

STA513 – Analisis Statistika untuk Bisnis, Ekonomi, dan Industri

Semester Ganjil 2020/2021

Pengujian Hipotesis untuk rata-rata dan proporsi

disusun oleh:
Bagus Sartono
bagusco@gmail.com
0852-1523-1823

Prodi Statistika dan Sains Data
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor

2020



IPB University
— Bogor Indonesia —



Apa yang dimaksud hipotesis?

- Hipotesis adalah pernyataan atau klaim terhadap nilai dari parameter:

- rata-rata populasi

teladan: Rata-rata pengeluaran internet per bulan seorang mahasiswa adalah $\mu = 150$ ribu rupiah

- proporsi populasi

teladan: proporsi mahasiswa yang mengakses internet melalui internet rumahan (wifi) adalah $p = 0.34$

- Hipotesis Nol (null hypothesis, H_0)
 - pernyataan mengenai parameter populasi yang akan diuji
 - memuat tanda "=", atau \geq , \leq
 - menyatakan status quo
- Hipotesis Tandingan (alternative hypothesis, H_1)
 - berlawanan dengan H_0
 - Biasanya merupakan pernyataan yang didukung oleh peneliti

teladan:

- rata-rata waktu kerja ASN selama WFH adalah 8 jam ($H_0: \mu = 8$)
- rata-rata waktu kerja ASN selama WFH tidak sama dengan 8 jam ($H_1: \mu \neq 8$)

Proses Pengujian Hipotesis

Pernyataan: rata-rata waktu kerja
ASN selama WFH adalah 8 jam

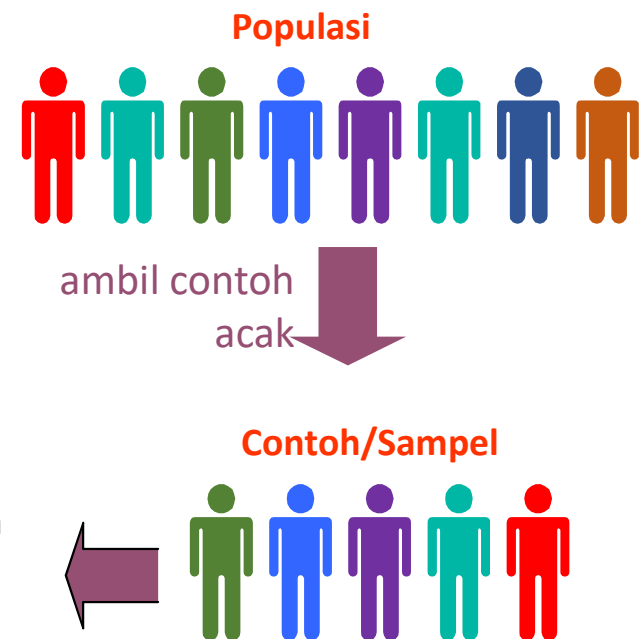
$$H_0: \mu = 8$$

Seberapa mungkin rata-rata 6.5 jam
terjadi jika benar bahwa $\mu = 8$?

Jika kecil kemungkinannya....

