

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

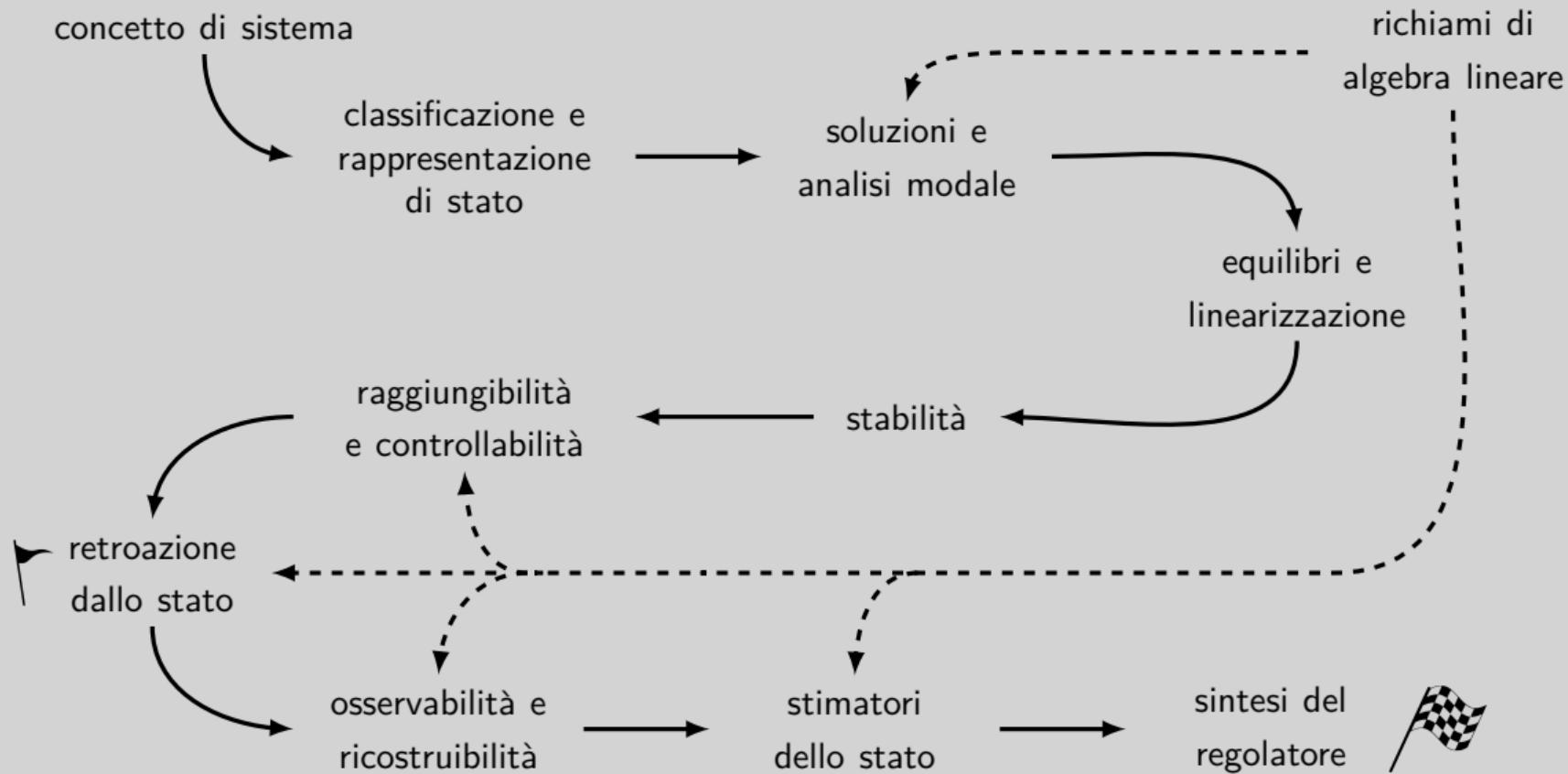
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

