

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

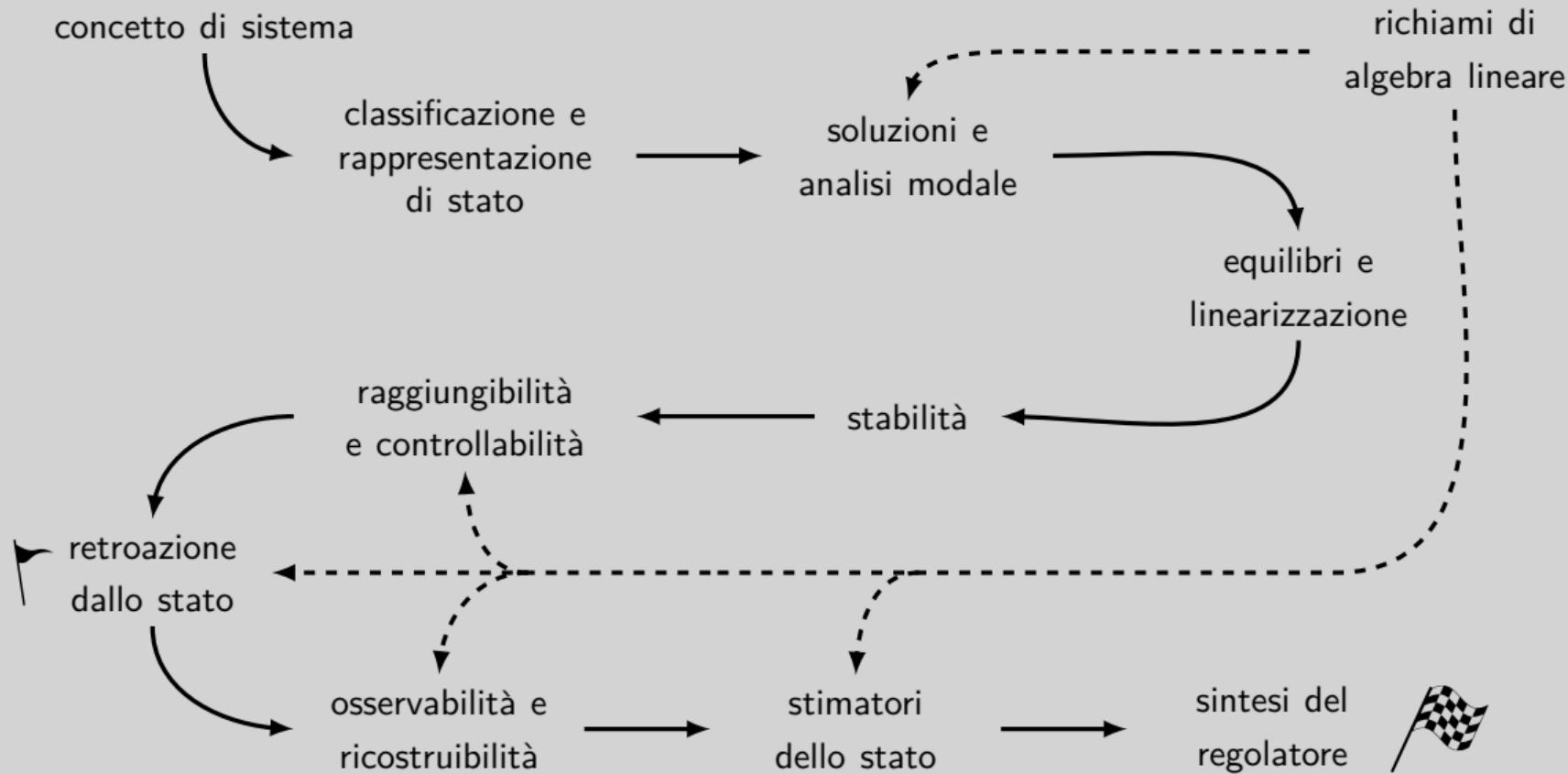
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