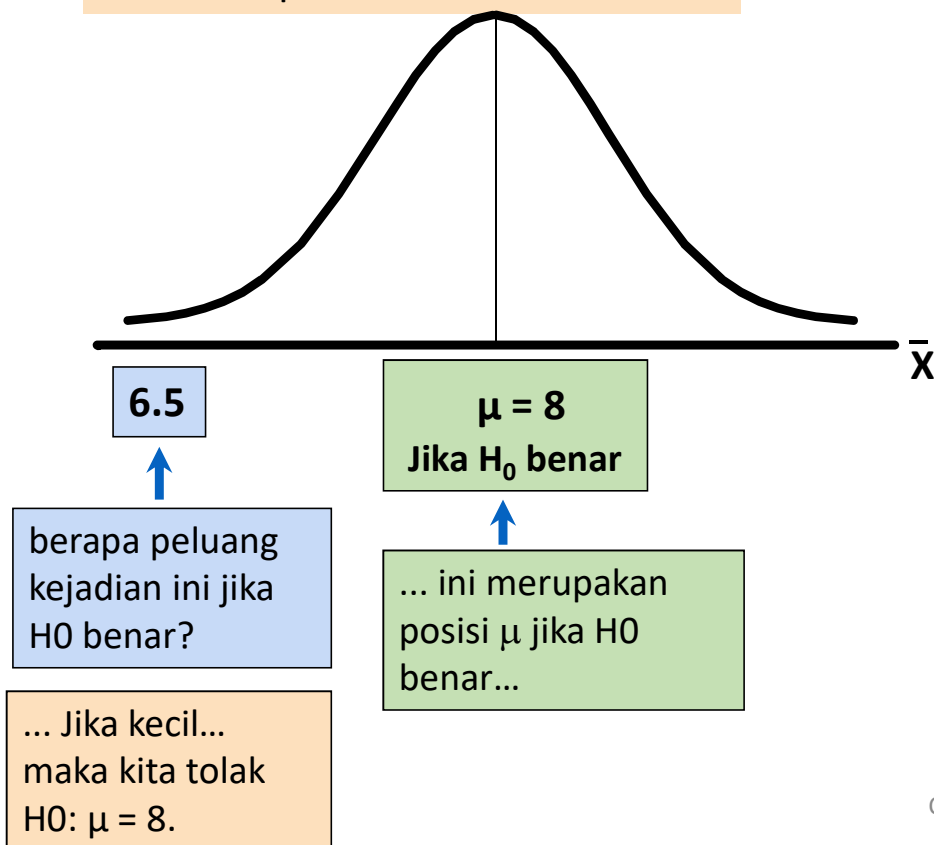
Tolak H_0

Andaikan
didapatkan
rata-rata
contoh
 $\bar{x} = 6.5$



Alasan menolak H_0

Sebaran penarikan contoh dari \bar{x}



Taraf Nyata (level of significance), α

- digunakan sebagai batas “seberapa kecil” kemungkinan rata-rata contoh jika H_0 benar
 - menentukan wilayah penolakan H_0
- Nilai yang biasa digunakan 0.01, 0.05, or 0.10
- Ditentukan di awal oleh peneliti
- Menentukan titik kritis pengujian hipotesis

Taraf Nyata dan Wilayah Penolakan

Taraf Nyata = α

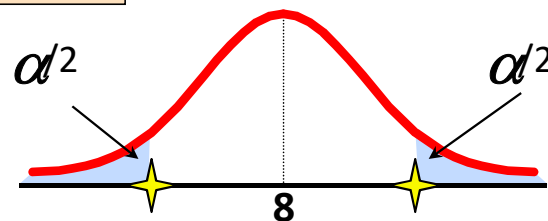
★ melambangkan
nilai titik kritis

wilayah penolakan
adalah yang di-arsir
biru

$$H_0: \mu = 8$$

$$H_1: \mu \neq 8$$

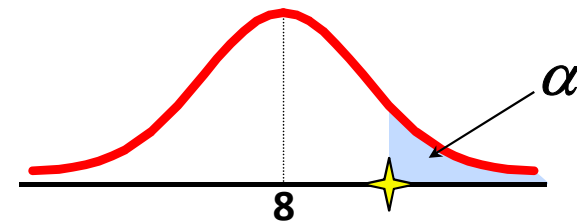
Two-tail test



$$H_0: \mu \leq 8$$

$$H_1: \mu > 8$$

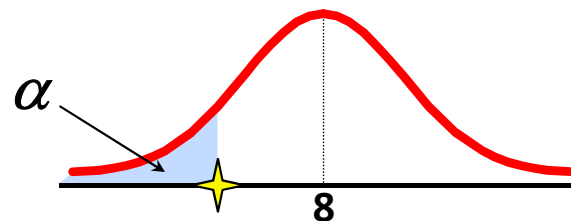
Upper-tail test



$$H_0: \mu \geq 8$$

$$H_1: \mu < 8$$

Lower-tail test



Kesalahan dalam Mengambil Keputusan

- **Type I Error** (Galat Tipe I)
 - Menolak hipotesis yang benar
 - Peluang terjadinya nya dinotasikan α
 - Disebut juga taraf nyata pengujian
 - Ditentukan oleh peneliti di awal penelitian
- **Type II Error** (Galat Tipe II)
 - Gagal menolak hipotesis nol yang salah
 - Peluang terjadinya dinotasikan β
- Galat Tipe I dan Galat Tipe II tidak pernah terjadi bersamaan
- Jika α diperkecil, maka β membesar