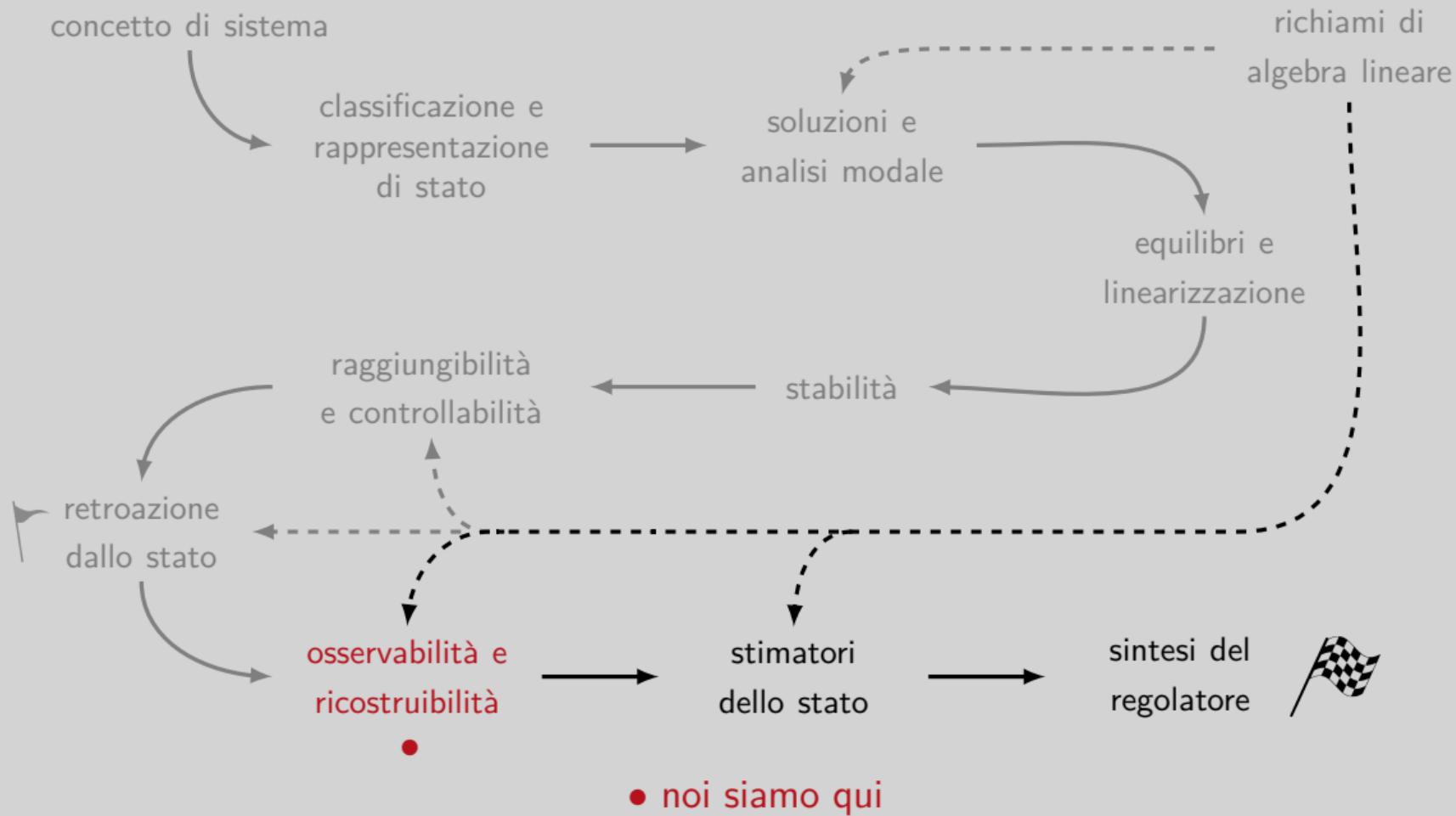
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020





In questa lezione

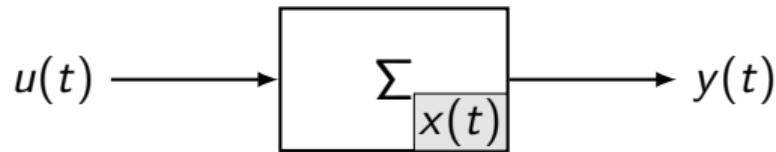
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
 - ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
 - ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

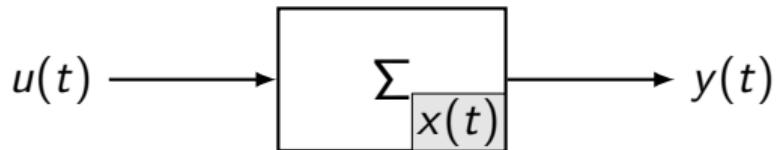
Osservabilità e ricostruibilità

$n\text{-dim}$ $m\text{-dim}$ $p\text{-dim}$
↓ ↓ ↓
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Osservabilità e ricostruibilità

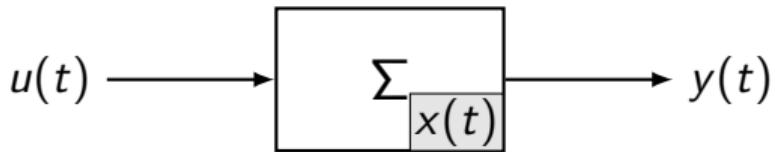
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Osservabilità = possibilità di stimare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

