Esempi di domande di teoria

(aggiornato al 21/12/19)

1. Si derivino le equazioni di un modello di stato di un sistema dinamico lineare, tempo invariante, a tempo discreto con stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$, ingresso $u(t) \in \mathbb{R}^m$, e uscita $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Si classifichi (specificando se il sistema è lineare/non lineare, causale/non causale, tempo variante/tempo invariante, tempo continuo/tempo discreto, etc.) il seguente sistema dinamico

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & e^t \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + u(t+1). \end{aligned}$$

2. Si descriva la proprietà di separazione di un modello di stato. Sia dato un sistema ingresso/uscita in rappresentazione esterna

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 = \beta_0 u(t),$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-1$, e $\beta_0 \in \mathbb{R}$. Si derivi un modello di stato del sistema, illustrandone i passaggi.

3. Sia

$$F = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si derivi al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (illustrandone i passaggi) la forma di dell'esponenziale di matrice e^{Ft}, $t \geq 0$.

4. Si illustri l'utilizzo della forma di Jordan di una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nel calcolo dell'esponenziale di matrice e^{Ft}, $t \geq 0$. Si consideri ora una matrice $F \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$. Sapendo che F ha due autovalori reali e distinti λ_1 e λ_2 con molteplicità algebriche $\nu_1 = 4$ e $\nu_2 = 2$, e molteplicità geometriche $g_1 = 2$, $g_2 = 1$, rispettivamente, si illustrino tutte le possibili forme di Jordan di F.

5. Si dia la definizione di polinomio annullatore e polinomio minimo di una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sapendo che una matrice $F \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ha polinomio caratteristico $\Delta_F(\lambda) = \lambda^6$ e polinomio minimo $\Psi_F(\lambda) = \lambda^3$, si illustrino tutte le possibili forme di Jordan di F.

6. Sia dato il sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t),\\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t),\end{aligned}$$

con $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $J \in \mathbb{R}^{p\times m}$ e stato iniziale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si derivi l'espressione dell'evoluzione forzata dell'uscita del sistema $y_f(t)$, $t \geq 0$, sia nel dominio temporale che nel dominio delle trasformate di Laplace. Se, dato come ingresso un impulso di Dirac $u(t) = \delta(t)$, l'uscita del sistema è della forma $y_f(t) = 3e^{-2t}+2e^{-t}+te^{-t}$, $t \geq 0$, cosa si può dedurre circa la struttura di Jordan di F?

7. Sia dato il sistema lineare tempo invariante

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t),\\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t),\end{aligned}$$

con $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $J \in \mathbb{R}^{p\times m}$ e stato iniziale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, e una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si derivino le equazioni del sistema nella nuova base T. Si considerino le matrici

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad F_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Si dica (giustificando la risposta) quali tra queste matrici corrispondono a matrici di stato di sistemi algebricamente equivalenti.

8. Si dia la definizione di traiettoria di stato, ritratto di fase e punto di equilibrio di un sistema dinamico non lineare autonomo. Si illustri il ritratto di fase del sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix} x(t)$$

al variare di λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Per quali valori di λ_1, λ_2 il sistema ammette infiniti punti di equilibrio?

9. Si dia la definizione di punto di equilibrio semplicemente stabile, asintoticamente stabile e instabile. Si illustri ogni definizione per mezzo di un esempio, utilizzando sistemi **non** lineari.

