

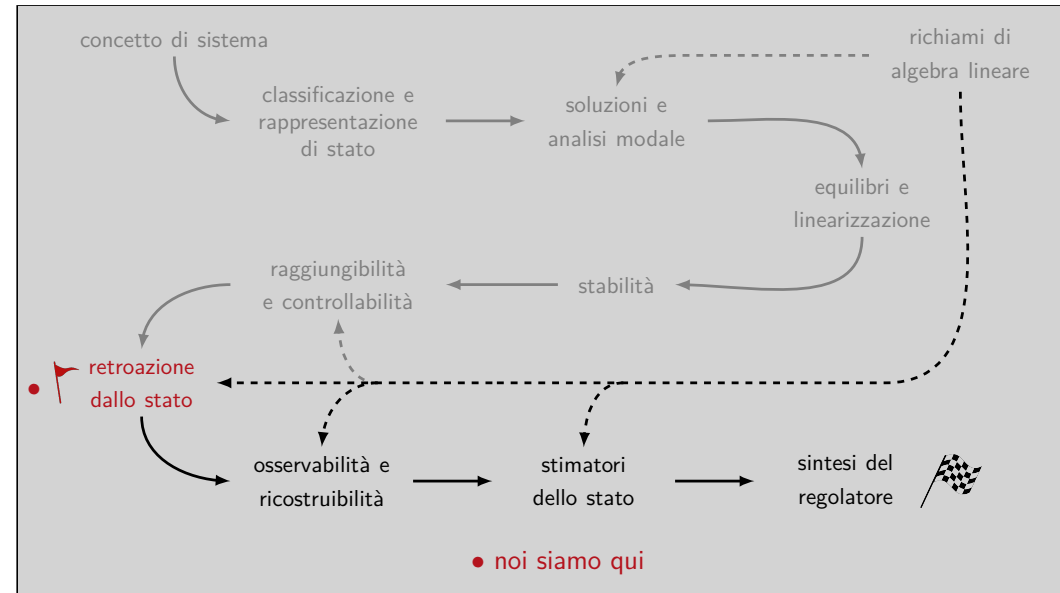
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica
A.A. 2019-2020

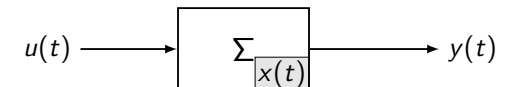


In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
 - ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
 - ▷ Forma canonica di controllo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
 - ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
 - ▷ Stabilizzabilità

Il problema del controllo

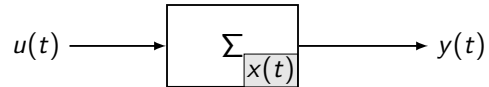
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Controllo = manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso $u(t)$

Problemi di controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

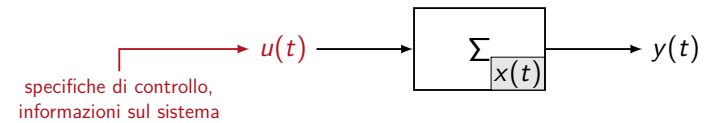


Problema di regolazione:
stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

Problema di asservimento (tracking):
inseguire un andamento desiderato dell'uscita

Controllo in “catena aperta” o open-loop

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

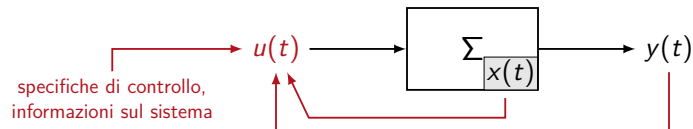


legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

*approccio semplice, ma non ideale se il sistema
è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!*

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

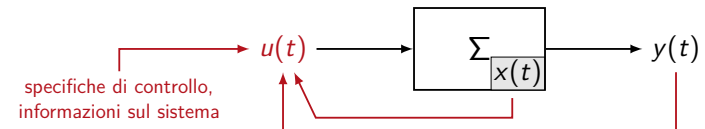


legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

*approccio più complesso (richiede sensori di misura),
ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!*

Controllo in retroazione o feedback

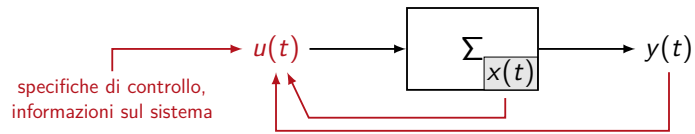
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



