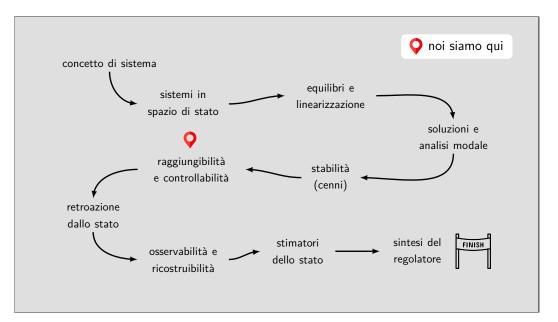
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a tempo continuo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2021-2022



-		

In questa lezione

- ▶ Raggiungibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▶ Controllabilità di sistemi lineari a t.c.

Raggiungibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \ x(0) = 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \sum x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x^* = x(t) = \int_0^t e^{F(t- au)} Gu(au) d au$$

Insieme di stati x^* raggiungibili al tempo t a partire da x(0) = 0?

Quando possiamo raggiungere tutti i possibili stati $x^* \in \mathbb{R}^n$?

Criterio di raggiungibilità del rango

 $X_R(t)$ = spazio raggiungibile al tempo t X_R = (massimo) spazio raggiungibile

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) raggiungibile se $X_R = \mathbb{R}^n$.

 $\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_n = \text{matrice di raggiungibilità del sistema}$ (Matlab[®] ctrb(sys))

 Σ raggiungibile \iff im $(\mathcal{R}) = \mathbb{R}^n \iff$ rank $(\mathcal{R}) = n$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n$ per ogni t > 0!!

G. Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

24 Marzo 2022

Osservazioni

Molti dei risultati sulla raggiungibilità a t.d. valgono anche a t.c. !

- **1.** X_R è F-invariante e contiene im(G)
- 2. Forma canonica di Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1}x, \ F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \ G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Criterio PBH:

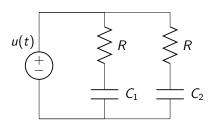
$$\Sigma \ \text{raggiungibile} \ \Longleftrightarrow \ \text{rank} \left[zI - F \quad G \right] = n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

G. Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

24 Marzo 2022

Esempio



$$x_1(t) = v_{C_1}(t), x_2(t) = v_{C_2}(t)$$

 $x_1(0) = x_2(0) = 0$

Σ raggiungibile ?

Se $C_1 = C_2$, Σ non raggiungibile

Se $C_1 \neq C_2$, Σ raggiungibile!

G. Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

24 Marzo 2022

Controllabilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \sum x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau$$

Insieme di stati x_0 controllabili al tempo t allo stato x(t) = 0?

Quando possiamo controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

G. Baggio

Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a t.c.

24 Marzo 2022

${\sf Controllabilit\grave{a}=raggiungibilit\grave{a}}$

$X_C = (\text{massimo}) \text{ spazio controllabile}$ $\text{Definizione: Un sistema } \Sigma \text{ a t.c. si dice (completamente) controllabile se } X_C = \mathbb{R}^n.$ $x_0 \in X_C(t) \iff e^{f_0}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-f_0}X_R \iff x_0 \in X_R$ $X_C - X_C(t) - X_R$ $\text{controllabilità - raggiungibilità !!}$ $\text{c. Stage} \qquad t.c. it figuraphita controllabilita c. solubilitia e. solub$	$X_C(t) = \text{spazio controllabile al tempo } t$	
$x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R$ $X_C = X_C(t) = X_R$ $\text{controllabilità} = \text{raggiungibilità} !!$	$X_{\mathcal{C}}=$ (massimo) spazio controllabile	
$x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R$ $X_C = X_C(t) = X_R$ $\text{controllabilità} = \text{raggiungibilità} !!$		
$X_C = X_C(t) = X_R$ controllabilità = raggiungibilità !!	Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) controllabile se $X_C = \mathbb{R}^n$.	
$X_C = X_C(t) = X_R$ controllabilità = raggiungibilità !!		
controllabilità = raggiungibilità !!	$x_0 \in X_C(t) \iff e^{Ft}x_0 \in X_R \iff x_0 \in e^{-Ft}X_R \iff x_0 \in X_R$	
controllabilità = raggiungibilità !!	$Y_{-}-Y_{-}(t)=Y_{-}$	
	$\Lambda_C - \Lambda_C(t) - \Lambda_R$	
	controllabilità = raggiungibilità !!	
C. Reggin. Let 16: Reggingblide a controllabilità e s.c. 24 Mares 2022	controllabilità l'aggiungibilità	
G. Baggio Lea 16 Raggiungibika e controllatitia a 1.C. 24 Marco 2022		
	G. Baggio Lez. 16: Raggiungibilità e controllabilità a t.c. 24 Marzo 2022	-
		1