

**Esercizio 1 [9 pti].**

1. Il vettore  $\bar{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^\top$  è un equilibrio del sistema se e solo se

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1(\alpha - \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2) \\ 0 &= 2\bar{x}_1^2 + \alpha \bar{x}_2 \end{aligned} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Dalla seconda equazione di (1), abbiamo

$$\alpha \bar{x}_2 = -2\bar{x}_1^2. \quad (2)$$

Quest'ultima equazione pone vincoli diversi sulle variabili  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  a seconda dei casi:  $\alpha = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ . Trattiamo separatamente questi due casi:

- Caso  $\alpha = 0$ . In questo caso da (2) segue che  $\bar{x}_1 = 0$ . Sostituendo questa condizione nella prima equazione di (1) si ottiene immediatamente  $0 = 0$ , condizione che è sempre verificata e non pone nessun vincolo sul valore di  $\bar{x}_2$ . Abbiamo quindi infiniti equilibri della forma  $[0 \quad \beta]^\top$  con  $\beta \in \mathbb{R}$  uno scalare arbitrario.
- Caso  $\alpha \neq 0$ . In questo caso da (2) segue che  $\bar{x}_2 = -(2/\alpha)\bar{x}_1^2$ . Sostituendo nella prima equazione di (1) otteniamo la condizione

$$\bar{x}_1 \left( \alpha + \frac{2-\alpha}{\alpha} \bar{x}_1^2 \right) = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione sopra sono  $\bar{x}_1 = 0$  e le soluzioni di  $(\alpha - 2)\bar{x}_1^2 = \alpha^2$ . Quest'ultima equazione ammette soluzioni reali  $(\pm\alpha/\sqrt{\alpha-2})$  se e solo se  $\alpha > 2$ . Distinguiamo quindi i due sottocasi:

- Caso  $\alpha > 2$ . Abbiamo tre equilibri in  $[0 \quad 0]^\top$ ,  $[\pm\alpha/\sqrt{\alpha-2} \quad -2\alpha/(\alpha-2)]^\top$ .
- Caso  $\alpha \leq 2$  ( $\alpha \neq 0$ ). Abbiamo un solo equilibrio in  $[0 \quad 0]^\top$ .

2. La matrice Jacobiana del sistema è

$$J(x) = \begin{bmatrix} \alpha - 3x_1^2 - x_2 & -x_1 \\ 4x_1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Quindi la matrice Jacobiana valutata in  $\bar{x} = [0 \quad 0]^\top$  diventa:

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dalla forma di  $J(\bar{x})$  e dal Teorema di Linearizzazione possiamo concludere che  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile se  $\alpha < 0$  e instabile se  $\alpha > 0$ . Il caso  $\alpha = 0$  rappresenta un caso critico per il Teorema di Linearizzazione.

3. Consideriamo l'equilibrio  $\bar{x} = [0 \quad 0]^\top$  a cui corrisponde l'unico caso critico  $\alpha = 0$  (trovato al punto 2). La funzione candidata di Lyapunov proposta  $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$  è definita positiva in un intorno di  $\bar{x}$ . Per capire se è una “buona” funzione di Lyapunov, valutiamo ora la derivata di  $V(x_1, x_2)$  (assumendo  $\alpha = 0$ ):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 4x_1(-x_1^3 - x_1x_2) + 4x_2x_1^2 \\ &= -4x_1^4. \end{aligned}$$

Poiché  $\dot{V}(x_1, x_2)$  è semidefinita negativa in un intorno di  $\bar{x}$ , per il Teorema di Lyapunov, possiamo concludere che  $\bar{x}$  è *almeno* semplicemente stabile. Per capire se  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile o solo semplicemente stabile, usiamo il Teorema di Krasowskii. L'insieme delle traiettorie che annullano  $\dot{V}(x_1, x_2)$  ha la forma:

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \dot{V}(x_1, x_2) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 = 0, x_2 = \beta, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notiamo quindi che  $x(t) \in \mathcal{N}$  implica  $x_1(t) = 0$ , che, a sua volta, implica  $\dot{x}_1(t) = 0$ . Sostituendo queste condizioni nella prima e seconda equazione dinamica del sistema (con  $\alpha = 0$ ), otteniamo, rispettivamente,

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

La prima equazione è sempre verificata, mentre la seconda porge il vincolo  $x_2(t) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , per ogni  $t$ . Esistono quindi delle traiettorie (diverse dall'equilibrio  $\bar{x}$ ) che partendo da una condizione iniziale in  $\mathcal{N}$  rimangono indefinitamente in  $\mathcal{N}$ . Per il Teorema di Krasowskii possiamo quindi concludere che  $\bar{x}$  non è asintoticamente stabile ma è solo semplicemente stabile.