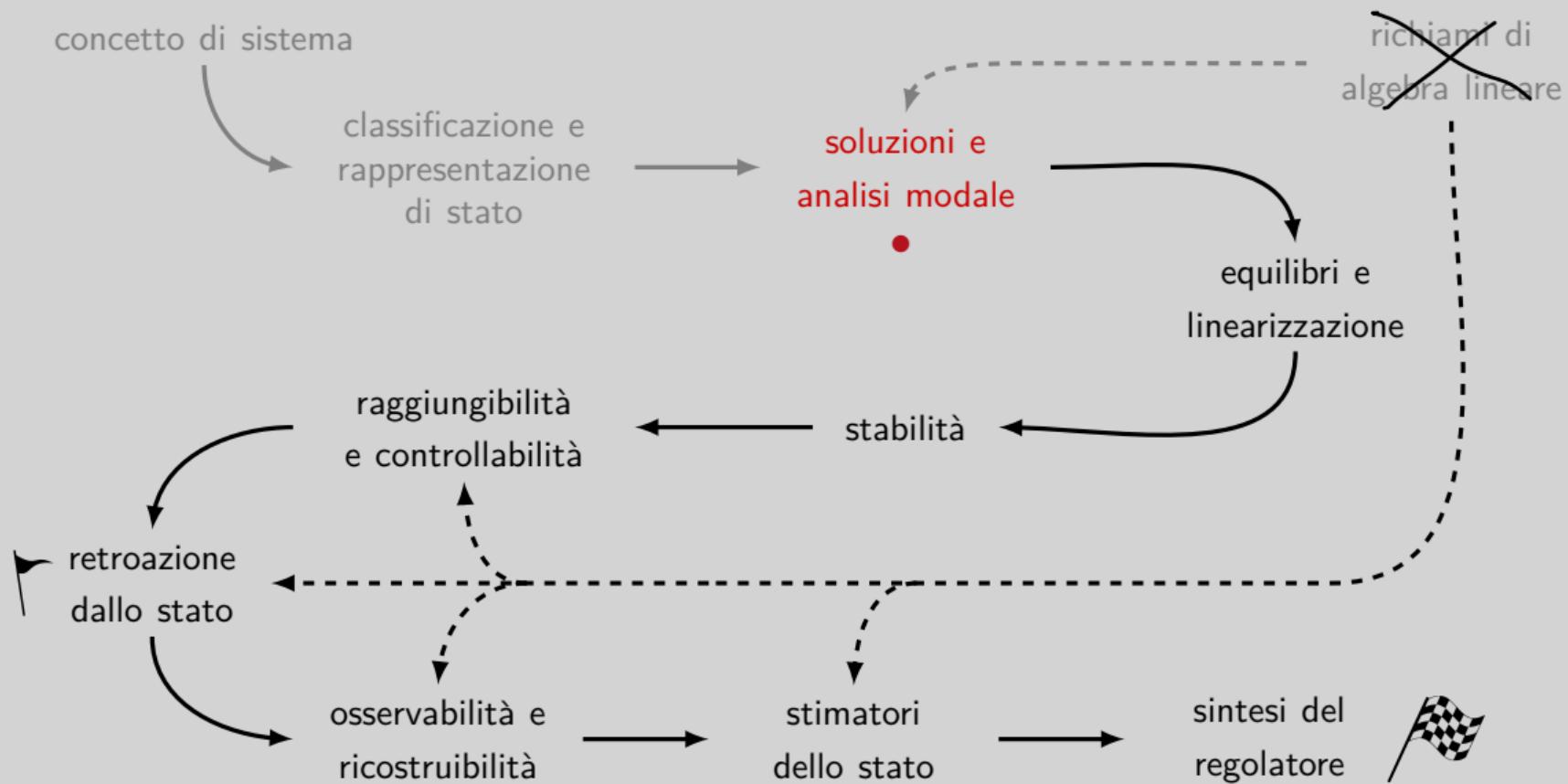
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020





● noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- ▷ Forma canonica di Jordan: costruzione
 - ▷ Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
 - ▷ Forma canonica di Jordan: osservazioni
 - ▷ Polinomi annullatori e polinomio minimo

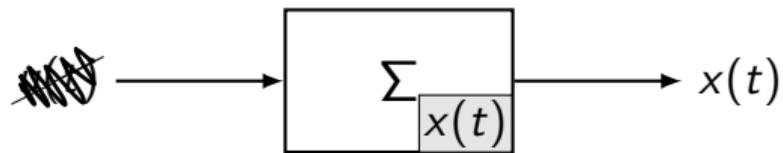
In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
 - ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
 - ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$\underbrace{x(t) = e^{Ft}x_0}_{}$$

Usiamo Jordan!

$$F_J = T^{-1} F T$$

$$1. \quad F = T F_J T^{-1} \implies e^{Ft} = \underbrace{T e^{F_J} T^{-1}}$$

Usiamo Jordan!

$$1. \quad F = T F_J T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$$

$$2. \quad F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array} \right] \implies e^{F_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array} \right]$$

Usiamo Jordan!

$$1. \quad F = T F_J T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$$

$$2. \quad F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{bmatrix} \implies e^{F_J t} = \begin{bmatrix} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{bmatrix}$$

$$3. \quad J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{bmatrix} \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \begin{bmatrix} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_i,\ell_i} t} \end{bmatrix}$$

Usiamo Jordan!

quasi-diagonale

$$4. J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}}$$

$$\Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Usiamo Jordan!

$$4. J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t}$ = modi elementari del sistema

Modi elementari: osservazioni

$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t}$ = modi elementari del sistema

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

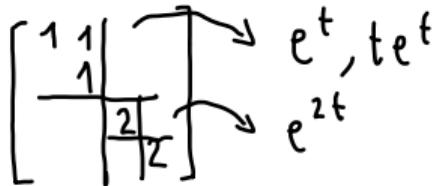
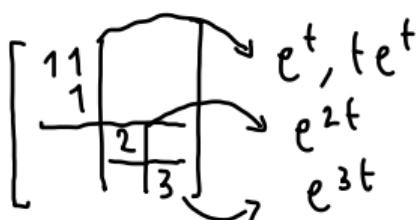
1. Numero di modi distinti associati a $\lambda_i = \dim.$ del più grande miniblocco in J_{λ_i}
 $= \textcolor{red}{h_i}$ = molteplicità di λ_i nel pol. minimo

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a $\lambda_i = \dim.$ del più grande miniblocco in J_{λ_i}
= h_i = molteplicità di λ_i nel pol. minimo

2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)
quando F ha un unico miniblocco per ogni autovalore (F ciclica)



Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a $\lambda_i = \dim.$ del più grande miniblocco in J_{λ_i}
 $= h_i =$ molteplicità di λ_i nel pol. minimo
2. Numero di modi distinti complessivi $= n$ ($\dim.$ di F)
quando F ha un unico miniblocco per ogni autovalore (F ciclica)
3. F diagonalizzabile \implies modi elementari $= \underbrace{e^{\lambda_i t}}_{(\text{esponenziali puri})}$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a $\lambda_i = \dim.$ del più grande miniblocco in $J_{\lambda_i} = h_i =$ molteplicità di λ_i nel pol. minimo
2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)
quando F ha un unico miniblocco per ogni autovalore (F ciclica)
3. F diagonalizzabile \implies modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)
4. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \bar{\lambda}$ autovalore \Rightarrow modi reali $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t), t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$
 $\hookrightarrow \sigma + i\omega$

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \quad x(0) = x_0$$

$$\underbrace{y(t) = Hx(t) + Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = \underbrace{\left(He^{Ft}\right)}_{\textcircled{H}} \underbrace{\left(x_0\right)}_{\textcircled{x_0}} = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

= combinazione lineare di vettori contenenti
i modi elementari!