Osservabilità e ricostruibilità

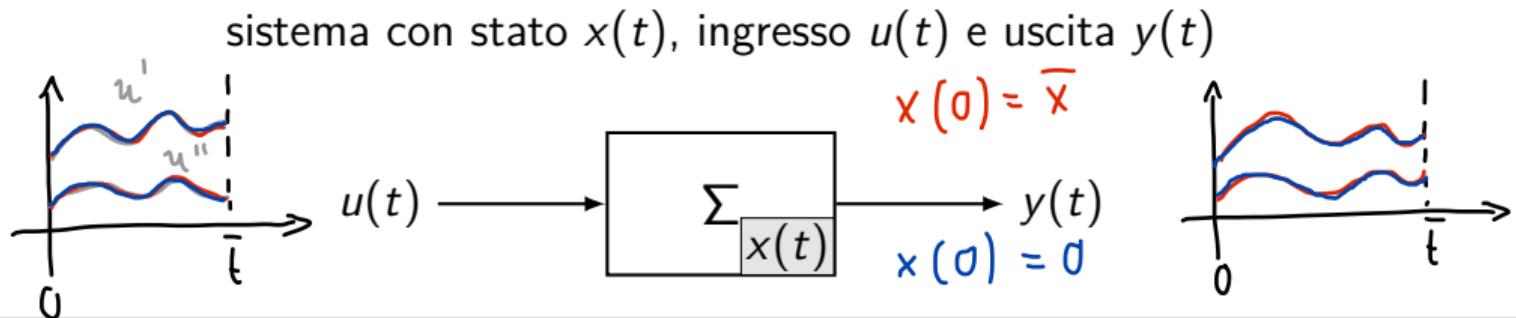
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Osservabilità = possibilità di stimare lo **stato iniziale $x(0)$** del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

Ricostruibilità = possibilità di stimare lo **stato finale $x(\bar{t})$** del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

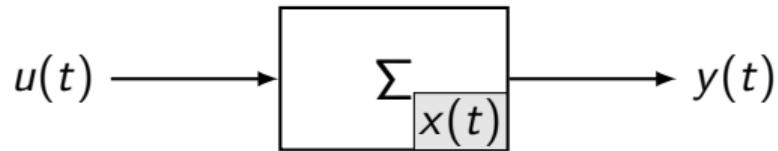
Stati e spazi non osservabili



Definizione: Uno stato \bar{x} si dice non osservabile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}$ coincide su $[0, \bar{t}]$ con l'uscita corrispondente allo stato iniziale $x(0) = 0$.

Stati e spazi non osservabili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

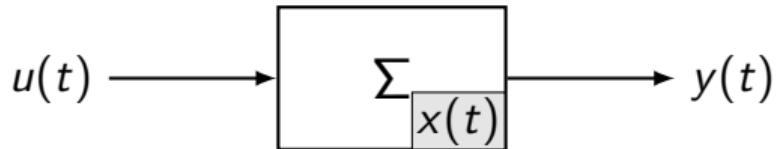


Definizione: Uno stato \bar{x} si dice non osservabile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}$ coincide su $[0, \bar{t}]$ con l'uscita corrispondente allo stato iniziale $x(0) = 0$.

Definizione: L'insieme di tutti gli stati non osservabili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto **spazio non osservabile** in $[0, \bar{t}]$.

Stati indistinguibili (nel futuro)

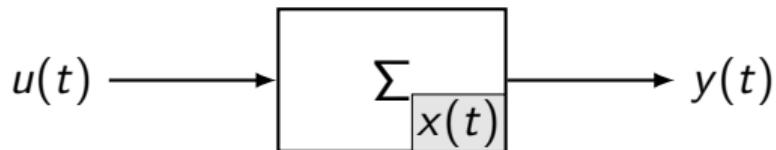
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Due stati \bar{x}' e \bar{x}'' si dicono **indistinguibili** (nel futuro) **nell'intervallo** $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}''$ coincidono su $[0, \bar{t}]$.

Stati indistinguibili (nel futuro)

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

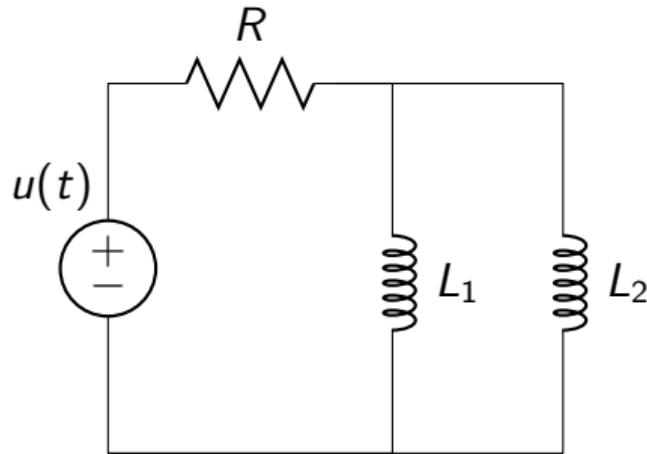


Definizione: Due stati \bar{x}' e \bar{x}'' si dicono indistinguibili (nel futuro) nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}'$ e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $x(0) = \bar{x}''$ coincidono su $[0, \bar{t}]$.

