

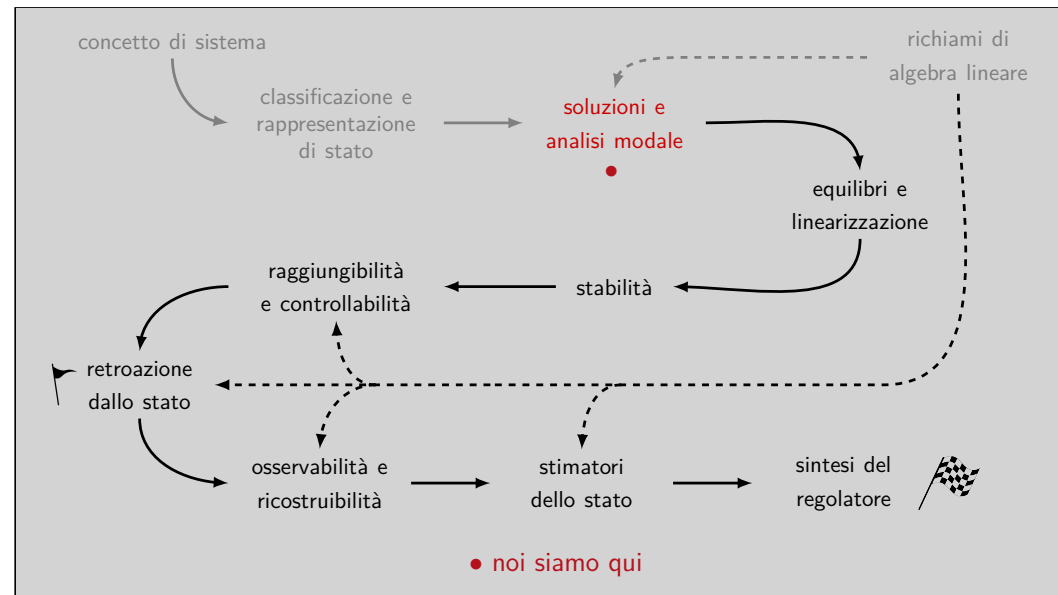
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata  
(tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020



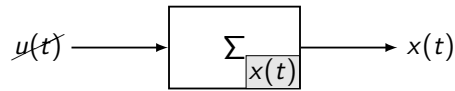
### Nella scorsa lezione

- ▷ Forma canonica di Jordan: costruzione
- ▷ Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- ▷ Forma canonica di Jordan: osservazioni
- ▷ Polinomi annullatori e polinomio minimo

### In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di  $e^{Ft}$  tramite Laplace

## Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale  $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft} x_0$$

## Usiamo Jordan!

$$1. F = TF_J T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$$

$$2. F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{bmatrix} \implies e^{F_J t} = \begin{bmatrix} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{bmatrix}$$

$$3. J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{bmatrix} \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \begin{bmatrix} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_i,\ell_i} t} \end{bmatrix}$$

## Usiamo Jordan!

$$4. J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies e^{J_{\lambda_i,j} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

## Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a  $\lambda_i = \dim.$  del più grande miniblocco in  $J_{\lambda_i,j}$   
 $= h_i = \text{molteplicità di } \lambda_i \text{ nel pol. minimo}$
2. Numero di modi distinti associati a  $\lambda_i = n$  (dim. di  $F$ )  
quando  $F$  ha un unico miniblocco per ogni autovalore ( $F$  ciclica)
3.  $F$  diagonalizzabile  $\implies$  modi elementari  $= e^{\lambda_i t}$  (esponenziali puri)
4.  $\lambda \in \mathbb{C}$  autovalore  $\implies \bar{\lambda}$  autovalore  $\implies$  modi reali  $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t), t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$

## Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

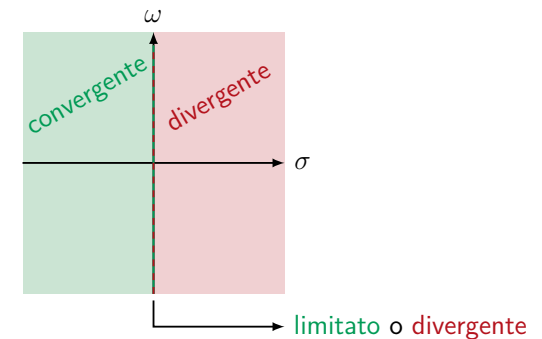
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$y(t) = y_\ell(t) = He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

= combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!

## Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{h_i} e^{\lambda_i t} = t^{h_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{h_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



## Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies e^{Ft} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i \text{ e } \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0 \implies e^{Ft} \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata}$$

$$\exists \lambda_i \text{ tale che } \Re[\lambda_i] > 0 \text{ o } \Re[\lambda_i] = 0 \text{ e } \nu_i > g_i \implies e^{Ft} \text{ non limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 ?$$

## Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \quad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \quad x_f(t) ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \quad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \quad y_f(t) ??$$

## Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau)d\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

## Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - F)^{-1}G}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

## Equivalenze dominio temporale/Laplace

$$1. W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J = \text{matrice di trasferimento}$$

$$2. \mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} = \text{metodo alternativo per calcolare } e^{Ft} !!$$

## Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia  $z \triangleq Tx$  dove  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

## Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=Tx} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) !!$$

## Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=Tx} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

## Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{1,2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_{k,\ell_k}} \end{bmatrix}, \quad G_J = \begin{bmatrix} G_{\lambda_{1,1}} \\ G_{\lambda_{1,2}} \\ \vdots \\ G_{\lambda_{k,\ell_k}} \end{bmatrix}, \quad H_J = [H_{\lambda_{1,1}} \mid H_{\lambda_{1,2}} \mid \cdots \mid H_{\lambda_{k,\ell_k}}]$$

$$\begin{aligned} W(s) &= H_{\lambda_{1,1}}(sI - J_{\lambda_{1,1}})^{-1}G_{\lambda_{1,1}} + H_{\lambda_{1,2}}(sI - J_{\lambda_{1,2}})^{-1}G_{\lambda_{1,2}} + \cdots + H_{\lambda_{k,\ell_k}}(sI - J_{\lambda_{k,\ell_k}})^{-1}G_{\lambda_{k,\ell_k}} + J \\ &= W_{\lambda_{1,1}}(s) + W_{\lambda_{1,2}}(s) + \cdots + W_{\lambda_{k,\ell_k}}(s) + J \end{aligned}$$

## Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_{i,j}} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_{i,j}}(s) = \frac{A_1}{s - \lambda_i} + \frac{A_2}{(s - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s - \lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{i,j} W_{\lambda_{i,j}}(s) U(s) + JU(s) \right]$$

## Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - F)^{-1}]$$

**Esempio:**  $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

## Condizioni “pratiche” su ciclicità e polinomio minimo

1.  $F$  ciclica  $\iff$  non ci sono semplificazioni tra num. e den. in  $\frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$
2.  $\Psi_F(s) =$  polinomio a den. in  $\frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$ , dopo tutte le possibili semplificazioni