1. Retroazione statica
- dallo stato: $u(t) = f(x(t))$ (allo stesso istante $t!$)
 - dall'uscita: $u(t) = f(y(t))$ (allo stesso istante $t!$)

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

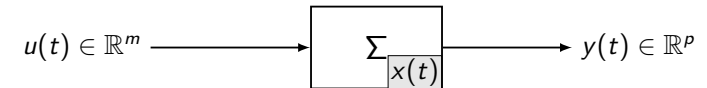


2. Retroazione dinamica
- dallo stato: $u(t) = f(x(\tau)), \tau \in [t_0, t]$
 - dall'uscita: $u(t) = f(y(\tau)), \tau \in [t_0, t]$

Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

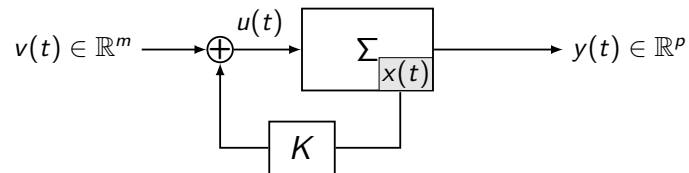
$$y(t) = Hx(t)$$



Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

$$x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t)$$

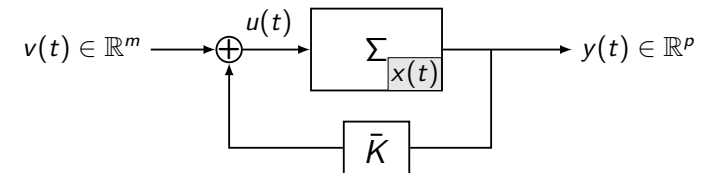


$$u(t) = Kx(t) + v(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{retroazione statica dallo stato}$$

Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

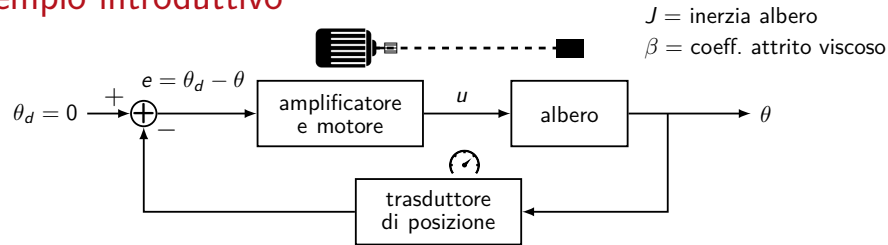
$$x(t+1) = (F + G\bar{K}H)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = Hx(t)$$



$$u(t) = \bar{K}Hx(t) + v(t), \quad \bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad \text{retroazione statica dall'uscita}$$

Esempio introduttivo



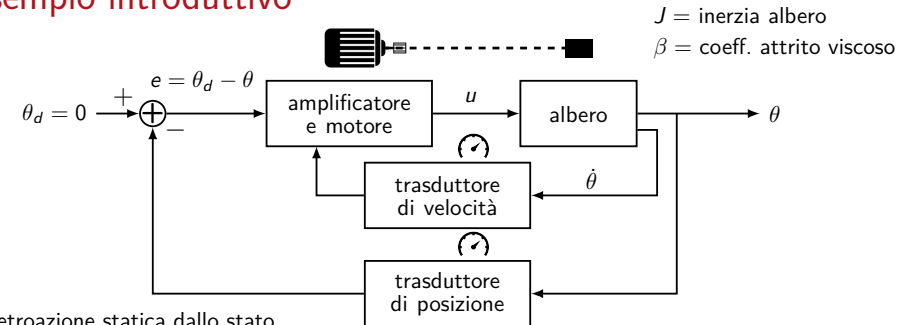
Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = ke, \quad k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x$$

$$y = \theta \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Esempio introduttivo



Retroazione statica dallo stato

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = k_1 e + k_2 \dot{\theta}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x$$

$$y = \theta \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T ?

