

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

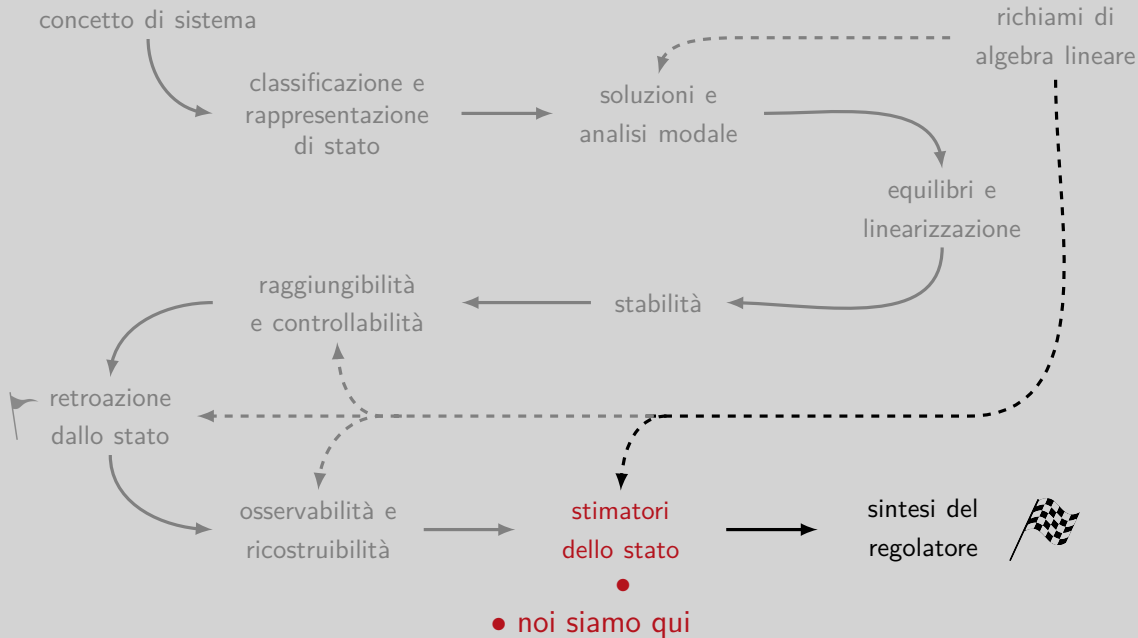
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 20: Dualità e stimatori dello stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



Nella scorsa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.

In questa lezione

- ▷ Sistema duale e sue proprietà
- ▷ Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- ▷ Stimatori dello stato
- ▷ Rivelabilità

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, H, G)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
 p uscite
 n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
 m uscite
 n stati

N.B. Qui consideriamo sistemi a t.d. ma tutto si applica a t.c.!

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
 m uscite
 n stati

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} H^\top & F^\top H^\top & \cdots & (F^\top)^{n-1} H^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ FH \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{O}^\top$$

Σ_d raggiungibile
 \Updownarrow
 Σ osservabile

$$\text{Im}((F^\top)^n) \subseteq \text{Im} \mathcal{R}_d \iff \ker(F^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$$

Σ_d controllabile
 \Updownarrow
 Σ ricostruibile

Sistema duale: osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d: \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
 m uscite
 n stati

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^\top \\ G^\top F^\top \\ \vdots \\ G^\top (F^\top)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$$

Σ_d osservabile



Σ raggiungibile

$$\ker((F^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \text{Im}(F^n) \subseteq \text{Im} \mathcal{R}$$

Σ_d ricostruibile



Σ controllabile

Dualità: equivalenza algebrica

$$\begin{array}{ccc} \Sigma = (F, G, H) & \xrightarrow{z = T^{-1}x} & \bar{\Sigma} = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT) \\ \uparrow \text{dualità} & & \uparrow \text{dualità} \\ \Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) & \xrightarrow{z = T^\top x} & \bar{\Sigma}_d = (T^\top F(T^\top)^{-1}, T^\top H^\top, G^\top(T^\top)^{-1}) \end{array}$$

Cambio di base T nel sistema di partenza = cambio di base $(T^\top)^{-1}$ nel sistema duale

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

Σ_d non raggiungibile

Forma di Kalman (di raggiungibilità)

$$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \xrightarrow{z = T_K^{-1}x} \Sigma_{K,d} = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right)$$

dualità

dualità

$$\Sigma = (F, G, H) \xrightarrow{z = T_K^\top x} \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Σ non osservabile

Forma di Kalman di osservabilità
($F_{22}, G_2, 0$) sottosistema non osservabile

Dualità: forma canonica di controllo/osservazione

Σ_d raggiungibile
con singolo ingresso ($p = 1$)

$$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \xrightarrow{z = T_c^{-1}x} \Sigma_{c,d} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, G_{c,1}^\top \right)$$

dualità

$$\Sigma = (F, G, H) \xrightarrow{z = T_c^\top x} \Sigma_o = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, G_{c,1}, [0 \cdots 0 \ 1] \right)$$

