

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

 noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in
spazio di stato

soluzioni e
analisi modale

equilibri e
linearizzazione

raggiungibilità
e controllabilità

stabilità

retroazione
dallo stato

osservabilità e
ricostruibilità

stimatori
dello stato

sintesi del
regolatore



In questa lezione

- ▷ Informazioni sulla prova scritta
- ▷ Simulazione di prova scritta

Prova scritta

▲ Esame in modalità telematica ▲

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C.I.)
Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del ??/?/2021

Istruzioni. Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire tracce dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Fissato $\alpha = 0$, determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ allo stato $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. Fissato $\bar{u} = 0$, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned}$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile X_R e lo spazio non osservabile X_{NO} del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari $(\frac{1}{2})^t$ e $t(\frac{1}{2})^t$.

● Modalità telematica (Zoom + Moodle esami)

● Durata 2 ore

● 3 esercizi sugli argomenti del corso

● 4 punti per esercizio (totale 12 punti)

Prova scritta: istruzioni base

Istruzioni. Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.

- No appunti, libri, formulari
- Si consegna solo la bella copia
- Sì calcolatrici (non programmabili)
- Chiarezza e ordine nello svolgimento!

Prova scritta: struttura degli esercizi

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\alpha = 0$,** determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ allo stato $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Ogni esercizio è diviso in 3 parti (ordine di difficoltà tipicamente crescente)

In questa lezione

- ▷ Informazioni sulla prova scritta
- ▷ Simulazione di prova scritta

Esercizio 1

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\alpha = 0$** , determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$ allo stato $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

note

Esercizio 1: soluzione

$$1. \quad F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha \neq -1 \\ & \text{Modi: } \alpha \neq -1: (\pm \alpha)^t \text{ (conv. se } |\alpha| < 1, \\ & \text{lim. se } \alpha = 1, \text{ div. altrimenti)} \text{ e } (-1)^t \text{ (lim.)} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha = -1 \\ & \text{Modi: } \alpha = -1: 1 \text{ (lim.), } (-1)^t \text{ (lim.), } t(-1)^t \text{ (div.)} \end{cases}$$

2. L'ingresso esiste ed è dato da $u(0) = -2, u(1) = 1$.

3. $x(0) = [0 \ 0 \ \gamma]^\top, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$.

Esercizio 2

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato** $\bar{u} = 0$, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

note

Esercizio 2: soluzione

1. Nessun equilibrio per $\bar{u} < 0$;

Un unico equilibrio $\bar{x} = (0, 0)$ per $\bar{u} = 0$;

Due equilibri $(\pm \sqrt{-\bar{u}/2}, -\bar{u}/2)$ per $\bar{u} > 0$.

2. $\bar{x} = (0, 0)$ equilibrio instabile.

3. $\bar{x} = (0, 0)$ asintoticamente stabile per $k_1 < 0$ e $k_2 < -1$.

Esercizio 3

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) & F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \\y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile X_R e lo spazio non osservabile X_{NO} del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari $(\frac{1}{4})^t$ e $t(\frac{1}{4})^t$.

note

Esercizio 3: soluzione

1. $X_R = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_{NO} = \{0\}.$
2. Il sistema è stabilizzabile con 2 ingressi e rivelabile con 1 uscita (la seconda).
3. Lo stimatore con guadagno $L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ soddisfa i requisiti.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 baggiogi.github.io

Esercizio 1



Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invarianta a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Fissato $\alpha = 0$, determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^T$ allo stato $x(1) = [1 \ 0 \ -1]^T$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

G. Baggio

Lec. 23: Esercizi in preparazione all'esame

14 Aprile 2021

note

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right], \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}$$

1) Forma di Jordan di F , modi elementari e carattere

i) Calcolo autovalori di F :

$$\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{12})$$

$$\lambda(F_{11}): \Delta_{F_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -\alpha \\ -\alpha & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2$$

$$\lambda_{1,1} = \pm \alpha$$

$$\lambda(F) = \{ \pm \alpha, -1 \}$$

Caso $\alpha = \pm 1$: $\lambda_1 = -1, v_1 = 2, \lambda_2 = 1, v_2 = 1, g_2 = 1$

Caso $\alpha \neq \pm 1$: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = +\alpha, \lambda_3 = -\alpha, v_1 = v_2 = v_3 = 1, g_1 = g_2 = g_3 = 1$

ii) Calcolo molteplicità geometriche

Caso $\alpha = -1$:

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Caso $\alpha = +1$:

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

iii) Calcolo di F_J :

modi elementari:

$$F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \alpha = -1 \\ \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix} & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

$(-1)^t \rightarrow$ limitate
 $t(-1)^t \rightarrow$ divergenti
 $1 \rightarrow$ limitate

