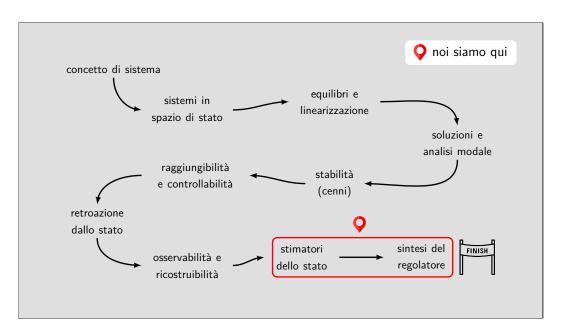
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2021-2022

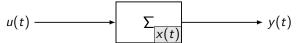


In questa lezione

- ▶ Stimatori dello stato
- ▶ Rivelabilità
- ▶ Il regolatore: struttura ed equazioni dinamiche

Il problema della stima dello stato

$$\Sigma$$
: $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ m ingressi p uscite n stati



Assunzione: lo stato x(t) non è direttamente accessibile

Problema: costruire una "buona" stima $\hat{x}(t)$ di x(t) a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

Stimatori ad anello aperto

stimatore ad anello aperto

$$\Sigma: \begin{array}{c} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array}$$

$$\hat{\Sigma}$$
: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t)$ $\hat{y}(t) = \hat{x}(t)$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

errore di stima $e(t) \xrightarrow{t \to \infty} \infty$ se F è instabile !!!

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

7 Aprile 2022

Stimatori ad anello chiuso

stimatore ad anello chiuso

$$\Sigma: \begin{array}{c} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array}$$

$$\hat{\Sigma}$$
: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$
 $\hat{y}(t) = \hat{x}(t)$

 $L \in \mathbb{R}^{n \times p} = \text{guadagno dello stimatore}$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

errore di stima e(t) tende a zero se F + LH è asintoticamente stabile (e in questo caso F può anche essere instabile) !!!

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

- **1.** Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere F+LH asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!
- **2.** Se tutti gli autovalori di F+LH vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!
- **3.** Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato x(t). In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.
- **4.** Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

7 Aprile 2022

Esempio

$$x(t+1) = egin{bmatrix} 0 & 1 \ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + egin{bmatrix} 1 \ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

Il sistema è osservabile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma$$
: $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ m ingressi p uscite n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.

- 2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
- 3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che F + LH ha autovalori con modulo < 1.
- 4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo < 1.
- 5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \ge 1$.

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

7 Aprile 2022

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \begin{array}{c} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) & m \text{ ingressi} \\ y(t) = Hx(t) & p \text{ uscite} \\ n \text{ stati} \end{array}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

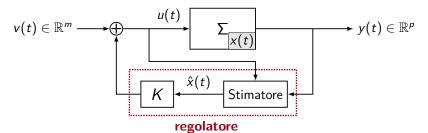
1. Σ è rivelabile.

- 2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
- 3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che F + LH ha autovalori con parte reale < 0.
- 4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale < 0.
- 5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

_	Dame

Il regolatore

$$\Sigma$$
: $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ m ingressi p uscite $y(t) = Hx(t)$ n stati



= stimatore dello stato + controllo in retroazione dallo stato

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

7 Aprile 2022

Il regolatore: equazioni dinamiche

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

sistema Σ :

$$y(t) = Hx(t)$$

legge di controllo:
$$u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

$$\implies$$
 sistema regolato: $\hat{\hat{x}}$

$$egin{bmatrix} x(t+1) \ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = egin{bmatrix} F & GK \ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} egin{bmatrix} x(t) \ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + egin{bmatrix} G \ G \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

Regolatori stabilizzanti

sistema regolato:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Definizione: Un regolatore si dice stabilizzante se il sistema regolato è asintoticamente stabile.

Definizione: Un regolatore si dice dead-beat se l'evoluzione dello stato del sistema regolato va a zero in un numero finito di passi.

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

7 Aprile 2022

Principio di separazione

sistema regolato:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base
$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$
 e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

Principio di separazione

regolatore nella base
$$T$$
:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

autovalori di
$$\left[\begin{smallmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{smallmatrix} \right] =$$
 autovalori di $F+GK \cup$ autovalori di $F+LH$!!!

Principio di separazione: Gli autovalori della matrice di stato del sistema regolato sono dati dall'unione degli autovalori di F + GK e di F + LH. Quindi la sintesi del controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di F + GK) e dello stimatore (allocazione degli autovalori di F + LH) possono essere effettuate in modo indipendente.

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

7 Aprile 2022

Esistenza di regolatori stabilizzanti

regolatore nella base
$$T$$
:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile.

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se Σ è sia controllabile che ricostruibile.

G. Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