stato non osservabile = stato indistinguibile da zero

Esempio introduttivo

extra

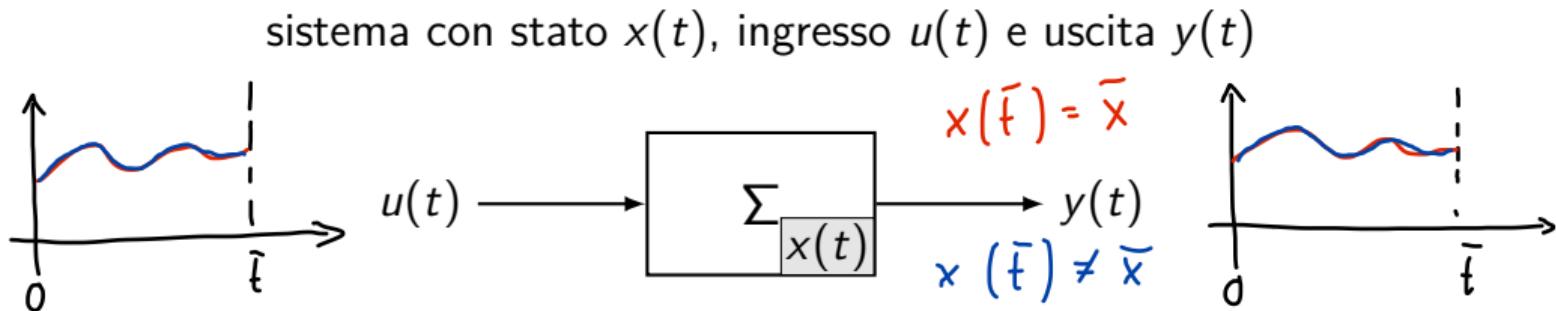


$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \text{ è non osservabile } \forall t > 0$$

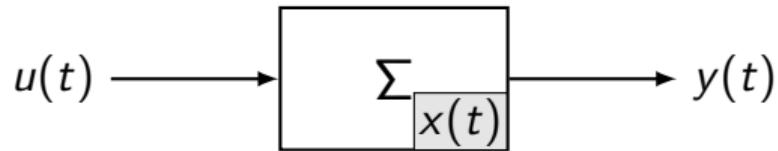
Stati e spazi non ricostruibili



Definizione: Uno stato \bar{x} si dice **non ricostruibile** nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se ogni ingresso $u(\cdot)$ e uscita $y(\cdot)$ in $[0, \bar{t}]$ "compatibili" con un'evoluzione di stato $x'(t)$ con stato finale $x'(\bar{t}) = \bar{x}$ sono anche "compatibili" con un'evoluzione di stato $x''(t)$ con $x''(\bar{t}) \neq \bar{x}$.

Stati e spazi non ricostruibili

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Definizione: Uno stato \bar{x} si dice non ricostruibile nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ se ogni ingresso $u(\cdot)$ e uscita $y(\cdot)$ in $[0, \bar{t}]$ "compatibili" con un'evoluzione di stato $x'(t)$ con stato finale $x'(\bar{t}) = \bar{x}$ sono anche "compatibili" con un'evoluzione di stato $x''(t)$ con $x''(\bar{t}) \neq \bar{x}$.

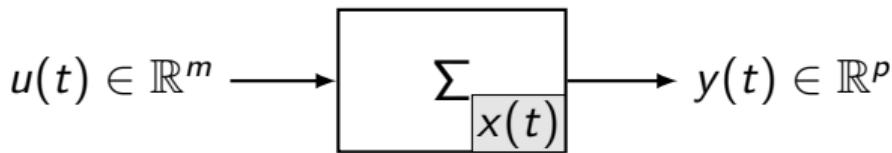
Definizione: L'insieme di tutti gli stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$ è detto spazio non ricostruibile in $[0, \bar{t}]$.

