Lezione 9: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + 4\sin^2(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -2\cos^2(x_1(t)) + \frac{1}{2}x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

Si calcolino i punti di equilibrio (se esistono) del sistema al variare dell'ingresso costante $u(t) \equiv \bar{u}$, $\forall t$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) + x_1(t)(1 - \alpha x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1(t)(1 - \alpha x_2(t)) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si calcoli il linearizzato del sistema attorno a $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. Per quali valori di α (se esistono) il sistema linearizzato risulta asintoticamente/semplicemente stabile?

Esercizio 3. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 2x_2^2(t) - x_1(t)u(t) \\ x_2(t+1) = 2x_1(t) - x_2(t)u(t) \end{cases}$$

Si calcolino i punti di equilibrio del sistema (se esistono) al variare dell'ingresso costante $u(t) \equiv \bar{u}$, $\forall t$. Per $\bar{u} = 0$ si calcoli il linearizzato del sistema attorno ai punti di equilibrio trovati (se esistono) e se ne studi la stabilità.

Soluzioni

Esercizio 1. Per $\bar{u} \neq 2$ il sistema non ammette equilibri. Per $\bar{u} = 2$, si hanno infiniti equilibri della forma $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \alpha & -4\sin^2(\alpha) \end{bmatrix}^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sistema linearizzato $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Il sistema linearizzato risulta semplicemente stabile per $\alpha > 1$, mentre non esistono α per cui si ha stabilità asintotica.

Esercizio 3. Per $\bar{u} = -1$ il sistema ammette un unico equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, per $\bar{u} \neq -1$ il sistema ammette, oltre al precedente, un ulteriore equilibrio $\bar{x}' = \begin{bmatrix} \bar{x}'_1 & \bar{x}'_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} (1+\bar{u})^3/4 & (1+\bar{u})^2/2 \end{bmatrix}^\top$. Per $\bar{u} \equiv 0$, il sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$ è $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ (asintoticamente stabile), mentre attorno a $\bar{x}'$, $z(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} z(t)$, $z(t) \triangleq x(t) - \bar{x}'$ (semplicemente stabile).