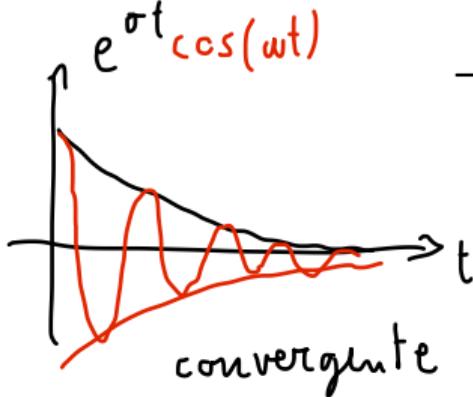
In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
 - ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

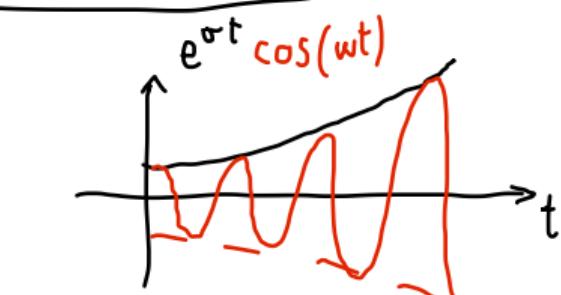
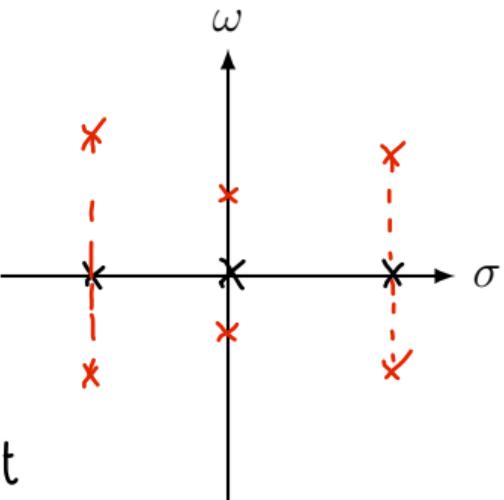
Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$

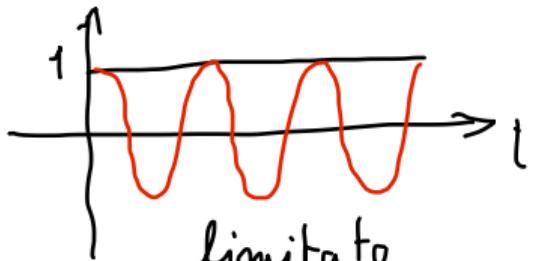
$$| k_i = 0 |$$



convergente



divergente



limitato

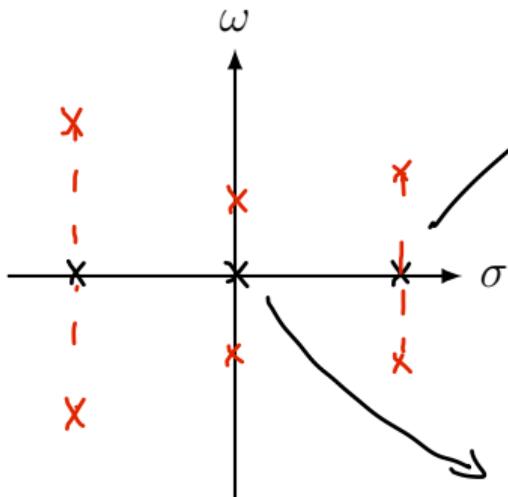
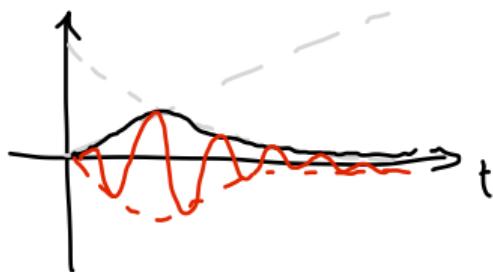
Carattere dei modi elementari

