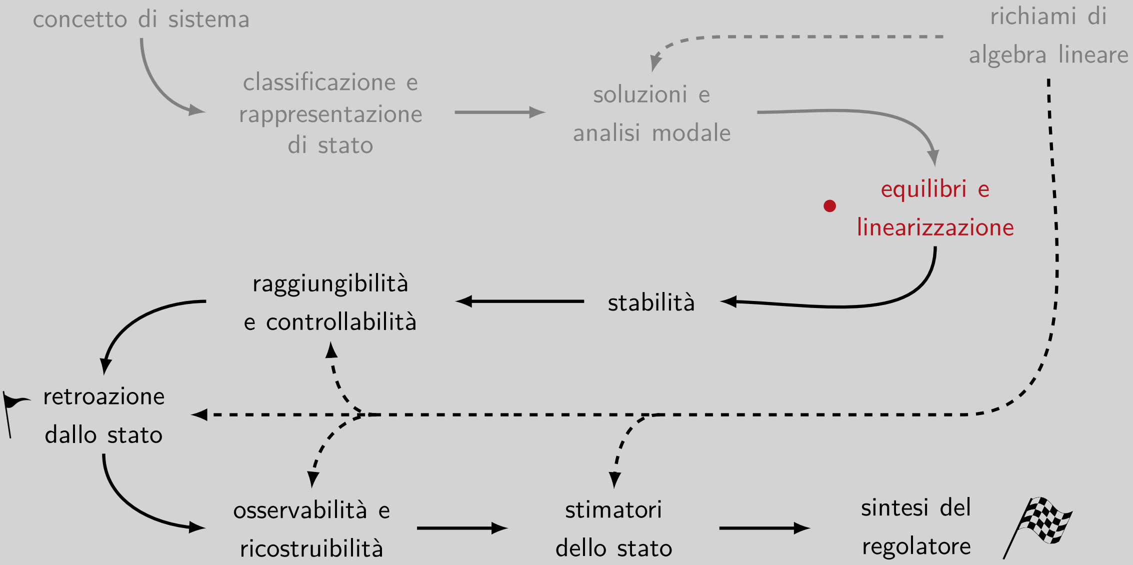
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Punti di equilibrio, definizioni di stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



● noi siamo qui

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Traiettorie di stato e ritratto di fase

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)}$$

Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$

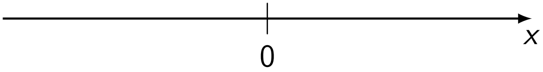
Ritratto di fase del sistema $=$ insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 1D

$\dot{x}(t) = fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$f \in \mathbb{R}$,



$x(t) = e^{ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = f^{t}x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 > \lambda_2 > 0 \text{ o } \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

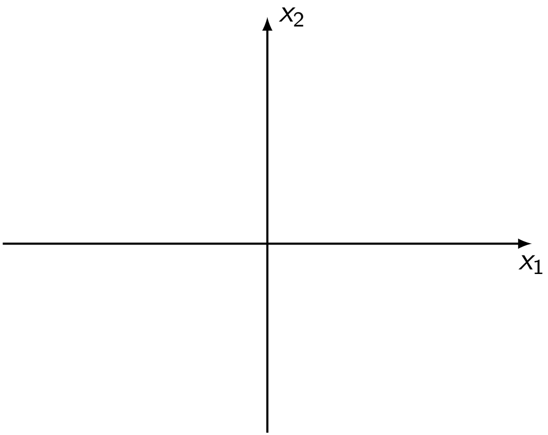
$$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t) = F^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

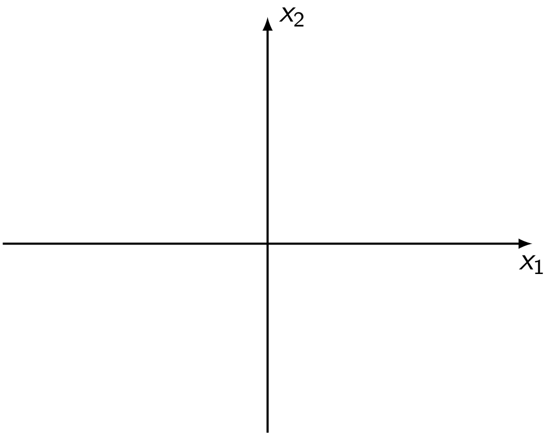


Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \; \lambda_1 > 0 > \lambda_2$

