# Turunan Fungsi

bagustris

10 Oktober 2016

# Table of Contents

Limit Fungsi

Turunan

Fungsi Hiperbolik

Aturan Berantai

Turunan Tingkat Tinggi

Rumus Leibnitz

Turunan fungsi parametrik

Menurunkan Fungsi Implisit

Logaritma Natural

# Limit fungsi

Definisi:

Fungsi $y = f(x)$ dikatakan mempunyai Limit L untuk $x$ mendekati $a$ ditulis

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (yang bagaimanapun kecilnya) dapat ditunjuk bilangan $\delta > 0$ (biasanya bergantung pada $\varepsilon$) sedemikian hingga $|f(x) = L| < \varepsilon$ untuk $0 < |x - a| < \delta$.

Dalil-dalil limit:

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$ maka :

1. $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$
2. $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = L.M$
3. $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L}, \quad jika\ L \neq 0$
4. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad jika\ M \neq 0$

# Fungsi Kontinyu

Definisi: Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan kontinyu di $x = a$ jika

1. f(a) ada
2. $\lim_{x \to a} f(a) = ada$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Tegasnya $f(x)$ disebut kontinyu di $x = a$ jika

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ada.

Jika $f(x)$ kontinyu pada setiap titik dari suatu interval maka $f(x)$ dikatakan kontinyu pada interval itu.

Jika satu alasan atau lebih dari syarat-syarat kontinyuitas diatas tidak terpenuhi, maka $f(x)$ dikatakan diskontinyu di $x = a$.

# Turunan fungsi

- Limit fungsi ketika $x$ mendekati nilai a didefinisikan sbg,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

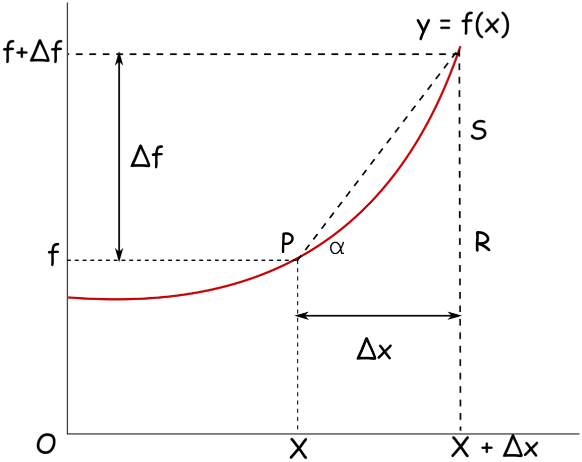
- Kalkulus diferensial $\rightarrow$ laju perubahan fungsi $\Delta f$ terhadap perubahan waktu $\Delta x$.
- Laju perubahan $\rightarrow$ rasio dari perubahan fungsi $\Delta f$ terhadap perubahan waktu $\Delta x$.
- Sepanjang interval $\Delta x$, fungsi berubah dari $f(x)$ menjadi $f(x + \Delta x)$, sehingga

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- Apabila kita memperkecil $\Delta x$ maka turunan $\Delta f \ / \ \Delta x$ sama dengan mencari limitnya,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

# Turunan fungsi



# Soal

Dengan menggunakan definisi turunan $\left(\frac{df}{dx} = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$, dapatkan turunan dari fungsi berikut:

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = 2x$
4. $f(x) = \sin(x)$

# Sifat-sifat Turunan

Jika $u = f(x), v = g(x)$, maka:

1. $y = u \pm v \Longrightarrow y' = u' \pm v'$
2. $y = uv \Longrightarrow y' = u'v + uv'$
3. $y = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $y = u^v \Longrightarrow y' = u^v\left(v' \ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$

Beberapa rumus turunan[1]:

1. $y = C \Longrightarrow y' = 0$
2. $y = x^n \Longrightarrow y' = nx^{n-1}$
3. $y = e^x \Longrightarrow y' = e^x$
4. $y = \ln x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$
5. $y =^a \log x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $y = a^x; (a > 0, a \neq 1) \Longrightarrow y' = a^x \ln a$

# Beberapa Rumus Turunan[2]

7. $y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x$
8. $y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x$
9. $y = \tan x \Longrightarrow y' = \sec^2 x$
10. $y = \cot x \Longrightarrow y' = -\csc^2 x$
11. $y = \sec x \Longrightarrow y' = \sec x \tan x$
12. $y = \csc x \Longrightarrow y' = -\csc x \cot x$
13. $y = \ln|\sin x| \Longrightarrow y' = \cot x$
14. $y = \ln|\cos x| \Longrightarrow y' = -\tan x$
15. $y = \ln|\sec x + \tan x| \Longrightarrow y' = \sec x$
16. $y = \ln|\csc x - \cot x| \Longrightarrow y' = \csc x$
17. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}$

