

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in  
spazio di stato

soluzioni e  
analisi modale

equilibri e  
linearizzazione

raggiungibilità  
e controllabilità

stabilità

retroazione  
dallo stato

osservabilità e  
ricostruibilità

stimatori  
dello stato

sintesi del  
regolatore



## Nella scorsa lezione

→ possibilità di raggiungere un qualsiasi  $x^*$  a partire da un finito  $x_0$  agendo su  $u(t)$

possibilità di raggiungere un finito  $x^*$  a partire da un qualsiasi  $x_0$  agendo su  $u(t)$

▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali

▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.  $\rightarrow$  1)  $X_R(t) = \text{im } R_t$

$$R_t = [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{t-1}G]$$

▷ Controllo a minima energia a t.d.

$$2) \quad X_R(t) \subseteq X_R(t+1) \quad \forall t \geq 0$$

$$\exists i \leq n (= \dim \Sigma) \quad \text{t. c.}$$

$$X_R(j) = X_R(i) \quad \forall j \geq i$$

$$3) \quad \sum \text{range.} \Leftrightarrow \text{rank}(R) = n$$

$\overset{\text{"}}{R_n}$

# In questa lezione

- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

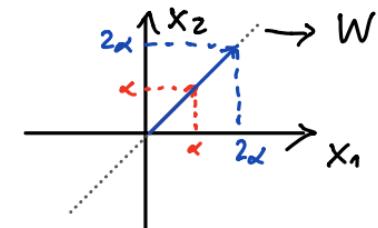
# Spazi raggiungibili: interpretazione geometrica

**Definizione:** Data una  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uno spazio vettoriale  $W$  si dice  $F$ -invariante se

$$\forall v \in W \implies Fv \in W.$$

$$W = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 \right\}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad v \in W : v = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \quad Fv = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix} \in W$$



**Proprietà:** Lo spazio raggiungibile  $X_R$  è  $F$ -invariante e contiene  $\text{im}(G)$ .

$$\forall v \in X_R \implies Fv \in X_R$$

$$\text{im } G \subseteq X_R \quad (X_R = \text{im } [G \ F G \cdots F^{n-1} G])$$

# Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da “separare” la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

note

# Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\Sigma \text{ non raggiungibile} \implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da “separare” la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

$$T = [v_1 \ \cdots \ v_k \ \tilde{v}_1 \ \cdots \ \tilde{v}_{n-k}], \quad X_R = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

$$\forall v \in X_R, \ w = Fv \in X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}}_{T^{-1}FT} \underbrace{\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}}_w, \ \forall v^{(1)} \implies F_{21} = 0$$

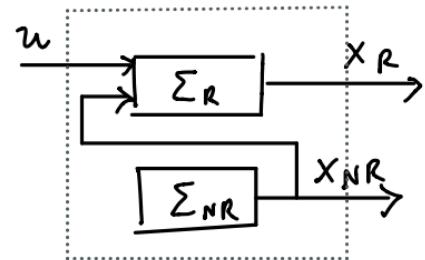
$$\text{im}(G) \subseteq X_R \implies \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}G}, \ G_2 = 0$$

note

# Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$



$x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t)$ : sottosistema raggiungibile

$x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t)$ : sottosistema non raggiungibile

# Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = \begin{bmatrix} G_K & F_K G_K & \cdots & F_K^{n-1} G_K \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & F_{11}^2G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{array} \right]^k \\ & = \begin{bmatrix} F_{11}^k & * \\ 0 & F_{22}^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \}^k \}_{n-k}$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathcal{R}_K) &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{n-1}G_1 \end{bmatrix} \right) = k \\ &\stackrel{|}{=} \text{rank} \left( \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \cdots & F_{11}^{k-1}G_1 \end{bmatrix} \right) \\ &\hookrightarrow R \text{ del } \Sigma \text{ raggiungibile} \end{aligned}$$

# Esempi

$$1. \quad F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

note

# Esempi

1.  $F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$  sistema in forma di Kalman con  
 $F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.  $F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies$  sistema **non** in forma di Kalman

note

## Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} \underbrace{H_1}_k & \underbrace{H_2}_{n-k} \end{bmatrix}$$

note

## Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F)^{-1}G + J \\ &= [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} + J \\ &= H_1(zI - F_{11})^{-1}G_1 + J \end{aligned}$$

