

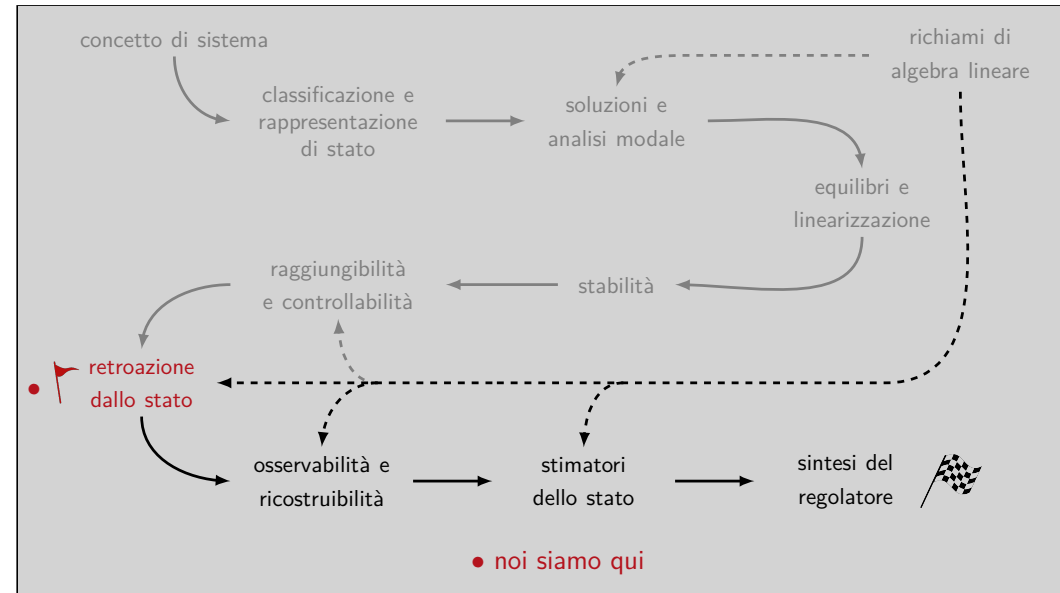
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020

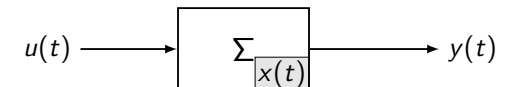


## In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
  - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
  - ▷ Forma canonica di controllo
  - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
  - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
  - ▷ Stabilizzabilità

## Il problema del controllo

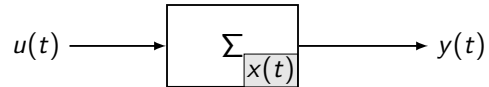
sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$



**Controllo** = manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso  $u(t)$

## Problemi di controllo

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$

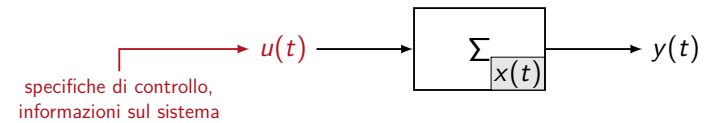


**Problema di regolazione:**  
stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

**Problema di asservimento (tracking):**  
inseguire un andamento desiderato dell'uscita

## Controllo in “catena aperta” o open-loop

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$

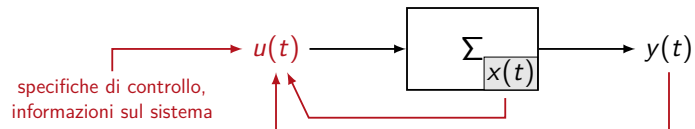


legge di controllo  $u(t)$  non dipende dai valori di  $x(t)$ ,  $y(t)$

*approccio semplice, ma non ideale se il sistema  
è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!*

## Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$

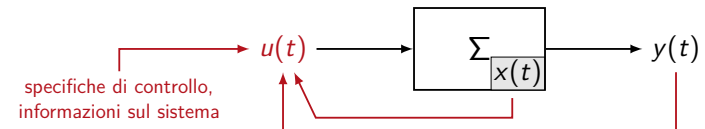


legge di controllo  $u(t)$  dipende dai valori di  $x(t)$  e/o  $y(t)$

*approccio più complesso (richiede sensori di misura),  
ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!*

## Controllo in retroazione o feedback

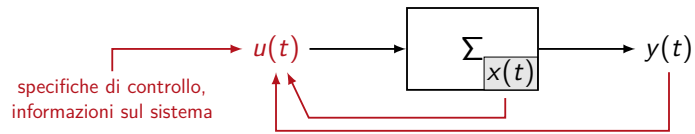
sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$



1. Retroazione statica
- dallo stato:  $u(t) = f(x(t))$  (allo stesso istante  $t!$ )
  - dall'uscita:  $u(t) = f(y(t))$  (allo stesso istante  $t!$ )

## Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato  $x(t)$ , ingresso  $u(t)$  e uscita  $y(t)$

