Matriks

Bagus Tris Atmaja
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

bagus@ep.its.ac.id

Table of Contents

Definisi

Matriks adalah suatu susunan deretan empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang tersusun dalam m baris dan n kolom dalam tanda kurung.
Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

adalah suatu matriks berukuran 3x4. Ditulis A_{3x4} (3 baris 4 kolom).
Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya (disebut matriks dengan orde n).
Matriks Simetris adalah matrik bujur sangkar jika ditransposekan hasilnya sama.

$$A = A^T$$

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Trace: Jumlah elemen diagonal pokok suatu matriks bujur sangkar.

$$Trace \quad A = 2 + 5 + 1 = 8$$

- Matriks singular: Jika determinan matriks bujur sangkar adalah nol.

$$|A| = 0$$

- Matriks baris: Jika $m = 1$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Matriks

- Matriks kolom: Jika $n = 1$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

- Matris nol: matriks yang semua elemennya adalah nol.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriks Satuan/Identitas:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks

- Matriks Diagonal: Matriks bujur sangkar yang mempunyai nilai pada elemen diagonal sedang elemen lainnya nol.

$$a_{ii} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} \end{bmatrix}$$

- Transpose: transpose dari matriks A adalah matriks dimana baris dan kolom dipertukarkan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \implies A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- Minor: Minor M_{ij} dari suatu matriks A dibentuk dengan menghilangkan baris ke i dan kolom ke j dari matriks asal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \implies M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks

- <u>Kofaktor</u>: Kofaktor C_{ij} adalah sama dengan minor yang tertanda $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = -M_{12}$$

- <u>Matriks Inversi</u>: Inversi (A^{-1}) dari matriks A memenuhi hubungan,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

- <u>Matriks orthogonal</u>: Matriks yang mememenuhi hubungan,

$$A^T A = AA^T = I$$

Matriks

- Matriks skew: matriks bujur sangkar yang memiliki elemen diagonal 0 dan selain elemem diagonal tersebut mememenuhi $a_{ij} = -a_{ji}$.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$
- Transpose matriks skew didapatkan dengan membalik tanda pada tiap elemen.

Adjoint Matriks

Suatu matriks adjoint dari matriks bujur sangkar A adalah transpose matriks kofaktor A.
Misalkan matriks kofaktor A adalah:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = \left[C_{ij}^{\top}\right] = \left[C_{ji}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks

- Penjumlahan & Pengurangan:
  Dua matriks yang mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama boleh dijumlahkan/dikurangkan dengan menambah/mengurangi elemem-elemen yang sesuai.
  Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Perkalian:
  Perkalian Skalar: Jika skalar c dikalikan dengan matriks A maka tiap elemen A dikalikan dengan $c \;\rightarrow\; ca_{ij}$
  Perkalian dua matriks A dan B akan menghasilkan matriks C.
  Syarat $A_{mxp}B_{pxn} = C_{mxn}$, jumlah kolom A = jumlah baris B

$$AB = C, \Leftrightarrow AB \neq \; BA$$

Perkalian Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 1 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} = C$$

$$C_{21} = (1 \times 2) + (2 \times 0) + (2 \times 3) = 8$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Number of column } \mathbf{A} = \text{number of row } \mathbf{B} \\ \text{Size of product } \mathbf{AB} = (\text{number of rows } \mathbf{A}) \times (\text{number of column } \mathbf{B}) \end{array}}$$

Soal

Hitunglah perkalian matriks **A** dan **B** berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -8 & 2 \\ 7 & 6 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Kuadrat Matriks

Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka pangkat non-negatif $\mathbf{A}$ diberikan oleh $\mathbf{A}^0 = \mathbb{I}_n$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$, dan untuk $k \geq 2$,
$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{A}^{k-1})(\mathbf{A})$$

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka,

$$A^2 = (A)(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -20 & 5 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = (A^2)(A) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -20 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 15 \\ -60 & -5 \end{bmatrix}$$

Determinan

Determinan adalah suatu nilai yang dihitung dari *matriks bujur sangkar*

Ada beberapa cara untuk menghitung determinan:

- Ekspansi Laplace

  Nilai det Δ tk n $=$ jumlah hasil ganda elemen-elemen dari sebuah baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian.

  $$\Delta = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} K_{ij}$$

  (Ekspansi menurut elemen-elemen baris ke-i)

- Aturan Sarrus

Ekspansi Laplace

Dapatkan nilai determinan tingkat 2, $\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Didapatkan minor dan kofaktor sebagai berikut :

$$M_{11} = a_{22}; M_{12} = a_{21}$$

$$K_{11} = M_{11} = a_{22}; \quad K_{12} = -M_{12} = -a_{21};$$

Jika determinan itu dikembangkan menurut elemen-elemen baris ke-i maka :

$$\Delta = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} = a_{12}(a_{22}) + a_{12}(-_{21})$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Hasil ganda elemen-elemen diagonal pokok − hasil ganda elemen-elemen kedua

Ekspansi Laplace

Dapatkan nilai determinan tingkat 3 dari matriks berikut:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Algoritma:

1. Rumuskan ekspansi laplace-nya menurut baris/kolom ke-i
2. Dapatkan minor dari elemen-elemen yang bersesuaian
3. Dapatkan kofaktor dari minor di atas
4. Masukkan matriks kofaktor pada deret 1.

