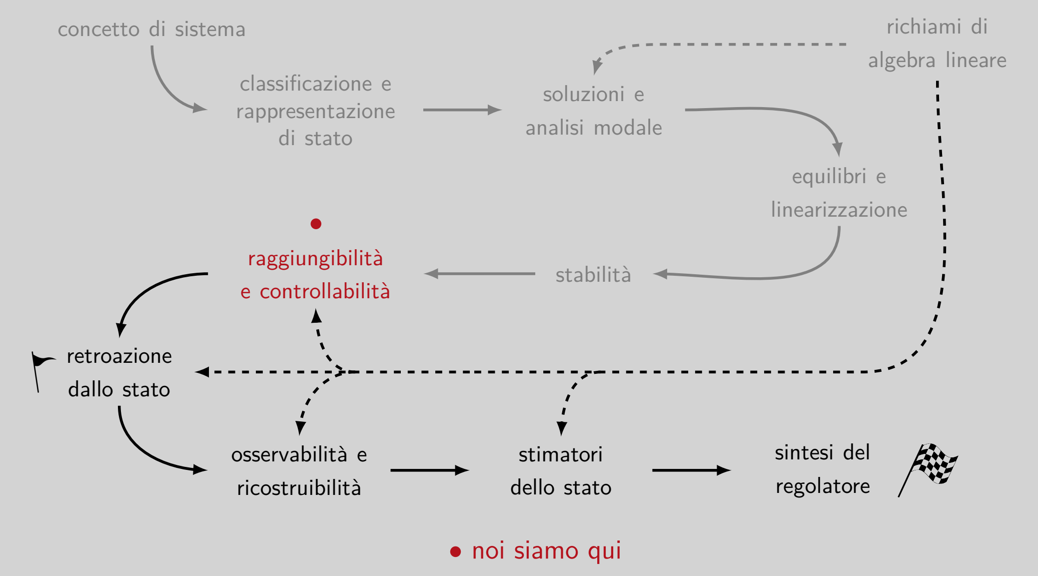
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 13 & 14: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo discreto

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

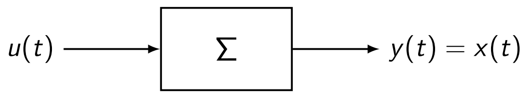


In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

Raggiungibilità e controllabilità

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

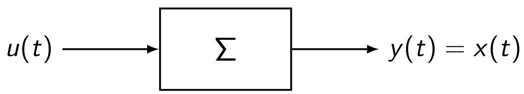


Raggiungibilità = possibilità di raggiungere un **qualsiasi** stato desiderato $\bar{x}$ a partire da uno stato x_0 **fissato** agendo su $u(t)$

Controllabilità = possibilità di raggiungere uno stato desiderato x_0 **fissato** a partire da un **qualsiasi** stato $\bar{x}$ agendo su $u(t)$

Stati e spazi raggiungibili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

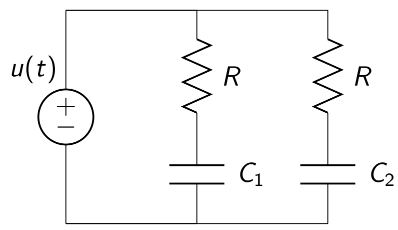


Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice raggiungibile dallo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = x_0$, $x(\bar{t}) = \bar{x}$.

Definizione: L'insieme $X_R(\bar{t})$ di tutti gli stati raggiungibili dallo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ è detto spazio raggiungibile al tempo $\bar{t}$.

(tipicamente: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$)

Esempio introduttivo



$x_1(t) = v_{C_1}(t)$, $x_2(t) = v_{C_2}(t)$

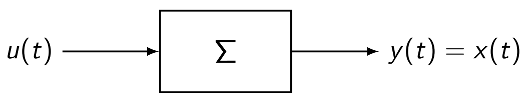
Se $C_1 = C_2$ e $x_1(0) = x_2(0)$:

$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$, $\forall u(t), \forall t \geq 0$