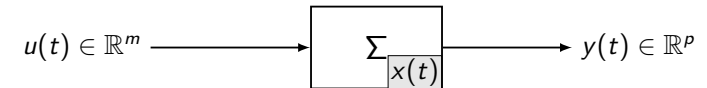


2. Retroazione dinamica
- dallo stato:  $u(t) = f(x(\tau)), \tau \in [t_0, t]$
  - dall'uscita:  $u(t) = f(y(\tau)), \tau \in [t_0, t]$

## Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

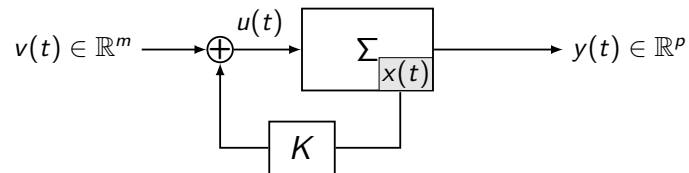
$$y(t) = Hx(t)$$



## Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t)$$

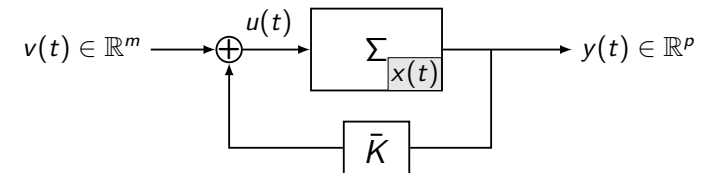


$$u(t) = Kx(t) + v(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{retroazione statica dallo stato}$$

## Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

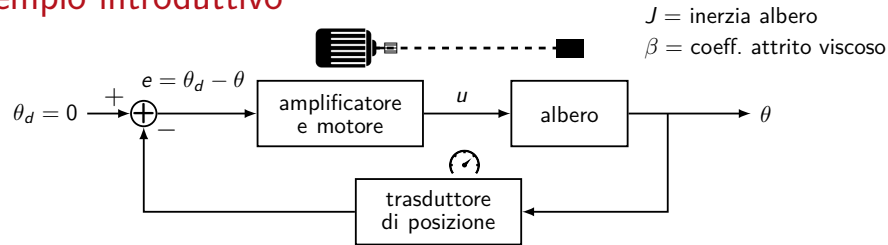
$$x(t+1) = (F + G\bar{K}H)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t)$$



$$u(t) = \bar{K}Hx(t) + v(t), \quad \bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad \text{retroazione statica dall'uscita}$$

## Esempio introduttivo



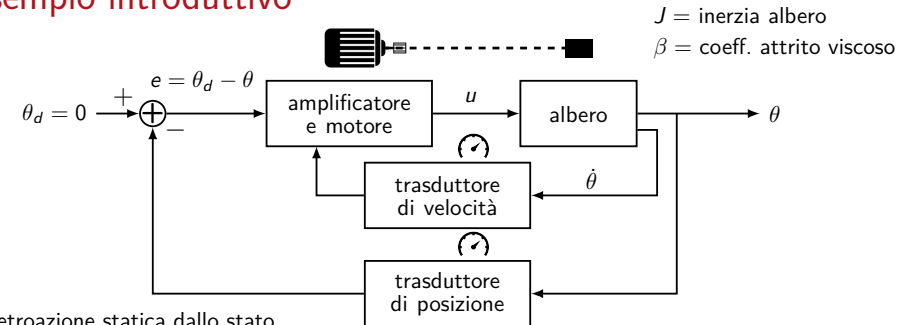
Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = ke, \quad k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x$$

$$y = \theta \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

## Esempio introduttivo



Retroazione statica dallo stato

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = k_1 e + k_2 \dot{\theta}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x$$

$$y = \theta \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

## Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base  $T$ ?

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT, \quad \bar{K} = KT$$

## Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$X_R(t)$  = spazio di raggiungibilità in  $t$  passi di  $\Sigma$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$X_R^{(K)}(t)$  = spazio di raggiungibilità in  $t$  passi di  $\Sigma^{(K)}$

**Teorema:**  $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$ , per ogni scelta della matrice di retroazione  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \Sigma^{(K)} \text{ raggiungibile}$$

## Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)}: \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

## Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

$$\implies \text{rank} \left( \begin{bmatrix} g & Fg & F^2g & \dots & F^{n-1}g \end{bmatrix} \right) = n$$

$$\implies \{g, Fg, F^2g, \dots, F^{n-1}g\} \text{ base di } \mathbb{R}^n$$

base ciclica di  $\mathbb{R}^n$

## Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Consideriamo il cambio di base  $T = \mathcal{R}$

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

## Forma canonica di controllo

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Con un ulteriore cambio di base  $Q$  arriviamo alla **forma canonica di controllo**

$$F_c = Q^{-1}\bar{F}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g_c = Q^{-1}\bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

## Forma canonica di controllo: osservazioni

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

1.  $\Sigma$  raggiungibile  $\iff \Sigma$  può essere portato in forma canonica di controllo.
2. Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base  $T_c \triangleq TQ$  ma solo dei coefficienti del polinomio  $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$ .
3. Se  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_c$  sono le matrici di raggiungibilità del sistema di partenza e del sistema in forma canonica di controllo allora  $T_c = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$ .

