PEMODELAN MATEMATIKA

MODEL LOTKA-VOLTERRA DENGAN METODE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG

(STUDI KASUS POPULASI MUSANG LUWAK (PARADOXURUS HERMAPHRODITUS) DAN AYAM HUTAN MERAH (GALLUS GALLUS) DI TAMAN NASIONAL ALAS PURWO)

ANGGOTA KELOMPOK 3

- Johannes Bagus Pramindra (662023002)
- Hana Rahmawati (662023006)
- Glory Liwulanga (662023013)

IDENTIFIKASI MASALAH

- Masalah : Populasi ayam hutan merah (Gallus gallus) mengalami penurunan yang diduga karena interaksi predasi dengan musang luwak (Paradoxurus hermaphroditus).
- Tujuan: Memodelkan dinamika populasi kedua spesies untuk melihat kestabilan populasi serta identifikasi yang memungkinkan kepunahan salah satu atau kedua spesies.

FORMULASI MASALAH MATEMATIS

PARAMETER:

x : *populasi ayam hutam merah*

y : *populais musang luwak*

$X(t)$: *populasi ayam hutam merah terhadap waktu*

$Y(t)$: *populasi musang luwak terhadap waktu*

a_1 : *Laju kelahiran ayam*

β_1 : *Laju kematian musang*

a_2 : *penurunan jumlah populasi ayam*

β_2 : *peningkatan jumlah populasi musang*

MEMBUAT ASUMSI

- Hanya ada dua spesies yang berinteraksi yaitu ayam hutan merah (mangsa) dan musang luwak (pemangsa).
- Tidak ada faktor lain seperti penyakit, bencana alam, atau persaingan dengan spesies lain.
- Populasi ayam bertambah secara eksponensial tanpa predator, dan musang luwak bergantung pada ayam sebagai sumber makanan.
- Tidak ada migrasi keluar atau masuk dari area penelitian.

PENURUNAN MODEL MATEMATIKA

$$\frac{dX}{dt} = \alpha_1 x - \alpha_2 xy$$

$$\frac{dY}{dt} = -\beta_1 y + \beta_2 xy$$

PENYELESAIAN MODEL

Solusi permasalahan ini dapat dicari menggunakan Metode Runge - Kutta - Fehlberg (RKF 45) untuk mendapatkan X (t) dan Y (t) pada selang waktu tertentu.

Untuk memudahkan pencarian solusi dan intepretasi hasil maka digunakan bantuan Python untuk memperoleh solusi. Berikut parameter yang digunakan:

PENYELESAIAN MODEL

1. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}2;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ dan\ \ \beta_2 = 0{,}03 \quad (a_1 > \beta_1)$
2. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}5\,;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \beta_2 = 0{,}03 \quad (a_1 = \beta_1)$
3. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}9\,;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \ \beta_2 = 0{,}03 \quad (a_1 < \beta_1)$
4. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}2\,;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \ \beta_2 = 0{,}002\ (a_1 > \beta_1)$
5. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}5\,;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \ \beta_2 = 0{,}002\ (a_2 = \beta_1)$
6. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}9\,;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \ \beta_2 = 0{,}002\ (a_1 < \beta_1)$

Pertanyaan

1. Simulasikan populasi musang dan ayam selama 365 hari dengan langkah waktu harian
2. Plot grafik perubahan populasi kedua spesies

INTERPRETASI SOLUSI

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter model
alpha1 = 0.5  # Laju kelahiran ayam
beta1 = 0.2   # Laju kematian musang
alpha2 = 0.02 # Laju konsumsi ayam oleh musang
beta2 = 0.03  # Efisiensi konversi makanan menjadi pertumbuhan musang

# Fungsi untuk sistem persamaan diferensial
def lotka_volterra(t, y):
    x, y = y  # x: populasi ayam hutan merah, y: populasi musang luwak
    dxdt = alpha1 * x - alpha2 * x * y
    dydt = -beta1 * y + beta2 * x * y
    return np.array([dxdt, dydt])

# Implementasi metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)
def rkf45(f, t0, y0, t_end, h):
    t = [t0]
    y = [y0]

    while t[-1] < t_end:
        ti, yi = t[-1], y[-1]

        k1 = h * f(ti, yi)
        k2 = h * f(ti + 1/4 * h, yi + 1/4 * k1)
        k3 = h * f(ti + 3/8 * h, yi + 3/32 * k1 + 9/32 * k2)
        k4 = h * f(ti + 12/13 * h, yi + 1932/2197 * k1 - 7200/2197 * k2 + 7296/2197 * k3)
        k5 = h * f(ti + h, yi + 439/216 * k1 - 8 * k2 + 3680/513 * k3 - 845/4104 * k4)
        k6 = h * f(ti + 1/2 * h, yi - 8/27 * k1 + 2 * k2 - 3544/2565 * k3 + 1859/4104 * k4 - 11/40 * k5)

        yi_new = yi + (25/216) * k1 + (1408/2565) * k3 + (2197/4104) * k4 - (1/5) * k5
        t.append(ti + h)
        y.append(yi_new)

