STK201 Aljabar Matriks

Semester Ganjil 2019/2020

PERTEMUAN #3

Teras dan Determinan Matriks Persegi

disusun oleh:

Bagus Sartono

bagusco@gmail.com

0852-1523-1823

IPB University
Bogor Indonesia

Departemen Statistika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Pertanian Bogor

2019

Outline

- Teras Matriks Persegi dan Sifat-Sifatnya
- Determinan Matriks Persegi dan Sifat-Sifatnya

Teras Matriks

- Teras (Bahasa Inggris: *trace*) dari sebuah matriks persegi ${}_n\mathbf{A}_n$ dilambangkan tr(**A**) didefinisikan sebagai

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Teras tidak lain adalah penjumlahan dari unsur diagonal matriks persegi

Teras Matriks

- contoh perhitungan teras

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- tr(**K**) = 1 + 2 + 1 + 6 = 10

Beberapa sifat teras matriks

- $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$
- Untuk ${}_m\mathbf{A}_n$ dan ${}_n\mathbf{B}_m$ sembarang matriks real, $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

- BUKTIKAN SIFAT di ATAS

Menghitung Teras Matriks di R

```
> D = matrix(c(3, 4, 5, 6, 3, 8, 9, 4, 9), ncol= 3, byrow=TRUE)

> D
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    4    5
[2,]    6    3    8
[3,]    9    4    9

> sum(diag(D))
[1] 15
```

Determinan Matriks: definisi

- Determinan dari suatu matriks persegi ${}_n\mathbf{A}_n = [a_{\text{ij}}]_{nxn}$ dilambangkan det(**A**) atau |**A**|, didefinisikan sebagai:
- untuk n = 1, det(**A**) = a_{11}
- untuk n = 2, det(**A**) = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- untuk n > 2 ..... (bersambung ke slide berikutnya)

Determinan Matriks: definisi

- untuk n > 2 .....

det(**A**) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ untuk sembarang baris ke-i, atau

det(**A**) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ untuk sembarang kolom ke-j

dengan

Cij= $(-1)^{i+j}$ det($\mathbf{A}_{ij}$), dan

$\mathbf{A}_{ij}$ adalah matriks minor yaitu anak matriks **A** yang dibuang baris ke-*i* dan kolom ke-*j* nya

Contoh menghitung determinan

$$\mathbf{A} = [2]$$

det(**A**) = 2

$$\mathbf{B} = [4]$$

det(**B**) = 4

$$\mathbf{C} = [3]$$

det(**C**) = 3

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

det(**D**) = 1(1) – 2(3)
= -5

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

det(**F**) = 1(2) – 4(3)
= -10

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

det(**G**) = 2(2) – 4(1)
= 0

Contoh menghitung determinan

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

det(**A**) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$ untuk sembarang baris ke-i

misal gunakan baris ke-3 sebagai tumpuan

det(**H**) = a31 C31 + a32 C32 + a33 C33

$= 1\,(-1)^{3+1}\,\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1\,(-1)^{3+2}\,\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 0\,(-1)^{3+3}\,\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

= 1 (1) (0) + 1 (-1) (-10) + 0 (1) (-5)

= 10

Determinan Matriks Diagonal dan Segitiga Atas/Bawah

- Jika ${}_n\mathbf{A}_n$ adalah matriks diagonal, maka

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \text{ x } a_{22} \text{ x } \dots \text{ x } a_{nn}$$

Jika ${}_n\mathbf{A}_n$ adalah matriks segitiga atas/bawah, maka

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \text{ x } a_{22} \text{ x } \dots \text{ x } a_{nn}$$

Sifat-Sifat Determinan

- Jika **A** memiliki baris atau kolom yang seluruhnya bernilai 0 (nol) maka det(**A**) = 0

- Jika **A** memiliki sedikitnya dua baris atau dua kolom yang unsurnya bernilai sama maka det(**A**) = 0

- Jika **A** dan **B** adalah matriks persegi berukuran sama, maka det(**AB**) = det(**A**) x det(**B**)

Sifat-Sifat Determinan

- Jika matriks **B** diperoleh dengan cara menukar posisi dari dua buah baris (atau kolom) matriks **A**, maka det(**B**) = -det(**A**)

- Jika matriks **B** memiliki unsur yang sama dengan matriks **A** kecuali pada satu baris ke-i, $\boldsymbol{b}_i = c\boldsymbol{a}_i$ maka det(**B**) = c det(**A**)

- Jika c adalah sebuah konstanta dan **A** adalah matriks persegi berukuran n x n, maka det(c**A**) = c^n det(**A**)

Menghitung Determinan Matriks di R

```
> A = matrix(c(1,0,2,0,1,2,2,2,1), ncol=3, byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    2
[2,]    0    1    2
[3,]    2    2    1
> det(A)
[1] -7

> B = matrix(c(1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 5, 7), ncol=3, byrow=TRUE)
> B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    2    3    4
[3,]    3    5    7
> det(B)
[1] 0
```

Terima Kasih