Sistem Linier

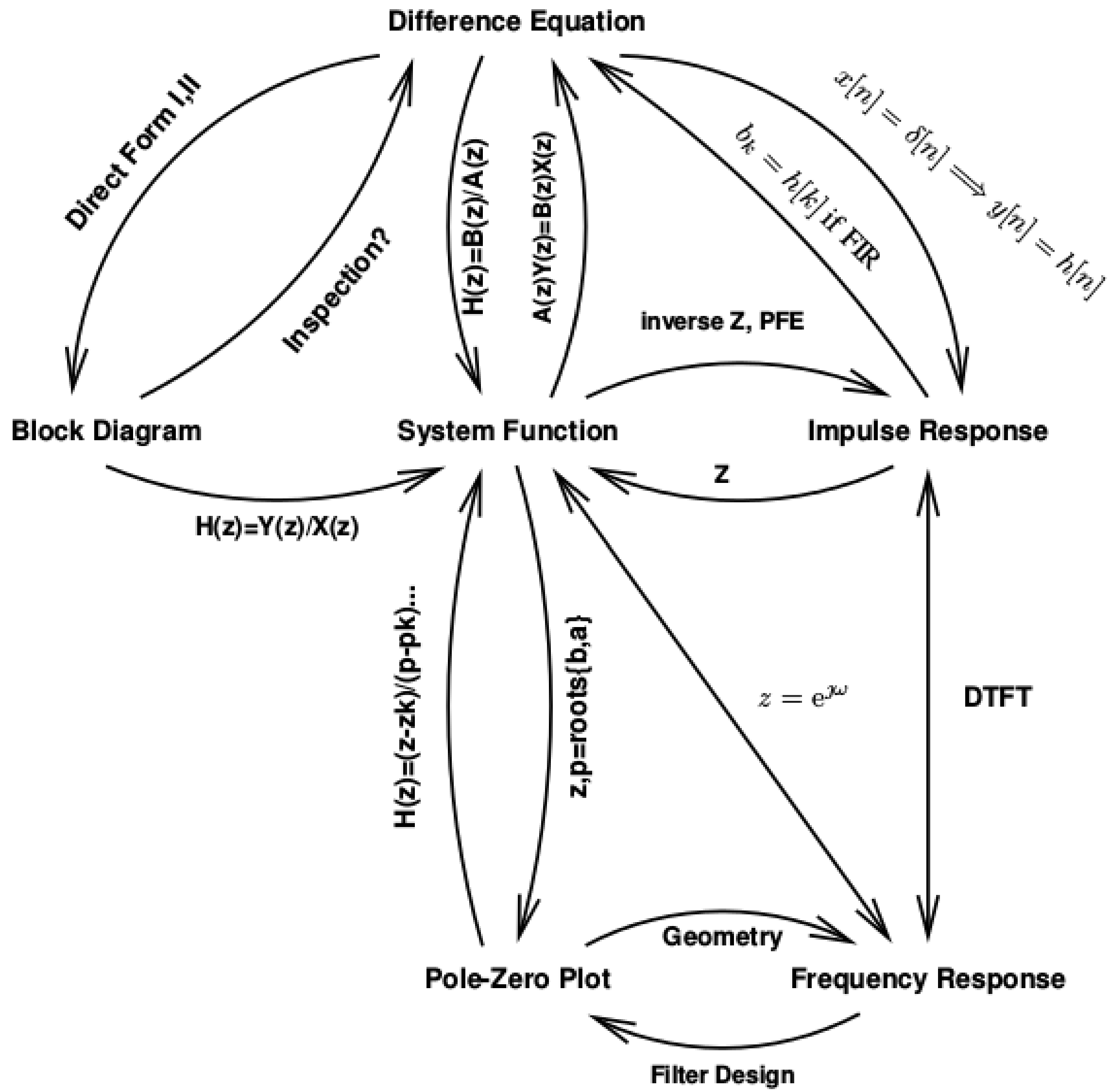
Week 7 – 8:
Representasi deret Fourier sinyal periodik

B.T Atmaja[1] & Dwi Prananto[2]