$\alpha^t \left\{ \begin{array}{ll} |\alpha| < 1 & \text{convergenti} \\ \alpha = 1 & \text{limitati} \\ |\alpha| > 1 & \text{divergenti} \end{array} \right.$
 $(-\alpha)^t \rightarrow$ limitate

Caso $\alpha = 0$: $\lambda_1 = 0$, $v_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $v_2 = 1$

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_1 = 2$$

2) $\underline{\alpha = 0}$: $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, calcolo u ?

i) Esistenza di u . $u_1 = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = F^2 x(0) + R_2 u_2$$

$$\underbrace{x(2) - F^2 x(0)}_{\in \text{im } R_2} \in \text{im } R_2 = X_R(2) = \text{im } [G \quad FG] = \text{im } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \in X_R(2) \Rightarrow \text{ingresso richiesto esiste}$$

ii) Calcola u_2

$$x(2) - F^2 x(0) = R_2 u_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad \begin{cases} u(1) = 1 \\ u(0) = -2 \end{cases}$$

3) $x(0)$ t.c. evoluzione libera di $x(t)$ sia puramente oscillatoria $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$x(t) = F^t x(0) = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}^t x(0)$$

\downarrow
 -1

$$= \begin{bmatrix} F_{11}^t & 0 \\ * & F_{22}^t \end{bmatrix} x(0)$$

\downarrow
 $(-1)^t$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} = (-1)^t v$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0 \Rightarrow x(t) =$$

La condizione iniziale richiesta esiste ed è $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$

Esercizio 2



Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.

2. Fissato $\bar{u} = 0$, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.

3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

G. Baggio

Lec. 23: Esercizi in preparazione all'esame

14 Aprile 2021

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + u = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

1) $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$. Trovare gli equilibri.

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \text{ eq. } \iff \begin{cases} 0 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 \\ 0 = -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 + \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 \longrightarrow \bar{x}_2 = -\frac{\bar{u}}{2} \\ 2\bar{x}_1^2 = \bar{u} \longrightarrow \bar{x}_1^2 = \frac{\bar{u}}{2} \end{cases}$$

Caso $\bar{u} > 0$: $\bar{x}_1 = \pm \sqrt{\frac{\bar{u}}{2}}$, $\bar{x}_2 = -\frac{\bar{u}}{2}$

Due equilibri: $\left(\pm \sqrt{\frac{\bar{u}}{2}}, -\frac{\bar{u}}{2} \right)$

Caso $\bar{u} = 0$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$

Un equilibrio: $(0, 0)$

Caso $\bar{u} < 0$: \nexists equilibri

2) $\bar{u} = 0$, stabilità $\bar{x} = (0, 0)$ utilizzando la linearizzazione

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 1 \\ -2\bar{x}_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovectori di $J_f(\bar{x})$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}[\lambda_2] > 0 \Rightarrow \bar{x}$ instabile per il thm di linearizzazione

$$3) u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

k_1, k_2 t.c. $\bar{x} = (0, 0)$ e' asint. stabile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 = f_{K,1}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 = f_{K,2}(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$J_{f_K}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,k}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_{2,k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2,k}}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 1 \\ -2\bar{x}_1 + k_1 & 1+k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 1+k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{J_{f_K}(\bar{x})}(\lambda) = \det(\lambda I - J_{f_K}(\bar{x})) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -k_1 & \lambda - 1 - k_2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 1 - k_2) - k_1 = \lambda^2 + (-1 - k_2)\lambda - k_1$$

Regola di Cartesio: $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0$, $p_1, p_0 \in \mathbb{R}$

$p(\lambda)$ ha radici con parte reale strett. neg. se e solo se $p_1, p_0 > 0$

$J_{f_K}(\bar{x})$ ha autovalori con parte reale strett. neg. se e solo se

$$\begin{cases} -1 - k_2 > 0 \\ -k_1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 < -1 \\ k_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{per } k_1 < 0, k_2 < -1 \quad \bar{x} = (0, 0) \text{ e}'$$

asint. stabile.

Esercizio 3

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gw(t) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile X_R e lo spazio non osservabile X_{NO} del sistema.
2. Dire se il sistema è (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero minimo di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero minimo di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad scarto chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari $\{\frac{1}{3}\}^T + t\{\frac{1}{3}\}^T$.

