REVIEW MATEMATIKA SMA

Bagus Tris Atmaja
bagus@ep.its.ac.id

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

September 15, 2016

Structure

1. Pembagian, Perpangkatan dan Akar
2. Persamaan Kuadrat
3. Fungsi Kuadrat
4. Logaritma
5. Goniometri
6. Segitiga Pascal
7. Satuan Imaginer dan Perkalian Istimewa
8. Geometri Analitik Datar
9. Fungsi, Nilai mutlak bilangan real, notasi fakulteit dan radian

Pembagian

$$\boxed{\frac{a}{b} = c \text{ artinya } a = b.c}$$

- Jika $b \neq 0$, maka $\dfrac{0}{b} = 0$, sebab $b.0 = 0$
- Jika $a \neq 0$, maka $\dfrac{a}{0}$ tidak didefinisikan.

  Sebab andaikan $\dfrac{a}{0} = m$ maka $a = 0.m$, ini tidak ada nilai m yang memenuhi.
- Pernyataan $\dfrac{0}{0} = \mathit{TAK\ TENTU}$, sebab andaikan $\dfrac{0}{0} = n$ maka $0 = 0.n$, Jadi nilai n tidak tunggal.

Perpangkatan

- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n + b^n$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- Jika $a \neq 0$ dan berhingga maka $a^0 = 1$
- Jika $a \neq 0$ maka $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- Jika $a \neq 0$ maka $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Akar

- Jika n bilangan bulat positif yang memenuhi $a^n = b$, maka a disebut akar ke n dari b. Ditulis $a = \sqrt[n]{b}$ atau $a = b^{\frac{1}{n}}$.

1. $\sqrt[n]{a}^n = a$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Persamaan Kuadrat

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \text{ mempunyai akar-akar } x_1 \text{ dan } x_2}$$

1. $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ atau $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

   Dimana $D = b^2 - 4ac$ (diskriminan)
2. Jika $D > 0 \rightarrow$ PK mempunyai dua akar berlainan.
3. Jika $D = 0 \rightarrow$ PK mempunyai akar real kembar.
4. Jika $D < 0 \rightarrow$ PK tidak punya akar real.
5. $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$

Fungsi Kuadrat

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c;\ a \neq 0}$$

1. Puncak: $P(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$
2. Jika $a > 0 \rightarrow$ grafik berupa parabola yang membuka ke atas
   $y_{min} = -\frac{D}{4a}$
3. Jika $a < 0 \rightarrow$ grafik berupa parabola yang membuka ke bawah
   $y_{max} = -\frac{D}{4a}$
4. Jika $D > 0 \rightarrow$ y memotong sumbu x di dua titik yang berlainan
5. Jika $D = 0 \rightarrow$ y menyinggung sumbu x
6. Jika $D < 0 \rightarrow$ y tidak memotong sumbu x
7. Jika $D \leqq 0 \rightarrow$ y tidak memotong sumbu x di dua titik

Fungsi Kuadrat (Cont'd)

8. Fungsi Kuadrat disebut *definit positif* jika grafik seluruhnya berada di atas sb x; Syaratnya: (1) $a > 0$
   (2) $D < 0$
9. Fungsi Kuadrat disebut *definit negatif* jika grafik seluruhnya berada di bawah sb x; Syaratnya: (1) $a < 0$
   (2) $D > 0$

Logaritma

$^a\log b = c$ artinya: $a^c = b$
syarat: $b > 0$, $a > 0$, $a \neq a$.
a disebut bilangan pokok.

Sifat-sifat:

1. $a^{^a\log b} = b$
2. $^a\log a = 1$
3. $^P\log a +^P \log b =^P \log ab$
4. $^P\log a -^P \log b =^P \log \frac{a}{b}$
5. $^P\log a^n = n^a \log a$
6. $^a\log a^n = n$
7. $^a\log 1 = 0$
8. $^a\log b = \frac{^P\log a}{^P\log b}$
9. $^a\log b^b \log c =^a \log c$
10. $^a\log b^b \log c = 1$
11. $^a\log \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}{}^a \log b$
12. $^a\log b = \frac{1}{^b\log a}$
13. $^a\log \frac{1}{b} = -^a \log b$

Bilangan "e"

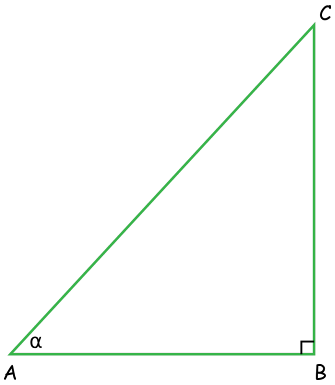
Definisi:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}^{n} = e = 2.7182818}$$

- Log dengan bilangan pokok e disebut logaritma natural
  $^{a}\log x = \ln x$ dibaca lon x; $\ln e = 1; \ln 1 = 0$
- Hubungan log dengan ln:

$$\boxed{\log x = 0.4345 \ln x; \ln x = 2.3028 \log x}$$

Goniometri



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot\alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$$

$$\sec\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\csc\alpha = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

Segitiga Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 =$
$a^5 + 5a^4b + 10a^4b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
dan seterusnya...

