

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)


## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

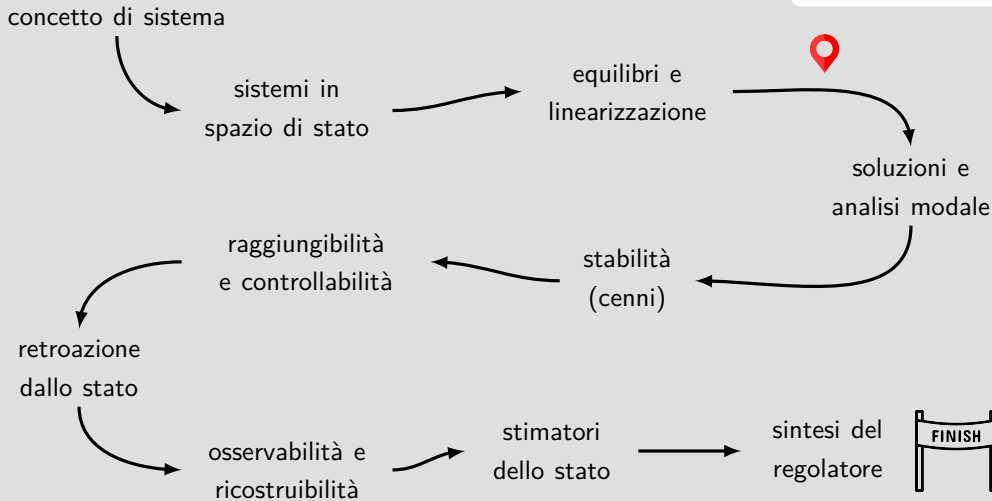
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Complementi di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

 noi siamo qui



## Nella scorsa lezione

- ▷ Fatti base su vettori e trasformazioni lineari
- ▷ Fatti base su matrici

# In questa lezione

- ▷ Altri fatti utili su matrici
- ▷ Forma canonica di Jordan
- ▷ Comandi Matlab<sup>®</sup>

# Calcolo determinante e inversa

1. Sia  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$  ( $j = 1, \dots, n$ ), si ha

$$\det(F) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}), \quad \left( \det(F) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}) \right)$$

dove  $F_{i-,j-}$  è la matrice ottenuta cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$  di  $F$ .

# Calcolo determinante e inversa

1. Sia  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$  ( $j = 1, \dots, n$ ), si ha

$$\det(F) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}), \quad \left( \det(F) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}) \right)$$

dove  $F_{i-,j-}$  è la matrice ottenuta cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$  di  $F$ .

2. Una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è detta invertibile se esiste una matrice  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che  $FH = HF = I$ , dove  $I$  è la matrice identità;  $F^{-1} = H$  è detta inversa di  $F$ .  $F$  è invertibile se e solo se  $\det(F) \neq 0$ . La matrice inversa  $F^{-1}$  si può calcolare come

$$F^{-1} = \frac{\text{adj}(F)}{\det(F)},$$

dove  $\text{adj}(F)$  è la matrice aggiunta di  $F$ ,  $[\text{adj}(F)]_{ij} = (-1)^{i+j} \det(F_{j-,i-})$ .

# Matrici triangolari (a blocchi)

1. Una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si dice triangolare superiore (*inferiore*) se è della forma

$$F = \begin{bmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{bmatrix} \quad \left( F = \begin{bmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix} \right).$$

Gli autovalori di una matrice triangolare  $F$  sono gli elementi sulla diagonale. L'inversa di una matrice triangolare  $F$  (quando esiste) è ancora triangolare e i suoi elementi sulla diagonale soddisfano  $[F^{-1}]_{ii} = 1/F_{ii}$ .

# Matrici triangolari (a blocchi)

2. Una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si dice triangolare superiore (**inferiore**) a blocchi se

$$F = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \star & \cdots & \star \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \star \end{array} \right] \quad \left( F = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & \star & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \star & \cdots & \star & \star \end{array} \right] \right),$$

dove gli “ $\star$ ” sulla diagonale sono matrici quadrate di dimensioni anche diverse tra loro. Gli autovalori di una matrice triangolare a blocchi  $F$  sono l'unione degli autovalori dei blocchi sulla diagonale. L'inversa di una matrice triangolare  $F$  a blocchi (quando esiste) è ancora triangolare a blocchi con blocchi diagonali di  $F^{-1}$  pari alle inverse dei blocchi diagonali di  $F$ .