Kemungkinan Kejadian hasil Pengujian Hipotesis		
Keputusan	Kondisi Sebenarnya	
	H_0 Benar	H_0 Salah
Tidak Tolak H_0	Tepat ($1 - \alpha$)	Type II Error (β)
Tolak H_0	Type I Error (α)	Tepat ($1 - \beta$)

Kejadian
(Peluang)



Pengujian Hipotesis untuk Rata-Rata

- untuk populasi yang menyebar normal, ada dua uji yang dapat digunakan
- **Uji Z** (*Z test*), digunakan jika ragam (σ^2) atau simpangan baku (σ) populasi diketahui
- **Uji t** (*t test*), digunakan jika ragam (σ^2) atau simpangan baku (σ) populasi diketahui

Statistik Uji dan Wilayah Penolakan

Uji Z

statistik uji

$$Z_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	Tolak H_0 jika $ z_{hitung} > z_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	Tolak H_0 jika $z_{hitung} < -z_{\alpha}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	Tolak H_0 jika $z_{hitung} > z_{\alpha}$

Uji t

statistik uji

$$t_{hitung} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	Tolak H_0 jika $ t_{hitung} > t_{(\alpha/2; db=n-1)}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_{hitung} < -t_{(\alpha; db=n-1)}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	Tolak H_0 jika $t_{hitung} > t_{(\alpha; db=n-1)}$



Nilai p (p-value) pengujian

- **p-value**: peluang memperoleh statistik uji lebih ekstrem (\leq atau \geq) daripada yang diperoleh dari data contoh saat ini jika H_0 benar
 - disebut juga taraf nyata teramati (**observed level of significance**)
 - Nilai α terkecil agar H_0 bisa ditolak
- Pengambilan keputusan berdasarkan nilai p
 - Jika nilai $p < \alpha \rightarrow$ tolak H_0
 - Jika nilai $p \geq \alpha \rightarrow$ tidak tolak H_0 (terima H_0)

memperoleh p-value untuk uji hipotesis satu arah ke kanan

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P\left(Z > \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \text{ jika } H_0 \text{ benar}\right) \\ &= P(Z > Z_{\text{hitung}} \mid \mu = \mu_0) \end{aligned}$$

memperoleh p-value untuk uji hipotesis satu arah ke kiri

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \text{ jika } H_0 \text{ benar}\right) \\ &= P(Z < Z_{\text{hitung}} \mid \mu = \mu_0) \end{aligned}$$

memperoleh p-value untuk uji hipotesis dua arah

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= 2 * P\left(Z > \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right|, \text{ jika } H_0 \text{ benar}\right) \\ &= 2 * P(Z > |Z_{\text{hitung}}| \mid \mu = \mu_0) \end{aligned}$$

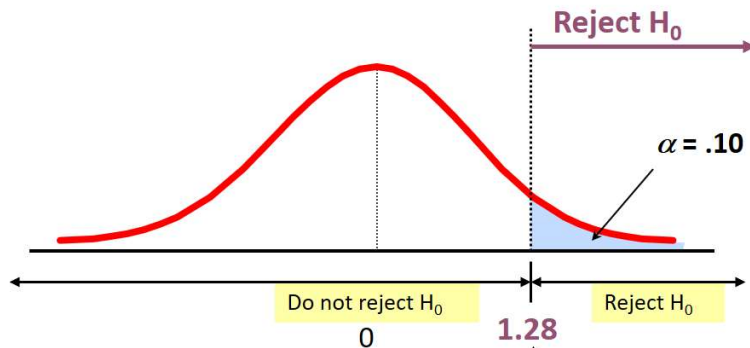
ilustrasi

Manajer SDM perusahaan memperkirakan bahwa rata-rata jam kerja pegawai saat WFH lebih dari 8 jam. Perusahaan ingin menguji hal tersebut. (nilai simpangan baku, σ , diasumsikan sebesar 1.5 jam). Andaikan dari survei terhadap 64 orang diperoleh rata-rata 8.2 jam.