    return np.array(t), np.array(y)
```

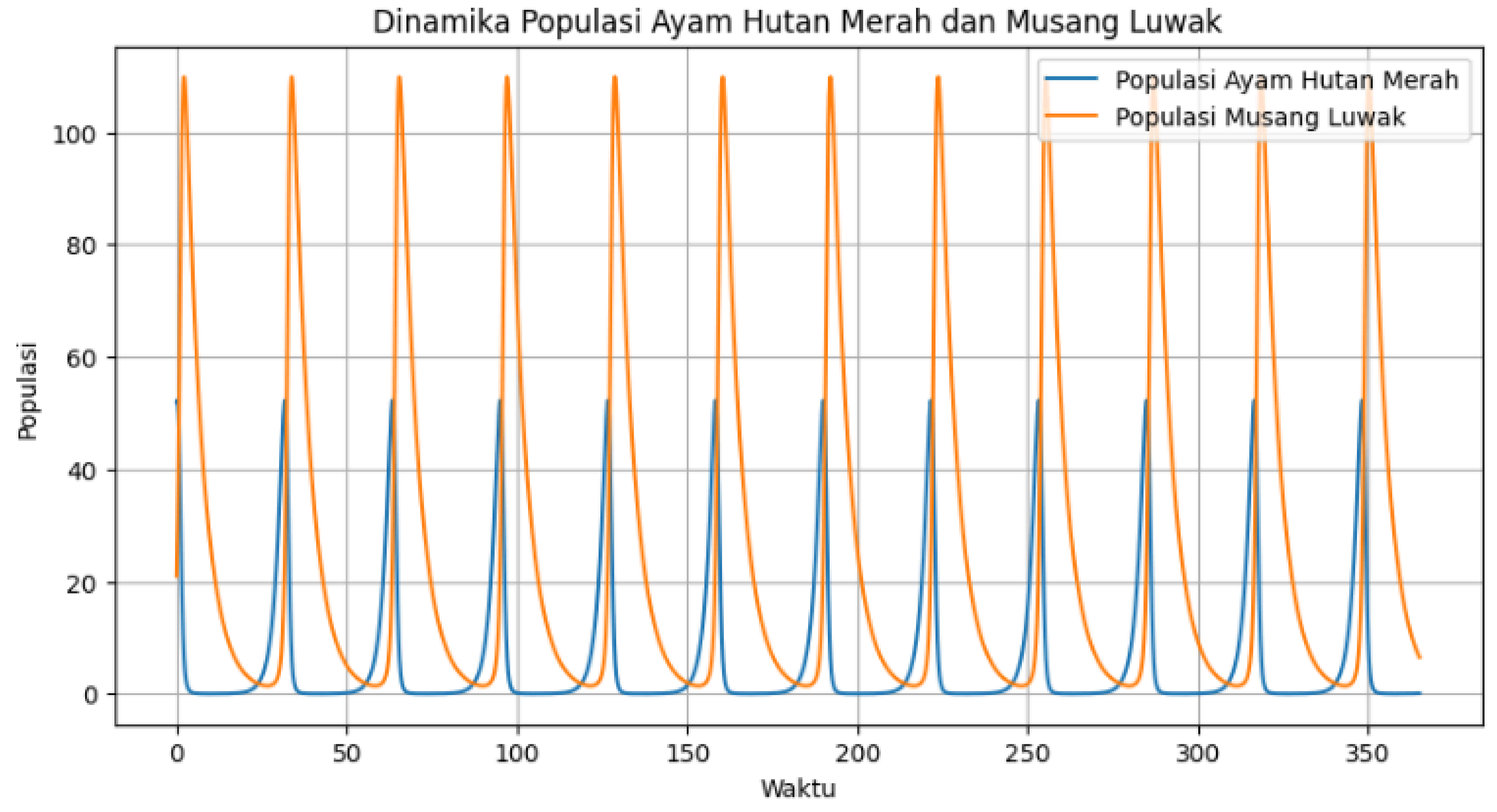
```python
# Inisialisasi kondisi awal dan parameter waktu
t0 = 0
t_end = 365
h = 0.1
x0, y0 = 52, 21  # Populasi awal ayam dan musang

# Jalankan simulasi
t, sol = rkf45(lotka_volterra, t0, np.array([x0, y0]), t_end, h)

# Plot hasil
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, sol[:, 0], label='Populasi Ayam Hutan Merah')
plt.plot(t, sol[:, 1], label='Populasi Musang Luwak')
plt.xlabel('Waktu')
plt.ylabel('Populasi')
plt.legend()
plt.title('Dinamika Populasi Ayam Hutan Merah dan Musang Luwak')
plt.grid()
plt.show()
```

INTERPRETASI SOLUSI

1. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}2;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ dan\ \ \beta_2 = 0{,}03 \qquad (a_1 > \beta_1)$



INTERPRETASI SOLUSI

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter model
alpha1 = 0.5  # Laju kelahiran ayam
beta1 = 0.5   # Laju kematian musang
alpha2 = 0.02 # Laju konsumsi ayam oleh musang
beta2 = 0.03  # Efisiensi konversi makanan menjadi pertumbuhan musang

# Fungsi untuk sistem persamaan diferensial
def lotka_volterra(t, y):
    x, y = y  # x: populasi ayam hutan merah, y: populasi musang luwak
    dxdt = alpha1 * x - alpha2 * x * y
    dydt = -beta1 * y + beta2 * x * y
    return np.array([dxdt, dydt])

# Implementasi metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)
def rkf45(f, t0, y0, t_end, h):
    t = [t0]
    y = [y0]

    while t[-1] < t_end:
        ti, yi = t[-1], y[-1]

        k1 = h * f(ti, yi)
        k2 = h * f(ti + 1/4 * h, yi + 1/4 * k1)
        k3 = h * f(ti + 3/8 * h, yi + 3/32 * k1 + 9/32 * k2)
        k4 = h * f(ti + 12/13 * h, yi + 1932/2197 * k1 - 7200/2197 * k2 + 7296/2197 * k3)
        k5 = h * f(ti + h, yi + 439/216 * k1 - 8 * k2 + 3680/513 * k3 - 845/4104 * k4)
        k6 = h * f(ti + 1/2 * h, yi - 8/27 * k1 + 2 * k2 - 3544/2565 * k3 + 1859/4104 * k4 - 11/40 * k5)

        yi_new = yi + (25/216) * k1 + (1408/2565) * k3 + (2197/4104) * k4 - (1/5) * k5
        t.append(ti + h)
        y.append(yi_new)

    return np.array(t), np.array(y)
```