## Esercizio 2 [9 pti].

1. Dalla struttura di  $F$  (o tramite calcolo esplicito delle radici del polinomio caratteristico di  $F$ ), abbiamo che  $F$  ha autovalori in 1,  $\alpha$ ,  $1/2$ . Distinguiamo quindi tre casi:

- Caso  $\alpha \neq \{1/2, 1\}$ . In questo caso  $F$  ha tre autovalori distinti  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \alpha$ ,  $\lambda_3 = 1/2$  con molteplicità algebriche e geometriche  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$  e  $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ , rispettivamente. La matrice  $F$  è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è (a meno di permutazioni degli elementi sulla diagonale):

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

I modi elementari del sistema sono 1 (limitato),  $\alpha^t$  (convergente se  $|\alpha| < 1$ , divergente se  $|\alpha| > 1$ , limitato se  $|\alpha| = 1$ ), e  $(1/2)^t$  (convergente).

- Caso  $\alpha = 1/2$ . In questo caso  $F$  ha due autovalori distinti  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1/2$  con molteplicità algebriche  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 2$ , rispettivamente. La molteplicità geometrica di  $\lambda_1$  è  $g_1 = 1$ , mentre quella di  $\lambda_2$  si può trovare tramite il calcolo di:

$$g_2 = 3 - \text{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Da queste informazioni concludiamo che all'autovalore  $\lambda_2$  è associato un solo miniblocco di Jordan di dimensione 2. La forma di Jordan di  $F$  è quindi (a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale):

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

I modi elementari del sistema sono 1 (limitato),  $(1/2)^t$  e  $t(1/2)^t$  (entrambi convergenti).

- Caso  $\alpha = 1$ . In questo caso  $F$  ha due autovalori distinti  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1/2$  con molteplicità algebriche  $\nu_1 = 2$ ,  $\nu_2 = 1$ , rispettivamente. La molteplicità geometrica di  $\lambda_2$  è  $g_2 = 1$ , mentre quella di  $\lambda_1$  si può trovare tramite il calcolo di:

$$g_2 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Da queste informazioni concludiamo che all'autovalore  $\lambda_1$  è associato un solo miniblocco di Jordan di dimensione 1. La forma di Jordan di  $F$  è quindi (a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale):

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

I modi elementari del sistema sono 1 (limitato),  $t$  (divergente) e  $(1/2)^t$  (convergente).

2. Per  $\alpha = 1$ , la matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R} = [G \quad FG \quad F^2G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango 2, per cui il sistema non è raggiungibile. (In alternativa, uno poteva notare che il sistema è in forma di Kalman di raggiungibilità con coppia non raggiungibile  $F_{22} = 1/2$ ,  $G_2 = 0$ .) Gli spazi raggiungibili  $X_R(t)$ ,  $t \geq 1$ , sono:

$$\begin{aligned} X_R(1) &= \text{Im } \mathcal{R}_1 = \text{Im } G = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ X_R(2) &= \text{Im } \mathcal{R}_2 = \text{Im} [G \quad FG] = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \\ X_R(t) &= X_R(2) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall t \geq 3. \end{aligned}$$

3. Il sistema è in forma di Kalman di raggiungibilità. Nello specifico,  $F$  e  $G$  possono essere partizionate come

$$F = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{array} \right], \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove la coppia  $(F_{11}, G_1)$  rappresenta il sottosistema raggiungibile, mentre  $(F_{22}, G_2)$  quello non raggiungibile. Il sottosistema non raggiungibile ha un solo autovalore in  $1/2$ , quindi, sebbene il sistema non sia completamente raggiungibile, è possibile trovare una matrice di retroazione  $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$  che allochi tutti gli autovalori in  $1/2$ . Per calcolarla possiamo usare, ad esempio, il metodo di calcolo diretto, applicato al solo sottosistema raggiungibile:

$$\begin{aligned} \Delta_{F_{11}+G_1[k_1 \quad k_2]}(\lambda) &= \det(\lambda I - F_{11} - G_1 [k_1 \quad k_2]) \stackrel{!}{=} (\lambda + 1/2)^2 \\ \implies \lambda^2 - (2 + k_1 + k_2)\lambda + 1 + k_1 &\stackrel{!}{=} \lambda^2 - \lambda + 1/4. \end{aligned}$$

L'ultima equazione porge il sistema

$$\begin{cases} 2 + k_1 + k_2 = 1 \\ 1 + k_1 = 1/4 \end{cases}$$

che ha soluzione  $k_1 = -3/4$  e  $k_2 = -1/4$ . La matrice di retroazione richiesta quindi è della forma  $K = [-3/4 \quad -1/4 \quad k_3]$ , con  $k_3 \in \mathbb{R}$  uno scalare qualsiasi.

