

# Turunan Fungsi

bagustris

12 Nopember 2025

# Table of Contents

# Limit fungsi

Definisi:

Fungsi  $y = f(x)$  dikatakan mempunyai Limit L untuk  $x$  mendekati  $a$  ditulis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  (yang bagaimanapun kecilnya) dapat ditunjuk bilangan  $\delta > 0$  (biasanya bergantung pada  $\varepsilon$ ) sedemikian hingga  $|f(x) - L| < \varepsilon$  untuk  $0 < |x - a| < \delta$ .

Dalil-dalil limit:

Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$  maka :

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = L.M$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$ , jika  $L \neq 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ , jika  $M \neq 0$

# Fungsi Kontinyu

Definisi: Suatu fungsi  $y = f(x)$  dikatakan kontinyu di  $x = a$  jika

1.  $f(a)$  ada
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Tegasnya  $f(x)$  disebut kontinyu di  $x = a$  jika

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ada.

Jika  $f(x)$  kontinyu pada setiap titik dari suatu interval maka  $f(x)$  dikatakan kontinyu pada interval itu.

Jika satu alasan atau lebih dari syarat-syarat kontinyuitas diatas tidak terpenuhi, maka  $f(x)$  dikatakan diskontinyu di  $x = a$ .

# Turunan fungsi

- ▶ Limit fungsi ketika  $x$  mendekati nilai  $a$  didefinisikan sbg,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

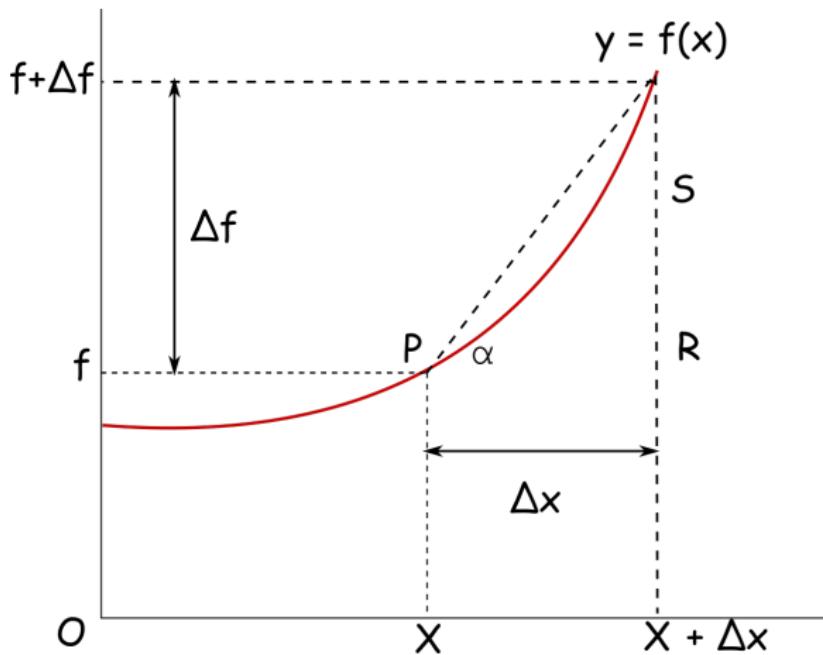
- ▶ Kalkulus diferensial  $\rightarrow$  laju perubahan fungsi  $\Delta f$  terhadap perubahan waktu  $\Delta x$ .
- ▶ Laju perubahan  $\rightarrow$  rasio dari perubahan fungsi  $\Delta f$  terhadap perubahan waktu  $\Delta x$ .
- ▶ Sepanjang interval  $\Delta x$ , fungsi berubah dari  $f(x)$  menjadi  $f(x + \Delta x)$ , sehingga

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- ▶ Apabila kita memperkecil  $\Delta x$  maka turunan  $\Delta f / \Delta x$  sama dengan mencari limitnya,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

## Turunan fungsi



## Soal

Dengan menggunakan definisi turunan  $\left( \frac{df}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right)$ , dapatkan turunan dari fungsi berikut:

1.  $f(x) = x^2$
2.  $f(x) = x^3$
3.  $f(x) = 2x$
4.  $f(x) = \sin(x)$

# Logaritma dan Bilangan Natural

$${}^a \log b = c \implies \text{logaritma Brigg}$$

Syarat:  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c = \text{semua bil. real}$   
 $a$  disebut bilangan pokok bilangan logaritma

Sifat:

$${}^a \log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{{}^2 \log b}{{}^2 \log a} = \frac{{}^n \log a}{{}^n \log b}$$

Bilangan natural/alam=  $e = 2.71828183$

$${}^a \log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{{}^e \log b}{{}^e \log a} = \frac{{}^e \ln a}{{}^e \ln b}$$

$${{}^e \log x} = \ln x$$

$$y = \ln[f(x)] \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

# Sifat-sifat Turunan

Jika  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$ , maka:

1.  $y = u \pm v \implies y' = u' \pm v'$

2.  $y = uv \implies y' = u'v + uv'$

3.  $y = \frac{u}{v} \implies y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4.  $y = u^v \implies y' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$