## Allocazione autovalori ( $m = 1$ )

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a  $F + gK$  degli autovalori desiderati ?

$\Sigma^{(K)}$  raggiungibile  $\implies$  trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo !

$$F_c = T_c^{-1}FT, \quad g_c = T_c^{-1}g, \quad K_c = KT_c = [k_{1,c} \quad \dots \quad k_{n,c}]$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{1,c} & -\alpha_1 + k_{2,c} & -\alpha_2 + k_{3,c} & \dots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

## Allocazione autovalori ( $m = 1$ )

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = \text{polinomio con autovalori desiderati}$$

1. Siano  $k_{1,c}^* \triangleq \alpha_0 - p_0, \dots, k_{n,c}^* \triangleq \alpha_{n-1} - p_{n-1}$
2. Sia  $K_c^* \triangleq [k_{1,c}^* \quad \dots \quad k_{n,c}^*]$
3.  $K^* \triangleq K_c^* T_c^{-1} = \text{matrice di retroazione desiderata !}$

## Allocazione autovalori ( $m = 1$ ): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori **a nostro piacimento!** L'unico vincolo è la raggiungibilità di  $\Sigma$  (e quindi di  $\Sigma^{(K)}$ ).
2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ( $p(\lambda) = \lambda^n$ ) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)** !
3. Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio  $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$ . Mentre, il cambio di base  $T_c^{-1}$  per ottenere  $K^*$  si può calcolare come  $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1}$ .
4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo.

## Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$K^*$  tale che il sistema retroazionato abbia autovalori  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  (DBC)?

---

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## Allocazione autovalori ( $m = 1$ ): metodo alternativo

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0$  = polinomio con autovalori desiderati

Risolvere  $\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda)$  con incognita  $K$



Sistema di equazioni lineari con incognite  $k_1, \dots, k_n$ ,  $K = \begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_n \end{bmatrix}$  !

## Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$K^*$  tale che il sistema retroazionato abbia autovalori  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  (DBC)?

---

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$\Sigma^{(K)}: \begin{aligned} x(t+1) &= (F + gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t.  $W(z)$  di  $\Sigma^{(K)}$  ?

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F - gK)^{-1}g = H_c(zI - F_c - g_cK_c)^{-1}g_c \\ &= \frac{\beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0}{z^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})z^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - k_{2,c})z + (\alpha_0 - k_{1,c})} \end{aligned}$$

La funzione modifica solo i poli della funzione di trasferimento !

## Allocazione autovalori ( $m > 1$ )

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a  $F + GK$  degli autovalori desiderati ?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

**Idea:** Selezionare un singolo ingresso (una sola riga  $k_i$  non nulla) ed usare la procedura vista prima ( $m = 1$ )!

**Problema:** Il sistema potrebbe **non** essere raggiungibile da un singolo ingresso anche se  $\Sigma$  raggiungibile !!

## Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

---

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

## Allocazione autovalori ( $m > 1$ ): Lemma di Heymann

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a  $F + GK$  degli autovalori desiderati se  $\Sigma$  **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda  $\Sigma$  raggiungibile da un ingresso !!

**Teorema:** Se  $(F, G)$  è raggiungibile e se  $g_i$  è una colonna non nulla di  $G$ , esiste una matrice  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tale che  $(F + GM, g_i)$  è raggiungibile.

## Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$K^*$  tale che il sistema retroazionato abbia autovalori  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ ?

---

Prendendo  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  il sistema è raggiungibile dal primo ingresso  $g_1$ .

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



## Allocazione autovalori ( $m > 1$ ): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare  $M$ .

2. L'approccio appena visto è piuttosto intuitivo ma ha delle limitazioni.

Ad esempio, usando un singolo ingresso si può ottenere un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi **non inferiore a  $n$** . Con più ingressi invece esistono casi in cui è possibile costruire un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi **inferiore a  $n$** !

Quindi, usando tecniche più avanzate (che sfruttano la cosiddetta **forma canonica di controllo multivariabile**) si possono ottenere prestazioni di controllo migliori.

## Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

**Definizione:** Il sistema  $\Sigma$  si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $\Sigma$  è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$  ha autovalori con modulo minore di 1.
3. La matrice PBH  $[zI - F \ G]$  ha rango  $n$ ,  $\forall z$  con  $|z| \geq 1$ .

## Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

**Definizione:** Il sistema  $\Sigma$  si dice stabilizzabile in tempo finito se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $\Sigma$  è stabilizzabile in tempo finito.
2.  $\Sigma$  ammette un DBC.
3. Il sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$  ha autovalori nulli.
4.  $\Sigma$  è controllabile (a zero).
5. La matrice PBH  $[zI - F \ G]$  ha rango  $n$ ,  $\forall z$  con  $z \neq 0$ .

## Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

**Definizione:** Il sistema  $\Sigma$  si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

**Teorema:** Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1.  $\Sigma$  è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$  ha autovalori con parte reale minore di 0.
3. La matrice PBH  $[zI - F \ G]$  ha rango  $n$ ,  $\forall z$  con  $\Re[z] \geq 0$ .

## Esempio

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

---

Il sistema è stabilizzabile se  $\alpha > 0$ .