Aturan Sarrus

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

The determinant of the three columns on the left is the sum of the products along the solid diagonals minus the sum of the products along the dashed diagonals.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

<u>Contoh</u>, dapatkan determinan dari matriks berikut:

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Inverse Matriks

- Jika **A** dan **B** adalah matriks bujur sangkar sedemikian hingga $\mathbf{AB} = I$, maka **B** disebut inverse dari A dan ditulis $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, demikian juga sebaliknya.

$$\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

- Invers dari suatu matriks adalah tunggal, misal B dan C adalah inverse dari matriks A, maka:

$$A\ B = I, \quad dan \quad C\ A = I$$

Bukti,

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

Sehingga $B = C$.

Inverse Matriks: Sifat

Jika matriks A_{nxn} dan B_{nxn} masing-masing mempunyai inverse A^{-1} dan B^{-1} maka:

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti:

- Dari $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ maka langsung terbukti bahwa $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- Misalkan $X = (AB)^{-1}$; maka $(AB)X = I$
  Dengan sifat asosiatif dibuktikan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Matriks Singular

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$

1. Jika $|A| = 0$, maka A^{-1} tidak ada
2. Kasus ini dinamakan matriks singular
3. Implikasi:
   - Tidak ada solusi solusi
   - Ada beberapa solusi (unik)

Matriks Non-Singular

Jika A matriks non-singular, maka:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}}$$

Bukti:

$$A\ adj\ A = |A| I \Longrightarrow I = A\frac{adj\ A}{|A|}$$

Sehingga,

$$A^{-1} I = A^{-1} A\frac{adj\ A}{|A|}$$

$$A^{-1} = I\frac{adj\ A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$

Inverse Matriks 2x2

Dapatkan A^{-1} dari $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Penyelesaian:

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Matriks kofaktor, $C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$$adj\ A = C^{\top} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Sistem Persamaan Linear

Suatu persamaan linear dapat dituliksan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$A\ X = H \longrightarrow X = A^{-1} H$$

Jika $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ maka SPL tsb disebut SPL homogen, jika tidak maka disebut SPL non-homogen. Jika SPL diatas mempunyai pemecahan maka disebut SPL konsisten, jika tidak maka disebut SPL tak konsisten.
Metode pemecahan:

- Metode Invers
- Metode Augmented Matriks /
- Metode Eliminasi Gauss

Metode inverse matriks

Selesaikan sistem persamaan:

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x + 4y + 9z = 36$$

Solusi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} ; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; H = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$A.X = H$$

$$X = A^{-1}.H$$

Metode inverse matriks [2]

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2; \quad adj\ A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} H$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Operasi-operasi elementer

Pada metode augmented matriks (matriks yang diperbesar) dan eliminasi Gauss, prosedur penyeselaian SPL dilakukan dengan operasi-operasi baris elementer sebagai berikut:

1. Mengalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tidak sama dengan nol.
2. Menukarkan letak 2 baris.
3. Menambahkan perkalian dari satu baris pada baris yang lain.

Metode augmented matriks

Metode augmented matriks (matriks yang diperbesar)/Eliminasi Gauss mereduksi ukuran matriks sehingga matriks segitiga bawah menjadi nol (disebut juga matriks segitiga atas).

$$\begin{bmatrix} a & b & c & h_a \\ 0 & e & f & h_b \\ 0 & 0 & i & h_c \end{bmatrix}$$

Metode eliminasi Gauss

Selesaikan persamaan serentak berikut,

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1$$

Penyelesaian,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{11} \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

Algoritma untuk soal tersebut:

1. baris ke-2 dikurangi 3x baris ke-1
2. baris ke-3 dikurangi dengan baris ke-1
3. baris ke-2 dikalikan -1
4. baris ke-3 dikurangi 4x baris ke-2
5. baris ke-3 dikali dengan $\frac{1}{11}$

   Sehingga diperoleh $x_3 = -\frac{14}{11}, x_2 = \frac{5}{11}, x_1 = 4$

Nilai eigen dan Vektor eigen

Nilai Eigen (nilai karakteristik, nilai laten) adalah bilangan skalar λ untuk persamaan non-trivial $x \neq 0$ yang memenuhi $AX = \lambda X$.
Vektor Eigen (vektor karakteristik dari matriks bujur sangkar A) adalah solusi dari X yang bersesuaian dengan nilai λ tertentu.

$$AX = \lambda X \quad atau \quad (A - \lambda I)X = 0$$

Determinan karakteristik, $|A - \lambda I|$
Persamaan karakteristik, $|A - \lambda I| = 0$
Contoh: Dapatkan nilai eigen dan vektor eigen dari,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 1 \\ 3 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 5$$

Nilai eigen dan Vektor eigen

Untuk $\lambda_1 = 1 \rightarrow \quad AX = \lambda X$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, Vektor eigen untuk $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Buktikan jawaban di atas!