

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)


Teoria dei Sistemi (Mod. A)

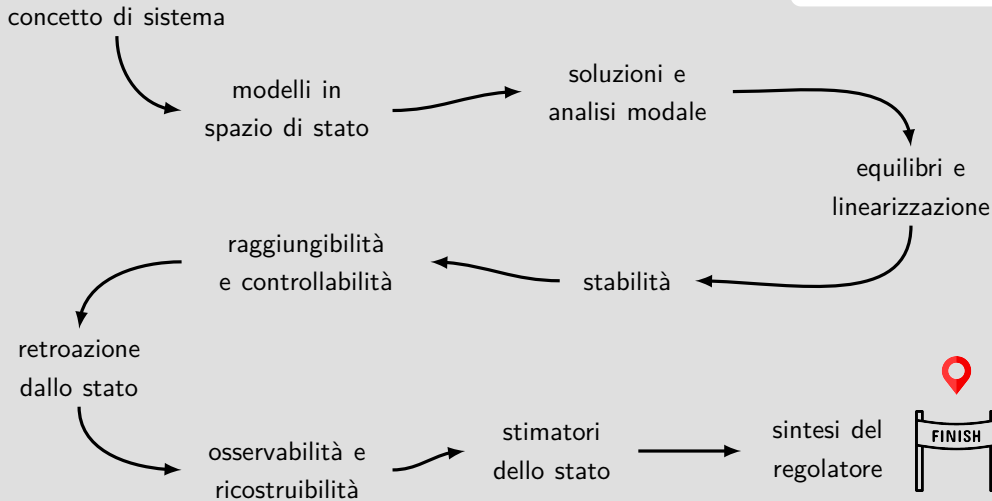
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

 noi siamo qui



In questa lezione

- ▷ Informazioni sulla prova scritta
- ▷ Simulazione di prova scritta

Prova scritta



Esame in modalità telematica



Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 7/7/2021

Istruzioni. Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.

Esercizio 1 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato** $\alpha = 0$, determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ allo stato $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato** $\bar{u} = 0$, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinano, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

Esercizio 3 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile X_R e lo spazio non osservabile X_{NO} del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima contenga tra i modi elementari $\frac{1}{2}$ e $t\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

• Modalità telematica (Zoom + Moodle esami)

• Durata 2 ore

• 3 esercizi sugli argomenti del corso

• 4 punti per esercizio (totale 12 punti)

Prova scritta: istruzioni base

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

- No appunti, libri, formulari
- Sì calcolatrici (non programmabili)
- Si consegna solo la bella copia
- Chiarezza e ordine nello svolgimento!

Prova scritta: struttura degli esercizi

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\alpha = 0$** , determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ allo stato $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Ogni esercizio è diviso in 3 parti (ordine di difficoltà tipicamente crescente)

In questa lezione

- ▷ Informazioni sulla prova scritta
- ▷ Simulazione di prova scritta

Esercizio 1

Esercizio 1 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\alpha = 0$** , determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ allo stato $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1: soluzione

$$1. F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha \neq -1 & \text{Modi: } \alpha \neq -1: (\pm\alpha)^t \text{ (conv. se } |\alpha| < 1, \\ & & \text{lim. se } \alpha = 1, \text{ div. altrimenti) e } (-1)^t \text{ (lim.)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha = -1 & \text{Modi: } \alpha \neq -1: 1 \text{ (lim), } (-1)^t \text{ (lim.) e } t(-1)^t \text{ (div.)} \end{cases}$$

2. L'ingresso esiste ed è dato da $u(0) = -1$, $u(1) = 0$.

$$3. x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}^\top, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0.$$

Esercizio 2

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\bar{u} = 0$** , studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

Esercizio 2: soluzione

1. Nessun equilibrio per $\bar{u} > 0$;

Un unico equilibrio $\bar{x} = (0, 0)$ per $\bar{u} = 0$;

Due equilibri $(\pm\sqrt{-\bar{u}/2}, -\bar{u}/2)$ per $\bar{u} < 0$.

2. $\bar{x} = (0, 0)$ equilibrio instabile.

3. $\bar{x} = (0, 0)$ asintoticamente stabile per $k_1 < 0$ e $k_2 < -1$.

Esercizio 3

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile X_R e lo spazio non osservabile X_{NO} del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari $\left(\frac{1}{4}\right)^t$ e $t\left(\frac{1}{4}\right)^t$.

Esercizio 3: soluzione

1. $X_R = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_{NO} = \{0\}.$

2. Il sistema è stabilizzabile con 2 ingressi e rivelabile con 1 uscita (la seconda).

3. Lo stimatore con guadagno $L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ soddisfa i requisiti.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 baggiogi.github.io

Esercizio 1



Esercizio 1 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariato a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$
$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(0) = -1$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi caratteristici del sistema e il suo carattere al variare di $a \in \mathbb{R}$.
2. Fissato $a = 0$, determinare, se possibile, una sequenza di ingressi $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ allo stato $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia permanentemente oscillante per ogni $a \in \mathbb{R}$.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a guide for handwriting or typing. The paper itself is a clean, off-white color.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a guide for handwriting or typing. The paper itself is a clean, off-white color. There are no margins, text, or other markings present on the page.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a guide for handwriting or typing. The paper itself is a clean, off-white color.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a guide for handwriting or typing. The paper itself is a clean, off-white color.

Esercizio 2 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = u$, $u \in \mathbb{R}$.
2. Posto $u = 0$, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1, utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

[illegible]

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across the entire width of the page, providing a guide for writing. The background is a solid off-white color.

[illegible]

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Esercizio 3 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t+1) &= Hx(t)\end{aligned}\quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Determinare lo spazio raggiungibile X_R e lo spazio stato controllabile X_{CZ} del sistema.
- Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero minimo di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero minimo di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
- Determinare, se possibile, uno stimatore ad smollo chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e converga tra i suoi autostati $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, typical of notebook or legal stationery. The paper is otherwise completely empty, with no text, markings, or illustrations.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a guide for handwriting or typing. The paper itself is a clean, off-white color.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across the entire width of the page, typical of notebook or composition paper. The background is white, and there are no margins, text, or other markings present.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across the entire width of the page, providing a guide for writing. The background is a solid off-white color.