

**Esercizio 1 [9 pti].**

1. Il vettore  $\bar{x} = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^\top$  è un equilibrio del sistema se e solo se

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \alpha \bar{x}_2 + (\alpha - 1)^2 \bar{x}_2^3 = \bar{x}_2(\alpha + (\alpha - 1)^2 \bar{x}_2^2) \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 \end{aligned} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

La seconda equazione di (1) sostituita nella prima porge

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_2(\alpha + (\alpha - 1)^2 \bar{x}_2^2) \implies \bar{x}_2(\alpha - 1 + (\alpha - 1)^2 \bar{x}_2^2) = 0. \quad (2)$$

Quest'ultima equazione pone vincoli diversi sulla variabile  $\bar{x}_2$  a seconda dei casi:  $\alpha = 1$ ,  $\alpha \neq 1$ . Trattiamo separatamente questi due casi:

- Caso  $\alpha = 1$ . In questo caso l'equazione (2) diventa  $0 = 0$ , condizione che è sempre verificata. Quindi, dalla seconda equazione di (1), concludiamo che esistono infiniti equilibri della forma  $[\beta \quad \beta]^\top$ , con  $\beta \in \mathbb{R}$  uno scalare arbitrario.
- Caso  $\alpha \neq 1$ . In questo caso le soluzioni di (2) sono  $\bar{x}_2 = 0$  (che, a sua volta, implica  $\bar{x}_1 = 0$ ) e le soluzioni di  $(\alpha - 1)^2 \bar{x}_2^2 = 1 - \alpha$ . Quest'ultima equazione ammette soluzioni reali  $(\pm 1/\sqrt{1 - \alpha})$  se e solo se  $\alpha < 1$ . Distinguiamo quindi i due sottocasi:
  - Caso  $\alpha < 1$ . Abbiamo tre equilibri in  $[0 \quad 0]^\top$ ,  $[\pm 1/\sqrt{1 - \alpha} \quad \pm 1/\sqrt{1 - \alpha}]^\top$ .
  - Caso  $\alpha > 1$ . Abbiamo un solo equilibrio in  $[0 \quad 0]^\top$ .

2. La matrice Jacobiana del sistema è

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha + 3(\alpha - 1)^2 x_2^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

che valutata in  $\bar{x} = [0 \quad 0]^\top$  porge

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Gli autovalori di  $J(\bar{x})$  sono  $\pm\sqrt{\alpha}$ . Quindi, dal Teorema di Linearizzazione possiamo concludere che  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile se  $\alpha < 1$  e instabile se  $\alpha > 1$ . I casi critici sono  $\alpha = \pm 1$ .

3. Consideriamo l'equilibrio  $\bar{x} = [0 \quad 0]^\top$  a cui corrispondono i due casi critici  $\alpha = \pm 1$  (trovati al punto 2).

- Caso  $\alpha = 1$ . In questo caso il sistema di partenza si riduce ad un sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t). \end{aligned}$$

La matrice di stato del sistema è

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quest'ultima ha autovalori in  $\pm 1$ , a cui corrispondono modi elementari limitati. Il punto di equilibrio  $\bar{x}$  è quindi semplicemente stabile.

- Caso  $\alpha = -1$ . In questo caso utilizziamo la funzione candidata di Lyapunov proposta  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ , che è definita positiva in un intorno dell'origine. Per capire se è una “buona” funzione di Lyapunov, valutiamo la differenza  $\Delta V(x_1, x_2)$  (assumendo  $\alpha = -1$ ):

$$\begin{aligned}\Delta V(x_1, x_2) &= V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t)) \\ &= (-x_2 + 4x_2^3)^2 + x_1^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^2 + 16x_2^6 - 8x_2^4 - x_2^2 \\ &= -8x_2^4(1 - 2x_2^2)\end{aligned}$$

Notiamo che  $\Delta V(x_1, x_2)$  è semidefinita negativa in un intorno dell'origine. Quindi, per il Teorema di Lyapunov, possiamo concludere che  $\bar{x}$  è *almeno* semplicemente stabile. Per capire se  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile o solo semplicemente stabile, usiamo il Teorema di Krasowskii. L'insieme dei punti che annullano  $\Delta V(x_1, x_2)$  in un intorno dell'origine ha la forma:

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \Delta V(x_1, x_2) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 = \beta, x_2 = 0, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che  $x(t) \in \mathcal{N}$  implica  $x_2(t) = 0$ . Sostituendo questa condizione nelle equazioni della dinamica, otteniamo

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= 0, \\ x_2(t+1) &= x_1(t).\end{aligned}$$

Da queste due equazioni segue che  $x_1(t+2) = x_2(t+2) = 0$ , per ogni  $t \geq 0$ . Quindi, partendo da una qualsiasi condizione iniziale in  $\mathcal{N}$  (purché sufficientemente vicina a  $\bar{x}$ ), tutte le traiettorie convergono all'equilibrio  $\bar{x}$ . Per il Teorema di Krasowskii possiamo quindi concludere che  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.