Beberapa rumus turunan[1]:

1.  $y = C \implies y' = 0$

2.  $y = x^n \implies y' = nx^{n-1}$

3.  $y = e^x \implies y' = e^x$

4.  $y = \ln x \implies y' = \frac{1}{x}$

5.  $y =^a \log x \implies y' = \frac{1}{x \ln a}$

6.  $y = a^x; (a > 0, a \neq 1) \implies y' = a^x \ln a$

## Beberapa Rumus Turunan[2]

7.  $y = \sin x \implies y' = \cos x$
8.  $y = \cos x \implies y' = -\sin x$
9.  $y = \tan x \implies y' = \sec^2 x$
10.  $y = \cot x \implies y' = -\csc^2 x$
11.  $y = \sec x \implies y' = \sec x \tan x$
12.  $y = \csc x \implies y' = -\csc x \cot x$
13.  $y = \ln |\sin x| \implies y' = \cot x$
14.  $y = \ln |\cos x| \implies y' = -\tan x$
15.  $y = \ln |\sec x + \tan x| \implies y' = \sec x$
16.  $y = \ln |\csc x - \cot x| \implies y' = \csc x$
17.  $y = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| \implies y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}$

## Beberapa Rumus Turunan[3]

$$18. \ y = \arcsin x \implies y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$19. \ y = \arccos x \implies y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$20. \ y = \arctan x \implies y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$21. \ y = \text{arccot } x \implies y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$22. \ y = \text{arcsec } x \implies y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$23. \ y = \text{arccsc } x \implies y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

# Fungsi Hiperbolik

Definisi:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Sifat-sifat:

1.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2.  $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
3.  $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

Turunan:

1.  $y = \sinh x \implies y' = \cosh x$
2.  $y = \cosh x \implies y' = \sinh x$
3.  $y = \tanh x \implies y' = \operatorname{sech}^2 x$

## Aturan berantai

Jika  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$  maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Jika  $y = f(u)$ ,  $u = g(v)$  dan  $v = h(x)$  maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Soal:

1.  $y = (2x + 5)^5 \Rightarrow y' = \dots?$

2.  $y = (x^2 + 2)^4 \Rightarrow y' = \dots?$

## Turunan tingkat tinggi

$y = f(x) \Rightarrow$  turunan ke 1 terhadap x adalah  $y' = f'(x)$

turunan ke 2 terhadap x adalah  $y'' = y^{(2)} = f^{(2)}(x)$

turunan ke 3 terhadap x adalah  $y''' = y^{(3)} = f^{(3)}(x)$

...dst

turunan ke n terhadap x adalah  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

Soal:

1.  $y = e^{ax} \rightarrow y^{(n)} = \dots?$

2.  $y = \sin x \rightarrow y^{(n)} = \dots?$

## Rumus Leibnitz

$D = \frac{d}{dx}$  operator turunan;  $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ ;

$D = \frac{d}{dx} \rightarrow$  operator turunan tingkat n

Jika  $y = UV$  dimana  $U = f(x)$  dan  $V = g(x)$  maka turunan n dari  $y$  terhadap  $x$  dinyatakan dengan  $y^{(n)} = D^n(UV)$  dan dirumuskan sbb:

$$\begin{aligned} y^n(UV) &= UD^nV + nDUD^{n-1}V + \frac{1}{2!}n(n-1)D^2UD^{n-2}V + \\ &\quad \frac{1}{3!}n(n-1)D^3UD^{n-3}V + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Bukti:

$$y = UV \implies y' = UV' + U'V$$

$$y'' = UV'' + 2U'V' + U''V$$

$$y^{(3)} = UV^{(3)} + 3U'V^{(2)} + 3U^{(2)}V' + U^{(3)}V$$

# Turunan fungsi parametrik

Jika  $x = f(t)$  dan  $y = g(t)$  maka,

$$\boxed{y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \dots}$$

$$y^{(n)} = \frac{\frac{dy^{(n-1)}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Soal:

Dapatkan  $y''$  dari  $x = a \cos t$  dan  $y = b \sin t$

## Menurunkan fungsi implisit

$y'$  dari  $f(x, y) = 0$  didapat sebagai berikut:

1. Jika mungkin  $y$  dinyatakan sebagai fungsi explisit dalam  $x$

Contoh:  $x^2 + y - 3 = 0 \implies y = 3 - x^2$

$$y' = -2x$$

2. Setiap suku dalam  $f(x, y) = 0$  diturunkan terhadap  $x$ . Karena  $y$  fungsi  $x$  maka setiap kali menurunkan  $y$  harus digandakan dengan  $y'$ , kemudian hubungan yang didapat diselesaikan ke  $y'$ .

Contoh:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0$$

$$3(ax - y^2)y' = 3(x^2 - ay) \implies y' = \frac{x^2 - ay}{ax - ay}$$

## Soal

Dapatkan  $y'$  dari:

- ▶  $y = x \sinh x$
- ▶  $y = \ln \sqrt{2x + 1}$
- ▶  $y = e^{2x+y} + \sin(x + 2y)$
- ▶  $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$