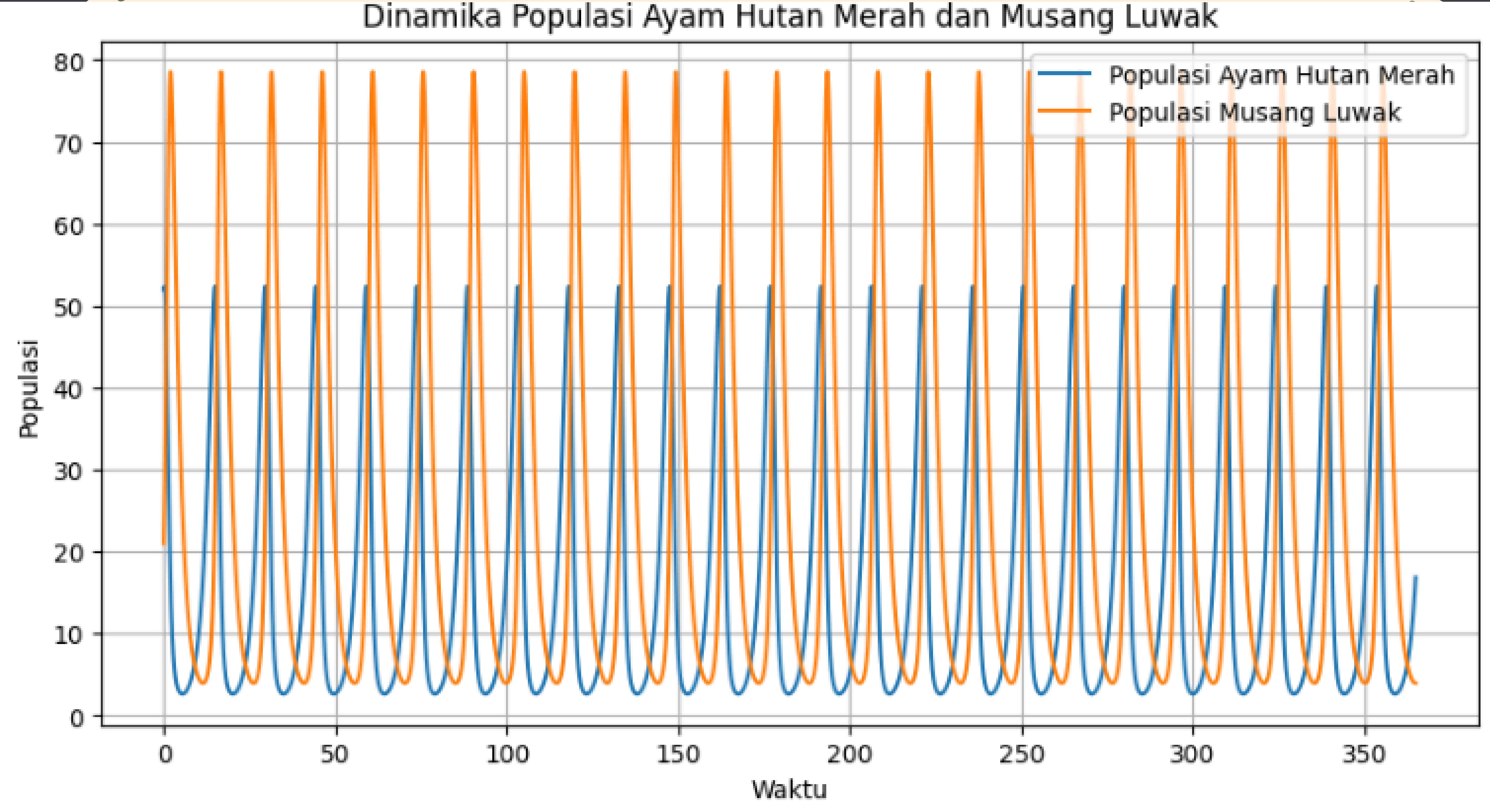
```python
# Inisialisasi kondisi awal dan parameter waktu
t0 = 0
t_end = 365
h = 0.1
x0, y0 = 52, 21  # Populasi awal ayam dan musang

# Jalankan simulasi
t, sol = rkf45(lotka_volterra, t0, np.array([x0, y0]), t_end, h)

# Plot hasil
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, sol[:, 0], label='Populasi Ayam Hutan Merah')
plt.plot(t, sol[:, 1], label='Populasi Musang Luwak')
plt.xlabel('Waktu')
plt.ylabel('Populasi')
plt.legend()
plt.title('Dinamika Populasi Ayam Hutan Merah dan Musang Luwak')
plt.grid()
plt.show()
```

INTERPRETASI SOLUSI

2. $a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 0{,}5$; $\beta_1 = 0{,}02$ dan $\beta_2 = 0{,}03$ $(a_1 = \beta_1)$



INTERPRETASI SOLUSI

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter model
alpha1 = 0.5  # Laju kelahiran ayam
beta1 = 0.9   # Laju kematian musang
alpha2 = 0.02 # Laju konsumsi ayam oleh musang
beta2 = 0.03  # Efisiensi konversi makanan menjadi pertumbuhan musang