## Esercizio 2 [9 pti].

1. Dalla struttura di  $F$  (o tramite calcolo esplicito delle radici del polinomio caratteristico di  $F$ ), abbiamo che  $F$  ha autovalori in  $\alpha, 1$ . Distinguiamo quindi due casi:

- Caso  $\alpha \neq 1$ . In questo caso  $F$  ha due autovalori distinti  $\lambda_1 = \alpha$  e  $\lambda_2 = 1$ , con molteplicità algebriche  $\nu_1 = 1$  e  $\nu_2 = 2$ , rispettivamente. Le molteplicità geometriche di  $\lambda_1$  è  $g_1 = 1$ , mentre quella di  $\lambda_2$  si può trovare calcolando:

$$g_2 = 3 - \text{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Da queste informazioni concludiamo che all'autovalore  $\lambda_2$  è associato un miniblocco di Jordan di dimensione 2. La forma di Jordan di  $F$  è quindi (a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale):

$$F_J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I modi elementari del sistema sono  $\alpha^t$  (convergente se  $|\alpha| < 1$ , divergente se  $|\alpha| > 1$ , limitato se  $\alpha = -1$ ), 1 (limitato) e  $t$  (divergente).

- Caso  $\alpha = 1$ . In questo caso  $F$  ha un unico autovalore distinto  $\lambda_1 = 1$  con molteplicità algebrica  $\nu_1 = 3$ . La molteplicità geometrica di  $\lambda_1$  si può calcolare come:

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Da queste informazioni concludiamo che all'autovalore  $\lambda_2$  è associato un unico miniblocco di Jordan di dimensione 3. La forma di Jordan di  $F$  è quindi:

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I modi elementari del sistema sono 1 (limitato),  $t$  e  $\frac{1}{2}t^2$  (entrambi divergenti).

2. Per lo studio della raggiungibilità, controllabilità e stabilizzabilità usiamo il test PBH, analizzando separatamente i casi  $\alpha \neq 1$  e  $\alpha = 1$ .

- Caso  $\alpha \neq 1$ . Dobbiamo valutare la matrice PBH per i due autovalori di  $F$ :  $\lambda_1 = \alpha$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Abbiamo:

$$[\lambda_1 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha - 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\lambda_2 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

da cui segue che  $\text{rank} [\lambda_1 I - F \quad G] = 2$  e  $\text{rank} [\lambda_2 I - F \quad G] = 3$ . Concludiamo che  $\lambda_1 = \alpha$  rappresenta l'unico autovalore non raggiungibile del sistema e, di conseguenza, il sistema (i) non è mai raggiungibile per alcun valore di  $\alpha$ , (ii) è controllabile per  $\alpha = 0$ , e (iii) è stabilizzabile per  $|\alpha| < 1$ .

- Caso  $\alpha = 1$ . La matrice PBH valutata nell'unico autovalore  $\lambda_1 = 1$  ha la forma

$$[\lambda_1 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Poichè  $\text{rank} [\lambda_1 I - F \quad G] = 2$ , il sistema non è né raggiungibile, né controllabile, né stabilizzabile.

Riassumendo, il sistema (i) non è mai raggiungibile per alcun valore di  $\alpha$  (ii) è controllabile per  $\alpha = 0$ , e (iii) è stabilizzabile per  $|\alpha| < 1$ .

3. Per  $\alpha = 0$  il sistema è controllabile, e, poiché  $x_f$  è il vettore nullo, esiste una sequenza d'ingresso che porta il sistema da  $x_0$  a  $x_f$ . La sequenza d'ingresso  $u_t$  cercata deve soddisfare:

$$x_f - F^t x_0 = -F^t x_0 = \mathcal{R}_t u_t. \quad (5)$$

Per calcolare la sequenza di lunghezza minima che soddisfa l'equazione (5) possiamo procedere per tentativi, partendo dal caso  $t = 1$ . In questo caso, dalla (5) abbiamo

$$-F x_0 = \mathcal{R}_1 u_1 \implies \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0),$$

equazione che non è mai soddisfatta per alcuno valore di  $u(0)$ , per cui non esiste una sequenza d'ingresso di lunghezza 1. Consideriamo ora  $t = 2$ . Dalla (5) abbiamo

$$-F^2 x_0 = \mathcal{R}_2 u_2 \implies \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

equazione che è soddisfatta prendendo  $u(0) = 2$  e  $u(1) = -1$ . Concludiamo che questa è la sequenza d'ingresso di lunghezza minima cercata.