Satuan Imaginer

$$\boxed{i = \sqrt{-1};\ i^2 = -1}$$

- Bilangak kompleks: $z = a + bi$; $a =$ bagian real dari bilangan komplek z, $b =$ bagian imaginer dari z.
- Ingat bahwa: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, sehingga: $\sqrt{-3} = \sqrt{-1}.\sqrt{3} = i\sqrt{3}$ $\sqrt{-9} = \sqrt{-1}.\sqrt{9} = i\sqrt{9} = i.3 = 3i$
- Akar-akar dari PK: $x^2 + x + 1 = 0$ adalah:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}i}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \qquad x_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

Geometri Analitik Dasar

1. Garis lurus
2. Lingkaran
3. Parabola
4. Ellips
5. Hyperbola

Garis Lurus

1. Jarak $A(x_A, y_A)$ ke $B(x_B, y_B)$ adalah
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
2. Persamaan explisit garis lurus $y = mx + n$
   (m= Koefisien arah/bilangan arah)
3. Persamaan impisit gari lurus $ax + by + c = 0$ dengan bilangan arah $m = -\frac{a}{b}$
4. Jarak dari $A(x_A, y_A)$ ke garis $ax + by + c = 0$ adalah
   $$d = \left| \frac{ax_A + by_A + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
5. Persamaan garis lurus melalui 2 titik $A(x_A, y_A)$ ke $B(x_B, y_B)$
   $$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

Garis Lurus(Cont'd)

Garis lurus $g : ax + by + c = 0$ dengan bilangan arah m1,
Garis lurus $h : px + qy + r = 0$ dengan bilangan arah m2;
maka supaya

$g \,//\, h$, syaratnya: $m_1 = m_2$

$g \perp h$, syaratnya: $m_1.m_2 = -1$

g memotong h, syaratnya: $m_1 \neq m_2$

g berimpit dengan h, syaratnya: $\dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{r}$

Lingkaran

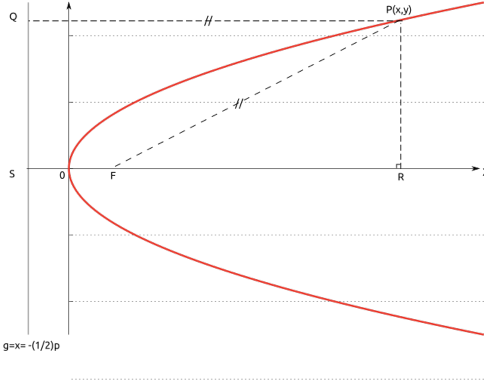
1. Persamaan lingkaran pusat $0(0, 0)$, jari-jarinya a adalah :
   $x^2 + y^2 = a^2$
2. Persamaan lingkaran pusat $P(a, b)$, jari-jarinya r adalah
   $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
3. Lingkaran: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ mempunyai
   Pusat di $P(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$; jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Contoh

Lingkaran: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ mempunyai titik pusat di $P(1, 2)$ dengan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}-2^2 + \frac{1}{4}-4^2 - 1} = 2$

Parabola

Parabola: Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik dan sebuah garis yang tertentu.
Titik-titik itu disebut Fokus; garis itu disebut Direktrix.



Ambil SR=sb x; SF=p dan
OS = OF = $\frac{1}{2}p$
F($\frac{1}{2}p, 0$) fokus; P(x,y) pada parabola.
Pada Δ siku-siku PFR:

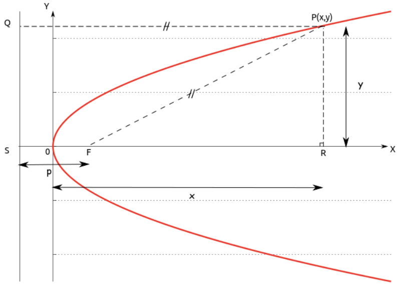
$PF^2 = PR^2 + FR^2$

$(x + \frac{1}{2}p)^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2$

$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 =$

$y^2 + x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$

Parabola(Cont'd)



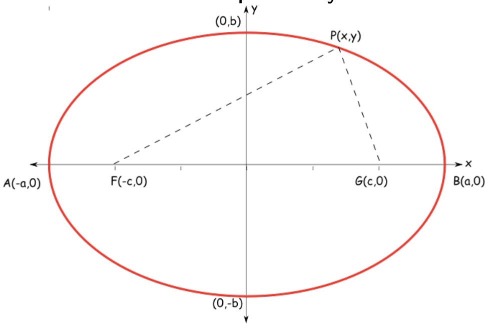
$$\boxed{y^2 = 2px} \text{ p = parameter parabola}$$

Jika puncak parabola (a, b) dan sb. simetri tetap // sb. x, maka persamaan parabolanya:

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

Ellips

Ellips: Tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap 2 titik tertentu tetap nilainya.



