

Selamat malam

Yang terhormat Tutor, Ibu Minanur Rohman – 04000425

Izin menjawab

Pertanyaan :

1. Untuk semua real x dan y yang tidak sama dengan 0, jika $x < y$, maka apakah hubungan antara $(1/x)$ dan $(1/y)$. (Hint. Gunakan sifat-sifat bilangan real, terutama invers dan identitas)
2. Berikan contoh persamaan dan pertidaksamaan berikut solusinya.
3. Diberikan $x_n = (3n-2)/(2n+1)$ dan $y_n = 1/n$ untuk n ganjil dan $y_n = n/(n+2)$ untuk n genap, maka apakah x_n dan y_n adalah barisan? Jika iya, maka apakah konvergen? tentukan pula supremum dan infimum dari x_n dan y_n .

Jawaban :

1. Hubungan antara $1/x$ dan $1/y$ jika $x < y$

Sifat Bilangan Real yang Digunakan:

1. Sifat Invers Perkalian:

Untuk setiap $a \neq 0$, ada $1/a$ sehingga $a \times 1/a = 1$.

2. Sifat Urutan:

Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $ac < bc$.

Jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$ (tanda berbalik).

- a. Apabila x dan y positif ($x, y > 0$) :

- Jika diketahui $x < y$,

Kalikan kedua ruas dengan $1/xy$ (nilai positif karena $x, y > 0$)

$1/y < 1/x$ jadi $1/x > 1/y$

maka membalikkan kedua sisi akan membalikan tanda pertidaksamaan.

- karena fungsi $f(z) = 1/z$ monoton turun $z > 0$, jadi $1/x > 1/y$.

Contoh :

$x = 2, y = 4 \sim 1/2 > 1/4$

- b. Apabila x dan y negative ($x, y < 0$) :

- Misal $x = -a$ dan $y = -b$ dengan $a, b > 0$.

- Jika $-a < -b$, maka $a > b$ (dikalikan -1).

- Membalikkan $1/a < 1/b$.

- Jadi, $-1/a > -1/b$, atau $1/x > 1/y$.

Contoh :

$x = -4, y = -2 \sim 1/-4 > 1/-2$ ((karena $-0.25 > -0.5$)

c. Apabila x negative dan y positif ($x < 0 < y$)

- $1/x$ negative dan $1/y$ positif.

Setiap bilangan negative lebih kecil dari bilangan positif :

jadi, $1/x < 1/y$.

Contoh :

$$x = -5, y = 3 \sim 1/-5 < 1/3$$

- Jika x dan y bertanda sama, maka :

$$x < y \sim 1/x > 1/y$$

(Tanda pertidaksamaan berbalik karena pembagian oleh bilangan positif).

- Jika x negative dan y positif, maka

$$1/x < 1/y$$

Catatan tambahan :

✓ Fungsi $f(x) = 1/x$

- Monoton turun untuk $x > 0$ (jika x naik, $f(x)$ turun).

- Monoton turun untuk $x < 0$ (jika x naik mendekati 0, $f(x)$ turun).

✓ Pentingnya syarat $x, y \neq 0$:

Invers $1/x$ tidak didefinisikan jika $x = 0$

Contoh :

Misal $x = -2, y = 1$

$\sim x < y$ (benar, karena $-2 < 1$).

$\sim 1/x = -0.5$ dan $1/y = 1$

$\sim -0.5 < 1$

2. Contoh persamaan dan pertidaksamaan.

a. Persamaan linier

Persamaan linier adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variable Tunggal. Secara umum sistem persamaan linear memiliki dua sifat utama, yaitu :

1. Penambahan dan pengurangan bilangan di kedua ras persamaan 1 tidak akan mengubah Solusi persamaan tersebut.

2. Perkalian untuk bilangan tidak nol pada kedua ruas persamaan adalah 1 dan tidak akan mengubah solusi persamaan tersebut.

Contoh soal :

Diketahui, $3x - 5 = 10$

Langkah-langkah menjawab :

- Pindahkan konstanta ke ruas kanan:

$$3x = 10 + 5 \sim 3x = 15$$

- Isolasi variable x dengan membagi koefisiennya:

$$x = 15 \div 3 \sim x = 5$$

- Maka, $3(5) - 5 = 15 - 5 = 10$

b. Persamaan kuadrat

Persamaan kuadrat adalah sebuah persamaan polinomial (persamaan suku banyak) yang pangkat tertingginya 2 atau berorde 2.

Contoh soal :

Diketahui $x^2 - 5x + 6 = 0$

Langkah-langkah menjawab :

- Faktorkan terlebih dahulu $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

- Cari nilai x

$$x - 2 = 0 \sim x = 2$$

$$x - 3 = 0 \sim x = 3$$

- Maka

$$\sim \text{Untuk } x=2: (2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \text{ (benar)}$$

$$\sim \text{Untuk } x=3: (3)^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0 \text{ (benar)}$$

c. Pertidaksamaan linier

Pertidaksamaan linier adalah pertidaksamaan yang melibatkan fungsi linier.

Pertidaksamaan linier mengandung salah satu simbol pertidaksamaan: <kurang dari > lebih besar dari \leq kurang dari atau sama dengan \geq lebih besar dari atau sama dengan \neq tidak sama dengan.

Contoh soal :

$$2x + 3 \leq 7$$

Langkah-langkah menjawab

- Kurangi 3 di kedua sisi

$$2x \leq 4$$

- Bagi 2 (karena positif, tanda tetap)

$$x \leq 2$$

- Maka, notasi interval $(-\infty, 2]$

d. Pertidaksamaan kuadrat

Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan berorde dua. Bentuk umum dari persamaan kuadrat adalah dengan cara Huruf-huruf a, b dan c disebut sebagai koefisien: koefisien kuadrat a adalah koefisien dari, koefisien linier b adalah koefisien dari x, dan c adalah koefisien konstan atau disebut juga suku bebas.