## Esempio: determinante e matrice inversa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(F)? \quad F^{-1}?$$

## Esempio: determinante e matrice inversa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(F)? \quad F^{-1}?$$

---

$$\det(F) = 2 \implies F \text{ invertibile}, \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# In questa lezione

- ▷ Altri fatti utili su matrici
- ▷ Forma canonica di Jordan
- ▷ Comandi Matlab<sup>®</sup>

# Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$  molteplicità algebrica  $\lambda_i$

$g_i =$  molteplicità geometrica  $\lambda_i$

# Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$  molteplicità algebrica  $\lambda_i$

$g_i =$  molteplicità geometrica  $\lambda_i$

Caso 1:  $\nu_i = g_i$  per ogni  $i \implies F$  diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste  $i$  tale che  $\nu_i > g_i \implies F$  non diagonalizzabile ✗

# Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$  molteplicità algebrica  $\lambda_i$

$g_i =$  molteplicità geometrica  $\lambda_i$

Caso 1:  $\nu_i = g_i$  per ogni  $i \implies F$  diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste  $i$  tale che  $\nu_i > g_i \implies F$  non diagonalizzabile ✗



possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o “quasi” diagonali (forma di Jordan)

# Forma di Jordan: teorema

**Teorema:** Siano  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  gli autovalori di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Esiste una  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che

$$F_J \triangleq T^{-1}FT = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array} \right], J_{\lambda_i} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array} \right], J_{\lambda_i,j} = \left[ \begin{array}{cccc} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}}.$$

Inoltre  $F_J$  è unica a meno di permutazioni dei blocchi  $\{J_{\lambda_i}\}$  e miniblocchi  $\{J_{\lambda_i,j}\}$ .

$F_J = \text{forma canonica di Jordan di } F$

# Forma di Jordan: osservazioni

1. Esiste una procedura algoritmica per il calcolo della trasformazione  $T$
2. Dim. blocco  $J_{\lambda_i}$  associato a  $\lambda_i$  = molteplicità algebrica  $\nu_i$
3. # miniblocchi  $\{J_{\lambda_i,j}\}$  associati a  $\lambda_i$  = molteplicità geometrica  $g_i$
4. In generale, per determinare  $F_J$  non è sufficiente conoscere gli autovalori  $\{\lambda_i\}$  e i valori di  $\{\nu_i\}$ ,  $\{g_i\}$ , ma bisogna anche conoscere i valori di  $\{r_{ij}\}$ !
5. **Se  $\nu_i \leq 3 \forall i$ , è possibile calcolare  $F_J$  conoscendo solo  $\{\lambda_i\}$ ,  $\{\nu_i\}$ ,  $\{g_i\}$ !**



# Forma di Jordan: esempi

$$1. F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = 0, 1$$

## Forma di Jordan: esempi

$$1. F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2, \nu_1 = 3, g_1 = 1 \implies F_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = 0, 1 \implies \lambda_1 = 1, \nu_1 = 4, g_1 = 2$$
$$\implies F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

# In questa lezione

- ▷ Altri fatti utili su matrici
- ▷ Forma canonica di Jordan
- ▷ Comandi Matlab<sup>®</sup>

# Comandi Matlab<sup>®</sup> – Matrici

`eig(F)`

calcola autovalori della matrice  $F$ ;

`[V,D] = eig(F)`

calcola matrice  $V$  con autovettori di  $F$  e matrice diagonale  $D$  con autovalori corrispondenti;

`det(F)`

calcola determinante di  $F$ ;

`null(F)`

calcola base (ortonormale) di  $\ker F$ ;

`orth(F)`

calcola base (ortonormale) di  $\operatorname{im} F$ ;

`rank(F)`

calcola rango di  $F$ ;

`inv(F)`

calcola inversa di  $F$ ;

`[T,J] = jordan(F)`

calcola forma di Jordan di  $F$  (matrice  $J$ ) e matrice di cambio base di Jordan (matrice  $T$ ) (**N.B.** richiede Symbolic Math Toolbox);

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Complementi di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ [baggio@dei.unipd.it](mailto:baggio@dei.unipd.it)

🌐 [baggiogi.github.io](https://baggiogi.github.io)

### Esempio: determinante e matrice inversa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(F)? \quad F^{-1}?$$

[illegible]

[illegible]



## Forma di Jordan: esempi

1.  $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = 0, 1$

[illegible]

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a guide for handwriting or typing. The paper itself is a clean, off-white color.