10. Si illustri l'applicazione del Teorema di stabilità di Lyapunov al caso di sistemi lineari tempo invarianti a tempo continuo $\dot{x}(t) = Fx(t)$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ricorrendo a candidate funzioni di Lyapunov quadratiche della forma $V(x) = x^\top Px$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Data la seguente matrice di stato

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

si dica (giustificando la risposta) quali delle seguenti matrici P_i (se ne esistono) danno origine a delle (vere e proprie) funzioni di Lyapunov $V(x) = x^\top P_i x$ per il sistema:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix},\quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix},\quad P_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}.$$

11. Dato un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto, si dia la definizione di spazio raggiungibile $X_R(t)$ e controllabile $X_C(t)$ in $t \in \mathbb{Z}_+$ passi. Si illustrino le proprietà di questi spazi al variare di $t \in \mathbb{Z}_+$. Si dica (giustificando la risposta) se i seguenti spazi possono corrispondere a spazi raggiungibili e controllabili in un passo di un sistema lineare:

$$X_R(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad X_C(1) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

12. Dato un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto non completamente raggiungibile, si descriva la forma di Kalman di raggiungibilità del sistema, illustrando la costruzione del cambio di base che porta il sistema in questa forma. Dato il seguente sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

si dica (giustificando la risposta) se il sistema è in forma di Kalman di raggiungibilità.

13. Si illustri il criterio PBH di raggiungibilità. Utilizzando questo criterio, si dica (giustificando la risposta) quale è il numero **minimo** di ingressi che rende raggiungibile il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + Gu(t).$$

14. Dato un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),$$

con $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Assumendo il sistema raggiungibile in $\bar{t}$ passi, si derivi (illustrando i passaggi) l'ingresso a minima energia che porta lo stato del sistema da $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $x(\bar{t}) = x_\mathrm{f} \in \mathbb{R}^n$. Dato il sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

si dica se esiste una sequenza d'ingresso che porta il sistema da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ a $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$. In caso di risposta affermativa, si dica (giustificando la risposta) quanti ingressi esistono che svolgono tale compito.

15. Dato un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto raggiungibile con singolo ingresso, si illustri il procedimento di allocazione degli autovalori tramite forma canonica di controllo. Si consideri il seguente sistema

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t).$$

Si dica (giustificando la risposta) se è possibile portare il sistema in forma canonica di controllo e, in caso di risposta affermativa, si riporti la forma canonica di controllo del sistema.

16. Si enunci il Lemma di Heymann e si spieghi come questo risultato possa essere utilizzato per risolvere il problema di allocazione degli autovalori per sistemi raggiungibili con più di un ingresso. Si dica (giustificando la risposta) se il seguente sistema può essere reso raggiungibile dal secondo ingresso utilizzando un'opportuna matrice di pre-retroazione (e si riporti la forma di una tale matrice, se possibile):

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t).$$

17. Si spieghi cos'è un dead-beat controller di un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto. Sotto quali condizioni il sistema ammette un dead-beat controller? (Si illustrino almeno due condizioni). Sia dato il seguente sistema

$$x(t+1) = Fx(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Si riporti (se esiste e, in tal caso, si giustifichi la risposta) una matrice $F \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale per cui il sistema ammette un dead-beat controller che porta a zero lo stato in (esattamente) 2 passi.

18. Si dia la definizione di sistema duale di un sistema lineare tempo invariante a tempo continuo. Si spieghi come l'osservabilità e ricostruibilità del sistema originale si relaziona alla raggiungibilità e controllabilità del sistema duale (riportando i passaggi della derivazione). Può il seguente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} x(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

essere il duale di un sistema stabilizzabile? (Si giustifichi la risposta).

19. Dato un sistema lineare tempo invariante a tempo continuo, si diano le definizioni di stimatore dello stato a catena aperta e a catena chiusa e si illustri come si comporta l'errore di stima nei due casi. Sotto quali condizioni il sistema ammette uno stimatore dello stato con errore di stima che tende asintoticamente a zero? (Si illustrino almeno due condizioni). Sia dato il seguente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Si riportino (se esiste) dei valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali per cui il sistema ammette uno stimatore asintotico dello stato.

20. Si riportino le equazioni dinamiche e la struttura a blocchi del regolatore di un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto. Trasformando opportunamente queste equazioni, si derivi il principio di separazione e si illustrino le conseguenze di questo risultato per la sintesi di un regolatore stabilizzante.