# Fungsi untuk sistem persamaan diferensial
def lotka_volterra(t, y):
    x, y = y  # x: populasi ayam hutan merah, y: populasi musang luwak
    dxdt = alpha1 * x - alpha2 * x * y
    dydt = -beta1 * y + beta2 * x * y
    return np.array([dxdt, dydt])

# Implementasi metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)
def rkf45(f, t0, y0, t_end, h):
    t = [t0]
    y = [y0]

    while t[-1] < t_end:
        ti, yi = t[-1], y[-1]

        k1 = h * f(ti, yi)
        k2 = h * f(ti + 1/4 * h, yi + 1/4 * k1)
        k3 = h * f(ti + 3/8 * h, yi + 3/32 * k1 + 9/32 * k2)
        k4 = h * f(ti + 12/13 * h, yi + 1932/2197 * k1 - 7200/2197 * k2 + 7296/2197 * k3)
        k5 = h * f(ti + h, yi + 439/216 * k1 - 8 * k2 + 3680/513 * k3 - 845/4104 * k4)
        k6 = h * f(ti + 1/2 * h, yi - 8/27 * k1 + 2 * k2 - 3544/2565 * k3 + 1859/4104 * k4 - 11/40 * k5)

        yi_new = yi + (25/216) * k1 + (1408/2565) * k3 + (2197/4104) * k4 - (1/5) * k5
        t.append(ti + h)
        y.append(yi_new)

    return np.array(t), np.array(y)
```

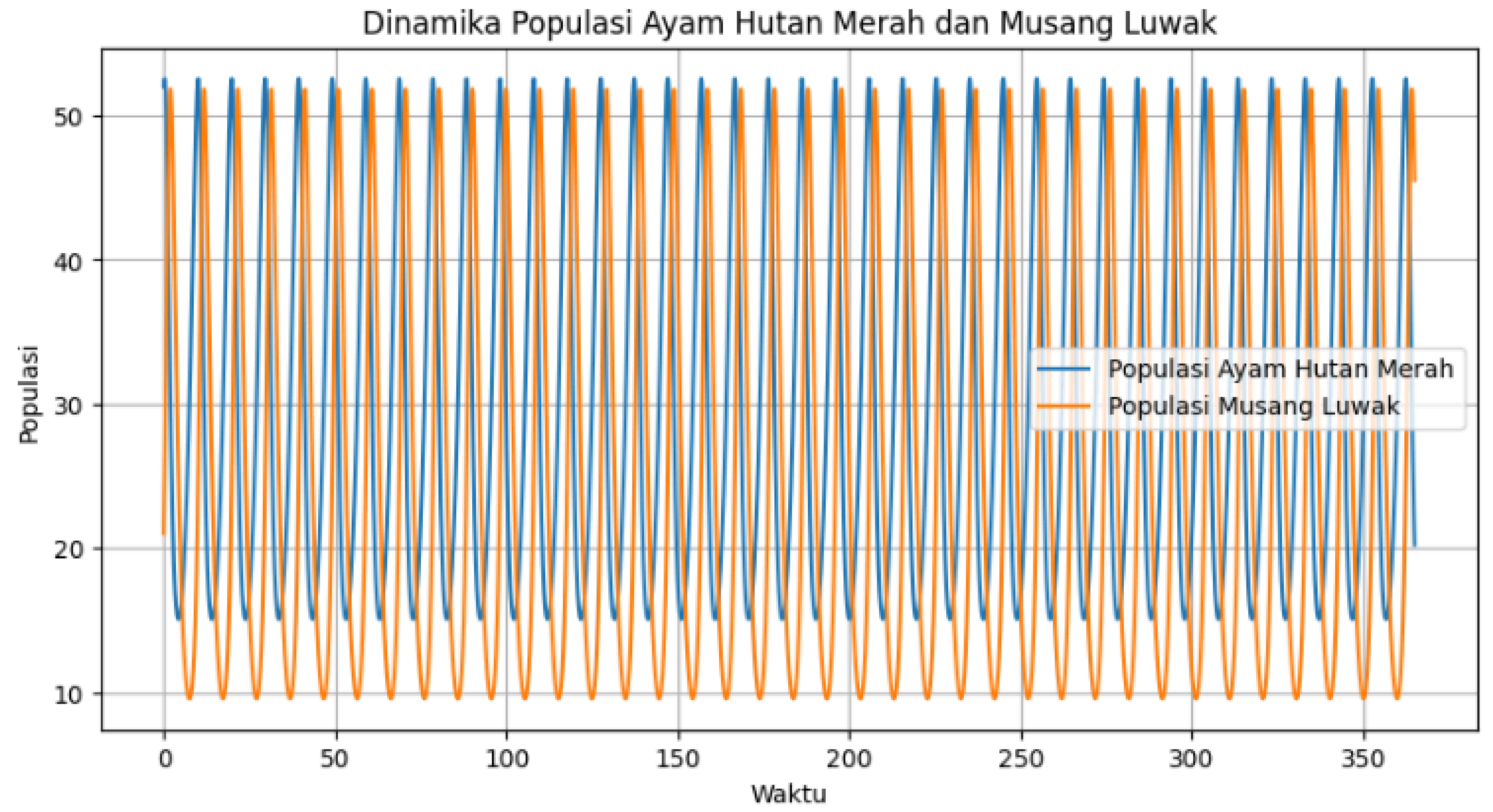
```python
# Inisialisasi kondisi awal dan parameter waktu
t0 = 0
t_end = 365
h = 0.1
x0, y0 = 52, 21  # Populasi awal ayam dan musang