$\Rightarrow X_R(t) = \{x_1 = x_2\}$, $\forall t \geq 0$

Stati e spazi controllabili

sistema con stato $x(t)$ e ingresso $u(t)$

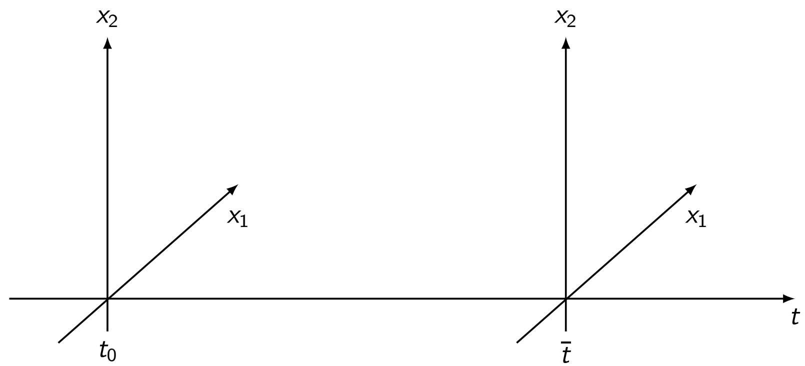


Definizione: Uno stato $\bar{x}$ si dice controllabile allo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ se esiste un ingresso $u(t)$, $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, tale che $x(t_0) = \bar{x}$ e $x(\bar{t}) = x_0$.

Definizione: L'insieme $X_C(\bar{t})$ di tutti gli stati controllabili allo stato x_0 al tempo $\bar{t}$ è detto spazio controllabile al tempo $\bar{t}$.

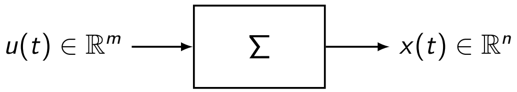
(tipicamente: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$)

Raggiungibilità e controllabilità: interpretazione grafica



Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = x_0$$



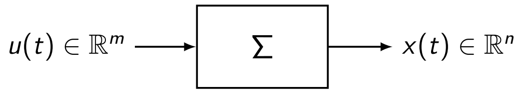
$$x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = 0$$



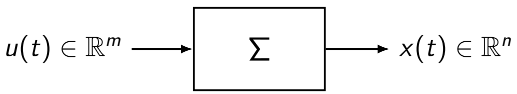
$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

matrice di raggiungibilità in t passi

Raggiungibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = 0$$



$$x(t) = \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati $\bar{x}$ raggiungibili al tempo t ($=$ in t passi) a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Spazio raggiungibile

$$X_R(t) = \text{spazio raggiungibile in } t \text{ passi} = \mathrm{Im}(\mathcal{R}_t)$$

Teorema: Gli spazi raggiungibili soddisfano:

$$X_R(1) \subseteq X_R(2) \subseteq X_R(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_R(i) = X_R(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di raggiungibilità}$$

$$X_R \triangleq X_R(i) = \text{(massimo) spazio raggiungibile}$$

Criterio di raggiungibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) raggiungibile in t passi se $X_R(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di raggiungibilità.

$$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n}$$

$$m = 1\text{: } \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}) \neq 0$$

$$m > 1\text{: } \Sigma \text{ raggiungibile} \iff \det(\mathcal{R}\mathcal{R}^\top) \neq 0$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies$ non raggiungibile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$ raggiungibile (in 2 passi)

Raggiungibilità ed equivalenza algebrica

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{z = T^{-1}x} z(t+1) = \bar{F}z(t) + \bar{G}u(t)$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT,\ \bar{G} = T^{-1}G$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \cdots & \bar{F}^{n-1}\bar{G} \end{bmatrix} = T^{-1}\mathcal{R}$$

$\operatorname{rank}(\bar{\mathcal{R}}) = \operatorname{rank}(\mathcal{R}) \implies$ cambio di base non modifica la raggiungibilità !!

Inoltre, se Σ raggiungibile: $\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top = T^{-1}\mathcal{R}\mathcal{R}^\top \implies T = \mathcal{R}\mathcal{R}^\top(\bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^\top)^{-1}$

Calcolo dell'ingresso di controllo

Se Σ è raggiungibile in t passi, come costruire un ingresso u_t per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ in t passi?