$W(z)$  = matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile !!

note

# In questa lezione

- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$PBH(z) = \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ( $\text{rank}[zI - F \ G] = n$ ) per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Se  $\Sigma$  non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ( $\text{rank}[zI - F \ G] < n$ ) per tutti e soli gli  $z \in \mathbb{C}$  che sono autovalori di  $F_{22}$  (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ ).



autovalori "non ragg."

note

# Test di Popov, Belevitch e Hautus (PBH)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ( $\text{rank}[zI - F \ G] = n$ ) per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Se  $\Sigma$  non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ( $\text{rank}[zI - F \ G] < n$ ) per tutti e soli gli  $z \in \mathbb{C}$  che sono autovalori di  $F_{22}$  (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ ).

**N.B.** Essendo gli autovalori di  $F_{22}$  un sottoinsieme degli autovalori di  $F$ , il rango della matrice PBH può essere valutato solo per gli  $z$  che sono autovalori di  $F$  !

note

# Esempi

$$1. \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

note

## Esempi

$$1. \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{raggiungibile}$$

$$2. \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{non raggiungibile}$$

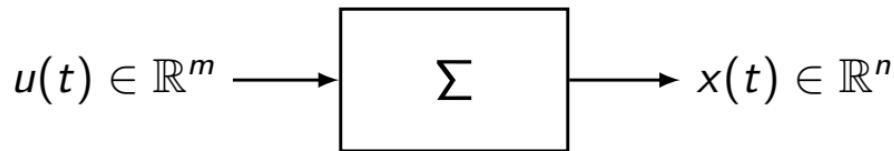
note

# In questa lezione

- ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
- ▷ Test PBH di raggiungibilità
- ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

# Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

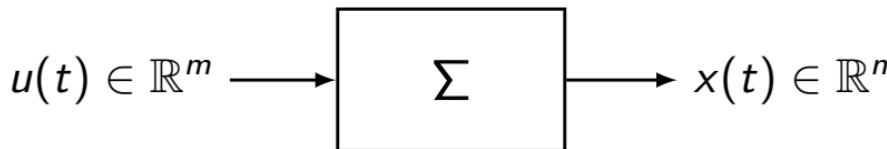


$$x^* = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

# Controllabilità di sistemi LTI a tempo discreto

a tred

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$



$$0 = x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k) = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$$

Insieme di stati  $x_0$  controllabili al tempo  $t$  (= in  $t$  passi) allo stato  $x(t) = 0$ ?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ?

# Spazio controllabile

$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{im}(\mathcal{R}_t)\}$

$$\begin{aligned} x \in X_c(t) &\implies \exists u_t \text{ t.c. } 0 = x(t) = F^t x + R_t u_t \\ &\implies \exists u_t \text{ t.c. } -F^t x = R_t u_t \\ &\implies F^t x \in \text{im}(R_t) \\ &\implies X_c(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{im}(R_t)\} \end{aligned}$$

# Spazio controllabile

$$X_C(t) = \text{spazio controllabile in } t \text{ passi} = \{x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{im}(\mathcal{R}_t)\}$$

**Teorema:** Gli spazi di controllabilità soddisfano:

$$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq X_C(3) \subseteq \dots \quad [X_C(t) \subseteq X_C(t+1), t \geq 0]$$

$\curvearrowright \dim. \Sigma$

Inoltre, esiste un primo intero  $i \leq n$  tale che

$$X_C(i) = X_C(j), \quad \forall j \geq i.$$

$i$  = indice di controllabilità

$X_C \triangleq X_C(i)$  = (massimo) spazio controllabile

# Criterio di controllabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile se  $X_C = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile in  $t$  passi se  $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ , con  $t$  indice di controllabilità.

# Criterio di controllabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile se  $X_C = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile in  $t$  passi se  $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ , con  $t$  indice di controllabilità.