Bentuk hipotesis

$H_0: \mu \leq 8$ rata-rata jam kerja tidak melebihi 8 jam per hari

$H_1: \mu > 8$ rata-rata jam kerja lebih dari 8 jam per hari



Tolak H_0 jika $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > 1.28$



IPB University
— Bogor Indonesia —

statistik uji

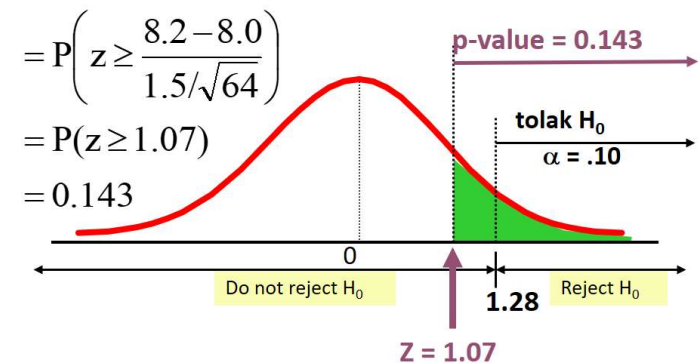
$$Z_{\text{hitung}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{8.2 - 8.0}{\frac{1.5}{\sqrt{64}}} = 1.07$$

karena $z_{\text{hitung}} = 1.07 < 1.28$

→ Tidak Tolak H_0

→ Belum cukup bukti untuk mengatakan jam kerja per hari lebih dari 8 jam

$P(\bar{x} \geq 8.2 | \mu = 8.0)$ menghitung nilai-p



karena nilai-p $> \alpha$ → Tidak Tolak H_0

Pengujian Hipotesis untuk Proporsi

- Jika ukuran contoh besar, sebaran \hat{p} dapat didekati menggunakan sebaran normal
 - Pengujian hipotesis proporsi dapat menggunakan Uji Z (Z-test for proportion)
- Jika ukuran contoh tidak cukup besar... metodenya akan dibahas pada diskusi yang lain.
- Rule of thumb mengatakan ukuran contoh besar: $n\hat{p}(1 - \hat{p}) > 9$

Uji Z untuk Proporsi

statistik uji

$$Z_{hitung} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

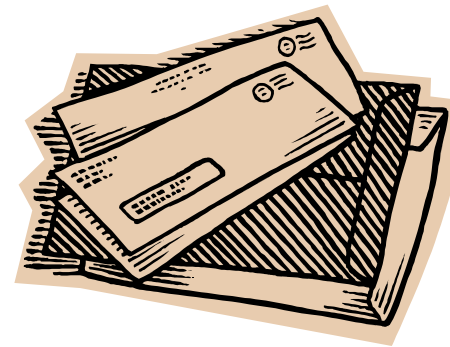
Bentuk Hipotesis	Wilayah Penolakan H_0
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	Tolak H_0 jika $ z_{hitung} > z_{\alpha/2}$
$H_0 : p \geq p_0$ $H_1 : p < p_0$	Tolak H_0 jika $z_{hitung} < -z_{\alpha}$
$H_0 : p \leq p_0$ $H_1 : p > p_0$	Tolak H_0 jika $z_{hitung} > z_{\alpha}$

Example: Z Test for Proportion



IPB University
— Bogor Indonesia —

A marketing company claims that it receives 8% responses from its mailing. To test this claim, a random sample of 500 were surveyed with 25 responses. Test at the $\alpha = .05$ significance level.