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT, \quad \bar{K} = KT$$

Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$X_R(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di Σ

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$X_R^{(K)}(t)$ = spazio di raggiungibilità in t passi di $\Sigma^{(K)}$

Teorema: $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$, per ogni scelta della matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \Sigma^{(K)} \text{ raggiungibile}$$

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)}: \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

Basi cicliche di \mathbb{R}^n

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

$$\implies \text{rank} \left(\begin{bmatrix} g & Fg & F^2g & \dots & F^{n-1}g \end{bmatrix} \right) = n$$

$$\implies \{g, Fg, F^2g, \dots, F^{n-1}g\} \text{ base di } \mathbb{R}^n$$

base ciclica di \mathbb{R}^n

Basi cicliche di \mathbb{R}^n

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Consideriamo il cambio di base $T = \mathcal{R}$

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Con un ulteriore cambio di base Q arriviamo alla forma canonica di controllo

$$F_c = Q^{-1}\bar{F}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g_c = Q^{-1}\bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo: osservazioni

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

1. Σ raggiungibile $\iff \Sigma$ può essere portato in forma canonica di controllo.
2. Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base $T_c \triangleq TQ$ ma solo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$.
3. Se \mathcal{R} e \mathcal{R}_c sono le matrici di raggiungibilità del sistema di partenza e del sistema in forma canonica di controllo allora $T_c = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$.

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati ?

$\Sigma^{(K)}$ raggiungibile \implies trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo !

$$F_c = T_c^{-1}FT, \quad g_c = T_c^{-1}g, \quad K_c = KT_c = [k_{1,c} \quad \dots \quad k_{n,c}]$$

$$F_c + g_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{1,c} & -\alpha_1 + k_{2,c} & -\alpha_2 + k_{3,c} & \dots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Delta_{F_c + g_c K_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = \text{polinomio con autovalori desiderati}$$

1. Siano $k_{1,c}^* \triangleq \alpha_0 - p_0, \dots, k_{n,c}^* \triangleq \alpha_{n-1} - p_{n-1}$
2. Sia $K_c^* \triangleq [k_{1,c}^* \quad \dots \quad k_{n,c}^*]$
3. $K^* \triangleq K_c^* T_c^{-1} = \text{matrice di retroazione desiderata !}$

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori **a nostro piacimento!** L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).
2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)** !
3. Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Mentre, il cambio di base T_c^{-1} per ottenere K^* si può calcolare come $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1}$.
4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo.

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$): metodo alternativo

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + gK)x(t) + gv(t)$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 =$ polinomio con autovalori desiderati

Risolvere $\Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda)$ con incognita K



Sistema di equazioni lineari con incognite k_1, \dots, k_n , $K = \begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_n \end{bmatrix} !$

Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$\Sigma^{(K)}: \begin{aligned} x(t+1) &= (F + gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Che forma ha la f.d.t. $W(z)$ di $\Sigma^{(K)}$?

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F - gK)^{-1}g = H_c(zI - F_c - g_cK_c)^{-1}g_c \\ &= \frac{\beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0}{z^n + (\alpha_{n-1} - k_n)z^{n-1} + \dots + (\alpha_1 - k_2)z + (\alpha_0 - k_1)} \end{aligned}$$

La funzione modifica solo i poli della funzione di trasferimento !

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati ?

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1 k_1 + \cdots + g_m k_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima ($m = 1$)!

Problema: Il sistema potrebbe **non** essere raggiungibile da un singolo ingresso anche se Σ raggiungibile !!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\Sigma^{(K)}: x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso !!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G , esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1 .

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M .

2. L'approccio appena visto è piuttosto intuitivo ma ha delle limitazioni.

Ad esempio, usando un singolo ingresso si può ottenere un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi **non inferiore a n** . Con più ingressi invece esistono casi in cui è possibile costruire un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi **inferiore a n** !

Quindi, usando tecniche più avanzate (che sfruttano la cosiddetta **forma canonica di controllo multivariabile**) si possono ottenere prestazioni di controllo migliori.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con modulo minore di 1.
3. La matrice PBH $[zI - F \ G]$ ha rango n , $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile in tempo finito se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile in tempo finito.
2. Σ ammette un DBC.
3. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori nulli.
4. Σ è controllabile (a zero).
5. La matrice PBH $[zI - F \ G]$ ha rango n , $\forall z$ con $z \neq 0$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con parte reale minore di 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \ G]$ ha rango n , $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Esempio

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Il sistema è stabilizzabile se $\alpha > 0$.