Fokus: F(-c,0) dan G(c,0)
P(x,y) pada ellips maka:
PF + PG = 2a (tetap)
Kedua titika A dan B memenuhi sebab
jika AF = GB = a - c, maka:
AF+AG=BF+BG
=(a-c)+(a+c)=2a

$$PF = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ dan } PG = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$PF + PG = 2a \rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2 + y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ellips(Cont'd)

Misalkan: $a^2 - c^2 = b^2$

maka persamaan ellips: $\boxed{\dfrac{x^2}{z^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ 2a = Sb. panjang

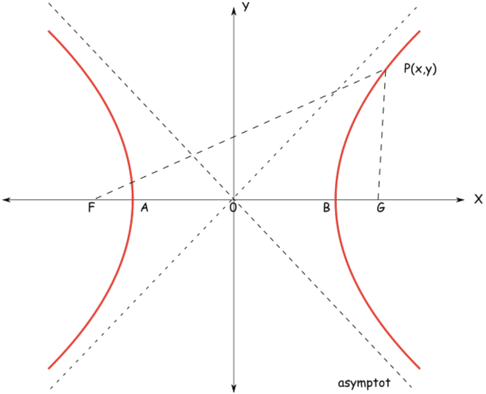
2b = Sb. pendek

Jika pusat ellips (α, β) dan sumbu-sumbu simetri tetap // sb. x dan sb. y, maka persamaan ellipsnya:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Hyperbola

Hyperbola ialah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap nilainya.



Fokus: $F(-c, 0)$ dan $G(c, 0)$

$$
\begin{aligned}
AF &= BG = c - a \\
AG - AF &= BF - BG \\
&= (c + a) - (c - a) \\
&= 2a
\end{aligned}
$$

P(x,y) pada hyperbola

$$PF = \sqrt{(x + y)^2 + y^2}$$

$$PG = \sqrt{x - c)^2 + y^2}$$

Hyperbola(Cont'd)

$PF - PG = 2a \rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2 - y^2 = a^2(c^2 - a^2)$
Misalkan: $c^2 - a^2 = b^2$

Maka persamaan hyperbola: $\boxed{\frac{x^2}{z}{}_2 - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Jika pusat hyperbola (α, β) dan sumbu-sumbu simetri tetap // sumbu x dan sumbu y; maka persamaan parabolanya:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jika a = b; disebut hyperbola ORTHOGONAL (siku-siku).

Fungsi

- Definisi:
  Variabel y disebut fungsi dari variabel x jika dapat ditentukan hubungan anatara x dan y sedemikian hingga untuk setiap nilai x (yang mungkin diberikan) menentukan secara tunggal nilai y.

$$\boxed{y = f(x)}$$

- $y \rightarrow$ variabel tak bebas
- $x \rightarrow$ variabel bebas

Nilai Mutlak dari bilangan real

- Definisi:

$$|x| = \begin{cases} x, \textit{ jika } x \geq 0 \\ \\ -x, \textit{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh:

$|6| = 6$; sebab $6 > 0$

$|-5| = -(-5)$; sebab $5 \geq 0$

Notasi Faktorial / Fakulteit

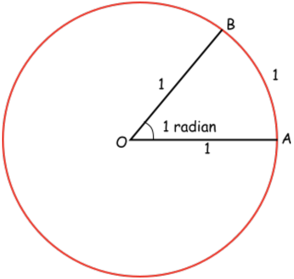
Definisi:

$$\boxed{n! = 1.2.3.4...(n-1).n}$$

Contoh:

1. $1! = 1;$
2. $3! = 3.2.1 = 6$
3. $0! = 1(khusus)$

Radian



- Lingkaran satuan, jari-jari $= 1$
- $\cap AB = 1 \longrightarrow \angle AOB = 1$ radian
- $2\pi rad = 360^o$, $\frac{1}{3}\pi rad = 60^o$
- $\pi rad = 180^o$, $\frac{1}{4}\pi rad = 45^o$
- $\frac{1}{2}\pi rad = 90^o$, $\frac{1}{6}\pi rad = 30^o$

Contoh:

$$1 \text{ radian} = \frac{360}{2\pi} = \frac{360^o}{2(3.14159)} = 57^o : 7\text{'}: 45\text{''}$$