$k_i \neq 0$

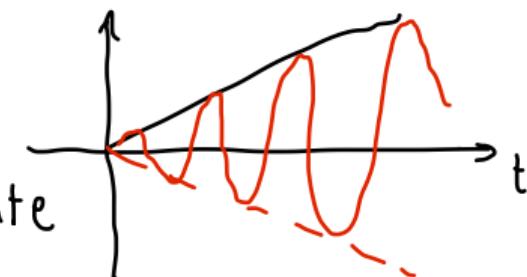
$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$

$$k_i = 1$$

convergente



divergente

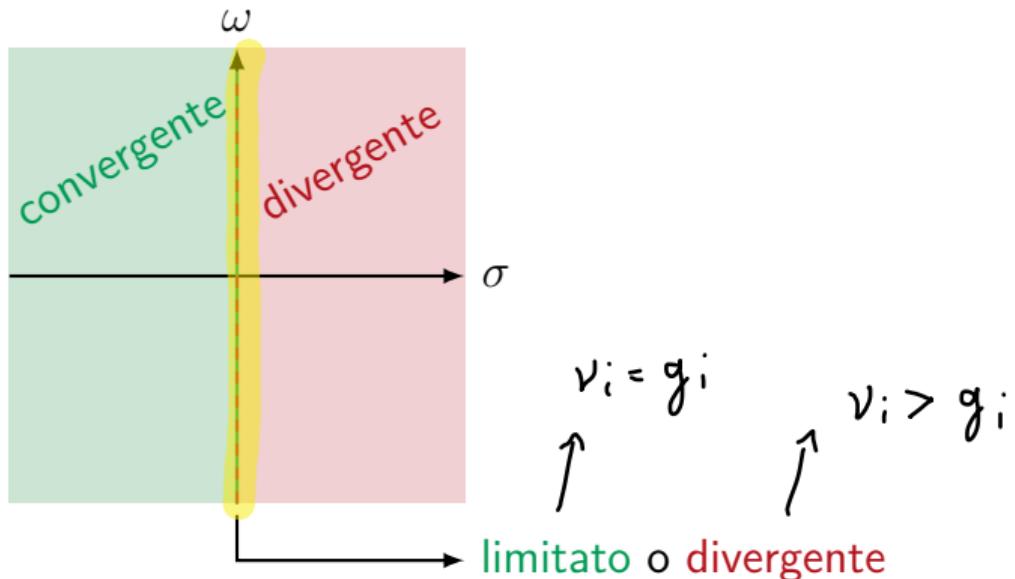


divergente

October 21, 2019

Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\forall t, x_0$$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \iff e^{Ft} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \iff e^{Ft} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{array}{lcl} \Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0 \end{array} \iff e^{Ft} \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{\text{limitata}}$$

Comportamento asintotico

extra

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \iff e^{Ft} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{array}{lcl} \Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0 \end{array} \iff e^{Ft} \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata}$$

$$\begin{array}{lcl} \exists \lambda_i \text{ tale che } \Re[\lambda_i] > 0 \\ \text{o } \Re[\lambda_i] = 0 \text{ e } \nu_i > g_i \end{array} \iff e^{Ft} \text{ non limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 ?$$

In questa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica

▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Evoluzione forzata

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \textcircled{Gu(t)}, \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + \textcircled{Ju(t)}$$

sorapposizione degli effetti



$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \quad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \quad x_f(t) ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \quad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \quad y_f(t) ??$$

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau) d\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

extra

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

extra

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

$$X(s) = \underbrace{(sl - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sl - F)^{-1}G}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sl - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sl - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento
2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1}$ = metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $\underline{z} \triangleq \underline{T}^{-1}\underline{x}$ dove $\underline{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sl - F')^{-1}G' + J' = H(sl - F)^{-1}G + J = W(s) !!$$