Caso $x_0 = 0$:

1. $\bar{x} = x(t) = \mathcal{R}_t u_t$
2. $u_t = \mathcal{R}_t^\top \eta_t,\ \eta_t \in \mathbb{R}^{mt} \implies \eta_t = (\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}\bar{x}$
3. $u_t = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}\bar{x}$

Caso $x_0 \neq 0$: $u_t = \mathcal{R}_t^\top(\mathcal{R}_t\mathcal{R}_t^\top)^{-1}(\bar{x} - F^t x_0)$

Calcolo dell'ingresso di controllo: osservazioni

1. Ingresso u_t generalmente non unico! Insieme dei possibili ingressi:

$$\mathcal{U}_t = \{u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_t)\}\,.$$

2. Ingresso u_t = ingresso a **minima energia**:

$$u_t = \arg \min_{u'_t \in \mathcal{U}_t} \|u'_t\|^2$$

3. Gramiano di raggiungibilità del sistema in t passi:

$$\mathcal{W}_t = \mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^\top = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1} B B^\top (A^\top)^{t-1}.$$

Autovalori di $\mathcal{W}_t$ quantificano l'energia richiesta per controllare il sistema.

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

ingressi $u'(t)$ per raggiungere $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ da $x_0 = 0$ in 2 passi?

$u'(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ min. energia

Proprietà importante

Definizione: Data una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uno spazio vettoriale W si dice F-invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

Proprietà: Lo spazio raggiungibile X_R è F-invariante e contiene $\mathrm{Im}(G)$.

Forma canonica di Kalman

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \mathrm{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

Obiettivo: costruire un cambio di base T in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile!

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k & \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}, \quad X_R = \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R,\ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w},\ \forall v_1 \implies F_{21} = 0$$

$$\mathrm{Im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G},\ G_2 = 0$$

Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1 u(t)$: sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$: sottosistema non raggiungibile

Forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{R}_K) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix}\right) = k$$

Esempi

1. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; G = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies$ sistema in forma di Kalman con $F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies$ sistema **non** in forma di Kalman

Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$ = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$. Se il sistema non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno per tutti e soli i valori di z che sono autovalori del sottosistema non raggiungibile di Σ.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli z che sono autovalori di F!

Test di Jordan

$$\Sigma : z(t+1) = F_J z(t) + G_J u(t),\ z(0) = z_0$$

Corollario: Il sistema Σ (in forma di Jordan) è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore λ_i di F_j, le righe di G_J in posizione corrispondente alle ultime righe dei miniblocchi di Jordan relativi a λ_i sono linearmente indipendenti.

Esempi

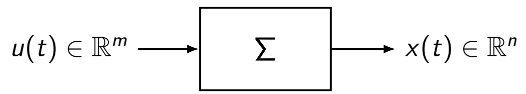
1. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ raggiungibile

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ non raggiungibile

Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = \bar{x}$$



$$x_0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

Controllabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ x(0) = \bar{x}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\ \Sigma\ } \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

$\boxed{\text{Insieme di stati } \bar{x} \text{ controllabili al tempo } t \ (= \text{in } t \text{ passi}) \text{ allo stato } x(t) = 0?}$

$\boxed{\text{Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati } \bar{x} \in \mathbb{R}?}$

Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ F^t x \in \operatorname{Im}(\mathcal{R}_t)\}$$

Teorema: Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \cdots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$i = \text{indice di controllabilità}$$

$$X_C \triangleq X_C(i) = \text{(massimo) spazio controllabile}$$

Criterio di controllabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_C(t) = \mathbb{R}^n$, con t indice di controllabilità.

$$\boxed{\Sigma \text{ controllabile} \iff \operatorname{Im}(F^n) \subseteq \operatorname{Im}(\mathcal{R}_t) = X_R}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies$ non raggiungibile $\forall f_1, f_2$ ma controllabile se $f_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & f_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\ f_1, f_2 \in \mathbb{R} \implies$ raggiungibile e quindi controllabile

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$ non raggiungibile ma controllabile (in 2 passi)

Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \;\; F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boxed{x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)}$$

1. Σ controllabile $\iff \exists\, \bar{t} \; : \; F_{22}^{\bar{t}} = 0 \iff$ autovalori di F_{22} tutti nulli
2. $X_R \subseteq X_C$ e $X_R = X_C$ se F_{22} invertibile
3. Σ **reversibile** (F invertibile) $\implies F_{22}$ invertibile $\implies X_R = X_C$

Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Teorema: Il sistema Σ è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$.

N.B. La matrice PBH può essere valutata solo per gli $z \neq 0$ che sono autovalori di F!