

STK201 Aljabar Matriks

Semester Ganjil 2019/2020

PERTEMUAN #4

pangkat matriks

disusun oleh:
Bagus Sartono
bagusco@gmail.com
0852-1523-1823



IPB University
— Bogor Indonesia —

Departemen Statistika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor

2019

Operasi Baris Elementer

- Materi ini mengasumsikan peserta sudah menguasai operasi baris/kolom elementer (elementary operator):
 - $E_{i(k)}$: mengalikan baris ke- i dengan konstanta k
 - E_{ij} : menukar baris ke- i dan baris ke- j
 - $E_{ij(k)}$: mengalikan baris ke- j dengan k , kemudian menjumlahkannya dengan baris ke- i



Operasi Baris Elementer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_{1(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_{12}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_{12(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



Operasi Baris Elementer

- Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks $n \times m$ sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran $n \times n$ dengan matriks yang bersangkutan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_{1(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{1(2)}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



di R

Berikut ini adalah fungsi dengan nama “penggandabaris” yang dapat digunakan untuk menggandakan baris tertentu dari sebuah matriks dengan skalar.

```
penggandabaris <- function(A, baris, pengganda){  
  A[baris,] <- A[baris,] * pengganda  
  return (A)  
}
```

Untuk memanggil fungsi di atas kita tinggal menyebut nama fungsinya yaitu “penggandabaris” dan memberikan 3 (tiga) argumen/input yaitu (1) matriks yang akan dioperasikan, (2) nomor baris yang akan digandakan, dan (3) bilangan/skalar penggandanya. Misalkan kita akan menggandakan baris kedua dari matriks B dengan 6, maka perintah yang diberikan serta hasil yang didapatkan sebagai berikut.

```
> B = matrix(c(1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 7), ncol=3, byrow=TRUE)  
> B  
      [,1] [,2] [,3]  
[1,]    1    2    3  
[2,]    2    3    4  
[3,]    3    5    7  
> penggandabaris(B, 2, 6)  
      [,1] [,2] [,3]  
[1,]    1    2    3  
[2,]   12   18   24  
[3,]    3    5    7
```



Operasi Baris Elementer

- Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks $n \times m$ sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran $n \times n$ dengan matriks yang bersangkutan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_{12}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



di R

Fungsi yang dapat dibuat untuk melakukan operasi penukaran dua baris adalah sebagai berikut:

```
tukarbaris <- function(A, baris1, baris2){  
  A1 <- A[baris1,]  
  A2 <- A[baris2,]  
  A[baris1,] <- A2  
  A[baris2,] <- A1  
  return(A)  
}
```

Untuk memanggil fungsi di atas kita tinggal menyebut nama fungsinya yaitu “tukarbaris” dan memberikan tiga argumen/input yaitu (1) matriks yang akan dioperasikan, (2) nomor baris pertama yang akan ditukar, dan (3) nomor baris kedua yang akan ditukar.

```
> B = matrix(c(1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 7), ncol=3, byrow=TRUE)
```

```
> B
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	2	3
[2,]	2	3	4
[3,]	3	5	7

```
> tukarbaris(B,2,3)
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	2	3
[2,]	3	5	7
[3,]	2	3	4



Operasi Baris Elementer

- Melakukan operasi baris elementer terhadap sebuah matriks $n \times m$ sama dengan melakukan perkalian matriks operasi baris berukuran $n \times n$ dengan matriks yang bersangkutan.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad E_{12(2)}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12(2)}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



di R

Berikut ini adalah fungsi dengan nama “tambahganda” yang dapat digunakan untuk menambahkan baris tertentu dengan k kali baris lain.

```
tambahganda <- function(A, baris1, baris2, pengganda){  
  A[baris1, ] <- A[baris1, ] + pengganda * A[baris2, ]  
  return(A)  
}
```

Untuk memanggil fungsi di atas kita tinggal menyebut nama fungsinya yaitu “tambahganda” dan memberikan 4 (empat) argumen/input yaitu (1) matriks yang akan dioperasikan, (2) nomor baris yang akan diubah, dan (3) nomor baris yang akan digandakan dan ditambahkan, (4) bilangan/skalar penggandanya. Misalkan kita akan mengubah baris kedua dengan menambahkan -2 kali baris pertama dari matriks B, maka perintah yang diberikan serta hasil yang didapatkan sebagai berikut.

```
> B = matrix(c(1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 7), ncol=3, byrow=TRUE)
```

```
> B
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	2	3
[2,]	2	3	4
[3,]	3	5	7

```
> tambahganda(B, 2, 1, -2)
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	2	3
[2,]	0	-1	-2
[3,]	3	5	7



Determinan hasil operasi baris elementer

- Jika A adalah matriks persegi, maka:
 - $\det(E_{ij}(A)) = -\det(A)$
 - $\det(E_{i(k)}(A)) = k \det(A)$
 - $\det(E_{ij(k)}(A)) = \det(A)$



Pangkat Matriks (Rank)

- Pangkat dari sebuah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$, dilambangkan $r(\mathbf{A})$, adalah ordo anak matriks persegi \mathbf{A} yang terbesar dan determinannya tidak sama dengan nol
- Operasi baris/kolom elementer tidak mengubah pangkat dari sebuah matriks
- Jelas bahwa untuk sebuah matriks ${}_m\mathbf{A}_n$, maka $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$, atau dengan kata lain pangkat dari matriks tidak akan melebihi banyak baris dan kolomnya.



Pangkat Matriks

- Pangkat dari matriks **A** sama dengan ordo matriks identitas pada bentuk kanonik **A** yang diperoleh melalui operasi baris/kolom elementer.



Matriks Berpangkat Penuh

- Untuk ${}_m\mathbf{A}_n$ dengan $m < n$ dan $r(\mathbf{A}) = m$, maka \mathbf{A} disebut sebagai matriks berpangkat baris penuh (full row rank matrix)
- Untuk ${}_m\mathbf{A}_n$ dengan $m > n$ dan $r(\mathbf{A}) = n$, maka \mathbf{A} disebut sebagai matriks berpangkat kolom penuh (full column rank matrix)
- Untuk ${}_n\mathbf{A}_n$ dengan $r(\mathbf{A}) = n$, maka \mathbf{A} disebut sebagai matriks berpangkat penuh (full rank)



Menghitung Pangkat Matriks di R

```
> A = matrix(c(1,0,2,0,1,2,2,2,1), ncol=3, byrow=TRUE)
```

```
> A
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	0	2
[2,]	0	1	2
[3,]	2	2	1

```
> library(Matrix)
```

```
> rankMatrix(A)[1]
```

```
[1] 3
```



Menghitung Pangkat Matriks di R

```
> A = matrix(c(1,0,2,0,1,2,2,2,1,2,2,1), ncol=3, byrow=TRUE)
```

```
> A
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	0	2
[2,]	0	1	2
[3,]	2	2	1
[4,]	2	2	1

```
> library(Matrix)
```

```
> rankMatrix(A)[1]
```

```
[1] 3
```



Terima Kasih



Departemen Statistika
FMIPA – IPB