Check:

Our approximation for P is

$$\hat{p} = 25/500 = .05$$

$$nP(1 - P) = (500)(.05)(.95) \\ = 23.75 > 9$$



Z Test for Proportion: Solution

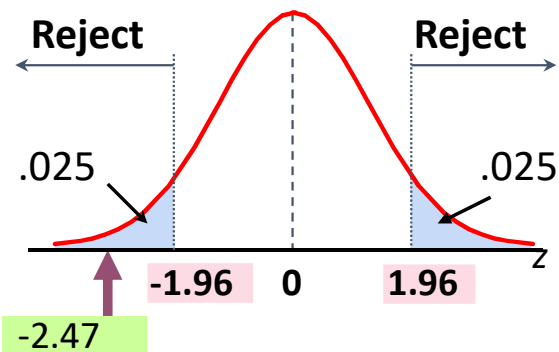
$$H_0: P = .08$$

$$H_1: P \neq .08$$

$$\alpha = .05$$

$$n = 500, \hat{p} = .05$$

Critical Values: ± 1.96



Test Statistic:

$$z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{.05 - .08}{\sqrt{\frac{.08(1-.08)}{500}}} = -2.47$$

Decision:

Reject H_0 at $\alpha = .05$

Conclusion:

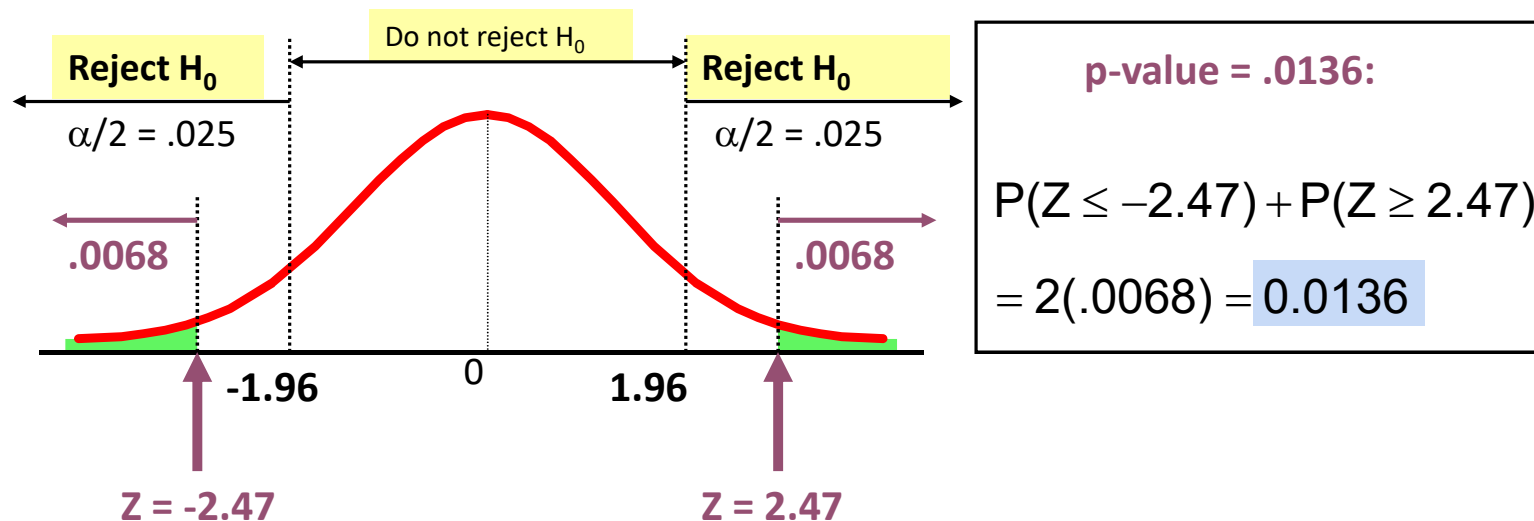
There is sufficient evidence to reject the company's claim of 8% response rate.

p-Value Solution

(continued)

Calculate the p-value and compare to α

(For a two sided test the p-value is always two sided)



Reject H_0 since p-value = .0136 < α = .05



Terima Kasih



IPB University
— Bogor Indonesia —



IPB University
— Bogor Indonesia —

Inspiring Innovation with Integrity
in Agriculture, Ocean and Biosciences for a Sustainable World