### Esercizio 3 [9 pti].

1. La matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno, quindi il sistema è raggiungibile ed esiste il controllore in retroazione richiesto. Per calcolarlo possiamo utilizzare il metodo di calcolo diretto. Sia  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$  la matrice di retroazione, abbiamo

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) = \lambda^3 + (1 - k_2)\lambda^2 + (-1 - k_1 - k_2)\lambda - 1 - k_1 - k_3,$$

e imponendo l'uguaglianza  $\Delta_{F+GK}(\lambda) \stackrel{!}{=} (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ , otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1 - k_2 = 3, \\ -1 - k_1 - k_2 = 3, \\ -1 - k_1 - k_3 = 1. \end{cases}$$

Il sistema ha come unica soluzione  $k_1 = k_2 = -2$ ,  $k_3 = 0$ . Concludiamo che la matrice di retroazione cercata è  $K = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ .

2. Per studiare l'osservabilità del sistema utilizziamo il test PBH di osservabilità. La matrice  $F$  presenta due autovalori distinti:  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ . Valutando la matrice PBH per questi due autovalori, otteniamo

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Abbiamo che  $\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_1 I - F & G \end{bmatrix} = 3$  e  $\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F & G \end{bmatrix} = 2$ . Poiché la matrice PBH cade di rango per l'autovalore  $\lambda_2 = -1$ , concludiamo che il sistema non è osservabile e l'unico autovalore non osservabile è  $-1$ .

3. Affinché la dinamica dell'errore di stima contenga tutti e soli i modi  $e^{-t}$ ,  $te^{-t}$ , la matrice  $F + LH$ , con  $L$  guadagno dello stimatore, deve avere un autovalore in  $\lambda_1 = -1$  con molteplicità algebrica  $\nu_1 = 3$  e geometrica  $g_1 = 2$ . Come prima cosa, osserviamo che, siccome l'unico autovalore non osservabile del sistema è in  $-1$ , è possibile trovare un guadagno  $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$  tale per cui  $F + LH$  abbia  $-1$  come unico autovalore. Per calcolarlo, possiamo utilizzare il metodo di calcolo diretto. Calcoliamo quindi

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \lambda^3 + (-\ell_1 - \ell_2 + 1)\lambda^2 + (-2\ell_1 - 2\ell_2 - 1)\lambda - 1 - \ell_1 - \ell_2,$$

e, imponendo l'uguaglianza  $\Delta_{F+LH}(\lambda) \stackrel{!}{=} (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ , otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} -\ell_1 - \ell_2 + 1 = 3, \\ -2\ell_1 - 2\ell_2 - 1 = 3, \\ -1 - \ell_1 - \ell_2 = 1. \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzione  $\ell_1 = -2 - \ell_2$ . Concludiamo che il guadagno cercato è  $L = \begin{bmatrix} -2 - \ell_2 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$ , con  $\ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$  scalari arbitrari. Sostituendo il guadagno trovato in  $F + LH$ , abbiamo che la molteplicità geometrica dell'autovalore  $\lambda_1 = -1$  di  $F + LH$  è data da

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F - LH) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 + \ell_2 & 1 + \ell_2 & 0 \\ -1 - \ell_2 & -1 - \ell_2 & 0 \\ -1 - \ell_3 & -\ell_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per avere  $g_1 = 2$ , dobbiamo imporre  $\text{rank}(\lambda_1 I - F - LH) = 1$ . Per soddisfare questo vincolo basta imporre che le prime due righe di  $\lambda_1 I - F - LH$  siano nulle. Questo porge la soluzione  $\ell_2 = -1$ . Concludiamo quindi che lo stimatore richiesto esiste e ha guadagno  $L = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$ , con  $\ell_3 \in \mathbb{R}$  uno scalare arbitrario.

In alternativa, dalla struttura di  $F$ , si poteva fin da subito osservare che il guadagno  $L = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$  rendeva la matrice  $F + LH$  triangolare inferiore con elementi sulla diagonale tutti uguali a  $-1$ . Quindi, con questa scelta gli autovalori di  $F + LH$  venivano allocati in  $-1$  e, calcolando la molteplicità geometrica dell'autovalore in  $-1$ , si poteva arrivare più rapidamente alla soluzione.

**Domanda di Teoria [6 pti].**

1. Si vedano gli appunti delle lezioni (Lezione 21) e/o il capitolo 7.1 del testo di riferimento del corso.
2. Il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se è stabilizzabile e rilevabile. Per la giustificazione, si vedano gli appunti delle lezioni (Lezione 21) e/o il capitolo 7.1 del testo di riferimento del corso.