# Jalankan simulasi
t, sol = rkf45(lotka_volterra, t0, np.array([x0, y0]), t_end, h)

# Plot hasil
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, sol[:, 0], label='Populasi Ayam Hutan Merah')
plt.plot(t, sol[:, 1], label='Populasi Musang Luwak')
plt.xlabel('Waktu')
plt.ylabel('Populasi')
plt.legend()
plt.title('Dinamika Populasi Ayam Hutan Merah dan Musang Luwak')
plt.grid()
plt.show()
```

INTERPRETASI SOLUSI

3. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}9\ ;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \ \beta_2 = 0{,}03\ \ \ (a_1 < \beta_1)$



INTERPRETASI SOLUSI

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter model
alpha1 = 0.5  # Laju kelahiran ayam
beta1 = 0.2   # Laju kematian musang
alpha2 = 0.02 # Laju konsumsi ayam oleh musang
beta2 = 0.002  # Efisiensi konversi makanan menjadi pertumbuhan musang

# Fungsi untuk sistem persamaan diferensial
def lotka_volterra(t, y):
    x, y = y  # x: populasi ayam hutan merah, y: populasi musang luwak
    dxdt = alpha1 * x - alpha2 * x * y
    dydt = -beta1 * y + beta2 * x * y
    return np.array([dxdt, dydt])

# Implementasi metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)
def rkf45(f, t0, y0, t_end, h):
    t = [t0]
    y = [y0]

    while t[-1] < t_end:
        ti, yi = t[-1], y[-1]

        k1 = h * f(ti, yi)
        k2 = h * f(ti + 1/4 * h, yi + 1/4 * k1)
        k3 = h * f(ti + 3/8 * h, yi + 3/32 * k1 + 9/32 * k2)
        k4 = h * f(ti + 12/13 * h, yi + 1932/2197 * k1 - 7200/2197 * k2 + 7296/2197 * k3)
        k5 = h * f(ti + h, yi + 439/216 * k1 - 8 * k2 + 3680/513 * k3 - 845/4104 * k4)
        k6 = h * f(ti + 1/2 * h, yi - 8/27 * k1 + 2 * k2 - 3544/2565 * k3 + 1859/4104 * k4 - 11/40 * k5)

        yi_new = yi + (25/216) * k1 + (1408/2565) * k3 + (2197/4104) * k4 - (1/5) * k5
        t.append(ti + h)
        y.append(yi_new)

    return np.array(t), np.array(y)
```

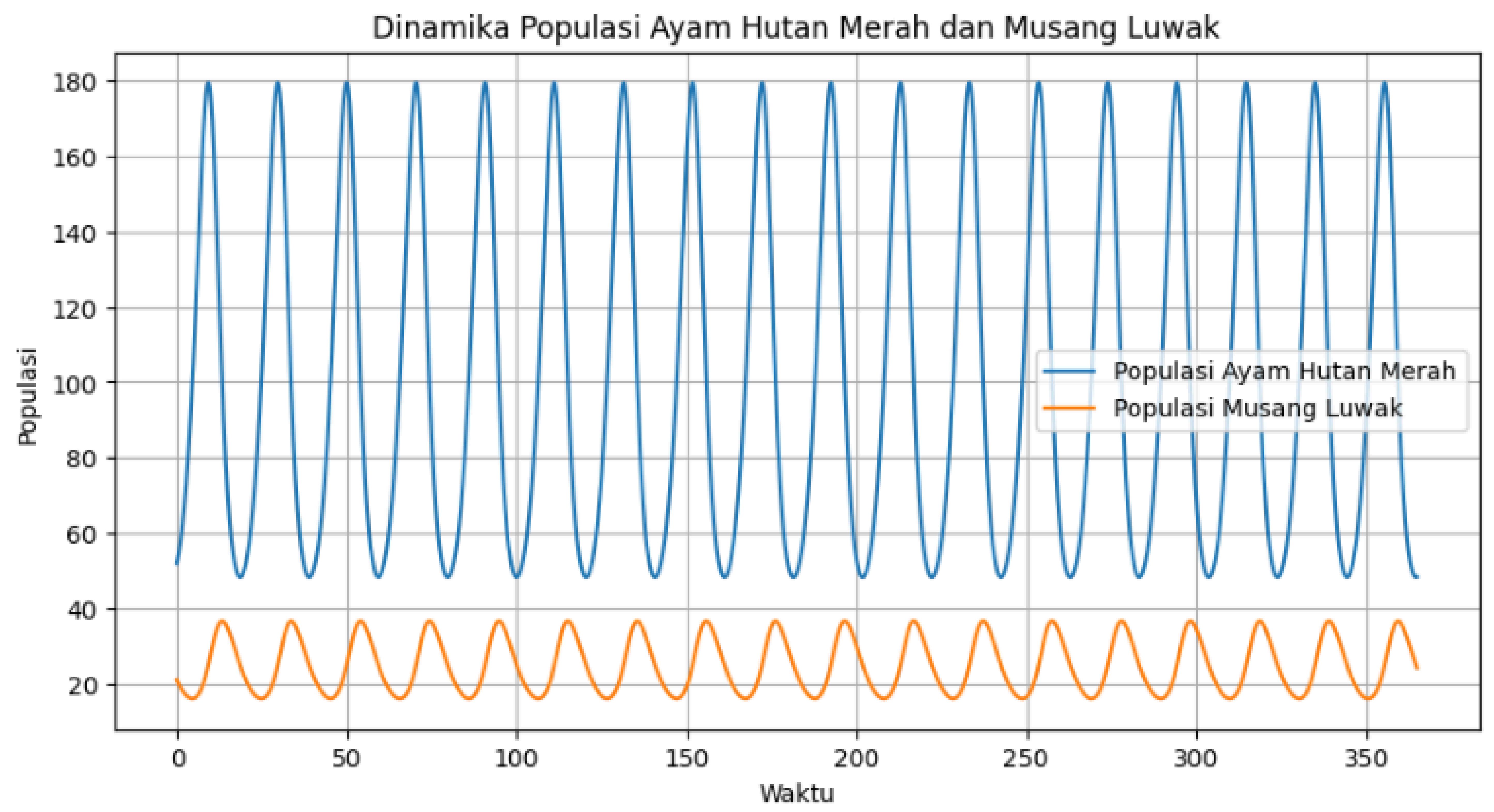
```python
# Inisialisasi kondisi awal dan parameter waktu
t0 = 0
t_end = 365
h = 0.1
x0, y0 = 52, 21  # Populasi awal ayam dan musang

# Jalankan simulasi
t, sol = rkf45(lotka_volterra, t0, np.array([x0, y0]), t_end, h)

# Plot hasil
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, sol[:, 0], label='Populasi Ayam Hutan Merah')
plt.plot(t, sol[:, 1], label='Populasi Musang Luwak')
plt.xlabel('Waktu')
plt.ylabel('Populasi')
plt.legend()
plt.title('Dinamika Populasi Ayam Hutan Merah dan Musang Luwak')
plt.grid()
plt.show()
```

