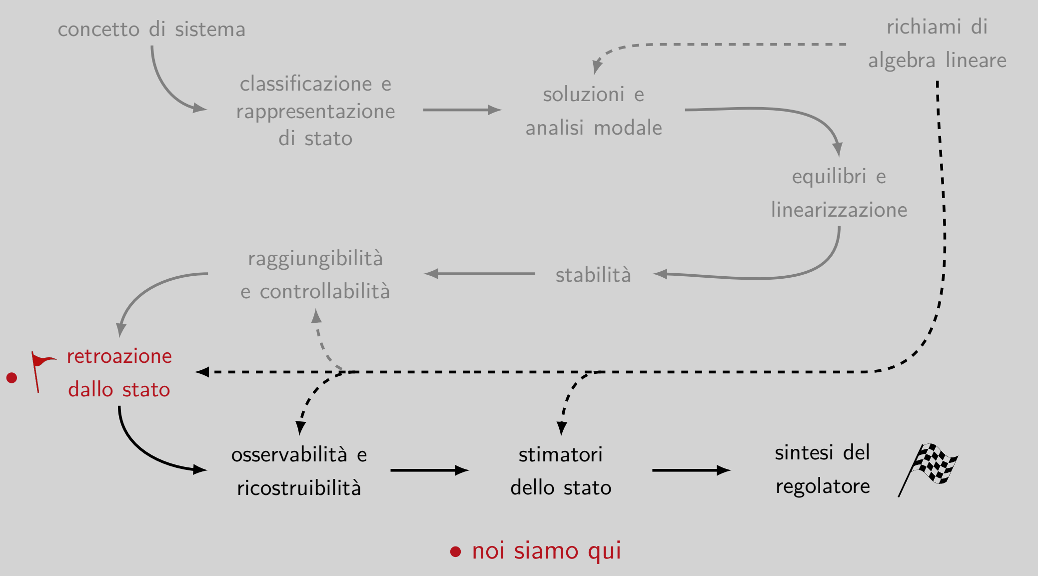
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 16 & 17: Controllo in retroazione dallo stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

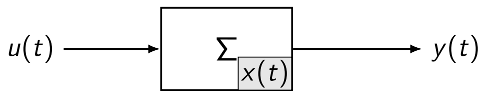


In queste lezioni

- ▷ Il problema del controllo
- ▷ Controllo in retroazione: setup e proprietà
- ▷ Forma canonica di controllo
- ▷ Allocazione degli autovalori: ingresso singolo
- ▷ Allocazione degli autovalori: ingressi multipli
- ▷ Stabilizzabilità

Il problema del controllo

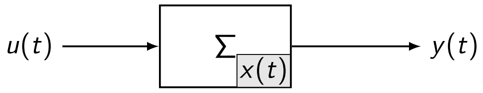
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



Controllo = manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso $u(t)$

Problemi di controllo

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

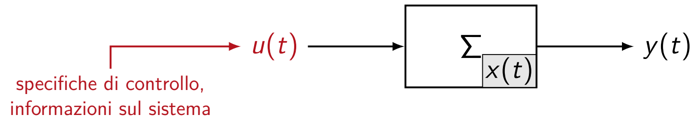


Problema di regolazione:
stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)

Problema di asservimento (tracking):
inseguire un andamento desiderato dell'uscita

Controllo in "catena aperta" o open-loop

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

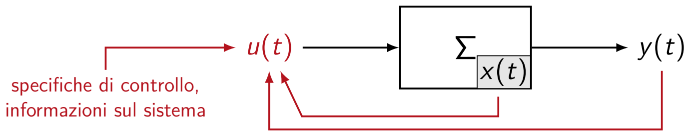


legge di controllo $u(t)$ non dipende dai valori di $x(t)$, $y(t)$

approccio semplice, ma non ideale se il sistema
è incerto e/o soggetto a disturbi esterni!