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
 - ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

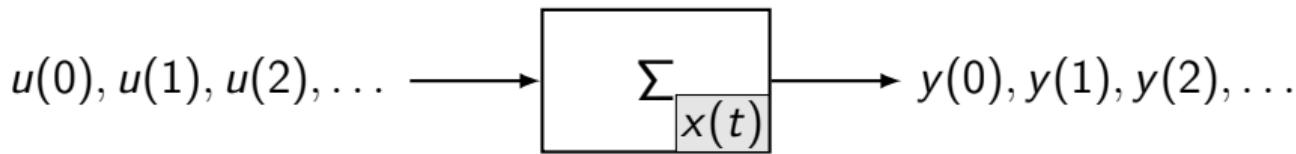
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{\text{e.v. libera}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k)}_{\text{e.v. forzata}} = HF^t x_0 + H\mathcal{R}_t u_t$$

Osservabilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) = \bar{x} \\y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$



$$y(k) = HF^k \bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati \bar{x} osservabili da misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}$, $\{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Spazio non osservabile

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = H F^k \bar{x} + H \mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H \mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Spazio non osservabile

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = HF^k \bar{x} + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y(k) - y_0(k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-1 \iff \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathcal{O}_t} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \bar{x} \in \ker \mathcal{O}_t$$

\mathcal{O}_t = matrice di osservabilità in t passi

Spazio non osservabile

$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)$
(o nell'intervallo $[0, t - 1]$)
(o con t misure)

Spazio non osservabile

$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)$
(o nell'intervallo $[0, t - 1]$)
(o con t misure)

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

Spazio non osservabile

$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile in } t \text{ passi} = \ker(\mathcal{O}_t)$
(o nell'intervallo $[0, t - 1]$)
(o con t misure)

Teorema: Gli spazi non osservabili soddisfano:

$$X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq X_{NO}(3) \supseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NO}(i) = X_{NO}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NO} \triangleq X_{NO}(i) = (\text{massimo}) \text{ spazio non osservabile}$$

Criterio di osservabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

Criterio di osservabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n =$ matrice di osservabilità del sistema

Σ osservabile $\iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$

$$G = \begin{bmatrix} & \uparrow \\ & \downarrow \end{bmatrix}$$

Criterio di osservabilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) osservabile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$.

$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n =$ matrice di osservabilità del sistema

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

$$p = 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$$

$$p > 1: \Sigma \text{ osservabile} \iff \det(\mathcal{O}^\top \mathcal{O}) \neq 0$$

$n \times n$

Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$ \implies non osservabile
 $y(t) = [0 \ 1] x(t)$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$ \implies osservabile (in 2 passi)
 $y(t) = [1 \ 0] x(t)$

Osservabilità ed equivalenza algebrica

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z = T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$
$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{H} = HT$$

Osservabilità ed equivalenza algebrica

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z=T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{H} = HT$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{O}}) = \text{rank}(\mathcal{O}) \implies$ cambio di base non modifica l'osservabilità !!

Osservabilità ed equivalenza algebrica

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z = T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{H} = HT$$

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

$\text{rank}(\bar{\mathcal{O}}) = \text{rank}(\mathcal{O}) \implies$ cambio di base non modifica l'osservabilità !!

Inoltre, se Σ osservabile: $\mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}^\top \mathcal{O}T \implies T = (\mathcal{O}^\top \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^\top \bar{\mathcal{O}}$

Calcolo dello stato iniziale

extra

Se Σ è osservabile in t passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

Calcolo dello stato iniziale

Se Σ è osservabile in t passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

$$y_\ell(k) = HF^k \bar{x} = y(k) - H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{t-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \mathcal{O}_t \bar{x} \implies \bar{x} = (\mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t)^{-1} \mathcal{O}_t^\top \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_t \triangleq \mathcal{O}_t^\top \mathcal{O}_t = \text{Gramiano di osservabilità in } t \text{ passi}$$

Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t)$$

Calcolare $x(0)$ dalle misure $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ e $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y(2) = 2$?

Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t)$$

Calcolare $x(0)$ dalle misure $u(0) = 1, u(1) = 1$ e $y(0) = 1, y(1) = 2, y(2) = 2$?

Poichè il sistema è osservabile lo stato iniziale è unico e pari a $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Indistinguibilità

$$x(0) = \bar{x}', u(\cdot) \implies y'(k) = HF^k \bar{x}' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$x(0) = \bar{x}'', u(\cdot) \implies y''(k) = HF^k \bar{x}'' + \mathcal{R}_k u_k$$

Indistinguibilità

$$x(0) = \bar{x}', u(\cdot) \implies y'(k) = HF^k \bar{x}' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$x(0) = \bar{x}'', u(\cdot) \implies y''(k) = HF^k \bar{x}'' + \mathcal{R}_k u_k$$

$$\bar{x}', \bar{x}'' \text{ indistinguibili in } t \text{ passi} \implies y'(k) = y''(t), \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\implies HF^k (\bar{x}' - \bar{x}'') = 0, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\implies \bar{x}' - \bar{x}'' \in X_{NO}(t)$$