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{im}(F^n) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}) = X_R$$

$$X_c(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : F^t x \in \text{im } R_t \right\} \quad X_R$$

$$X_c = X_c(n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : F^n x \in \text{im } R \right\}$$

$$\text{im } F^n \subseteq \text{im } R = X_R \implies \forall x \in \mathbb{R}^n, F^n x \in \text{im } F^n \implies F^n x \in X_R$$

$\Sigma$  controllabile

$$\text{im } F^n \not\subseteq \text{im } R = X_R \implies \exists \bar{x} \text{ t.c. } F^n \bar{x} \notin \text{im } R = X_R$$

$\Sigma$  non è controllabile

# Criterio di controllabilità

**Definizione:** Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile se  $X_C = \mathbb{R}^n$ .  
Un sistema  $\Sigma$  a t.d. si dice (completamente) controllabile in  $t$  passi se  $X_C(t) = \mathbb{R}^n$ , con  $t$  indice di controllabilità.

$$\Sigma \text{ controllabile} \iff \text{im}(F^n) \subseteq \text{im}(\mathcal{R}) = X_R$$

$$\begin{array}{c} \text{im}(F^n) \subseteq \mathbb{R}^n \\ \uparrow \\ \Sigma \text{ raggiungibile } (X_R = \mathbb{R}^n) \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile} \end{array}$$

$$\Sigma \text{ controllabile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile !!!}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ F = 0 \Rightarrow \text{im } F^n = \{0\} \subseteq X_R \end{array}$$

# Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

note

# Esempi

1.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$  non raggiungibile  $\forall \alpha_1, \alpha_2$   
ma controllabile se  $\alpha_1 = 0$

2.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies$  raggiungibile e quindi  
controllabile

3.  $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \implies$  non raggiungibile  
ma controllabile (in 2 passi)

note

# Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$$

1.  $\Sigma$  controllabile  $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^t = 0, t \geq \bar{t} \Leftrightarrow F_{22}$  nilpotente (autovalori di  $F_{22} = 0$ )
2.  $X_R \subseteq X_C$  e  $X_R = X_C$  se  $F_{22}$  invertibile
3.  $\Sigma$  **reversibile** ( $= F$  invertibile)  $\implies F_{22}$  invertibile  $\implies X_R = X_C$

note

# Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ( $\text{rank}[zI - F \quad G] = n$ ) per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ .

# Test PBH di controllabilità

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è controllabile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ( $\text{rank}[zI - F \ G] = n$ ) per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ .

**N.B.** La matrice PBH può essere valutata solo per gli  $z \neq 0$  che sono autovalori di  $F$  !

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 14: Raggiungibilità e controllabilità a tempo discreto (parte 2)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ [baggio@dei.unipd.it](mailto:baggio@dei.unipd.it)

🌐 [baggiogi.github.io](https://baggiogi.github.io)

## Forma canonica di Kalman (o forma standard di raggiungibilità)

$\Sigma$  non raggiungibile  $\implies \text{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

**Obiettivo:** costruire un cambio di base  $T$  in modo da "separare" la parte raggiungibile del sistema da quella non raggiungibile !

G. Baggio

Lec. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2)

29 Marzo 2021

Note

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad \Sigma$$

$$\mathcal{R} = [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G]$$

$$\text{rank } (\mathcal{R}) = k < n \quad (\Sigma \text{ non raggiungibile})$$

$$X_R = \text{im } \mathcal{R} = \text{im } [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G] = \text{span } \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

dove  $v_1, v_2, \dots, v_k$  vettori lin. indip. che sono una base di  $X_R$

Definiamo:

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k \quad \tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \cdots \quad \tilde{v}_{n-k}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n-k} \in \mathbb{R}^n \text{ lin. indip. t.c. } \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n-k}\} = \mathbb{R}^n$$

Sia  $v \in X_R$   $\xrightarrow{v \text{ espresso nella base } T} v' = T^{-1}v = \begin{bmatrix} \overset{d_1}{\vdots} \\ \overset{d_2}{\vdots} \\ \vdots \\ \overset{d_k}{\vdots} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n-k}^K = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Sia  $w = Fv, v \in X_R \xrightarrow{\text{F-invarianza di } X_R} w \in X_R \xrightarrow{w \text{ espresso nella base } T} w' = T^{-1}w = \begin{bmatrix} \overset{b_1}{\vdots} \\ \overset{b_2}{\vdots} \\ \vdots \\ \overset{b_K}{\vdots} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n-k}^K = \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Sia  $F' = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ \vdots & \vdots \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}_{n-k}^K$

