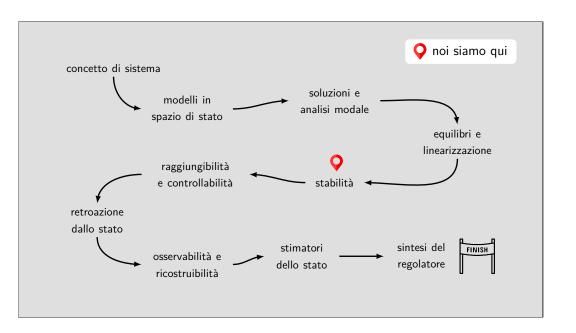
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020-2021



#### In questa lezione

- ▶ Teorema di Krasowskii
- ▶ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▶ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.c.
- ▶ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.d.

#### Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$
 equilibrio

 $\dot{z} = Fz$ , sistema linearizzato attorno a  $\bar{x}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  autovalori di F

- **1.** Se  $\Re[\lambda_i] < 0$ ,  $\forall i \implies \bar{x}$  asintoticamente stabile
- **2.** Se  $\exists i$  tale che  $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$  instabile
- **3.** Se  $\Re[\lambda_i] \leq 0$ ,  $\forall i$ , e  $\exists i$  tale che  $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$  caso critico!

Con una funzione di Lyapunov V(x): 3.1.  $\dot{V}(x)$  semidef. neg.  $\Rightarrow \bar{x}$  sempl. stabile

**3.2.**  $\dot{V}(x)$  def. neg.  $\Rightarrow \bar{x}$  asint. stabile

# Teorema di Krasowskii (t.c.)

Se abbiamo una V(x) con  $\dot{V}(x)$  semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di  $\bar{x}$ ?

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno  $\mathcal I$  di  $\bar x$  tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale  $x(t) = \bar{x}, \forall t$ ) che sia interamente contenuta in  $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ , allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile. Altrimenti,  $\bar{x}$  è semplicemente stabile.

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin

18 Marzo 2021 5 / 23

# Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

**1.** Oscillatore armonico (m = k = 1):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1,x_2)=0$$
, semidef. neg.

$$\mathcal{N}=\mathbb{R}^2$$

 $\implies \bar{x} = 0$  semplicemente stabile

# Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

**2.** Oscillatore armonico smorzato ( $m = k = \nu = 1$ ):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1,x_2)=rac{1}{2}x_1^2+rac{1}{2}x_2^2$$
  $\dot{V}(x_1,x_2)=-x_2^2$ , semidef. neg. 
$$\mathcal{N}=\{x_1=\alpha,x_2=0,\alpha\in\mathbb{R}\}$$

 $\implies \bar{x} = 0$  as into ticamente stabile

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021 7 / 23

# Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

**3.** Pendolo semplice ( $m = \ell = 1$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1,x_2)=g(1-\cos x_1)+rac12 x_2^2$$
  $\dot V(x_1,x_2)=0$ , semidef. neg.  ${\cal N}={\Bbb R}^2$   $\Longrightarrow \ ar x=0$  semplicemente stabile

# Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

**4.** Pendolo semplice con attrito ( $m = \ell = \nu = 1$ ):

$$egin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} ar{x} = 0$$

$$V(x_1,x_2)=g(1-\cos x_1)+rac{1}{2}x_2^2$$
  $\dot{V}(x_1,x_2)=-x_2^2$ , semidef. neg. 
$$\mathcal{N}=\{x_1=\alpha,x_2=0,\alpha\in\mathbb{R}\}$$

 $\implies \bar{x} = 0$  as into ticamente stabile

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021 9 / 23

# Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

**5.** 
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$$
  $\dot{V}(x_1,x_2)=-2x_1^2(x_1^2+x_2^2)$ , semidef. neg.  $\mathcal{N}=\{x_1=0,x_2=lpha,lpha\in\mathbb{R}\}$ 

 $\implies \bar{x} = 0$  semplicemente stabile

#### Teorema di Krasowskii (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$
 equilibrio

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \Delta V(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno  $\mathcal{I}$  di  $\bar{x}$  tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale  $x(t) = \bar{x}, \forall t$ ) che sia interamente contenuta in  $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ , allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile. Altrimenti,  $\bar{x}$  è semplicemente stabile.

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin

18 Marzo 2021

#### Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^ op \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2 imes 2}, \ TT^ op = I \ ext{tale che } T^ op PT = egin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{V} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1, \lambda_2\} \|y\|^2 \le V(x_1, x_2) \le \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \|y\|^2$$

$$\implies V(x_1,x_2)$$
 (semi)definita positiva  $\iff \lambda_1,\lambda_2 > (\ge) \ 0$ 

#### Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

**Definizione:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica  $(P = P^{\top})$  con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ , si dice (semi)definita positiva se  $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > (\geq)$  0. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo  $P \succ (\succeq)$  0.

