

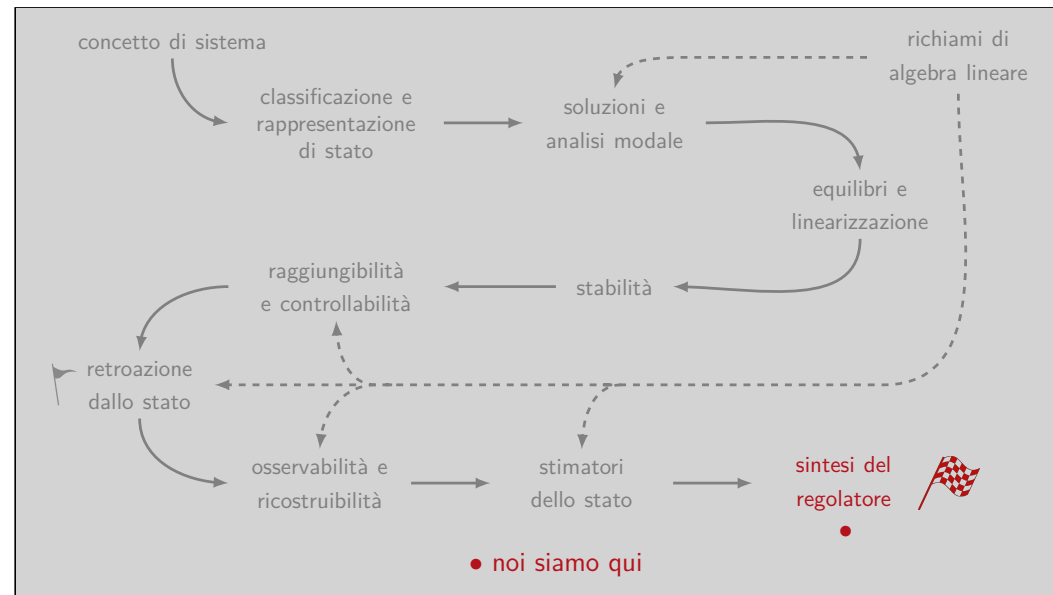
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 21: Sintesi del regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020



### Nella scorsa lezione

- ▷ Sistema duale e sue proprietà
- ▷ Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- ▷ Stimatori dello stato
- ▷ Rivelabilità

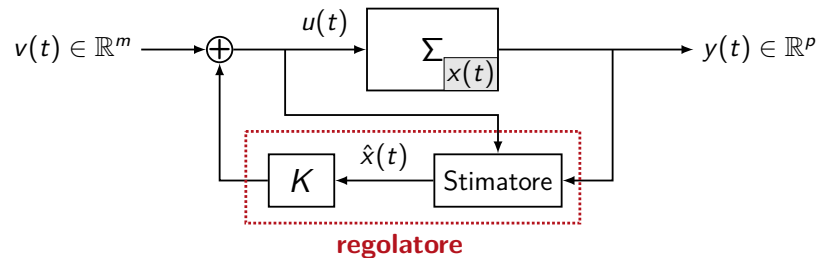
### In questa lezione

- ▷ Il regolatore: definizione e struttura
- ▷ Proprietà del regolatore
- ▷ Esempio

## Il regolatore

$$\Sigma: \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$m$  ingressi  
 $p$  uscite  
 $n$  stati



= stimatore dello stato + controllo in retroazione dallo stato

## Il regolatore: equazioni dinamiche

$$\text{sistema } \Sigma: \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\text{legge di controllo: } u(t) = Kx(t) + v(t)$$

$$\text{stimatore dello stato: } \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$$

$$\Rightarrow \text{regolatore: } \begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F + GK + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Regolatori stabilizzanti

$$\text{regolatore: } \begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F + GK + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Definizione:** Un regolatore si dice stabilizzante se il sistema che descrive il regolatore è asintoticamente stabile.

**Definizione:** Il regolatore si dice stabilizzante in tempo finito o dead-beat se l'evoluzione dello stato del sistema regolatore va a zero in un numero finito di passi.

## Principio di separazione

$$\text{regolatore: } \begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F + GK + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Consideriamo il cambio di base  $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$  e sia  $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$\text{regolatore nella base } T: \begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Principio di separazione

regolatore  
nella base  $T$ :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

autovalori di  $\begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix}$  = autovalori di  $F + GK \cup$  autovalori di  $F + LH$  !!!

**Principio di separazione:** Gli autovalori del sistema regolatore sono l'unione di quelli delle due matrici  $F + GK$  e  $F + LH$ . Quindi la sintesi della legge di controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di  $F + GK$ ) e la sintesi dello stimatore (allocazione degli autovalori di  $F + LH$ ) possono essere effettuate in modo **indipendente**.

## Esistenza di regolatori stabilizzanti

regolatore  
nella base  $T$ :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

**Teorema:** Dato un sistema  $\Sigma$  il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se  $\Sigma$  è sia stabilizzabile che rivelabile.

**Teorema:** Dato un sistema  $\Sigma$  il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se  $\Sigma$  è sia stabilizzabile che rivelabile in tempo finito. Equivalentemente, un regolatore dead-beat esiste se e solo se  $\Sigma$  è sia controllabile che ricostruibile.

## Matrice di trasferimento del regolatore

regolatore  
nella base  $T$ :

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$W(z) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \left( zI - \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= H(zI - (F + GK))^{-1} G$$

matrice di trasferimento del regolatore  
||  
matrice di trasferimento del sistema retroazionato dallo stato !!!

## Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, un regolatore dead-beat.

Il sistema è controllabile e ricostruibile per cui un regolatore dead-beat esiste.

Il regolatore dead-beat ha matrici  $K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $L = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .