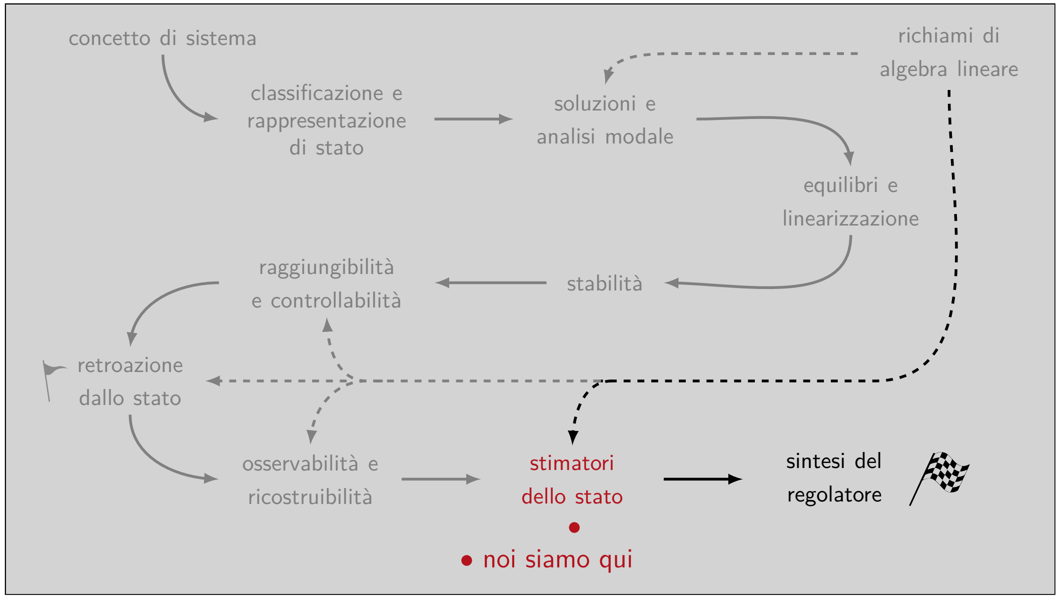
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



concetto di sistema

classificazione e rappresentazione di stato

soluzioni e analisi modale

richiami di algebra lineare

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

● noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

In questa lezione

- Sistema duale e sue proprietà
- Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- Stimatori dello stato
- Rivelabilità

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, H, G)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

N.B. Qui consideriamo sistemi a t.d. ma tutto si applica a t.c.!

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} H^\top & F^\top H^\top & \cdots & (F^\top)^{n-1}H^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ FH \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{O}^\top$$

Σ_d raggiungibile
$\Updownarrow$
Σ osservabile

$$\mathrm{Im}((F^\top)^n) \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}_d \iff \ker(F^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$$

Σ_d controllabile
$\Updownarrow$
Σ ricostruibile

Sistema duale: osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^\top \\ G^\top F^\top \\ \vdots \\ G^\top (F^\top)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$$

Σ_d osservabile
$\Updownarrow$
Σ raggiungibile

$$\ker((F^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \mathrm{Im}(F^n) \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}$$

Σ_d ricostruibile
$\Updownarrow$
Σ controllabile

Dualità: equivalenza algebrica

$$\begin{tikzcd}
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r, "z = T^{-1}x"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \bar{\Sigma} = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r, "z = T^\top x"] & \bar{\Sigma}_d = (T^\top F(T^\top)^{-1}, T^\top H^\top, G^\top (T^\top)^{-1})
\end{tikzcd}$$

Cambio di base T nel sistema di partenza $=$ cambio di base $(T^\top)^{-1}$ nel sistema duale

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

Σ_d non raggiungibile

Forma di Kalman (di raggiungibilità)

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r, "z = T_K^{-1} x"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_{K,d} = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r, "z = T_K^\top x"] & \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{tikzcd}$$

Σ non osservabile

Forma di Kalman di osservabilità

$(F_{22}, G_2, 0)$ sottosistema non osservabile

Dualità: forma canonica di controllo/osservazione

Σ_d raggiungibile
con singolo ingresso ($p = 1$)

Forma canonica di controllo

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r, "z = T_c^{-1} x"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_{c,d} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G_{c,1}^\top \right) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r, "z = T_c^\top x"] & \Sigma_o = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, G_{c,1}, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)
\end{tikzcd}$$

Σ_d osservabile
con singola uscita ($p = 1$)

Forma canonica di osservazione

Dualità: test PBH di raggiungibilità/osservabilità

Test PBH di raggiungibilità

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \begin{array}{c} \Sigma_d \text{ raggiungibile} \iff \\ \text{rank}[zI - F^\top \;\; H^\top] = n, \; \forall z \in \mathbb{C} \end{array} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r] & \begin{array}{c} \Sigma \text{ osservabile} \iff \\ \text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \; \forall z \in \mathbb{C} \end{array}
\end{tikzcd}$$

Test PBH di osservabilità

Proprietà equivalenti all'osservabilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale Σ_d è raggiungibile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \; \forall z \in \mathbb{C}$.
4. gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

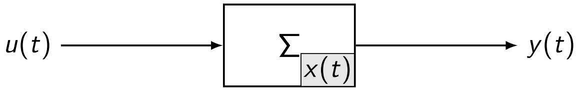
1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.
4. esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

N.B. Parlare di ricostruibilità ha "senso" solo a t.d.!

Il problema della stima dello stato

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



Assunzione: lo stato $x(t)$ non è direttamente accessibile

Problema: costruire una "buona" stima $\hat{x}(t)$ di $x(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

Stimatori a catena aperta

stimatore a catena aperta

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad \boxed{\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = H\hat{x}(t) \end{cases}}$$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

$$\boxed{\text{errore di stima } e(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty \text{ se } F \text{ è instabile !!!}}$$

Stimatori a catena chiusa

stimatore a catena chiusa

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad \boxed{\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

errore di stima $e(t)$ tende a zero se $F + LH$ è asintoticamente stabile (e in questo caso F può anche essere instabile) !!!

Stimatori a catena chiusa: osservazioni

1. Per quanto visto prima, se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F + LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare le tecniche di allocazione degli autovalori viste per il controllo in retroazione in questo caso applicate al sistema duale!

2. Se tutti gli autovalori di $F + LH$ vengono allocati in zero abbiamo costruito uno **stimatore dead-beat** !

3. Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di **stimatori di ordine intero** perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire **stimatori di ordine ridotto** che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

4. Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat.

Il sistema è osservabile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con modulo minore di 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo minore di 1.
5. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Rivelabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile in tempo finito se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende a zero in tempo finito.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile in tempo finito.
2. Σ ammette uno stimatore dead-beat.
3. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile in tempo finito.
4. Σ è ricostruibile.
5. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori nulli.
6. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $z \neq 0$.

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con parte reale minore di 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale minore di 1.
5. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Discutere la rilevabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Il sistema è rivelabile se $|\alpha| < 1$ (rivelabile in tempo finito se $\alpha = 0$).