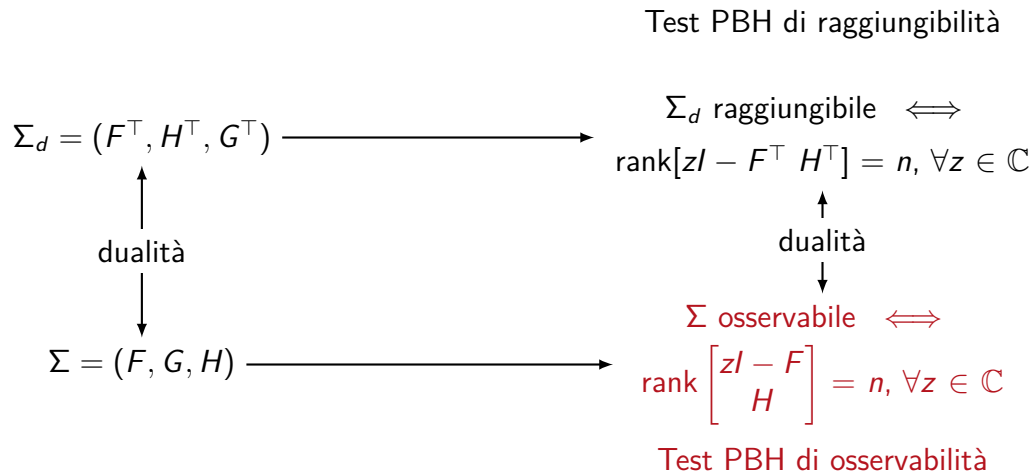
Σ_d osservabile
con singola uscita ($p = 1$)

Forma canonica di controllo

dualità

Forma canonica di osservazione

Dualità: test PBH di raggiungibilità/osservabilità



Proprietà equivalenti all'osservabilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
 p uscite
 n stati

Teorema: Il sistema Σ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale Σ_d è raggiungibile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \forall z \in \mathbb{C}$.
4. gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
 p uscite
 n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

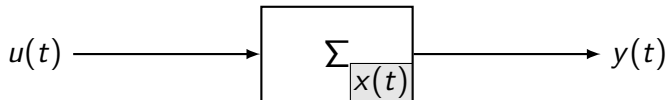
1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.
4. esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

N.B. Parlare di ricostruibilità ha “senso” solo a t.d.!

Il problema della stima dello stato

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
 p uscite
 n stati



Assunzione: lo stato $x(t)$ non è direttamente accessibile

Problema: costruire una “buona” stima $\hat{x}(t)$ di $x(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

Stimatori a catena aperta

$$\Sigma: \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

stimatore a catena aperta

$$\hat{\Sigma}: \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= H\hat{x}(t) \end{aligned}$$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

errore di stima $e(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ se F è instabile !!!

Stimatori a catena chiusa

$$\Sigma: \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

stimatore a catena chiusa

$$\hat{\Sigma}: \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= H\hat{x}(t) \end{aligned}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ = guadagno dello stimatore

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

errore di stima $e(t)$ tende a zero se $F + LH$ è asintoticamente stabile (e in questo caso F può anche essere instabile) !!!

Stimatori a catena chiusa: osservazioni

1. Per quanto visto prima, se il sistema è osservabile allora è sempre possibile calcolare un guadagno L in grado di rendere $F + LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare le tecniche di allocazione degli autovalori viste per il controllo in retroazione in questo caso **applicare al sistema duale**!
2. Se tutti gli autovalori di $F + LH$ vengono allocati in zero abbiamo costruito uno **stimatore dead-beat** !
3. Gli estimatori che abbiamo visto sono detti di **stimatori di ordine intero** perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire **stimatori di ordine ridotto** che stimano solo la parte “veramente incognita” dello stato.
4. Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat.

Il sistema è osservabile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \text{ ingressi} \\ p \text{ uscite} \\ n \text{ stati} \end{array}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con modulo minore di 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo minore di 1.
5. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n , $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Rivelabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \text{ ingressi} \\ p \text{ uscite} \\ n \text{ stati} \end{array}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile in tempo finito se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende a zero in tempo finito.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile in tempo finito.
2. Σ ammette uno stimatore dead-beat.
3. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile in tempo finito.
4. Σ è ricostruibile.
5. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori nulli.
6. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n , $\forall z$ con $z \neq 0$.

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} m \text{ ingressi} \\ p \text{ uscite} \\ n \text{ stati} \end{array}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato a catena chiusa il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con parte reale minore di 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale minore di 1.
5. La matrice PBH $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n , $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Discutere la rivelabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Il sistema è rivelabile se $|\alpha| < 1$ (rivelabile in tempo finito se $\alpha = 0$).