G. Baggio

Lec. 23: Esercizi in preparazione all'esame

14 Aprile 2021

$\downarrow g_1$
 $\downarrow g_2$

$$\begin{aligned} F &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & G &= \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] & H &= \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \leftarrow h_1 \\ &= \left[\begin{array}{cc} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{array} \right] & & & & \leftarrow h_2 \\ & & & & \left[\begin{array}{c} G_1 \\ 0 \end{array} \right] & g_{11} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right], \quad g_{21} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

1) X_R, X_{NO} ?

$$X_R = \text{im } R = \text{im } [G \quad FG \quad F^2G]$$

$$X_{NO} = \ker G = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix}$$

(F, G) in forma di Kalman? (F_{11}, G_1) è ragg.?

$$R^{(1)} = [G_1 \quad F_{11}G_1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{bmatrix} \quad \text{rank } R^{(1)} = 2 \Rightarrow (F_{11}, G_1) \text{ è ragg.}$$

$$R = \begin{bmatrix} R^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (F, G)$ in forma di Kalman

$$\text{im } R = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = X_R$$

$\hookrightarrow \text{rank } G = 3 \rightarrow \Sigma \text{ obs}$
 $\rightarrow X_{NO} = \{0\}$

$$X_{NO} = \ker G = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ \vdots & & \end{bmatrix} = \{0\}$$

(Σ osservabile ma non ragg.)

2) $-\Sigma = (F, G, H)$ stabilizzabile, rivelabile?

$X_{N_0} = \{0\} \Rightarrow \Sigma$ osservabile $\Rightarrow \Sigma$ rivelabile

l'unico autovalore non ragg. di Σ è 0 $\Rightarrow \Sigma$ stabilizzabile

- Numero min. di ingressi (colonne di G) tale da rendere Σ stabilizz.?

$\Sigma_1 = (F, g_1)$, Σ_1 è in forma di Kalman? (F_{11}, g_{11}) è ragg.?

$$R_{11} = \begin{bmatrix} g_{11} & F_{11}g_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank } R_{11} = 1 \Rightarrow (F_{11}, g_{11}) \text{ non è ragg.}$$

$\Rightarrow \Sigma_1$ ha un autovalore
non ragg. in 1 o -1

$\Rightarrow \Sigma_1$ non è stabilizz.

$\Sigma_2 = (F, g_2)$, Σ_2 è in forma di Kalman? (F_{11}, g_{21}) è ragg.?

$$R_{21} = \begin{bmatrix} g_{21} & F_{11}g_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{rank } R_{21} = 1 \Rightarrow (F_{11}, g_{21}) \text{ non è ragg.}$$

$\Rightarrow \Sigma_2$ non è stabilizz.

\Rightarrow numero min. di ingressi è 2

- Numero minimo di uscite (righe di H) tale da rendere Σ rivelabile

Test PBH: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$

$$PBH(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow h_1 \quad \leftarrow h_2$$

Matrici $PBH(\lambda_1), PBH(\lambda_2)$
hanno rango 3 se
considerare solo h_2



$$PBH(\lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow h_1 \quad \leftarrow h_2$$

Σ è rivelabile
usando la sola uscita 2



numero min. di uscite $i=1$

3) Stimatore t.c. errore di stima:

- modi convergenti
- modi $\left(\frac{1}{4}\right)^t, t\left(\frac{1}{4}\right)^t$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Autovetori di $F + LH$: $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1}{4}, v_1 = 3, g_1 \leq 2 \\ \lambda_2 = \alpha, v_2 = 1, \lambda_2 = \alpha, v_2 = g_2 = 1, |\alpha| < 1 \end{array} \right.$

polinomio desiderato: $p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 \lambda \quad (\alpha = 0)$

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} \right) \lambda = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda$$

Σ osservabile da una singola uscita?

$\Sigma^{(2)} = (F, h_2)$ osservabile?

$$G = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_2 F \\ h_2 F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{ rank } G = 3 \Rightarrow \Sigma^{(2)} \text{ observable}$$

$$L^* \text{ t.c. } \Delta_{F+L^*h_2}(\lambda) = p(\lambda)$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{F+Lh_2}(\lambda) &= \det(\lambda I - F - Lh_2) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -l_1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 - l_2 & -2 \\ 0 & -l_3 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1 - l_2) - l_1\lambda - 2l_3(\lambda - 1) \\ &= \lambda(\lambda^2 + (-\lambda + 1 - l_2)\lambda + (l_2 - 1)) - l_1\lambda - 2l_3\lambda + 2l_3 \\ &= \lambda^3 + (-l_2)\lambda^2 + (l_2 - 1 - l_1 - 2l_3)\lambda + 2l_3 \stackrel{!}{=} \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -l_2 = -\frac{1}{2} \\ l_2 - 1 - l_1 - 2l_3 = \frac{1}{16} \\ 2l_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 = \frac{1}{2} \\ l_1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \rightarrow l_1 = -\frac{9}{16} \\ l_3 = 0 \end{cases} \quad L^* = \begin{bmatrix} -\frac{9}{16} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F + L^*h_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{9}{16} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{autovectori: } \lambda_1 = \frac{1}{4}, v_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0, v_1 = g_1 = 0$$

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F - L^* h_2) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{9}{16} & 0 \\ -1 & \frac{3}{4} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = 1$$

2

N.B.: Σ è osservabile da 1 uscita allora gli autovalori di $F + LH$ per ogni scelta di L avranno sempre mult. geometrica pari a 1

Guadagno dello stimatore richiesto: $L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$