**Esercizio 3 [9 pti].**

1. La matrice di osservabilità del sistema ha la forma

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^2(1-\alpha)^2 \end{bmatrix}.$$

Il rango di  $\mathcal{O}$  è pieno se e solo se  $\alpha \neq 0$ . Quindi il sistema è osservabile se e solo se  $\alpha \neq 0$ . Per  $\alpha = 0$  la matrice  $F$  diventa:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dalla struttura di  $F$  (o calcolando le radici del polinomio caratteristico di  $F$ ),  $F$  ha un unico autovalore in 0 (e quindi anche il sottosistema non osservabile). Quindi il sistema è ricostruibile per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(In alternativa, per arrivare alle stesse conclusioni, uno poteva calcolare gli autovalori di  $F$  che sono 0 e  $\pm\alpha(1-\alpha)$  e poi applicare il test PBH di osservabilità al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .)

2. A partire dai valori ingresso/uscita riportati, possiamo calcolarci i valori dell'evoluzione libera dell'uscita:

$$\begin{aligned} y_\ell(0) &= y(0) = 0, \\ y_\ell(1) &= y(1) - y_f(1) = y(1) - HGu(0) = 1 - 1 = 0, \\ y_\ell(2) &= y(2) - y_f(2) = y(2) - HGu(1) - HFGu(0) = 4 - 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Poichè il sistema è osservabile per  $\alpha = 1$ , la condizione iniziale si trova calcolando

$$x(0) = \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Come prima cosa, osserviamo che il sistema ammette uno stimatore dead-beat per ogni valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$  poiché il sistema è ricostruibile per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Distinguiamo ora i due casi  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha = 0$ .

- $\alpha \neq 0$ . Il sistema è osservabile da una singola uscita e quindi la matrice  $F + LH$  è sempre ciclica per ogni scelta del guadagno  $L$  (questo segue dalla dualità e dal fatto che sistemi raggiungibili da un ingresso hanno una matrice di stato che è sempre ciclica, cf. test di raggiungibilità di Jordan). Questo implica che, per ogni guadagno  $L$  di uno stimatore dead-beat,  $F + LH$  ha un solo miniblocco relativo all'autovalore 0. Quindi, indipendentemente dal valore di  $\alpha \neq 0$ , l'errore di stima va a zero in esattamente 3 passi.
- $\alpha = 0$ . Ponendo  $L = [\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3]^\top$ , abbiamo

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ell_1 \\ 1 & 0 & 1 + \ell_2 \\ 0 & 0 & \ell_3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Gli autovalori di  $F + LH$  sono  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \ell_3$ . Per avere uno stimatore dead-beat tutti gli autovalori di  $F + LH$  devono essere in 0, questo implica  $\ell_3 = 0$ . In questo caso, la molteplicità geometrica di  $\lambda_1 = 0$  è

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F - LH) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\ell_1 \\ -1 & 0 & -1 - \ell_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ell_1 \neq 0, \\ 2 & \text{se } \ell_1 = 0. \end{cases}$$

Quindi, per  $\ell_1 \neq 0$ ,  $F + LH$  ha un unico miniblocco di Jordan relativo a  $\lambda_1 = 0$  e l'errore di stima va a zero in 3 passi, mentre per  $\ell_1 = 0$ ,  $F + LH$  ha due miniblocchi di Jordan relativi a  $\lambda_1 = 0$  e l'errore di stima va a zero in 2 passi. (In alternativa, uno poteva notare che, per  $\alpha = 0$ ,  $F$  ha un unico autovalore in  $\lambda_1 = 0$  con molteplicità geometrica  $g_1 = 2$ . Quindi, poiché non è possibile ottenere una matrice  $F + LH$  completamente nulla agendo su  $L$ , il numero di passi minimo per portare a zero l'errore di stima è 2.)

Concludiamo che per  $\alpha = 0$  il sistema ammette uno stimatore dead-beat il cui errore di stima va a zero nel minor numero di passi possibile (cioè 2 passi).

**Domanda di Teoria [6 pti].**

1. Si vedano gli appunti delle lezioni (Lezione 13 & 14) e/o il capitolo 4.2 del testo di riferimento del corso.
2. Assumendo il sistema raggiungibile in  $\bar{t}$  passi, l'insieme di tutti i possibili ingressi che portano il sistema da  $x(0) = x_0$  a  $x(\bar{t}) = x_f$  è della forma:

$$\mathcal{U}_{\bar{t}} = \{u_{\bar{t}} + \bar{u}, \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_{\bar{t}})\},$$

dove  $u_{\bar{t}}$  denota un qualsiasi ingresso calcolabile che porta il sistema da  $x(0) = x_0$  a  $x(\bar{t}) = x_f$  (ad esempio, quello ad energia minima  $u_{\bar{t}} = \mathcal{R}_{\bar{t}}^\top (\mathcal{R}_{\bar{t}} \mathcal{R}_{\bar{t}}^\top)^{-1} (x_f - F^{\bar{t}} x_0)$ ). Quindi, nel caso in esame, gli ingressi desiderati hanno la forma

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathcal{R}_2^\top (\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_2^\top)^{-1} (x_f - F^{\bar{t}} x_0) + \bar{u}, \quad \bar{u} \in \ker(\mathcal{R}_2) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 2^{-1} (x_f - x_0) + \bar{u}, \quad \bar{u} \in \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (x_f - x_0) + \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$