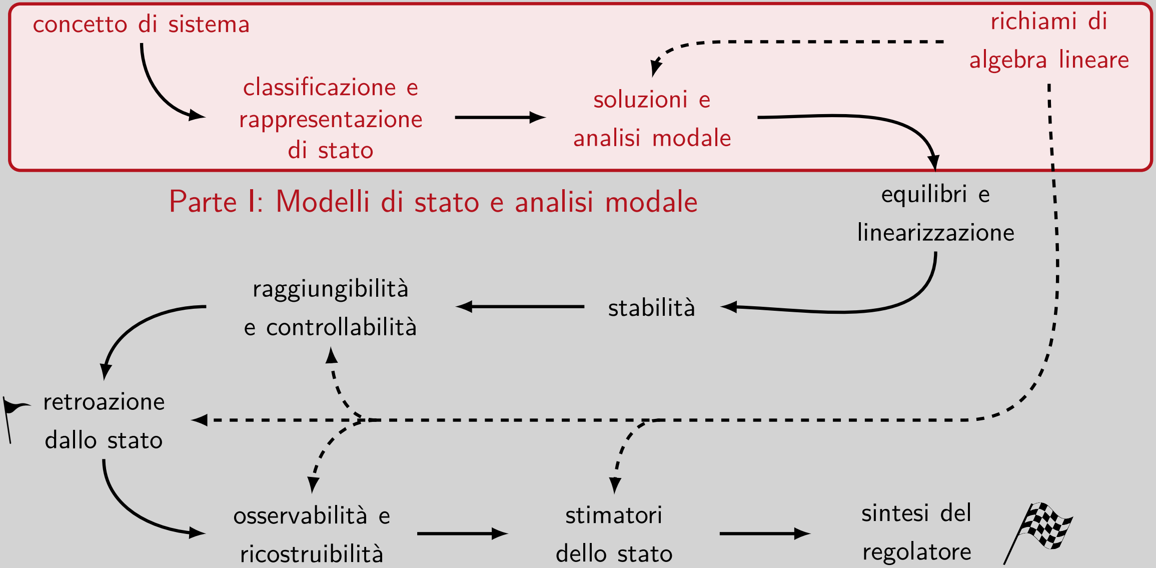
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 8: Esercizi di ricapitolazione su modelli di stato e analisi modale

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

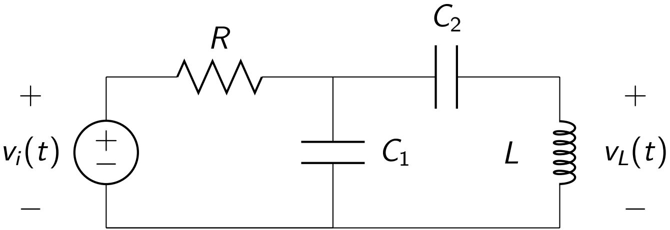
A.A. 2019-2020


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
Parte I: Modelli di stato e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: rappresentazione interna o di stato
- ▷ Esercizio 2: forma di Jordan, polinomio minimo e matrice esponenziale
- ▷ Esercizio 3: analisi modale e evoluzione forzata a t.c.
- ▷ Esercizio 4: analisi modale e evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 1



Rappresentazione interna o di stato con $u(t) = v_i(t)$ e $y(t) = v_L(t)$?

Esercizio 1: soluzione

Variabili: $x(t) = \begin{bmatrix} v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$, $u(t) = v_i(t)$, $y(t) = v_L(t)$

Matrici: $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = 0$

Esercizio 2

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0, \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Forma di Jordan F_J?
2. Polinomio minimo $\Psi_F(x)$?
3. Esponenziale e^{Ft}?
4. Evoluzione libera per $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$?

Esercizio 2: soluzione

1. $F_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\Psi_F(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$

3. $e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2te^{-t} & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

4. $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 2te^{-t} \end{bmatrix}^\top$

Esercizio 3 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 1 Febbraio 2012]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2f & f-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-f^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad f \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Forma di Jordan F_J e i modi del sistema al variare di $f \in \mathbb{R}$?
2. Funzione di trasferimento $W(s)$ al variare di $f \in \mathbb{R}$?
3. Per $f = 0$, ingresso $u(t)$ tale che $y_f(t) = \frac{3}{2}t^2 - t$, $t \geq 0$?

Esercizio 3: soluzione

1. $F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = 1, \text{ modi: } e^t, te^t, e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & f = 2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^t, e^{2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f = -2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} 2-f^2 & 0 & 0 \\ 0 & f & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & f \neq 1, 2, -2, \text{ modi: } e^{(2-f^2)t}, e^{ft}, e^{-2t} \end{cases}$

2. $W(s) = \frac{(3-5f)-s}{(s-f)(s+2)}$

3. $u(t) = 1 + 2t, \; t \geq 0.$

Esercizio 4 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1. Modi del sistema e loro carattere?
2. Matrice di trasferimento $W(z)$?
3. Evoluzione del sistema per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = 2^t$, $t \geq 0$?

Esercizio 4: soluzione

1. $(-3)^t, 2^t$, entrambi divergenti

2. $W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z+3)(z-2)} \\ \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$

3. $y(t) = \begin{bmatrix} 2^{t+1} + 5t2^t - (-3)^t \\ t2^t \end{bmatrix}, \; t \geq 0$