INTERPRETASI SOLUSI

4. $a_1 = 0{,}5;\ a_2 = 0{,}2\ ;\ \beta_1 = 0{,}02\ dan\ \beta_2 = 0{,}002\ (a_1 > \beta_1)$



INTERPRETASI SOLUSI

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter model
alpha1 = 0.5  # Laju kelahiran ayam
beta1 = 0.5   # Laju kematian musang
alpha2 = 0.02 # Laju konsumsi ayam oleh musang
beta2 = 0.002  # Efisiensi konversi makanan menjadi pertumbuhan musang

# Fungsi untuk sistem persamaan diferensial
def lotka_volterra(t, y):
    x, y = y  # x: populasi ayam hutan merah, y: populasi musang luwak
    dxdt = alpha1 * x - alpha2 * x * y
    dydt = -beta1 * y + beta2 * x * y
    return np.array([dxdt, dydt])

# Implementasi metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)
def rkf45(f, t0, y0, t_end, h):
    t = [t0]
    y = [y0]

    while t[-1] < t_end:
        ti, yi = t[-1], y[-1]

        k1 = h * f(ti, yi)
        k2 = h * f(ti + 1/4 * h, yi + 1/4 * k1)
        k3 = h * f(ti + 3/8 * h, yi + 3/32 * k1 + 9/32 * k2)
        k4 = h * f(ti + 12/13 * h, yi + 1932/2197 * k1 - 7200/2197 * k2 + 7296/2197 * k3)
        k5 = h * f(ti + h, yi + 439/216 * k1 - 8 * k2 + 3680/513 * k3 - 845/4104 * k4)
        k6 = h * f(ti + 1/2 * h, yi - 8/27 * k1 + 2 * k2 - 3544/2565 * k3 + 1859/4104 * k4 - 11/40 * k5)

        yi_new = yi + (25/216) * k1 + (1408/2565) * k3 + (2197/4104) * k4 - (1/5) * k5
        t.append(ti + h)
        y.append(yi_new)