Abbiammo:  $w' = T^{-1}w = T^{-1}FTT^{-1}v = F'v'$

$$\implies \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ \vdots & \vdots \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} w^{(1)} = F_{11}v^{(1)} \\ 0 = F_{21}v^{(1)} \end{cases}$$

$$\text{Abbiamo: } w' = T^{-1}w = T^{-1}FTT^{-1}v = F'v'$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w^{(1)} = F_{11} v^{(1)} \\ 0 = F_{21} v^{(1)} \end{cases}$$

$$F_{21} v^{(1)} = 0 \quad \forall v \in X_R \Rightarrow F_{21} v^{(1)} = 0 \quad \forall v^{(1)} \in \mathbb{R}^k \Rightarrow F_{21} = 0$$

$$\text{Quindi: } F' = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

Abbiamo che  $\text{im } G \subseteq X_R$

$$G' = T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}_{n-k}^k \Rightarrow G_2 = 0, G' = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum: x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \xrightarrow{n-k \left\{ \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} = T^{-1}x \right.}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad \sum \text{ in forma di Kalmam}$$

Esempi

$$1. F = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right], G = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$2. F = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], G = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array} \right]$$

note

G. Baggio

Lec. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2)

29 Marzo 2021

$$\begin{aligned} 1) \quad F &= \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad G = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|c} F_{11} & F_{12} & \\ \hline 0 & F_{22} & \end{array} \right] \quad = \left[ \begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$\Sigma$  in forma di Kalman?

Bisogna controllare se  $(F_{11}, G_1)$  è raggiungibile

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11} G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \implies \text{rank}(R^{(1)}) = 2 \implies (F_{11}, G_1) \text{ raggiungibile}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad F &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad G = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{cc|c} F_{11} & F_{12} & \\ \hline 0 & F_{22} & \end{array} \right] \quad = \left[ \begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$\implies \Sigma$  forma di Kalman

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= \begin{bmatrix} G_1 & F_{11} G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \implies \text{rank}(R^{(1)}) = 1 \\ &\implies (F_{11}, G_1) \text{ non raggiungibile} \end{aligned}$$

$\implies \Sigma$  NON in forma di Kalman

### Forma canonica di Kalman e matrice di trasferimento

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_K \triangleq HT = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

G. Baggio

Laz. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2)

29 Marzo 2021

note

$\Sigma$  in forma di Kalman

$$\mathcal{T}_K = 0$$

$$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_K = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

$(F_{11}, G_1)$  è raggiungibile

$$W(z) = H_k(zI - F_k)^{-1} G_k$$

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F_{11} & -F_{12} \\ 0 & zI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

N.B.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & * \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

A, C inv.

$$= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} & * \\ 0 & (zI - F_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= H_1 (zI - F_{11})^{-1} G_1 = \text{matrice di trasferimento del sistema raggiungibile}$$

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

**Teorema:** Il sistema  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità

$$[zI - F \quad G]$$

ha rango pieno ( $\text{rank}[zI - F \quad G] = n$ ) per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Se  $\Sigma$  non è raggiungibile, la matrice PBH di raggiungibilità ha rango non pieno ( $\text{rank}[zI - F \quad G] < n$ ) per tutti e soli gli  $z \in \mathbb{C}$  che sono autovalori di  $F_{22}$  (= matrice di stato del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$ ).

