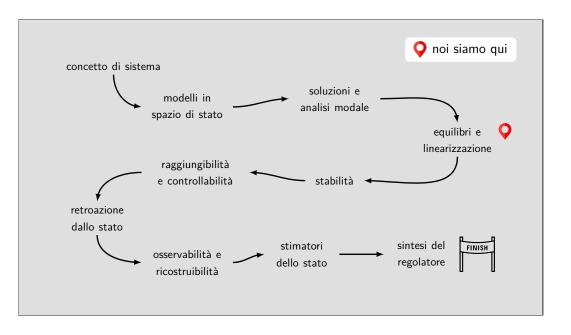
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio Lez. 9: Equilibri e stabilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020-2021



# In questa lezione

- ▶ Traiettorie di stato di un sistema
- ▶ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▶ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▶ Linearizzazione di sistemi non lineari

#### Traiettorie di stato e ritratto di fase

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)

$$x(t+1) = f(x(t)), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)

Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i.  $x(0) = x_0$ :  $\{x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$ 

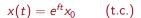
Ritratto di fase del sistema = insieme delle traiettorie di stato  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ 

#### Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n=1

$$\dot{x}(t) = fx(t), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)

$$x(t+1) = fx(t), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)

 $f \in \mathbb{R}$ .



$$x(t) = f^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021 5 / 19

0

#### Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n=2

$$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$
,  $\lambda_1>\lambda_2>0$  o  $\lambda_1<\lambda_2<0$ 

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$
, autovalori  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 

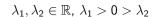
$$x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad (t.c.)$$

$$x(t) = F^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

G. Baggio Lez. 9: Equilibri e stabilità 15 Marzo 2021 6 / 19



#### Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n = 2



$$\dot{x}(t) = Fx(t), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$
, autovalori  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t) = F^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021 7 / 19

#### Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n=2

 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  (complessi coniugati)

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$
, autovalori  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad (t.c.)$$

$$x(t) = F^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021 8 / 19



#### Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n=2

 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  (complessi coniugati)

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)

$$F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$
, autovalori  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad (t.c.)$$

$$x(t) = F^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021 8 / 19

### Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n generico

 $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)  $x(t) = e^{Ft}x_0$ 

$$x(t+1) = Fx(t), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)  $x(t) = F^t x_0$ 

Fatto generale: Una traiettoria x(t) giace su una retta passante per l'origine se e solo se  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  è autovettore di F relativo ad un autovalore reale.

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021 9 / 19

# Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \ t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)  $\bar{x}$  equilibrio  $\iff f(\bar{x}) = 0$ 

$$x(t+1) = f(x(t)), t \in \mathbb{Z}_+$$
 (t.d.)  $\bar{x}$  equilibrio  $\iff \bar{x} = f(\bar{x})$ 

**Definizione:**  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è detto punto di equilibrio del sistema se preso  $x_0 = \bar{x}$ ,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Caso lineare: 
$$\bar{x}$$
 equilibrio  $\iff \frac{\bar{x} \in \ker F}{\bar{x} \in \ker(F - I)}$  (t.c.)

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021

10

### Punti di equilibrio: esempi

**1.** 
$$\dot{x} = x(1-x)$$
  $\Longrightarrow$  due equilibri:  $\bar{x} = 0, 1$ 

**2.** 
$$\dot{x} = x^2 + 1$$
  $\Longrightarrow$  nessun equilibrio

**3.** 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \implies \text{unico equilibrio: } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**4.** 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \implies \text{infiniti equilibri: } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021

11 / 10

#### Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in \mathbb{R}_+$$
 (t.c.)

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (t.d.)$$

$$u(t)$$
 costante,  $u(t) = \bar{u}$ ,  $\forall t \geq 0$ 

caso lineare

 $f(\bar{x},\bar{u})=0$  $F\bar{x} = -G\bar{u}$ 

(t.c.)

 $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$ 

 $(F-I)\bar{x}=-G\bar{u}$ 

(t.d.)

G. Baggio

 $\bar{x}$  equilibrio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021

## Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

**1.** 
$$\dot{x} = \bar{u}, \ \bar{u} \neq 0$$
  $\Longrightarrow$  nessun equilibrio

**2.** 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \implies \text{infiniti equilibri } \bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

nessun equilibrio se 
$$\bar{u} > \frac{1}{4}$$

$$x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \implies \text{un equilibrio } \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ se } \bar{u} = \frac{1}{4}$$

$$\text{due equilibri } \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix} \text{ se } \bar{u} < \frac{1}{4}$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021

# Stabilità semplice

**Definizione:** Un punto di equilibrio  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è detto semplicemente stabile se  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \, \delta > 0 \, \, \mathsf{tale} \, \, \mathsf{che}$ 

$$\|x_0 - \bar{x}\| \le \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \le \varepsilon, \quad \forall t \ge 0.$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021

#### Stabilità asintotica

**Definizione:** Un punto di equilibrio  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è detto asintoticamente stabile se:

- $\bullet$   $\bar{x}$  è semplicemente stabile e
- $m{2}\lim_{t o\infty}x(t)=ar{x}$  per ogni  $x_0\in\mathbb{R}^n$  "sufficientemente vicino" a  $ar{x}$ .

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021 15 / 19

# Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

- 1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  allora si ha stabilità semplice/asintotica globale.
- 2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in  $\bar{x}=0$ .
- **3.** Per sistemi lineari stabilità locale = stabilità globale. Inoltre:
  - stabilità semplice
  - $e^{Ft}$  convergente (t.c.)
  - $F^t$  convergente

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

(t.c.)

(t.d.)

15 Marzo 2021

#### Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x}=f(x),\ t\in\mathbb{R}_{+}$$
 sistema scalare,  $ar{x}\in\mathbb{R}$  punto di equilibrio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots$$
$$\approx f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Sistema linearizzato attorno a  $\bar{x}$ :

$$\dot{z} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} f(\bar{x}) z, \quad z \triangleq x - \bar{x}$$

### Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x}=f(x)=egin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$
,  $t\in\mathbb{R}_+$  sistema  $n$ -dim.,  $ar{x}\in\mathbb{R}^n$  punto di equilibrio Jacobiano di  $f$  valutato in  $x$ 

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots, \quad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato attorno a  $\bar{x}$ :

$$\dot{z} = J_f(\bar{x}) z, \quad z \triangleq x - \bar{x}$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021 1

# Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. 
$$\dot{x} = \sin x$$
  $\ddot{x} = 0$   $\Rightarrow$   $\dot{x} = x$   $\dot{z} = -z, z \triangleq x - \pi$ 

**2.** 
$$\dot{x} = \alpha x^3$$
,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} = 0$   $\Longrightarrow$   $\dot{x} = 0$ 

$$\mathbf{3.} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

G. Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

15 Marzo 2021

19 / 10