$\dot{x}(t) = Fx(t), \; t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t), \; t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

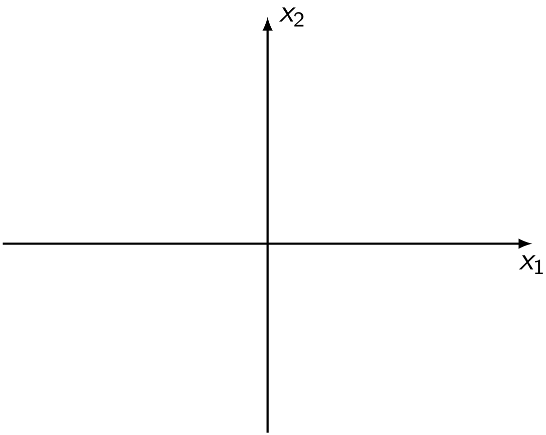
$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complessi coniugati)

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

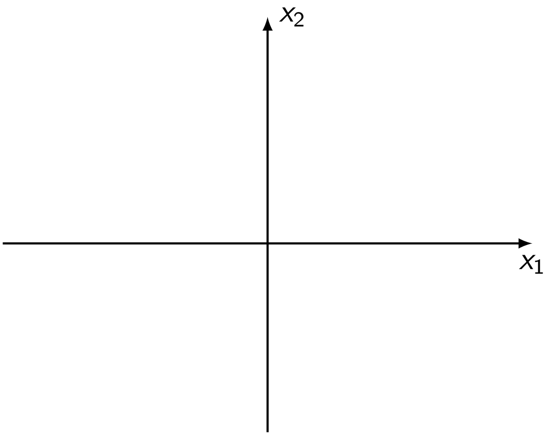
$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

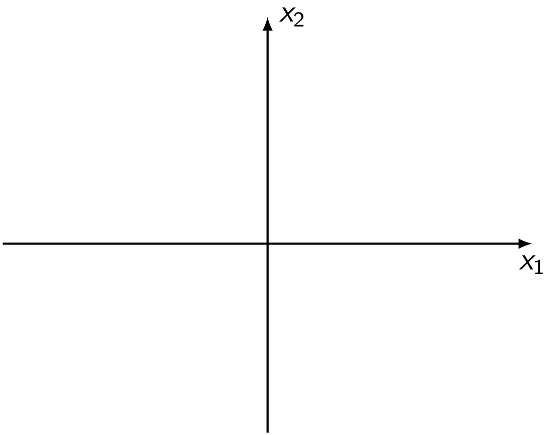


Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari nD

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) $x(t) = e^{Ft}x_0$

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) $x(t) = F^t x_0$

Fatto generale: Una traiettoria $x(t)$ giace su una retta passante per l'origine se e solo se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di F relativo ad un autovalore reale.

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Caso lineare: $\bar{x}$ equilibrio $\iff$ $\begin{cases} \bar{x} \in \ker F & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} \in \ker(F - I) & \text{(t.d.)} \end{cases}$

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \qquad \Longrightarrow \qquad$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \qquad \Longrightarrow \qquad$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \qquad \Longrightarrow \qquad$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante, } u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

caso lineare

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{array}{ll} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & F\bar{x} = -G\bar{u} \qquad \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) & (I - F)\bar{x} = -G\bar{u} \qquad \text{(t.d.)} \end{array}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \;\; \bar{u} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \quad \Longrightarrow \quad$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

Stabilità semplice

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Stabilità asintotica

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. La definizione di stabilità asintotica ha carattere locale. Se la condizione 2 (convergenza) vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si parla di stabilità asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

3. Per sistemi lineari stabilità locale = stabilità globale. Inoltre:

$$\text{stabilità semplice} \iff e^{Ft} \text{ limitata}$$

$$\text{stabilità asintotica} \iff e^{Ft} \text{ convergente}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \cdots \approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \cdots \approx f(\bar{x}) + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$:

$$\boxed{\dot{z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\, z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Jacobiano di f valutato in x

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots, \qquad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$:

$$\boxed{\dot{z} = J_f(\bar{x})\, z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad \begin{array}{l} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{z} = -z, \; z \triangleq x - \pi \end{array}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \; \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$