Dimostriamo solo l'implicazione:

" $\Sigma$  raggiungibile  $\Rightarrow [zI - F \quad G]$  ha rango  $n$ "  
 $\forall z \in \mathbb{C}$

Assumiamo, per assurdo, che  $\Sigma$  sia raggiungibile ma  $\exists \bar{z} \in \mathbb{C}$  tale che:

$\text{PBH}(\bar{z}) = [\bar{z}I - F \quad G]$  abbia rango non pieno ( $< n$ )

Allora  $\text{PBH}(\bar{z})$  ha righe che sono lin. dipendenti, quindi:

$$\exists v \in \mathbb{R}^n : v^\top \text{PBH}(\bar{z}) = v^\top [\bar{z}I - F \quad G] = [0 \quad 0]$$

$$v \neq 0 \implies [\bar{z}v^\top - v^\top F \quad v^\top G] = [0 \quad 0]$$

$$\implies \begin{cases} \bar{z}v^\top - v^\top F = 0 \rightarrow v^\top F = \bar{z}v^\top \\ v^\top G = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ma allora:

$$\underbrace{\bar{z}v^\top F}_{\bar{z}v^\top F \cdot F} = \bar{z}^2 v^\top$$

$$\begin{aligned} v^\top R &= v^\top [G \quad FG \quad \cdots \quad F^{n-1}G] = [v^\top G \quad v^\top FG \quad v^\top F^2G \quad \cdots \quad v^\top F^{n-1}G] \\ (*) &= [0 \quad \bar{z}v^\top G \quad \bar{z}^2v^\top G \quad \cdots \quad \bar{z}^{n-1}v^\top G] \\ (\#) &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \end{aligned}$$

Quindi le righe di  $R$  sono lin. dipendenti

$\implies \text{rank}(R) < n \implies \Sigma$  NON raggiungibile

$\implies$  ASSURDO!

## Test PBH di raggiungibilità

- 1)  $\Sigma = (F, G)$  è raggiungibile  $\Leftrightarrow \text{PBH}(z) = [zI - F \quad G]$  ha rango  $n$   $\forall z \in \mathbb{C}$
  - 2) Se  $\Sigma$  è non raggiungibile allora  $\text{PBH}(z)$  cade di rango per tutti e soli gli  $z \in \mathbb{C}$  t.c.  $\bar{z} \in \lambda(F_{22})$
- 

Notiamo che:

$$\lambda(F) = \lambda(T^{-1}FT) = \lambda(F_K) = \lambda\left(\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}\right) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22})$$

↓  
cambio di  
base di Kalman

$$\lambda(F_{22}) \subseteq \lambda(F)$$

Quindi per il punto 2) del teorema del test PBH possiamo valutare  $\text{PBH}(z)$  solo per gli  $z \in \lambda(F)$ !

Esempi

$$1. F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verificare la raggiungibilità di  $(F, G)$   
usando il test PBH

G. Baggio

Lec. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2)

29 Marzo 2021

note

$$1) F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F$  triangolare  $\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad v_1 = 3$

$$\text{PBH}(z) = [zI - F \quad G] = \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{PBH}(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\text{PBH}(0)) = 3 = n$$

$\Rightarrow \Sigma$  raggiungibile

$$2) F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalori  $F: \lambda_1 = 1 \quad v_1 = 3$

$$\text{PBH}(1) = [I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\text{PBH}(1)) = 2 < 3 = n$$

$\Rightarrow \Sigma$  non raggiungibile

$(\lambda_1 = 1$  è l'autovalore non ragg.)

Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Determinare controllabilità.

G. Baggio

Lec. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2)

29 Marzo 2021

note

$$1) \quad F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$\Sigma = (F, G)$  controllabile  $\Leftrightarrow \text{im } F^2 \subseteq \text{im } R$

$$R = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } R = 1 \Rightarrow X_R = \text{im } R = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\Sigma$  non raggiungibile

$$F^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{im } F^2 = \begin{cases} \{0\} \\ \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0 \\ \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{im } F^2 \subseteq X_R \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile} \\ \text{im } F^2 \not\subseteq X_R \Rightarrow \Sigma \text{ non controllabile} \end{cases}$$

$$2) \quad F = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = [G \quad FG] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(R) = 2 \Rightarrow \Sigma \text{ raggiungibile} \Rightarrow \Sigma \text{ controllabile}$$

$$3) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spazi controllabili e l'indice di controllabilità?

