

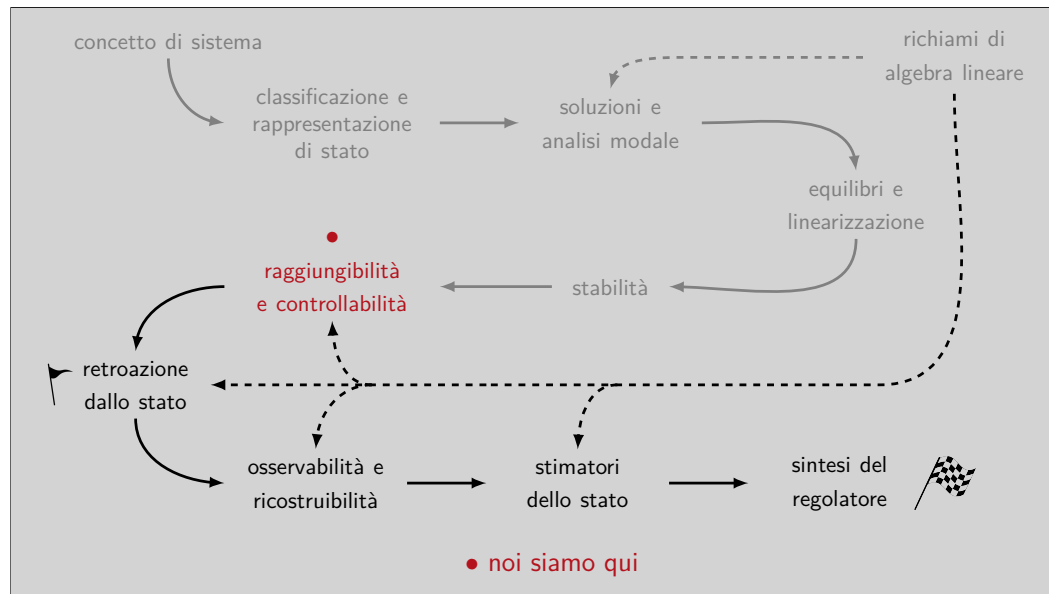
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 15: Raggiungibilità e controllabilità di sistemi a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica
A.A. 2019-2020



Nella scorsa lezione

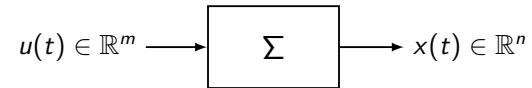
- ▷ Raggiungibilità e controllabilità: definizioni generali
 - ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
 - ▷ Sistemi non raggiungibili: forma di Kalman
 - ▷ Test PBH di raggiungibilità
 - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.d.

In questa lezione

- ▷ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
 - ▷ Calcolo dell'ingresso di controllo
 - ▷ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.
 - ▷ Esercizi

Raggiungibilità di sistemi a tempo continuo: setup

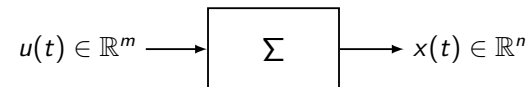
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = x_0$$



$$x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau$$

Raggiungibilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = 0$$



$$x(t) = \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau$$

Insieme di stati \bar{x} raggiungibili al tempo t a partire da $x(0) = 0$?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità

$X_R(t)$ = spazio raggiungibile al tempo t

X_R = (massimo) spazio raggiungibile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

$\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$ = matrice di raggiungibilità del sistema

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{Im}(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff \text{rank}(\mathcal{R}) = n$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni $t > 0$!!

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c.!

1. X_R è F -invariante

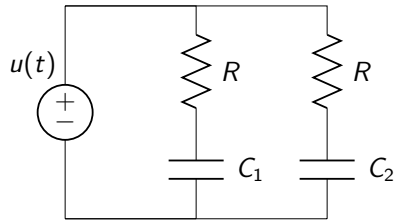
2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \quad F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \text{rank} \begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), \quad x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile !

Calcolo dell'ingresso di controllo

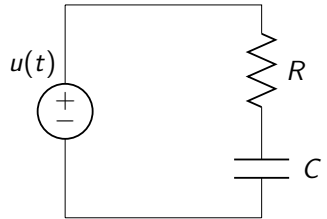
Se Σ è raggiungibile, come costruire un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, per raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ da un stato x_0 ad un tempo fissato $t > 0$?

$$u(\tau) = G^\top e^{F^\top(t-\tau)} \left(\int_0^t e^{F\sigma} G G^\top e^{F^\top\sigma} d\sigma \right)^{-1} (\bar{x} - e^{Ft} x_0), \quad \tau \in [0, t]$$

1. $\mathcal{W}_t = \int_0^t e^{F\sigma} G G^\top e^{F^\top\sigma} d\sigma$ = Gramiano di raggiungibilità nell'intervallo $[0, t]$

2. Ingresso non unico! $u(\tau)$ = ingresso a minima energia ($\|u\|^2 = \int_0^t u(\tau)^\top u(\tau) d\tau$)

Esempio

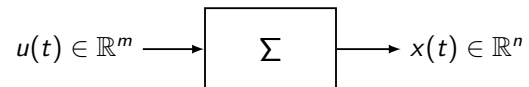


Ingresso a minima energia per raggiungere $x(t) = v_C(t) = 2$ al tempo $t = 1$ a partire da $x(0) = 0$?

$$u(\tau) = \frac{4e^\tau}{e - e^{-1}}, \tau \in [0, 1]$$

Controllabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = \bar{x}$$



$$0 = x(t) = e^{Ft}\bar{x} + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

Insieme di stati \bar{x} controllabili al tempo t allo stato $x(t) = 0$?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}$?

Controllabilità vs. raggiungibilità

$X_C(t)$ = spazio controllabile al tempo t

X_C = (massimo) spazio controllabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.

$$\bar{x} \in X_C(t) \iff e^{Ft}\bar{x} \in X_R \iff \bar{x} \in e^{-Ft}X_R \iff \bar{x} \in X_R$$

$$X_C = X_C(t) = X_R$$

controllabilità = raggiungibilità !!

Esercizio 1

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia raggiungibile.
2. Si determini, se esiste, una $G \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema sia controllabile.

-
1. Non esiste una tale G .
 2. $G = [0 \ 0 \ 0]^\top$.

Esercizio 2

[riadattato da Es. 2 tema d'esame 31 Agosto 2007]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si determini se il sistema è raggiungibile.
2. Si determini, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porta il sistema da $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ a $x(1) = [e \ e \ e^{-1}]^\top$.

-
1. Il sistema non è raggiungibile.
 2. Un tale ingresso esiste.