**N.B.**  $P = P^{\top}$  (semi)definita positiva  $\implies V(x) = x^{\top}Px$  (semi)definita positiva

**Definizione:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica  $(P = P^{\top})$  con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , si dice (semi)definita negativa se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k < (\leq)$  0. Se P è (semi)definita negativa, scriviamo  $P \prec (\preceq)$  0.

**Definizione:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica  $(P = P^{\top})$  si dice indefinita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021

13 / 23

#### Test di Sylvester

**Fatto:** Una matrice  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simmetrica  $(P = P^{\top})$  è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

#### Esempi:

**1.** 
$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies P$$
 definita positiva

**2.** 
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \implies P$$
 semidefinita negativa

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021

14 / 23

# Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

 $\dot{x}(t) = Fx(t)$ , equilibrio  $\bar{x} = 0$ 

Consideriamo la forma quadratica:  $V(x) = x^T P x$ ,  $P \succ 0$ 

Come scegliere P affinchè V(x) sia una funzione di Lyapunov per il sistema  $\ref{eq:property}$ 

Per il teorema di Lyapunov:  $\dot{V}(x)$  deve essere (semi)definita negativa !!

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021 15

#### Sistemi lineari e teorema di Lyapunov (t.c.)

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^{\top} P x + x^{\top} P \dot{x} = x^{\top} F^{\top} P x + x^{\top} P F x = x^{\top} (F^{\top} P + P F) x \text{ semidef. neg.}$$

$$\implies F^{\top} P + P F = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad \text{(Equazione di Lyapunov a t.c.)}$$

**Teorema:** Dato un sistema  $\dot{x} = Fx$  e una matrice P > 0:

- **1** Se  $F^{\top}P + PF = -Q$  con  $Q \succeq 0$  allora il sistema è semplicemente stabile.
- **2** Se  $F^{\top}P + PF = -Q$  con Q > 0 allora il sistema è asintoticamente stabile.

# Esempi

**1.** 
$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$
,  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^{T}P + PF)$  definita positiva

**2.** 
$$F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
,  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^{T}P + PF)$  indefinita

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021

17 / 23

### Equazione di Lyapunov (t.c.)

Come scegliere P affinchè V(x) sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

**Teorema:** Dato un sistema  $\dot{x} = Fx$  asintoticamente stabile, per ogni  $Q \succ 0$  esiste un'unica matrice  $P \succ 0$  tale che

$$F^{\top}P + PF = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \int_0^\infty e^{F^\top t} Q e^{Ft} dt.$$

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021

# Esempi

**1.** 
$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$
,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  definita positiva

**2.** 
$$F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$  definita positiva

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin

18 Marzo 2021 19 /

#### Test per la stabilità asintotica di sistemi lineari a t.c.

- **1.** Fissare una  $Q \succ 0$  (presa a caso)
- **2.** Risolvere il sistema di equazioni lineari  $F^{T}P + PF = -Q$ 
  - **2.1** Se il sistema non ammette soluzioni o ne ammette infinite allora il sistema **non è** asintoticamente stabile
  - 2.2 Se il sistema ammette un'unica soluzione allora:
    - **2.2.1** Se P > 0 allora il sistema  $\hat{\mathbf{e}}$  asintoticamente stabile
    - **2.2.2** Se  $P \not\succ 0$  allora il sistema **non è** asintoticamente stabile

#### Osservazioni

- 1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.
- **2.** La condizione  $P \succ 0$  (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare al stabilità asintotica e non può essere sostituita con  $P \succeq 0$ .
- 3. Il test è vantaggioso da un punto di vista computazionale. Infatti permette di decidere circa la stabilità asintotica (o meno) del sistema evitando completamente il calcolo esplicito degli autovalori di F (spesso impraticabile per dimensioni n > 2)!!

G. Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin

18 Marzo 2021 21 / 23

### Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.d.)

$$x(t+1) = Fx(t)$$
, equilibrio  $\bar{x} = 0$ 

Consideriamo la forma quadratica:  $V(x) = x^{T}Px$ , P > 0

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = x^{\top}(t+1)Px(t+1) - x^{\top}(t)Px(t)$$

$$= x^{\top} (F^{\top} PF - P)x$$
 semidef. neg.

$$\implies F^{\top}PF - P = -Q, \quad Q \succeq 0$$
 (Equazione di Lyapunov a t.d.)

# Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

**Teorema:** Dato un sistema x(t+1) = Fx(t) e una matrice  $P \succ 0$ :

- **1** Se  $F^{\top}PF P = -Q$  con  $Q \succeq 0$  allora il sistema è semplicemente stabile.
- **2** Se  $F^{\top}PF P = -Q$  con  $Q \succ 0$  allora il sistema è asintoticamente stabile.

**Teorema:** Dato un sistema x(t+1) = Fx(t) asintoticamente stabile, per ogni Q > 0 esiste un'unica matrice P > 0 tale che

$$F^{\top}PF - P = -Q$$
.

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} (F^{\top})^t Q F^t.$$

G. Baggio Lez. 11: Teorema di Krasowskii e Lyapunov per sis. lin.

18 Marzo 2021 23