Controllo in retroazione o feedback

sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$

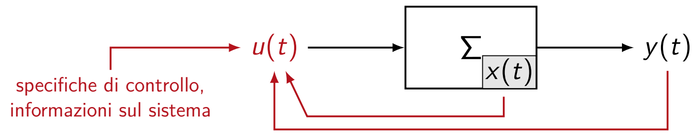


legge di controllo $u(t)$ dipende dai valori di $x(t)$ e/o $y(t)$

approccio più complesso (richiede sensori di misura),
ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni!

Controllo in retroazione o feedback

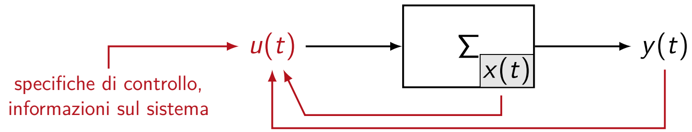
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



1. Retroazione statica
   - dallo stato: $u(t) = f(x(t))$ (allo stesso istante t!)
   - dall'uscita: $u(t) = f(y(t))$ (allo stesso istante t!)

Controllo in retroazione o feedback

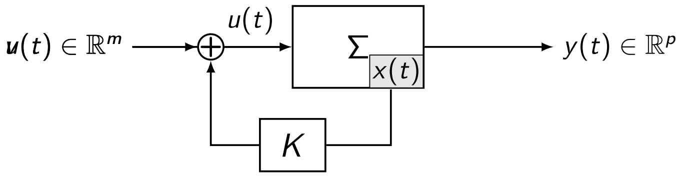
sistema con stato $x(t)$, ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$



2. Retroazione dinamica
   - dallo stato: $u(t) = f(x(\tau)),\ \tau \in [t_0, t]$
   - dall'uscita: $u(t) = f(y(\tau)),\ \tau \in [t_0, t]$

Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

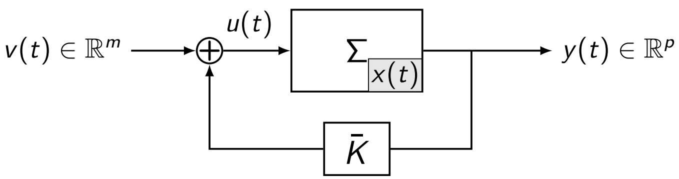
$$x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$u(t) = Kx(t) + v(t),\ K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **retroazione statica dallo stato**

Controllo in retroazione di sistemi lineari: setup

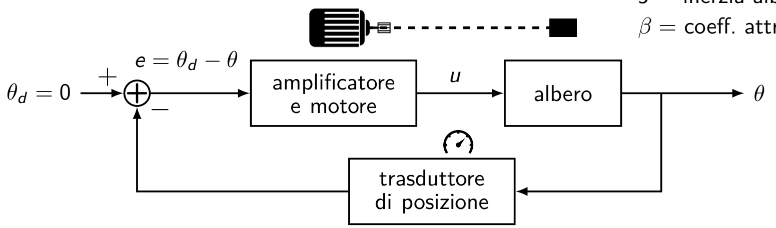
$$x(t+1) = (F + G\bar{K}H)x(t) + Gv(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$u(t) = \bar{K}Hx(t) + v(t),\ \bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ **retroazione statica dall'uscita**

Esempio introduttivo

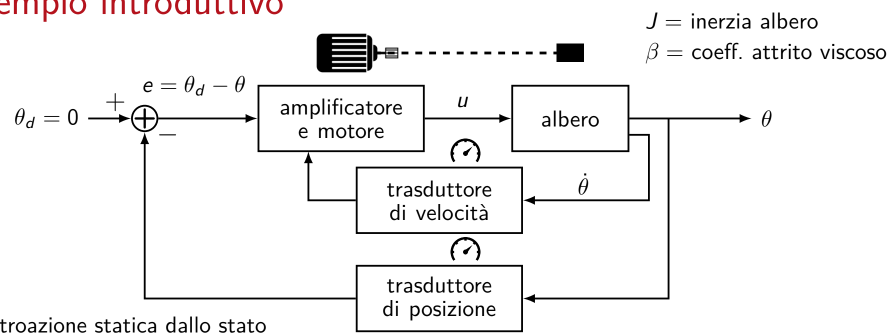
$J =$ inerzia albero
$\beta =$ coeff. attrito viscoso



