https://bit.ly/2k40adJ

STK201 Aljabar Matriks

Semester Ganjil 2019/2020

PERTEMUAN #5

Matriks Kebalikan

disusun oleh:

Bagus Sartono

bagusco@gmail.com

0852-1523-1823

IPB University — Bogor Indonesia —

Departemen Statistika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Pertanian Bogor

2019

Matriks Kebalikan

- Matriks kebalikan bagi ${}_n\mathbf{A}_n$ dilambangkan $\mathbf{A}^{-1}$ adalah matriks yang memenuhi $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Menghitung Matriks Kebalikan

- Untuk memperoleh matriks **B** = $[b_{ij}]$ = $\mathbf{A}^{-1}$ dapat dilakukan dengan menghitung

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\mathbf{A}$$

- dengan *adj***A**, matriks adjoint **A**, adalah matriks yang berisi *cofactor* dari **A** kemudian di-transpose

- mengingat kembali cofactor:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$$

$\mathbf{A}_{ij}$ adalah matriks minor yaitu anak matriks **A** yang dibuang baris ke-i dan kolom ke-j nya

Contoh

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

det(A) = 2x9 – 5x3 = 3

$C_{11} = 9$ $\quad C_{12} = -3$

$C_{21} = -5$ $\quad C_{22} = 2$

$$adj\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Syarat keberadaan matriks kebalikan

- $\mathbf{A}^{-1}$ hanya ada untuk matriks **A** yang persegi
- $\mathbf{A}^{-1}$ hanya ada jika $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Matriks Singular dan Non-Singular

- Matriks persegi **A** disebut matriks ***singular*** jika dan hanya jika tidak ada matriks **B** sehingga **AB**=**BA**=$\mathbf{I}$, atau **A** tidak memiliki matriks kebalikan

- Matriks persegi **A** yang memiliki kebalikan disebut sebagai ***matriks non-singular***

- Matriks **A** non-singular ⇔ **A** berpangkat penuh ⇔ det(**A**) ≠ 0

Sifat-Sifat

- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A}^{-1}$ bersifat unik
- $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
- untuk A dan B yang non-singular dan berukuran sama, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Sifat-Sifat

- Jika **A** adalah matriks diagonal dengan unsur diagonal a_{ii}, maka $\mathbf{A}^{-1}$ adalah matriks diagonal dengan unsur diagonal $1/a_{ii}$

- Jika **A** adalah matriks ortogonal, maka $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{T}$

- Jika **A** matriks simetrik, maka $\mathbf{A}^{-1}$ juga simetrik

Menghitung matriks adjoint di R

Untuk memperoleh adjoin dari suatu matriks persegi kita dapat menyusun suatu fungsi di R. Fungsi yang bisa digunakan salah satunya adalah sebagai berikut

```
minor <- function(A, i, j) {
  det( A[-i,-j] )
  }

cofactor <- function(A, i, j) {
  (-1)^(i+j) * minor(A,i,j)
  }

adjoint <- function(A) {
  n <- nrow(A)
  B <- matrix(NA, n, n)
  for( i in 1:n )
    for( j in 1:n )
      B[j,i] <- cofactor(A, i, j)
  B
}
```

Menghitung matriks adjoint di R

Penggunaan dari fungsi di atas dilakukan dengan memanggil menggunakan program berikut

```
> A = matrix(c(1,0,2,0,1,2,2,2,1), ncol=3, byrow=TRUE)
> adjoint(A)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   -3    4   -2
[2,]    4   -3   -2
[3,]   -2   -2    1
```

Menghitung Matriks Kebalikan di R

```
> A <- matrix(c(1, 2, 3, 1, 3, 4, 1, 4, 3), nrow=3,
byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    1    3    4
[3,]    1    4    3

> A.invers <- solve(A)
> A.invers
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  3.5   -3  0.5
[2,] -0.5    0  0.5
[3,] -0.5    1 -0.5
```

Menghitung Matriks Kebalikan di R

Sekarang perhatikan jika fungsi solve() kita terapkan pada matriks yang singular.

```
> B <- matrix(c(1, 2, 1, 2), nrow=2, byrow=TRUE)
> B
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    1    2

> solve(B)
Error in solve.default(B) :
  Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[2,2] = 0
```

Karena kita tahu bahwa determinan dari matriks B adalah nol, maka B adalah matriks singular yang tidak mempunya invers. Sehingga, ketika solve() diterapkan pada matriks B, akan diperoleh pesan error seperti di atas.

Terima Kasih