Contoh soal :

$$x^2 - 4x > 5$$

Langkah-langkah menjawab :

- Faktorkan terlebih dahulu $x^2 - 4x > 5$

$$(x - 5)(x + 1) > 0$$

- Cari nilai x

$$x - 5 = 0 \sim x = 5$$

$$x + 1 = 0 \sim x = -1$$

- Maka :

$\sim x < -1$ Misal $x = -2 \sim (-7)(-1)=7 > 0$ (benar)

$\sim -1 < x < 5$ Misal $x = 0 \sim (-5)(1)=-5 > 0$ (salah)

$\sim x > 5$ Misal $x = 6 \sim (1)(7)=7 > 0$ (benar)

Solusi, $x < -1$ atau $x > 5$

e. Persamaan rasional

Persamaan rasional adalah persamaan yang mengandung pecahan dengan variabel (biasanya x) di pembilang, penyebut, atau keduanya.

Contoh soal :

$$(x + 2)/(x - 1) = 3$$

Langkah-langkah menjawab

- Kalikan silang

$$x + 2 = 3(x - 1)$$

- Lanjutkan perhitungannya

$$x + 2 = 3x - 3$$

$$-2x = -5$$

$$x = 5/2$$

dengan syarat $x \neq 1$ (penyebut $\neq 0$)

f. Pertidaksamaan nilai mutlak

Pertidaksamaan nilai mutlak adalah pertidaksamaan linear satu variabel yang berada di dalam tanda mutlak. Konsep dasar pertidaksamaan nilai mutlak ini hampir sama dengan persamaan. Hanya saja, pada pertidaksamaan kamu harus mempertimbangkan tanda pertidaksamaan yang berlaku, misalnya " $<$ ", " $>$ ", " \leq ", atau " \geq ".

Contoh soal :

$$|2x - 3| < 7$$

Langkah-langkah menjawab :

- Bentuk compound inequality

$$\sim -7 < 2x - 3 < 7$$

$$\sim -4 < 2x < 10$$

$$\sim -2 < x < 5$$

maka $(-2, 5)$

Point penting

1. Untuk pertidaksamaan,

- Jika mengalikan/membagi bilangan negatif, tanda dibalik

$$\text{Contoh: } -2x > 6 \rightarrow x < -3$$

2. Untuk persamaan kuadrat,

- Jika tidak bisa difaktorkan, gunakan rumus ABC:

$$x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}]/(2a)$$

3. Untuk pertidaksamaan rasional,

- Selalu cari nilai yang membuat penyebut = 0 (harus dikecualikan)

3. Diberikan $x_n = (3n-2)/(2n+1)$ dan $y_n = 1/n$ untuk n ganjil dan $y_n = n/(n+2)$ untuk n genap, maka apakah x_n dan y_n adalah barisan? Jika iya, maka apakah konvergen? tentukan pula supremum dan infimum dari X_n dan Y_n .

a. Analisis barisan x_n dan y_n

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya himpunan bilangan asli (\mathbb{N})

Pengecekan :

- $X_n = 3n - 2 / 2n + 1$ terdefinisi untuk semua $n \in \mathbb{N} \sim$ barisan.
- Y_n terdefinisi untuk semua $n \in \mathbb{N}$ (baik ganjil maupun genap) \sim barisan.

b. Konvergensi barisan X_n

- Bagi pembilang dan penyebut dengan n

$$X_n = \frac{3 - 2/n}{2 + 1/n}$$

- Hitung limit saat $n \sim \infty$

$$\lim_{n \sim \infty} X_n = \frac{3 - 0}{2 + 0} = 3/2$$

$n \sim \infty$

- Kesimpulan X_n konvergen ke $3/2$.

- Supremum dan infimum X_n :

- * Turunan pertama $f'(n) = 3n - 2 / 2n + 1$:
 $f''(n) = 7 / (2n + 1)^2 > 0$ (monoton naik)
- * Infimum nilai terkecil di $n = 1$
 $X_1 = \frac{3(1) - 2}{2(1) + 1} = 1/3$
- * Supremum limit saat $n \sim \infty : 3/2$

c. Konvergensi barisan Y_n

barisan yang memiliki limit, yaitu suatu nilai yang didekati oleh suku-suku barisan saat n mendekati tak hingga.

$\sim Y_n = 1/n$ apabila n ganjil

$\sim Y_n = n / n+2$ jika n genap

Analisis :

- untuk n ganjil

$$\lim_{n \sim \infty} Y_n = \lim_{n \sim \infty} 1/n = 0$$

$n \sim \infty$ $n \sim \infty$

- untuk n genap

$$\lim_{n \sim \infty} Y_n = \lim_{n \sim \infty} n / n + 2 = 1$$

$n \sim \infty$ $n \sim \infty$

Karena dua subbarisan konvergen ke nilai berbeda, y_n tidak konvergen.

- Supremum dan infimum Y_n :

- * Nilai untuk beberapa n :
 - Ganjil, $y_1 = 1, y_3 = 1/3, y_5 = 1/5, \dots$
 - Genap, $y_2 = 2/4 = 0.5, y_4 = 4/6 = 0.666, y_6 = 6/8 = 0.75$
- * Supremum, nilai terbesar adalah 1 (dicapai saat $n = 1$)
- * Infimum, nilai terkecil mendekati 0 (tidak pernah dicapai)

Kesimpulan Akhir:

- X_n adalah barisan konvergen dengan supremum dan infimum yang jelas.
- Y_n adalah barisan divergen dengan supremum 1 dan infimum 0.