# Beberapa Rumus Turunan[3]

18. $y = \arcsin x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19. $y = \arccos x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $y = \arctan x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
21. $y = arccot\ x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
22. $y = arcsec\ x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
23. $y = arccsc\ x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

# Fungsi Hiperbolik

Definisi:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Sifat-sifat:

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
3. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

Turunan:

1. $y = \sinh x \Longrightarrow y' = \cosh x$
2. $y = \cosh x \Longrightarrow y' = \sinh x$
3. $y = \tanh x \Longrightarrow y' = sech^2 x$

## Aturan berantai

Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$ dan $v = h(x)$ maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Soal:

1. $y = (2x + 5)^5 \Longrightarrow \; y' = ...?$
2. $y = (x^2 + 2)^4 \Longrightarrow \; y' = ...?$

# Turunan tingkat tinggi

$y = f(x) \Longrightarrow$ turunan ke 1 terhadap x adalah $y' = f'(x)$
turunan ke 2 terhadap x adalah $y'' = y^{(2)} = f^{(2)}(x)$
turunan ke 3 terhadap x adalah $y''' = y^{(3)} = f^{(3}(x)$
...dst
turunan ke n terhadap x adalah $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

Soal:

1. $y = e^{ax} \to y^{(n)} = ....?$
2. $y = \sin x \to y^{(n)} = ....?$

# Rumus Leibnitz

$D = \dfrac{d}{dx}$ operator turunan; $D^2 = \dfrac{d^2}{dx^2}$;

$$D = \frac{d}{dx} \rightarrow \ \textit{operator turunan tingkat } n$$

Jika $y = UV$ dimana $U = f(x)$ dan $V = g(x)$ maka turunan $n$ dari $y$ terhadap $x$ dinyatakan dengan $y^(n) = D^n(UV)$ dan dirumuskan sbb:

$$y^n(UV) = UD^nV + nDUD^{n-1}V + \frac{1}{2!}n(n-1)D^2UD^{n-2}V + \frac{1}{3!}n(n-1)D^3UD^{n-3}V + \ldots \quad (1)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} y = UV \Longrightarrow y' &= UV' + U'V \\ y" &= UV" + 2U'V' + U"V \\ y^{(3)} &= UV^{(3)} + 3U'V^{(2)} + 3U^{(2)V'} + U^{(3)}V \end{aligned}$$

# Turunan fungsi parametrik

Jika $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ maka,

$$\boxed{y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; y" = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \ldots}$$

$$y^{(n)} = \frac{\frac{dy^{(n-1)}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

<u>Soal:</u>

Dapatkan $y"$ dari $x = a \cos t$ dan $y = b \sin t$

# Menurunkan fungsi implisit

$y'$ dari $f(x, y) = 0$ didapat sebagai berikut:

1. Jika mungkin $y$ dinyatakan sebagai fungsi explisit dalam x
   Contoh: $x^2 + y - 3 = 0 \Longrightarrow y = 3 - x^2$
   $$y' = -2x$$
2. Setiap suku dalam $f(x, y) = 0$ diturunkan terhadap x. Karena $y$ fungsi $x$ maka setiap kali menurunkan $y$ harus digandakan dengan $y'$, kemudian hubungan yang didapat diselesaikan ke $y'$.
   Contoh:
   $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
   $3x^2 + 3y^2y^1 - 3a(y + xy') = 0$
   $3(ax - y^2)y^1 = 3(x^2 - ay) \Longrightarrow y' = \dfrac{x^2 - ay}{ax - ay}$

# Logaritma dan Bilangan Natural

$$\boxed{{}^a\log b = c} \Longrightarrow \text{logaritma Brigg}$$

Syarat: $a > 0, a \neq 1, b > 0, c =$semua bil. real

$a$ disebut bilangan pokok bilangan logaritma

Sifat:

$${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{{}^2\log b}{{}^2\log a} = \frac{{}^n\log a}{{}^n\log b}$$

Bilangan natural/alam= e = 2.71828183

$${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{{}^e\log b}{{}^e\log a} = \frac{{}^e\ln a}{{}^e\ln b}$$

$${}^e\log x = \ln x$$

$$\boxed{y = \ln[f(x)] \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

## Soal

Dapatkan $y'$ dari:

- $y = \ln(\sin x)$
- $y = \ln \sqrt{2x+1}$
- $y = \ln(\cos x)$
- $y = \ln \dfrac{x+1}{x-1}$