$\Sigma$  raggiungibile? Usiamo test PBH

Calcolo autovalori di  $F$ :  $\lambda_1 = 0$ ,  $v_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $v_2 = 1$

$$\text{PBH}(\lambda_1) = \text{PBH}(0) = [-F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\text{PBH}(0)) = 2 < 3$$

$\Downarrow$

$\Sigma$  non è ragg.  
( $\lambda_1 = 0$  è autov. non ragg.)

$$X_C(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : Fx \in \text{im } R_1 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^3$$

$$X_C(2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : F^2 x \in \text{im } R_2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \text{im } [G \quad FG] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 X_C(2) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : F^2 x \in \text{im } R_2 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \text{im } \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} \right\} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\text{im } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{span } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \lambda \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3
 \end{aligned}$$

$\implies \Sigma$  controllabile in 2 parti

(indice di controllabilità  $i = 2$ )

### Controllabilità e forma canonica di Kalman

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$$

1.  $\Sigma$  controllabile  $\iff \exists \bar{t} : F_{22}^{\bar{t}} = 0, t \geq \bar{t} \iff F_{22}$  nilpotente (autovalori di  $F_{22} = 0$ )
2.  $X_R \subseteq X_C$  e  $X_R = X_C$  se  $F_{22}$  invertibile
3.  $\Sigma$  reversibile (=  $F$  invertibile)  $\implies F_{22}$  invertibile  $\implies X_R = X_C$

note

G. Baggio

Laz. 14: Raggiungibilità e controllabilità a t.d. (pt. 2)

29 Marzo 2021

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\exists T \rightarrow \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

base di kalman

$$\begin{cases} x_R(t+1) = F_{11}x_R(t) + F_{12}x_{NR}(t) + G_1u(t) \rightarrow \Sigma_R \text{ sottosistema raggiungibile} \\ x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{NR}(t+1) = F_{22}x_{NR}(t) \rightarrow \Sigma_{NR} \text{ sottosistema non raggiungibile} \\ \overline{x}_{NR} \end{cases}$$

$$\Sigma_R \text{ raggiungibile} : x_R(t) = F_{11}^t x_R(0) + \underbrace{\left[ F_{12} \ F_{11}F_{12} \cdots F_{11}^{t-1}F_{12} \right]}_{(G_1, F_{11})} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{NR}(t-1) \\ \vdots \\ x_{NR}(1) \\ x_{NR}(0) \end{bmatrix}}_{\overline{x}_{NR}} + R_t^{(1)} u_t$$

$$\underbrace{x_R(t) - F_{11}^t x_R(0)}_{\tilde{x}} - \overline{x}_{NR} = R_t^{(1)} u_t$$

$$\Rightarrow \exists u_t \text{ t.c. } x_R(t) = 0 \text{ per } t \leq n \quad \forall x_R(0), x_{NR}(0)$$

$\Rightarrow \Sigma_R$  è controllabile

$\Sigma_{NR}$  non raggiungibile, ma può essere controllabile?

$$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0) \text{ controllabile se } \exists \bar{t} \text{ t.c. } x_{NR}(t) = 0 \quad \forall t \geq \bar{t} \quad \forall x_{NR}(0)$$



$$F_{22}^t = 0 \quad \forall t \geq \bar{t}$$

$$\forall x_{NR}(0)$$

$x_{NR}(t) = F_{22}^t x_{NR}(0)$  controllabile se  $\exists \bar{t}$  t.c.  $x_{NR}(t) = 0 \quad \forall t \geq \bar{t}$



$F_{22}^t = 0 \quad \forall t \geq \bar{t}$  ( $F_{22}$  è nilpotente)



modi di  $\Sigma_{NR}$  sono convergenti a zero in tempo finito



Quindi:

tutti gli autovalori di  $F_{22}$  sono nulli  
autovalori di

$\Sigma$  è controllabile  $\Leftrightarrow$   $F_{22}$  sono tutti nulli!

Osservazioni:

1) Se  $0 \notin \lambda(F_{22})$  ( $\Rightarrow F_{22}$  è invertibile)

$\Rightarrow \Sigma$  non controllabile

2) Se  $F$  è invertibile ( $0 \notin \lambda(F)$ )  $\Rightarrow F_{22}$  invertibile ( $0 \notin \lambda(F_{22})$ )

$\Rightarrow \Sigma$  non controllabile