Struttura della matrice di trasferimento

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ = base di Jordan

Struttura della matrice di trasferimento

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ = base di Jordan

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

Struttura della matrice di trasferimento

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ = base di Jordan

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sl - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|cc|cc} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right]$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} W(s) &= H_{\lambda_1,1}(sI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(sI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,\ell_k}(sI - J_{\lambda_k,\ell_k})^{-1}G_{\lambda_k,\ell_k} + J \\ &= \underbrace{W_{\lambda_1,1}(s)}_{\text{circled}} + W_{\lambda_1,2}(s) + \cdots + W_{\lambda_k,\ell_k}(s) + J \end{aligned}$$

Struttura della matrice di trasferimento

extra

matrici

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s - \lambda_i} + \frac{A_2}{(s - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s - \lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s) U(s) + JU(s) \right]$$

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
 - ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
 - ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

extra

$$\underbrace{\mathcal{L}[e^{Ft}]}_{(sl - F)^{-1}} = (sl - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}[(sl - F)^{-1}]$$

Esempio: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

extra

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sl - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}[(sl - F)^{-1}]$$

Esempio: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

Condizioni “pratiche” su ciclicità e polinomio minimo

extra

1. F ciclica \iff non ci sono semplificazioni tra num. e den. nel calcolo di

$$(sl - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sl - F)}{\det(sl - F)}$$

2. $\Psi_F(s) =$ polinomio a den. in $(sl - F)^{-1}$, dopo tutte le possibili semplificazioni

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

- ✉ baggio@dei.unipd.it
- 🌐 baggiogi.github.io

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_f(t) + x_r(t), \quad x_r(t) = e^{Ft}x_0, \quad x_f(t) ??$$

$$y(t) = y_f(t) + y_r(t), \quad y_r(t) = He^{Ft}x_0, \quad y_f(t) ??$$

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) ? \quad y(t) ?$$

Fatto: $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e^{Ft} è invertibile e $(e^{Ft})^{-1} = e^{-Ft}$.

$$e^{-Ft} \dot{x}(t) = e^{-Ft} Fx(t) + e^{-Ft} Gu(t)$$

$$e^{-Ft} (\dot{x}(t) - Fx(t)) = e^{-Ft} Gu(t) \quad \left| \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A \right.$$

$$\frac{d}{dt} (e^{-Ft} x(t)) = e^{-Ft} Gu(t)$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{-F\tau} x(\tau) \right) d\tau = \int_0^t e^{-F\tau} G u(\tau) d\tau$$

$$e^{-Ft} x(t) - \underbrace{e^{-F \cdot 0}}_{I} x(0) = \int_0^t e^{-F\tau} G u(\tau) d\tau$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft} x_0}_{x_e(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau}_{x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{H e^{Ft} x_0}_{y_e(t)} + \underbrace{\int_0^t H e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau}_{y_f(t)} + J u(t)$$

$$y_f(t) = \int_0^t [H e^{F(t-\tau)} G + J \delta(t-\tau)] u(\tau) d\tau$$

delta di Dirac

$$= [w * u](t)$$

$$w(t) = H e^{Ft} G + J \delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] \stackrel{\Delta}{=} \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

Proprietà: $\mathcal{L}[\dot{v}(t)] = sV(s) - v(0)$

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) + JU(s) \end{cases}$$

$X_e(s)$ $X_f(s)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X(s) = (sI - F)^{-1} x_0 + (sI - F)^{-1} G U(s) \\ Y(s) = \underbrace{H(sI - F)^{-1} x_0}_Y + \underbrace{H(sI - F)^{-1} G U(s)}_W + J U(s) \end{array} \right.$$