Retroazione statica dall'uscita

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$
$$u = ke,\ k \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$
$$y = \theta \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Esempio introduttivo



Retroazione statica dallo stato

$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$

$$u = k_1 e + k_2\dot{\theta}, \; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{\beta - k_2}{J} \end{bmatrix} x \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$y = \theta \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Retroazione dallo stato ed equivalenza algebrica

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Come si modificano le matrici del sistema per effetto di un cambio di base T?

$$\bar{F} = T^{-1}FT, \quad \bar{G} = T^{-1}G, \quad \bar{H} = HT, \quad \bar{K} = KT$$

Raggiungibilità del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$X_R(t) =$ spazio di raggiungibilità in t passi di Σ

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F + GK)x(t) + Gv(t)$$

$X_R^{(K)}(t) =$ spazio di raggiungibilità in t passi di $\Sigma^{(K)}$

Teorema: $X_R(t) = X_R^{(K)}(t)$, per ogni scelta della matrice di retroazione $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Σ raggiungibile $\iff$ $\Sigma^{(K)}$ raggiungibile

Forma di Kalman del sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F + GK)x(t) + Gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$F_K \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G_K \triangleq T^{-1}G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_K \triangleq KT = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R(t+1) \\ x_{NR}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Il sottosistema non raggiungibile non è influenzato dalla retroazione !

Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma:\ \ x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

$$\begin{aligned} \Sigma \text{ raggiungibile} &\implies \operatorname{rank}(\mathcal{R}) = n \\ &\implies \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} g & Fg & F^2g & \cdots & F^{n-1}g \end{bmatrix}\right) = n \\ &\implies \{g,\ Fg,\ F^2g,\ \ldots,\ F^{n-1}g\} \text{ base di } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

base ciclica di $\mathbb{R}^n$

Basi cicliche di $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma:\ \ x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Consideriamo il cambio di base $T = \mathcal{R}$

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo

$$\Sigma:\ \ x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

Con un ulteriore cambio di base Q arriviamo alla forma canonica di controllo

$$F_c = Q^{-1}\bar{F}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g_c = Q^{-1}\bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Forma canonica di controllo: osservazioni

$$\Sigma:\ \ x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ (m = 1 = \text{singolo ingresso})$$

1. Σ raggiungibile $\iff$ Σ può essere portato in forma canonica di controllo.

2. Il calcolo della forma di controllo **non** richiede il calcolo esplicito del cambio di base $T_c \triangleq TQ$ ma solo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$.

3. Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_c$ sono le matrici di raggiungibilità del sistema di partenza e del sistema in forma canonica di controllo allora $T_c = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}$.

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\Sigma^{(K)}: \quad x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + gK$ degli autovalori desiderati ?

$\Sigma^{(K)}$ raggiungibile $\Longrightarrow$ trasformiamo il sistema in forma canonica di controllo !

$$F_c = T_c^{-1}FT, \quad g_c = T_c^{-1}g, \quad K_c = KT_c = \begin{bmatrix} k_{1,c} & \cdots & k_{n,c} \end{bmatrix}$$

$$F_c + g_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 + k_{1,c} & -\alpha_1 + k_{2,c} & -\alpha_2 + k_{3,c} & \cdots & -\alpha_{n-1} + k_{n,c} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$)

$$\Delta_{F_c+g_cK_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{n,c})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - k_{2,c})\lambda + (\alpha_0 - k_{1,c})$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 =$ polinomio con autovalori desiderati

1. Siano $k_{1,c}^* \triangleq \alpha_0 - p_0, \ldots, k_{n,c}^* \triangleq \alpha_{n-1} - p_{n-1}$
2. Sia $K_c^* \triangleq \begin{bmatrix} k_{1,c}^* & \cdots & k_{n,c}^* \end{bmatrix}$
3. $K^* \triangleq K_c^* T_c^{-1} =$ matrice di retroazione desiderata !

Allocazione autovalori ($m = 1$): osservazioni

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori a nostro piacimento! L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ (e quindi di $\Sigma^{(K)}$).

2. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) abbiamo costruito un **Dead-Beat Controller (DBC)** !

3. Il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Mentre, Il cambio di base T_c^{-1} per ottenere K^* si può calcolare come $T_c^{-1} = \mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1}$.

4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo.

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Allocazione autovalori ($m = 1$): metodo alternativo

$$\Sigma\colon\ x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \quad g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$
$$\Sigma^{(K)}\colon\ x(t+1) = (F+gK)x(t) + gv(t)$$

$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 =$ polinomio con autovalori desiderati

$$\boxed{\text{Risolvere } \Delta_{F+gK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK) = p(\lambda) \text{ con incognita } K}$$

$$\Downarrow$$

Sistema di equazioni lineari con incognite $k_1, \ldots, k_n$, $K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$ *!*

Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (DBC)?

$$K^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

$$\Sigma^{(K)}: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= (F+gK)x(t) + gv(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Che forma ha la f.d.t. } W(z) \text{ di } \Sigma^{(K)} \text{ ?}}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI - F - gK)^{-1}g = H_c(zI - F_c - g_cK_c)^{-1}g_c \\ &= \frac{\beta_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + (\alpha_{n-1} - k_n)z^n + \cdots + (\alpha_1 - k_2)z + (\alpha_0 - k_1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La funzione modifica solo i poli della funzione di trasferimento !}}$$

Allocazione autovalori ($m > 1$)

$$\Sigma\colon\ x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}$$
$$\Sigma^{(K)}\colon\ x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

$$\boxed{\text{Come fare ad assegnare a } F+GK \text{ degli autovalori desiderati ?}}$$

$$F + GK = F + \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = F + g_1k_1 + \cdots + g_mk_m$$

Idea: Selezionare un singolo ingresso (una sola riga k_i non nulla) ed usare la procedura vista prima ($m = 1$)!

Problema: Il sistema potrebbe **non** essere raggiungibile da un singolo ingresso anche se Σ raggiungibile !!

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Il sistema è raggiungibile? È raggiungibile da un ingresso?

Il sistema è raggiungibile, ma non è raggiungibile da un ingresso.

Allocazione autovalori ($m > 1$): Lemma di Heymann

$$\Sigma: \;\; x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}$$
$$\Sigma^{(K)}: \;\; x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$$

Come fare ad assegnare a $F + GK$ degli autovalori desiderati se Σ **non** è raggiungibile da un ingresso?

Usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso !!

Teorema: Se (F, G) è raggiungibile e se g_i è una colonna non nulla di G, esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile.

Esempio (cont.)

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

K^* tale che il sistema retroazionato abbia autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$?

Prendendo $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ il sistema è raggiungibile dal primo ingresso g_1.

$$K^* = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allocazione autovalori ($m > 1$): osservazioni

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare M.

2. L'approccio appena visto è piuttosto intuitivo ma ha delle limitazioni.

Ad esempio, usando un singolo ingresso si può ottenere un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi non inferiore a n. Con più ingressi invece esistono casi in cui è possibile costruire un DBC che porta a zero lo stato in un numero di passi inferiore a n!

Quindi, usando tecniche più avanzate (che sfruttano la cosiddetta forma canonica di controllo multivariabile) si possono ottenere prestazioni di controllo migliori.

Stabilizzabilità a t.d.

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con modulo minore di 1.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Stabilizzabilità in tempo finito (a t.d.)

$$\Sigma : x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile in tempo finito se esiste un controllo in retroazione dallo stato che porta lo stato del sistema a zero in tempo finito.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile in tempo finito.
2. Σ ammette un DBC.
3. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori nulli.
4. Σ è controllabile (a zero).
5. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $z \neq 0$.

Stabilizzabilità a t.c.

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad n\text{-dimensionale}$$

Definizione: Il sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Il sottosistema non raggiungibile di Σ ha autovalori con parte reale minore di 0.
3. La matrice PBH $[zI - F \;\; G]$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Esempio

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Stabilizzabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Il sistema è stabilizzabile se $\alpha > 0$.