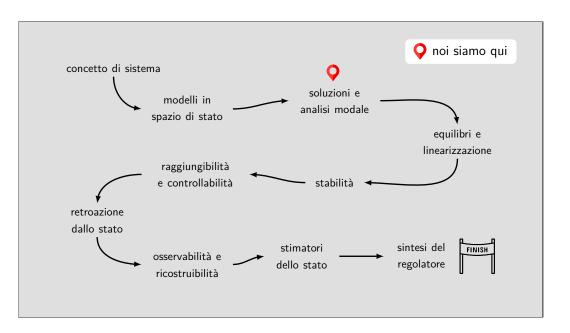
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

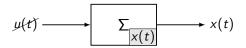
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▶ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▶ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▶ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▶ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t)=e^{Ft}x_0$$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

1.
$$F = TF_J T^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_J} T^{-1}$$

$$\mathbf{2.} \ \ F_{J} = \begin{bmatrix} \frac{J_{\lambda_{1}}}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_{k}} \end{bmatrix} \implies e^{F_{J}t} = \begin{bmatrix} \frac{e^{J_{\lambda_{1}}t}}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_{2}}t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_{k}}t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{3.} \ J_{\lambda_{i}} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{i},1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{i},2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_{i},g_{i}} \end{bmatrix} \implies e^{J_{\lambda_{i}}t} = \begin{bmatrix} e^{J_{\lambda_{i},1}t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_{i},2}t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_{i},g_{i}}t} \end{bmatrix}$$

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021 5 / 19

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

$$\textbf{4.} \ J_{\lambda_{i},j} = \left[\begin{array}{ccccc} \lambda_{i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{i} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{i} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_{i},j}t} = \left[\begin{array}{ccccc} e^{\lambda_{i}t} & te^{\lambda_{i}t} & \frac{t^{2}}{2}e^{\lambda_{i}t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_{i}t} \\ 0 & e^{\lambda_{i}t} & te^{\lambda_{i}t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{t^{2}}{2}e^{\lambda_{i}t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_{i}t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_{i}t} \end{array} \right]$$

$$e^{\lambda_i t}$$
, $te^{\lambda_i t}$, $\frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}$, ..., $\frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t}=$ modi elementari del sistema

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}$$
, $te^{\lambda_i t}$, $\frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t}$, ..., $\frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t}=$ modi elementari del sistema

- 1. Numero di modi *distinti* associati a $\lambda_i = \dim$ del più grande miniblocco in J_{λ_i}
- **2.** Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F) solo quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore!
- **3.** F diagonalizzabile \implies modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)
- **4.** $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \bar{\lambda}$ autovalore \Rightarrow modi reali $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021 7 / 19

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

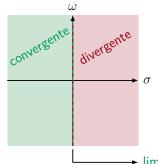
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$y(t) = y_{\ell}(t) = He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

$y(t)=y_\ell(t)=He^{Ft}$	$f(t)=y_\ell(t)=He^{Ft}x_0=\sum_{i,j}t^je^{\lambda_it}v_{ij}$ = combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!		_							
G. Baggio	Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)	10 Marzo 2021	8 / 19	_						

Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C}: t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i\sin(\omega_i t))$$



→ limitato o divergente

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021 9 / 19

Comportamento asintotico

 $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$$
 \iff $e^{Ft} \xrightarrow{t \to \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft} x_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$

$$\Re[\lambda_i] \leq 0, \ \forall i \ \mathrm{e}$$
 $\nu_i = g_i \ \mathrm{se} \ \Re[\lambda_i] = 0$
 $\iff e^{Ft} \ \mathrm{limitata} \ \Rightarrow \ y(t) = He^{Ft} x_0 \ \mathrm{limitata}$

$$\exists \lambda_i \text{ tale che } \Re[\lambda_i] > 0$$

o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $\nu_i > g_i$ \iff e^{Ft} non limitata $\Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0$?

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021 10 / 19

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_{\ell}(t) + x_{f}(t), \qquad x_{\ell}(t) = e^{Ft}x_{0}, \qquad x_{f}(t)$$
 ??

$$y(t) = y_{\ell}(t) + y_{f}(t), \qquad y_{\ell}(t) = He^{Ft}x_{0}, \qquad y_{f}(t)$$
 ??

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=x_f(t)}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_{\ell}(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau}_{=x_{f}(t)}$$
$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_{\ell}(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau)\,d\tau}_{=y_{f}(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) =$$
risposta impulsiva

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021 12 / 19



Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^{-}}^{\infty} v(t)e^{-st}dt$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$X(s) = \underbrace{(sl - F)^{-1}x_0}_{=X_{\ell}(s)} + \underbrace{(sl - F)^{-1}G}_{=X_{\ell}(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI - F)^{-1}x_0}_{=Y_{\ell}(s)} + \underbrace{[H(sI - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_{f}(s)}$$

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021

13 / 10

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1.
$$W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J = \text{matrice di trasferimento}$$

2.
$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} = \text{metodo alternativo per calcolare } e^{Ft}$$
!!

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = Tx_0$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

y(t) = HTz(t) + Ju(t) $(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$ Matrice di trasferimento nella nuova base? $W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) !!$ G. Baggio Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.) 10 Marzo 2021

Struttura della matrice di trasferimento

 $T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \mathsf{base} \; \mathsf{di} \; \mathsf{Jordan}$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021

17 / 19

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_{J} = \begin{bmatrix} \frac{J_{\lambda_{1},1}}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{1},2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_{1},g_{k}} \end{bmatrix}, \quad G_{J} = \begin{bmatrix} \frac{G_{\lambda_{1},1}}{G_{\lambda_{1},2}} \\ \vdots \\ G_{\lambda_{k},g_{k}} \end{bmatrix}, \quad H_{J} = \begin{bmatrix} H_{\lambda_{1},1} \mid H_{\lambda_{1},2} \mid \cdots \mid H_{\lambda_{k},g_{k}} \end{bmatrix}$$

$$W(s) = H_{\lambda_1,1}(sI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(sI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \dots + H_{\lambda_k,g_k}(sI - J_{\lambda_k,g_k})^{-1}G_{\lambda_k,g_k} + J$$

$$= W_{\lambda_1,1}(s) + W_{\lambda_1,2}(s) + \dots + W_{\lambda_k,g_k}(s) + J$$

G. Baggio

Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

10 Marzo 2021

18 / 19

Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s - \lambda_i} + \frac{A_2}{(s - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s - \lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s) U(s) + JU(s)
ight]$$

G. Baggio Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.)

