n-2} - k_{n-1,c}) \lambda^{n-2} + \dots + (\alpha_1 - k_{2,c}) \lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + p_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + p_1 \lambda + p_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n-1} - k_{n,c} = p_{n-1} \\ \alpha_{n-2} - k_{n-1,c} = p_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_1 - k_{2,c} = p_1 \\ \alpha_0 - k_{1,c} = p_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k_{n,c}^* = \alpha_{n-1} - p_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ k_{2,c}^* = \alpha_1 - p_1 \\ k_{1,c}^* = \alpha_0 - p_0 \end{array} \right.$$

$$k_c^* = \begin{bmatrix} k_{1,c}^* & \cdots & k_{n,c}^* \end{bmatrix}$$

$$K_c^* = K T_c \Rightarrow K = K_c^* T_c^{-1}$$

$$T_c = R R_c^{-1} \Rightarrow T_c^{-1} = R_c R^{-1}$$

Esempio

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$\underbrace{x(t+1)}_{\text{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_g u(t)$$

$$\Delta_{F+gk}(\lambda) = \lambda^3$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = -1$$

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1+k_{1,c} & 1+k_{2,c} & 1+k_{3,c} \end{bmatrix}$$

\downarrow

$$[k_{1,c} \ k_{2,c} \ k_{3,c}]$$

$$\rho(\lambda) = \lambda^3 \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_0 = 0$$

$$\begin{cases} -1 + k_{1,c} = 0 \\ 1 + k_{2,c} = 0 \\ 1 + k_{3,c} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_{1,c}^* = 1 \\ k_{2,c}^* = -1 \\ k_{3,c}^* = -1 \end{cases}$$

$$K_c^* = [1 \ -1 \ -1]$$

$$K^* = K_c^* T_c^{-1} = K_c^* R_c R^{-1} \quad (*)$$

$$R_c = [g_c \quad F_c g_c \quad F_c^2 g_c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} g & F_g & F^2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad K^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{underbrace}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right]$$

Esempio (cont.)

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$$

$$\Delta_{F+gK}(\lambda) \stackrel{!}{=} \lambda^3$$



$$\det(\lambda I - F - gK) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -2 - k_2 & -k_3 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -k_1 & -1 - k_2 & \lambda - k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 1 - k_1)(\lambda - k_3) - (2 + k_2)k_1 - \lambda k_1 k_3 - (\lambda - 1 - k_1)(1 + k_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda (\lambda^2 - \lambda(1+k_1+k_3) + (1+k_1)k_3 - 2k_1 - k_1k_2 \\
 &\quad - \lambda k_1 k_3 - \lambda(1+k_2) + (1+k_1)(1+k_2)) \\
 &= \lambda^3 - \lambda^2(1+k_1+k_3) + \lambda(k_3 + \cancel{k_1}k_3 - \cancel{k_1}k_3 - 1 - k_2) \\
 &\quad + (-2k_1 - \cancel{k_1}k_2 + 1 + \cancel{k_1}k_2 + k_1 + k_2) \\
 &= \lambda^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -(1+k_1+k_3) = 0 \\ k_3 - 1 - k_2 = 0 \\ -k_1 + k_2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + k_1 + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2} \\ k_3 = 1 + k_2 = k_1 \Rightarrow k_3 = -\frac{1}{2} \\ k_2 = k_1 - 1 \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$K = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \right]$$

$$\Sigma^{(K)} : \begin{aligned} x(t+1) &= (F + gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t. $W(z)$ di $\Sigma^{(K)}$?

Σ raggiungibile

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \quad H \in \mathbb{R}^{1 \times n} \end{cases}$$

SISO

$$H_c = HT_c = [\beta_0 \ \beta_1 \cdots \beta_{n-1}] \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}g = H_c(zI - F_c)^{-1}g_c \\ &\stackrel{!}{=} H_c \frac{\text{adj}(zI - F_c)}{\det(zI - F_c)} g_c \\ &\stackrel{!}{=} \frac{\beta_{n-1} z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + d_{n-1} z^{n-1} + \cdots + d_1 z + d_0} \end{aligned}$$

poli di $W(z) \subseteq$ autovalori di F

$$\Sigma^{(k)} : \begin{cases} x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$$W^{(k)}(z) = H \left(zI - F - gK \right)^{-1} g = H_c \left(zI - F_c - g_c K_c \right)^{-1} g_c$$

$$= H_c \frac{\text{adj}(zI - F_c - g_c K_c)}{\det(zI - F_c - g_c K_c)} g_c$$

$$= \frac{\beta_{n-1} z^{n-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c}) z^{n-1} + \dots + (\alpha_0 - k_{1,c})}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix}$

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

back

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$\downarrow g_1$ $\downarrow g_2$

Σ ragg. ? $R = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rank $R = 2$ Σ ragg.

(F, g_1) ragg. ? $R^{(1)} = [g_1 \quad Fg_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ non ragg.

(F, g_2) ragg. ? $R^{(2)} = [g_2 \quad Fg_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$ non ragg.

Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

back

$$\begin{array}{c} j_1 \downarrow \quad j_2 \downarrow \\ x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ p(\lambda) = (\lambda - 1/2)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1/4 \end{array}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (F + GM, g_1) \text{ e' raggr. ?}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ F + GM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} g_1 & (F + GM)g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ raggr. !} \end{array}$$

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$$

$$\Delta_{F+GM+g_1 K}(\lambda) = \det \left(\lambda I - F - GM - g_1 K \right)$$

$$\stackrel{|}{=} \det \begin{bmatrix} \lambda - k_1 & -k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - k_1) \lambda - k_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 - \lambda k_1 - k_2 \\ = \lambda - \lambda + \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\bar{K} = M + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

↑ matrice di retroazione "complettiva"

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

back

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}^k$$

Esempio

back

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Il sistema è in forma di Kalman!

$$F_{11} = 0, \quad G_1 = [1 \ 1]$$

$$F_{22} = -\alpha \Rightarrow \alpha > 0 \text{ il sistema è stabilizzabile}$$