$Y_e(s)$ $W(s)$ $Y_f(s)$

$$\begin{aligned} 1. \quad Y_f(s) &= \mathcal{L}[y_f(t)] = [H(sI - F)^{-1} G + J] U(s) \\ &= \mathcal{L}[w * u(t)] \end{aligned}$$

$W(s)$ = matrice di trasferimento

$$2. \quad X_e(s) = \mathcal{L}[x_e(t)] = \mathcal{L}[e^{Ft} x_0] = (sI - F)^{-1} x_0$$

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1}$$

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t)\end{aligned}$$

$$z = T^{-1}x \Rightarrow x = Tz$$

$$\begin{cases} \dot{T}z = FTz + Gu \\ y = Hz + Ju \end{cases} \quad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}FTz + T^{-1}Gu \\ y = HTz + Ju \end{cases} \quad z(0) = T^{-1}x_0$$

algebricamente
equivalenti

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$\begin{aligned}
 W'(s) &= H' (sI - F')^{-1} G' + J' \\
 &\stackrel{|}{=} HT(sI - T^{-1}FT)^{-1} T^{-1}G + J \\
 &\stackrel{|}{=} HT(T^{-1}(sI - F)T)^{-1} T^{-1}G + J \\
 &\stackrel{|}{=} H \cancel{T} \cancel{T}^{-1} (sI - F)^{-1} \cancel{T} \cancel{T}^{-1} G + J \\
 &= W(s)
 \end{aligned}$$

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s - \lambda_i} + \frac{A_2}{(s - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{A_{r_i}}{(s - \lambda_i)^{r_i}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s) U(s) + JU(s) \right]$$

$$W_{\lambda_i,j}(s) = H_{\lambda_i,j} \underbrace{(sI - J_{\lambda_i,j})^{-1}}_{\sim} G_{\lambda_i,j}$$

$$J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$(sI - J_{\lambda_i,j})^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$$

$$J_{\lambda_i,j} = \lambda_i I + N \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$((s - \lambda_i)I - N)^{-1} = L$$

$$L \stackrel{\Delta}{=} \frac{I}{s - \lambda_i} + \frac{N}{(s - \lambda_i)^2} + \frac{N^2}{(s - \lambda_i)^3}$$

$$(sI - J_{\alpha, i}) L = I$$

$$((s - \lambda_i)I - N) \left(\frac{I}{s - \lambda_i} + \frac{N}{(s - \lambda_i)^2} + \frac{N^2}{(s - \lambda_i)^3} \right)$$

$$I - \cancel{\frac{N}{s - \lambda_i}} + \cancel{\frac{N}{s - \lambda_i}} - \cancel{\frac{N^2}{(s - \lambda_i)^2}} + \cancel{\frac{N^2}{(s - \lambda_i)^2}} - \cancel{\frac{N^3}{(s - \lambda_i)^3}} = I$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{s - \lambda_i} & \frac{1}{(s - \lambda_i)^2} & \frac{1}{(s - \lambda_i)^3} \\ \frac{1}{s - \lambda_i} & \frac{1}{(s - \lambda_i)^2} & \frac{1}{(s - \lambda_i)^3} \\ \frac{1}{s - \lambda_i} & \frac{1}{(s - \lambda_i)^2} & \frac{1}{(s - \lambda_i)^3} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sl - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}[(sl - F)^{-1}]$$

Esempio: $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - F)^{-1}]$$

$$(sI - F)^{-1} = \begin{bmatrix} s & +1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\text{inversa}} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{-1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

1. F ciclica \iff non ci sono semplificazioni tra num. e den. in $\frac{\text{adj}(sl - F)}{\det(sl - F)}$

2. $\Psi_F(s) = \text{polinomio a den. in } \frac{\text{adj}(sl - F)}{\det(sl - F)}$, dopo tutte le possibili semplificazioni

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F non ciclica

$$(sI - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)} = \frac{\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}}{(s-1)^2}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(s-1) = \Psi_F(s)$$

$$(sI - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)} = \frac{\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}}{(s-1)^2}$$

F ciclica