STK201 Aljabar Matriks

Semester Ganjil 2018/2019

PERTEMUAN #6

matriks kebalikan umum dan sistem persamaan linear

disusun oleh:

Bagus Sartono

bagusco@gmail.com

0852-1523-1823

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Pertanian Bogor

2019

yang terlewat dari materi pangkat matriks minggu lalu…

- Jika ${}_m\mathbf{P}_n$ dan ${}_n\mathbf{Q}_p$ adalah dua matriks sembarang, maka $r(\mathbf{PQ}) \leq \min\{r(\mathbf{P}), r(\mathbf{Q})\}$

- Jika ${}_m\mathbf{A}_n$ matriks sembarang dan ${}_m\mathbf{B}_m$ adalah matriks non-singular, maka $r(\mathbf{BA}) = r(\mathbf{A})$
- Jika ${}_m\mathbf{A}_n$ matriks sembarang dan ${}_n\mathbf{K}_n$ adalah matriks non-singular, maka $r(\mathbf{AK}) = r(\mathbf{A})$

Matriks Kebalikan Umum

- Matriks kebalikan umum bagi ${}_m\mathbf{A}_n$ dilambangkan ${}_n\mathbf{G}_m$ adalah matriks yang memenuhi $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$
- Notasi lain $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{A}^{-}$

Algoritma mencari G

- Tentukan pangkat dari **A**, misal k
- Cari anak matriks persegi kx kyang non-singular, misal **W**
- Cari matriks kebalikan **W**, yaitu $\mathbf{W}^{-1}$
- Transpose matriks $\mathbf{W}^{-1}$, yaitu $(\mathbf{W}^{-1})$T
- Ganti unsur di **A** dengan unsur $(\mathbf{W}^{-1})^T$ pada posisi yang sama dengan posisi anak matriks yang digunakan
- Ganti unsur **A** yang lain dengan 0 (nol)
- Transpose matriks tersebut, dan itulah matriks **G**

- *For any matrix* $\boldsymbol{A}$: *$m \times n$ and any g-inverse* $\boldsymbol{A}^{-}$: *$m \times n$, we have*
  - *$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ are idempotent*
  - $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = \text{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) = \text{rank}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$
  - $\text{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \text{rank}(\boldsymbol{A}^{-})$

Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear

- Terdiri atas beberapa persamaan
- Seluruh persamaan berbentuk linear
- Contoh:

$$2x + 3y = 5$$
$$4x + 2y = 6$$

- Contoh:

$$3x + 2y + 4z = 5$$
$$2x + 2y + 3z = 4$$

Penulisan SPL dalam notasi matriks

- Contoh:

$$2x + 3y = 5$$

$$4x + 2y = 6$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Penulisan SPL dalam notasi matriks

- Contoh:

$$3x + 2y + 4z = 5$$

$$2x + 2y + 3z = 4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Penulisan SPL dalam notasi matriks

- Secara umum dituliskan sebagai

  Ax=b

- Vektor x yang memenuhi persamaan di atas disebut sebagai ***solusi*** bagi SPL

SPL konsisten dan tak konsisten

- Jika *ada* **x** yang memenuhi SPL **Ax** = **b** maka SPL tersebut disebut sebagai SPL ***konsisten***

- Sebaliknya, jika *tidak ada* satu pun **x** yang memenuhi SPL **Ax** = **b** maka SPL tersebut disebut sebagai SPL ***tak konsisten***

SPL tak konsisten

- Tidak ada vektor (x_1, x_2) yang memenuhi SPL berikut

$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

$$4x_1 + 8x_2 = 10$$

SPL konsisten

- SPL berikut, memiliki solusi $(x, y) = (1, 1)$

$$2x + 3y = 5$$
$$4x + 2y = 6$$

- Vektor $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ adalah solusi bagi

$$3x + 2y + 4z = 5$$
$$2x + 2y + 3z = 4$$

vektor $(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}, 1)$ juga solusi bagi SPL di atas

SPL Konsisten

- Ada yang memiliki solusi unik (solusi tunggal)
- Ada yang memiliki solusi tidak unik (banyak solusi)

- Teorema: sebuah SPL konsisten $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jika dan hanya jika $r([\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A})$

SPL Homogen

- SPL **Ax** = **b**, disebut sebagai SPL homogen jika dan hanya jika **b** = **0**
- SPL homogen ***selalu konsisten***

Mencari solusi bagi SPL

- Teorema: Suatu SPL konsisten **Ax** = **b** dengan **b≠0** memiliki solusi **x** = **Gb** dengan **G** adalah matriks kebalikan umum bagi **A**

- Teorema: Suatu SPL konsisten **Ax** = **b** memiliki solusi $\tilde{x}$ = **Gb** + (**GA** – **I**)**z** dengan **z** adalah sembarang vektor berukuran banyaknya kolom **A**.

Terima Kasih