Lezione 16 & 17: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se possibile, una retroazione dallo stato che allochi gli autovalori del sistema in -1, -2.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca, se possibile, un dead-beat controller per il sistema.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

È possibile trovare una matrice di retroazione K tale da avere autovalori del sistema retroazionato in -2, -2, -1, -1? E per autovalori in -2, -2, -2, -1? E per autovalori in -2, -2, -2, -2?

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il sistema è raggiungibile usando un solo ingresso. In caso contrario, si provi a rendere raggiungibile il sistema dal primo ingresso usando come matrice di retroazione preliminare $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi si calcoli un dead-beat controller per il sistema.

Esercizio 5. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Si studi la stabilizzabilità (tramite retroazione dallo stato) del sistema al variare di $\alpha \in [0, 1]$. Quando il sistema è stabilizzabile si calcoli il numero di minimo ingressi che rende il sistema stabilizzabile.

Soluzioni

Esercizio 1. Matrice di retroazione $K = \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 2. Matrice di retroazione $K = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3. Il sistema non è raggiungibile. Il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 1 e autovalore in -1. Quindi è possibile calcolare una retroazione K tale da portare gli autovalori del sistema in -2, -2, -1, -1 e in -2, -2, -2, -1. Non è invece possibile portare tutti gli autovalori del sistema in -2.

Esercizio 4. Il sistema non è raggiungibile da un singolo ingresso, ma lo diventa (dal primo ingresso) usando come matrice di retroazione preliminare M. In questo caso, la matrice di retroazione complessiva è $K = \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 5. Se $\alpha = 0$, il sistema non è stabilizzabile. Se $\alpha = 1$, il sistema è stabilizzabile con due ingressi. Se $0 < \alpha < 1$, il sistema è stabilizzabile con un singolo ingresso (il secondo).