

PEMODELAN MATEMATIKA: PERTUMBUHAN LOGISTIK

Langkah 1: Identifikasi Masalah Dunia Nyata

Model pertumbuhan logistik digunakan untuk menggambarkan pertumbuhan populasi yang tidak terbatas pada laju eksponensial, tetapi dibatasi oleh faktor lingkungan, seperti sumber daya terbatas atau persaingan.

Contoh: Sebuah populasi ikan dalam sebuah danau memiliki laju pertumbuhan awal yang cepat, tetapi seiring waktu, pertumbuhan melambat karena keterbatasan makanan dan ruang.

Masalah: Bagaimana populasi ikan berkembang seiring waktu, dan kapan populasi akan mencapai kapasitas maksimalnya?

Langkah 2: Formulasi Masalah ke dalam Matematika

- $P(t)$ = Ukuran populasi pada waktu t
- r = Laju pertumbuhan intrinsik
- K = Kapasitas dukung lingkungan (batas maksimum populasi yang bisa didukung oleh lingkungan)
- dP/dt = Laju perubahan populasi terhadap waktu

Langkah 3: Membuat Asumsi

1. Sumber daya lingkungan terbatas.
2. Tidak ada migrasi masuk atau keluar dari populasi.
3. Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh kepadatan populasi.
4. Laju pertumbuhan awal mendekati eksponensial.

Langkah 4: Formulasi Model Matematis

Persamaan pertumbuhan logistik diberikan oleh:

$$dP/dt = rP(1 - P/K)$$

Dimana:

- Jika P masih jauh lebih kecil dari K , maka pertumbuhan hampir eksponensial.
- Jika P mendekati K , pertumbuhan melambat karena keterbatasan sumber daya.
- Jika $P > K$, populasi menurun akibat faktor lingkungan.

Langkah 5: Penyelesaian Model

Solusi umum dari persamaan diferensial logistik adalah:

$$P(t) = K / (1 + ((K - P_0)/P_0)e^{-rt})$$

Dimana P_0 adalah populasi awal pada $t = 0$.

Langkah 6: Simulasi dan Analisis

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def logistic_growth(P0, r, K, t_max, dt=0.1):
    """
    Simulasi pertumbuhan logistik menggunakan metode numerik Euler.

    Parameters:
    P0 : float - Populasi awal
    r : float - Laju pertumbuhan intrinsik
    K : float - Kapasitas dukung lingkungan
    t_max : float - Waktu maksimum simulasi
    dt : float - Interval waktu (default 0.1)

    Returns:
    t_values : array - Waktu
    P_values : array - Populasi pada setiap waktu
    """
    t_values = np.arange(0, t_max, dt)
    P_values = np.zeros_like(t_values)
    P_values[0] = P0

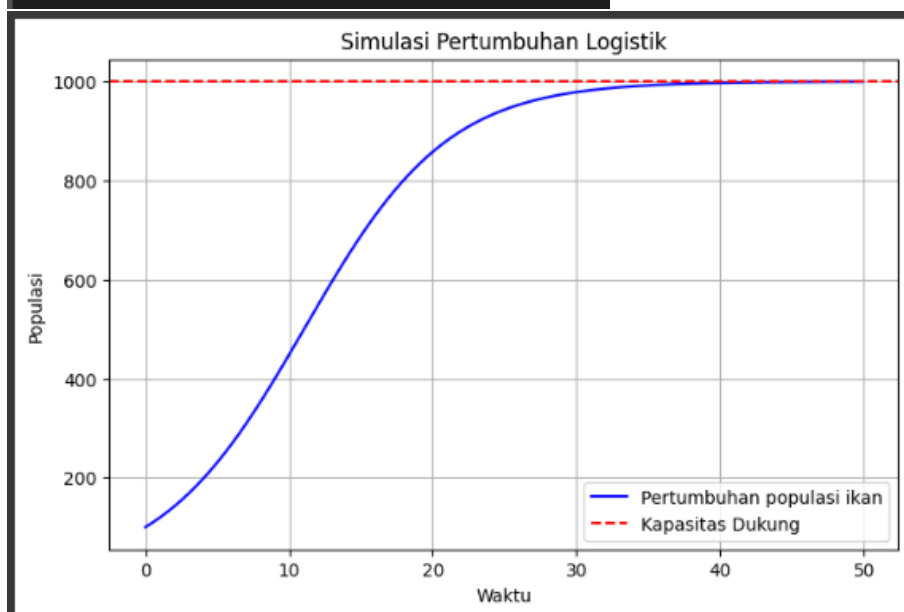
    for i in range(1, len(t_values)):
        dP_dt = r * P_values[i-1] * (1 - P_values[i-1] / K)
        P_values[i] = P_values[i-1] + dP_dt * dt

    return t_values, P_values
```

```
# Parameter model
P0 = 100 # Populasi awal
r = 0.2 # Laju pertumbuhan
K = 1000 # Kapasitas dukung
t_max = 50 # Waktu maksimum

# Menjalankan simulasi
t, P = logistic_growth(P0, r, K, t_max)

# Visualisasi hasil
plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(t, P, label='Pertumbuhan populasi ikan', color='blue')
plt.axhline(K, linestyle='--', color='red', label='Kapasitas Dukung')
plt.xlabel('Waktu')
plt.ylabel('Populasi')
plt.title('Simulasi Pertumbuhan Logistik')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Langkah 7: Validasi Model

- Bandingkan prediksi populasi $P(t)$ dengan data nyata dari populasi ikan di danau.
- Jika model tidak sesuai, lakukan perbaikan asumsi atau penyesuaian parameter r dan K .

Langkah 8: Penggunaan Model

Model pertumbuhan logistik dapat digunakan dalam berbagai bidang:

Ekologi → Menentukan batas populasi dalam suatu ekosistem.

Epidemiologi → Menganalisis penyebaran penyakit yang melambat setelah banyak orang terinfeksi.

Ekonomi → Menentukan tingkat pertumbuhan industri dalam batasan sumber daya.

Teknologi → Memprediksi adopsi teknologi baru dalam suatu populasi.