$\bar{x} + X_{NO}(t)$: classe di stati indistinguibili in t passi da \bar{x}

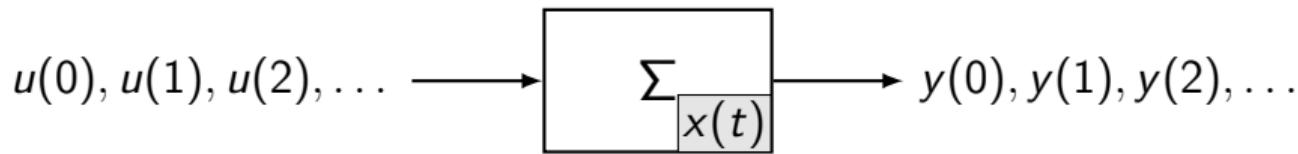
$\bar{x} + X_{NO}$: classe di stati indistinguibili da \bar{x}

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
 - ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

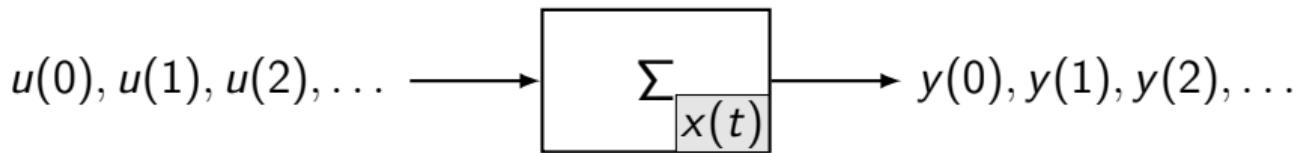
$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) = x_0 \\y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$



$$y(k) = \underbrace{HF^k x_0}_{\text{ev. libera}} + \underbrace{H\mathcal{R}_k u_k}_{\text{ev. forzata}}, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Ricostruibilità di sistemi a tempo discreto: setup

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) = x_0 \\y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$



$$y(k) = HF^k x_0 + H\mathcal{R}_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

Insieme di stati $\bar{x} = x(t-1)$ ricostruibili da misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$?

Quando possiamo ricostruire tutti i possibili stati $\bar{x} = x(t-1) \in \mathbb{R}^n$?

Spazio non ricostruibile

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

Spazio non ricostruibile

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

misure $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t-1) = F^{t-1}x_0 + F^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}u_{t-1}$$

$F^{t-1}X_{NO}(t)$ = insieme di stati non ricostruibili in t passi

Spazio non ricostruibile

$X_{NR}(t) = \text{spazio non ricostruibile in } t \text{ passi} = \{F^{t-1}x, x \in \ker(\mathcal{O}_t)\}$
(o nell'intervallo $[0, t - 1]$)
(o con t misure)

Teorema: Gli spazi non ricostruibili soddisfano:

$$X_{NR}(1) \supseteq X_{NR}(2) \supseteq X_{NR}(3) \supseteq \dots$$

Inoltre, esiste un primo intero $i \leq n$ tale che

$$X_{NR}(i) = X_{NR}(j), \quad \forall j \geq i.$$

$$X_{NR} \triangleq X_{NR}(i) = (\text{massimo}) \text{ spazio non ricostruibile}$$

Criterio di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$.
Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi (o con t misure)
se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

Criterio di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}$$

Criterio di non ricostruibilità

Definizione: Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$. Un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) ricostruibile in t passi (o con t misure) se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$.

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker(F^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}$$

$$\Sigma \text{ osservabile } (X_{NO} = \{0\}) \Rightarrow \Sigma \text{ ricostruibile}$$

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \not\Rightarrow \Sigma \text{ osservabile !!!}$$

Esempi

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

 $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

\implies non osservabile
ma ricostruibile se $f_1 = 0$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

 $y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

\implies osservabile e (quindi) ricostruibile

In questa lezione

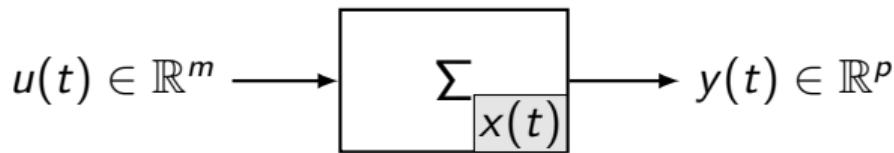
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
 - ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
 - ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

Osservabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t)$$

$$x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$



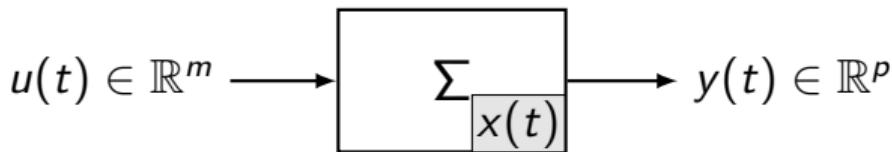
$$y(t) = He^{Ft}\bar{x} + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

Osservabilità di sistemi a tempo continuo: setup

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t)$$

$$x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$



$$y(t) = He^{Ft}\bar{x} + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

Insieme di stati \bar{x} osservabili da misure nell'intervallo $[0, t]$?