    return np.array(t), np.array(y)
```

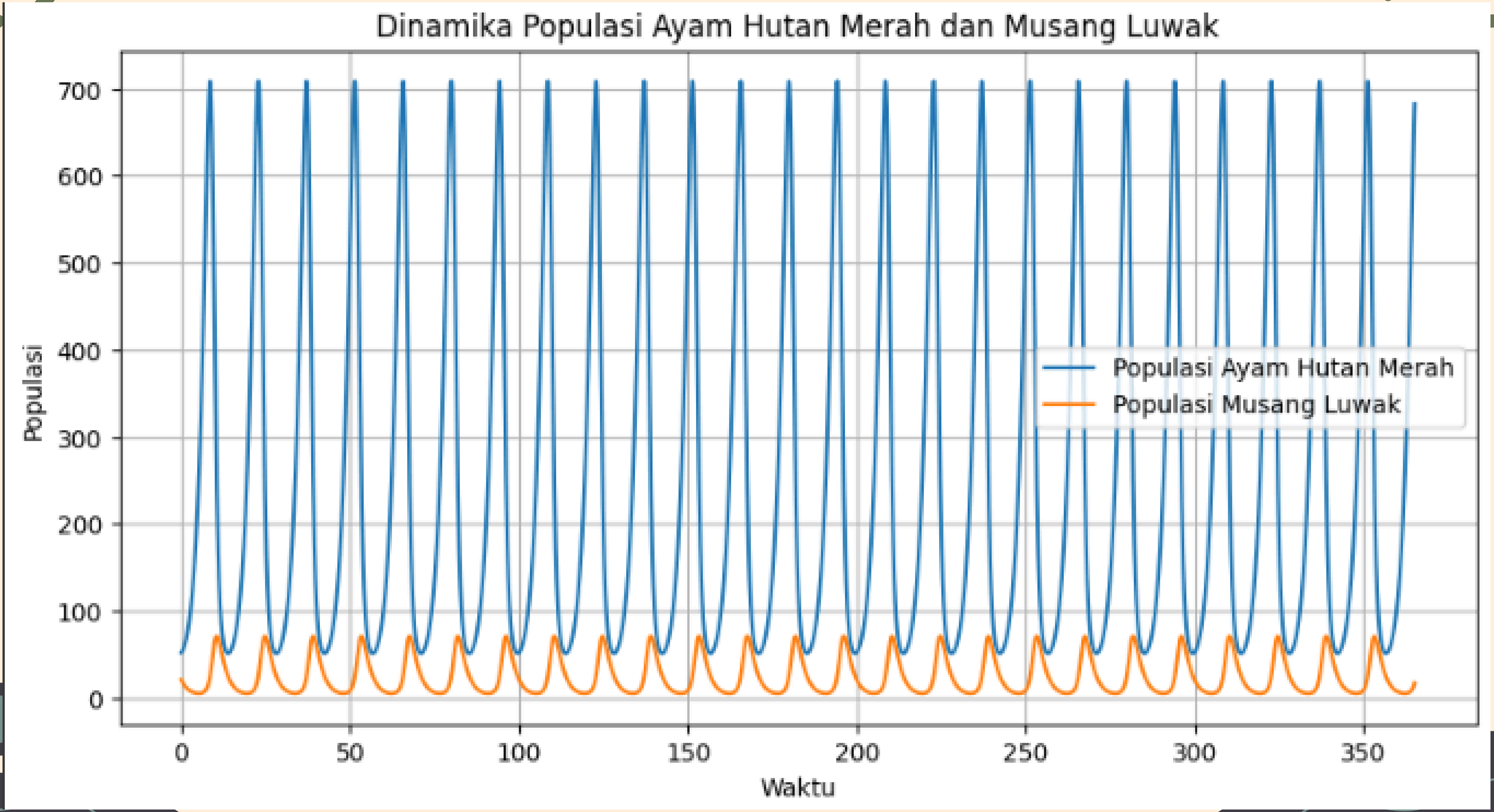
```python
# Inisialisasi kondisi awal dan parameter waktu
t0 = 0
t_end = 365
h = 0.1
x0, y0 = 52, 21  # Populasi awal ayam dan musang

# Jalankan simulasi
t, sol = rkf45(lotka_volterra, t0, np.array([x0, y0]), t_end, h)

# Plot hasil
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, sol[:, 0], label='Populasi Ayam Hutan Merah')
plt.plot(t, sol[:, 1], label='Populasi Musang Luwak')
plt.xlabel('Waktu')
plt.ylabel('Populasi')
plt.legend()
plt.title('Dinamika Populasi Ayam Hutan Merah dan Musang Luwak')
plt.grid()
plt.show()
```

INTERPRETASI SOLUSI

5. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}5\ ;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \ \beta_2 = 0{,}002\ \ (a_2 = \beta_1\ )$



INTERPRETASI SOLUSI

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter model
alpha1 = 0.5  # Laju kelahiran ayam
beta1 = 0.9   # Laju kematian musang
alpha2 = 0.02 # Laju konsumsi ayam oleh musang
beta2 = 0.002  # Efisiensi konversi makanan menjadi pertumbuhan musang

# Fungsi untuk sistem persamaan diferensial
def lotka_volterra(t, y):
    x, y = y  # x: populasi ayam hutan merah, y: populasi musang luwak
    dxdt = alpha1 * x - alpha2 * x * y
    dydt = -beta1 * y + beta2 * x * y
    return np.array([dxdt, dydt])

# Implementasi metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45)
def rkf45(f, t0, y0, t_end, h):
    t = [t0]
    y = [y0]

    while t[-1] < t_end:
        ti, yi = t[-1], y[-1]

        k1 = h * f(ti, yi)
        k2 = h * f(ti + 1/4 * h, yi + 1/4 * k1)
        k3 = h * f(ti + 3/8 * h, yi + 3/32 * k1 + 9/32 * k2)
        k4 = h * f(ti + 12/13 * h, yi + 1932/2197 * k1 - 7200/2197 * k2 + 7296/2197 * k3)
        k5 = h * f(ti + h, yi + 439/216 * k1 - 8 * k2 + 3680/513 * k3 - 845/4104 * k4)
        k6 = h * f(ti + 1/2 * h, yi - 8/27 * k1 + 2 * k2 - 3544/2565 * k3 + 1859/4104 * k4 - 11/40 * k5)

        yi_new = yi + (25/216) * k1 + (1408/2565) * k3 + (2197/4104) * k4 - (1/5) * k5
        t.append(ti + h)
        y.append(yi_new)

    return np.array(t), np.array(y)
```