Quando possiamo osservare tutti i possibili stati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di osservabilità

$X_{NO}(t) =$ spazio non osservabile nell'intervallo $[0, t]$

$X_{NO} =$ (massimo) spazio non osservabile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

Criterio di osservabilità

$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$

$X_{NO} = (\text{massimo}) \text{ spazio non osservabile}$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

Criterio di osservabilità

$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$

$X_{NO} = (\text{massimo}) \text{ spazio non osservabile}$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

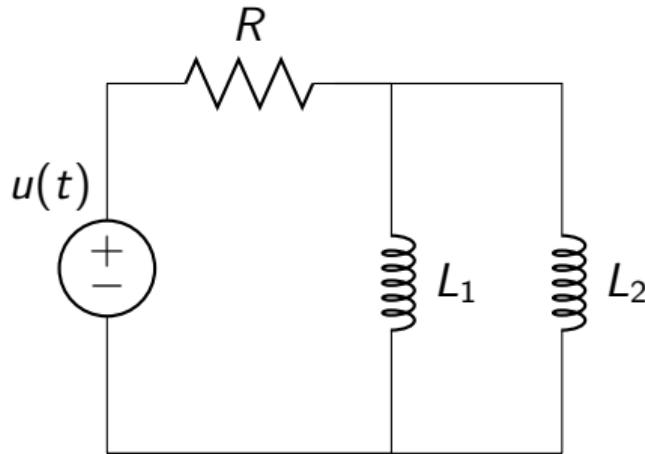
$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema}$$

$$\Sigma \text{ raggiungibile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$!!

Esempio

extra



$$x_1(t) = i_{L_1}(t), \quad x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) & -R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

misure $u(\tau)$, $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

misure $u(\tau)$, $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t) =$ insieme di stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, t]$

Spazio non ricostruibile a t.c.

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

misure $u(\tau)$, $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t) =$ insieme di stati non ricostruibili nell'intervallo $[0, t]$

e^{Ft} invertibile $\implies X_{NR}(t) = X_{NO}(t)$

osservabilità = ricostruibilità !!

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 19: Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

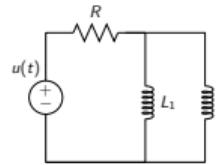
A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 baggiogi.github.io

Esempio introduttivo

back



$$x_1(t) = i_{L_1}(t), x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

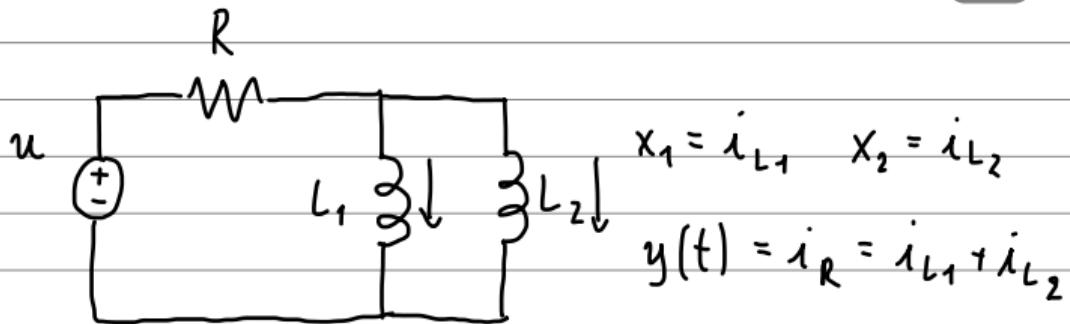
$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ è non osservabile } \forall t > 0$$

Giacomo Biggio

IMC-TES-1920: Lec. 19

November 26, 2019 8 / 42



$$\dot{x}_1 = \frac{d}{dt} i_{L_1} = \frac{1}{L_1} v_{L_1} = \frac{1}{L_1} (u - v_R) = \frac{1}{L_1} (u - R i_R)$$

$$= \frac{1}{L_1} (u - R (i_{L_1} + i_{L_2}))$$

$$= \frac{1}{L_1} (u - R (x_1 + x_2))$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dt} i_{L_2} = \frac{1}{L_2} (u - R (x_1 + x_2))$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}}_F x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}}_G u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_H x \end{array} \right.$$

$$y(t) = H e^{Ft} x(0) + \int_0^t H e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau$$

$$x(0) = 0 : \quad y_o(t) = \int_0^t H e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = y_o(t) \quad \forall t \in [0, \bar{t}]$$

$$y(t) - y_o(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}]$$



$$He^{Ft}x(0) = 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}]$$

$$e^{Ft} = I + F + \frac{t^2}{2} F^2 + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{R^2}{L_1^2} + \frac{R^2}{L_1 L_2} \\ b &= \frac{R^2}{L_2^2} + \frac{R^2}{L_1 L_2} \\ \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 + c_1 & c_1 \\ c_2 & 1 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$He^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + c_1 & c_1 \\ c_2 & 1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + c_1 + c_2 & 1 + c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad He^{Ft}x(0) = 0$$

↳ stati NON osservabili

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = H F^k \bar{x} + H R_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H R_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = \bar{x}: \quad y(k) = H F^k \bar{x} + H R_k u_k \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$x(0) = 0: \quad y_0(k) = H R_k u_k \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\bar{x} \text{ è non osservabile} \Rightarrow y(k) - y_0(k) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$H F^k \bar{x} = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} H \\ H F \\ \vdots \\ H F^{t-1} \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in \text{Ker} \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix} = O_t = \text{matrice di osservabilità}$$

in t passi (con t misure)

Esempi

back

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$2. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Giacomo Biaggio

IMC-TS5-1920: Lec. 19

November 26, 2019 16 / 42

$$1) \quad x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}}_{F} x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_H x(t)$$

$$O = \begin{bmatrix} H \\ H F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}$$

$\det O = 0 \Rightarrow \Sigma$ non è osservabile ($\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}$)

$$2) \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} f_1 & 1 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum$ observable $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}$

Osservabilità ed equivalenza algebrica

back

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \xrightarrow{z = T^{-1}x} \begin{cases} z(t+1) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$\bar{F} = T^{-1}FT, \bar{H} = HT$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$$z = T^{-1}x$$

$$\begin{cases} z(t+1) = T^{-1}FTz(t) = \bar{F}z(t) \\ y(t) = HTz(t) = \bar{H}z(t) \end{cases}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{H}\bar{F} \\ \vdots \\ \bar{H}\bar{F}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HT \\ HTT^{-1}F^{-1} \\ \vdots \\ HTT^{-1}F^{-1}F^{n-1}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HT \\ HF^{-1} \\ \vdots \\ HF^{n-1}T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}}_{\bar{G}} T \quad (*)$$

Σ osservabile

$$(*) \quad O^T \bar{O} = \underbrace{O^T O}_{\det(O^T O) \neq 0 \atop n \times n} T \Rightarrow T = (O^T O)^{-1} O^T \bar{O}$$

Se Σ è osservabile in t passi, come calcolare la condizione iniziale del sistema $\bar{x} = x(0)$ a partire da dati ingresso/uscita?

Σ osservabile in t passi

Misure: $u(0), u(1), \dots, u(t-1)$
 $y(0), y(1), \dots, y(t-1)$

$$y(k) = \underbrace{H F^k \bar{x}}_{y_e(k)} + \underbrace{H R_k u_k}_{y_f(k)} \quad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$y_e(k) = y(k) - y_f(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{O_t} \bar{x}$$

$$O_t^\top \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix} = \underbrace{O_t^\top O_t}_{\det(O_t^\top O_t) \neq 0} \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = (O_t^\top O_t)^{-1} O_t^\top \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ \vdots \\ y_\ell(t-1) \end{bmatrix}$$

Esempi

back

$$1. \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Calcolare $x(0)$ dalle misure $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ e $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, $y(2) = 2$?

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$u(0) = u(1) = 1$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = y(2) = 2$$

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma \text{ è osservabile}$$

$$y_\ell(0) = y(0) = 1$$

$$y_\ell(1) = y(1) - \underbrace{H G u(0)}_{=1} = 2 - 1 = 1$$

$$y_\ell(2) = y(2) - \underbrace{H G u(1)}_{=1} - \cancel{H F G u(0)}^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{x} = \underbrace{(G^T G)^{-1}}_I G^T \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spazio non ricostruibile

back

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + R_{t-1}u_{t-1}$$

$$\text{misure } \{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$$

stati iniziali compatibili con le misure: $x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$

$$x(t-1) = F^{t-1}x(0) + R_{t-1}u_{t-1}$$

Dati: $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$



$$x(0) = x_0 + X_{NO}(t)$$

Se Σ osservabile in t passi $x(0) = x_0$

Se Σ non è osservabile:

$$x(t-1) = F^{t-1}(x_0 + X_{NO}(t)) + R_{t-1}u_{t-1}$$



$$= F^{t-1} x_0 + F^{t-1} X_{N_0}(t) + R_{t-1} u_{t-1}$$

$x(t-1)$ univocamente determinato $\Leftrightarrow F^{t-1} X_{N_0}(t) = 0$

Se $\text{Ker } F^{t-1} \ni X_{N_0}(t) \Rightarrow \bar{x} = x(t-1)$ ricostruibile in t passi
 (o con t misure)

$$\text{ker } O_t$$