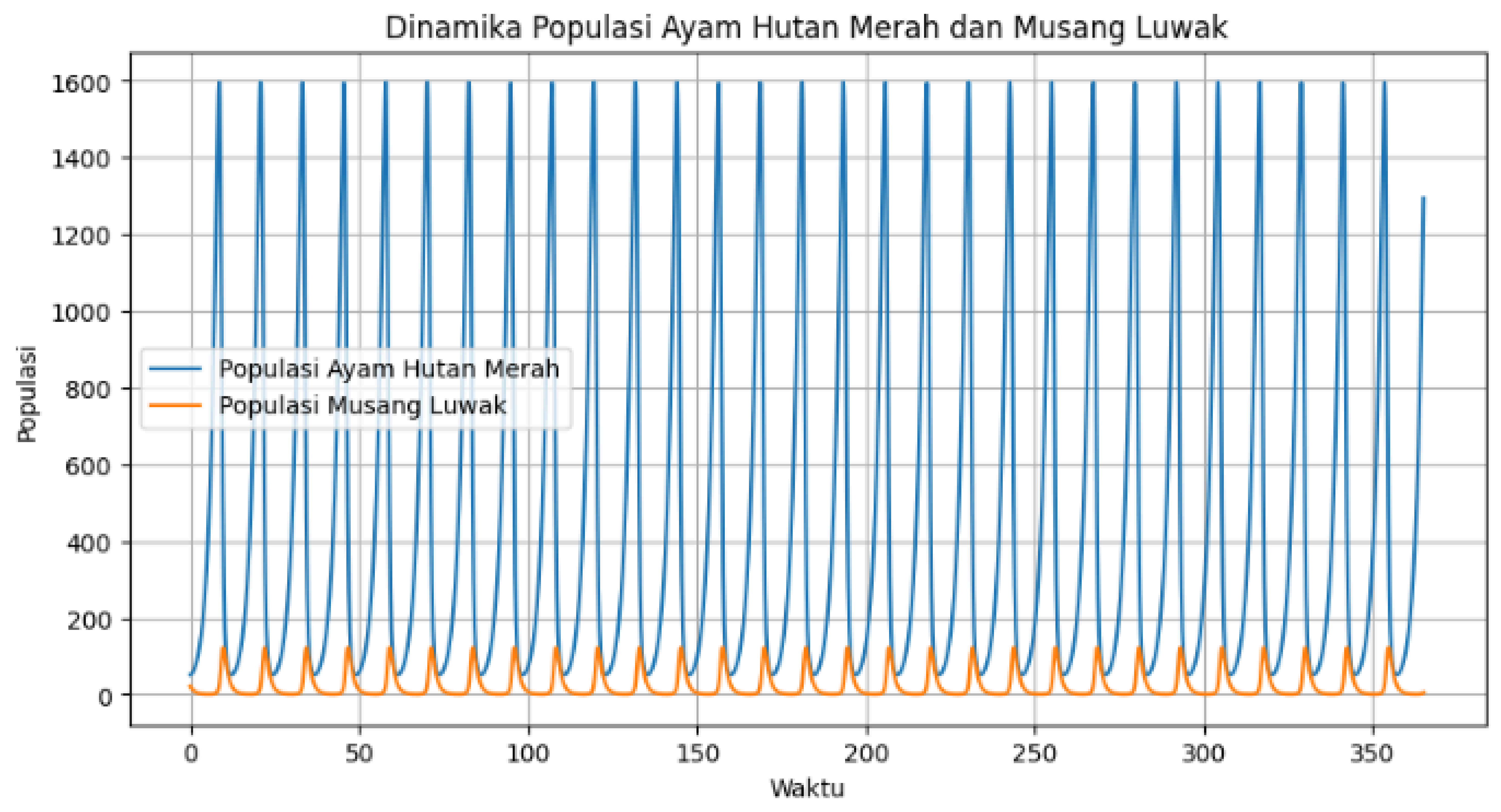
```python
# Inisialisasi kondisi awal dan parameter waktu
t0 = 0
t_end = 365
h = 0.1
x0, y0 = 52, 21  # Populasi awal ayam dan musang

# Jalankan simulasi
t, sol = rkf45(lotka_volterra, t0, np.array([x0, y0]), t_end, h)

# Plot hasil
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, sol[:, 0], label='Populasi Ayam Hutan Merah')
plt.plot(t, sol[:, 1], label='Populasi Musang Luwak')
plt.xlabel('Waktu')
plt.ylabel('Populasi')
plt.legend()
plt.title('Dinamika Populasi Ayam Hutan Merah dan Musang Luwak')
plt.grid()
plt.show()
```

INTERPRETASI SOLUSI

6. $a_1 = 0{,}5;\ \ a_2 = 0{,}9\ ;\ \ \beta_1 = 0{,}02\ \ dan\ \ \beta_2 = 0{,}002\ \ (a_1 < \beta_1)$



VALIDASI MODEL

Validasi model dengan RKF45 dilakukan dengan cara membandingkan hasil simulasi numerik dengan teori dan data ekologi nyata. RKF45 dipilih karena akurat, stabil, dan dapat menangani sistem non-linier. Hasil simulasi menunjukkan bahwa model memvalidasi pola dinamika populasi yang diharapkan, sehingga dapat digunakan untuk memahami interaksi predator-mangsa dalam ekosistem yang dikaji

PENGGUNAAN MODEL

1. Konservasi Satwa Liar , dengan memahami faktor yang memengaruhi populasi, langkah-langkah konservasi dapat diterapkan untuk mencegah kepunahan.
2. Manajemen Ekosistem, Dapat digunakan untuk membantu pengelolaan taman nasional dan habitat alami.
3. Pemantauan Dampak Lingkungan, bisa diterapkan untuk melihat efek perubahan lingkungan terhadap keseimbangan ekosistem.
4. Prediksi Dinamika Populasi di Masa Depan, membantu memprediksi apakah spesies akan bertahan atau punah dalam beberapa tahun ke depan.

KELEBIHAN

Jurnal ini tidak hanya menggunakan satu skenario, tetapi menguji 6 kasus dengan variasi parameter untuk melihat kemungkinan stabilitas atau kepunahan spesies.

KEKURANGAN

Jurnal ini menggunakan data perjumpaan satwa dari 2015-2017, bukan data populasi yang dihitung secara langsung sehingga model ini mungkin kurang akurat.

TERIMA KASIH