[1]) Teknik Fisika, ITS Surabaya

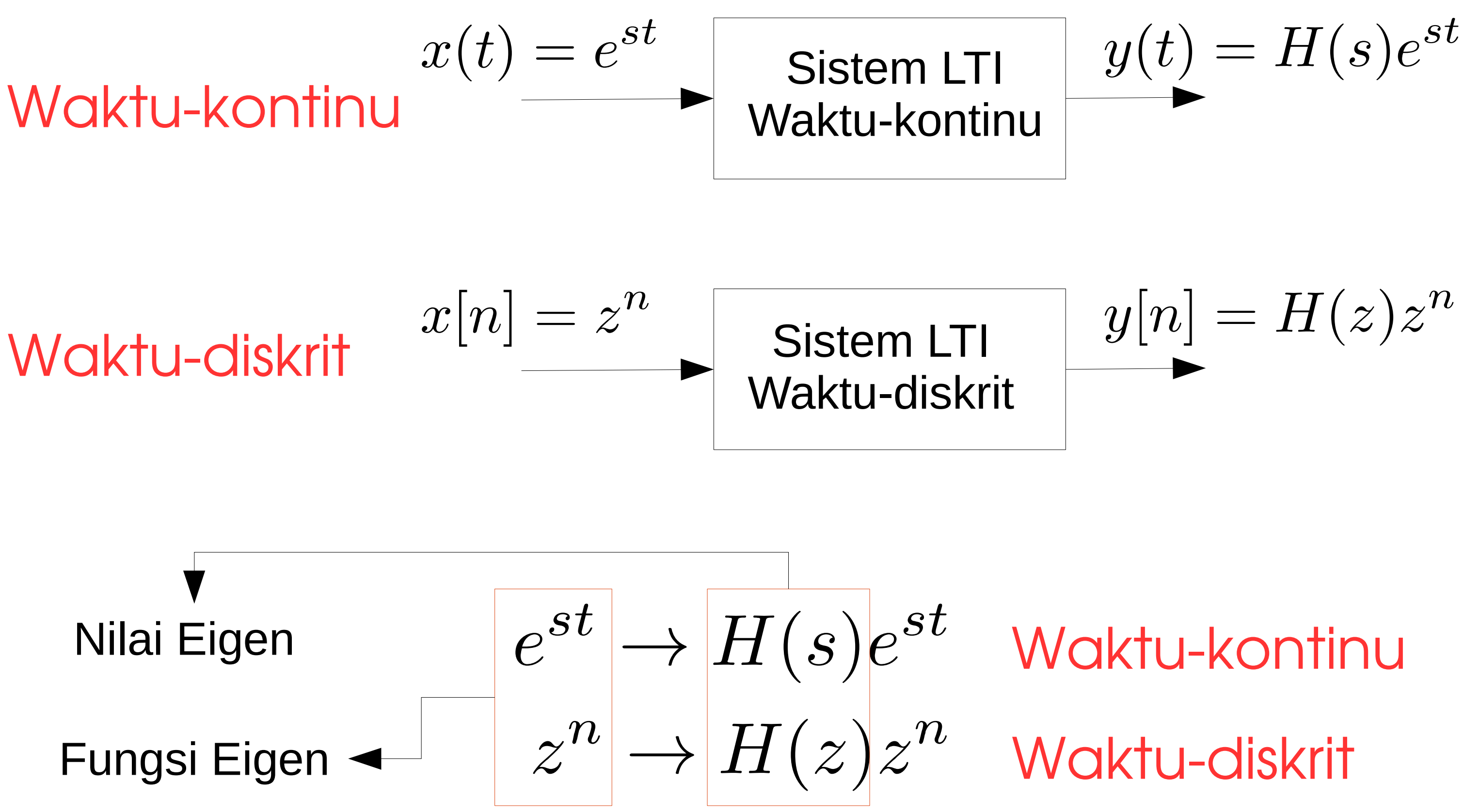
[2]) Prodi. Teknik Elektro, Universitas Panca Marga Probolinggo

Discrete-time systems described by difference equations



Representasi deret Fourier sinyal periodik

I. Tanggapan sistem LTI terhadap eksponensial kompleks



- Tanggapan sistem LTI terhadap masukan sinyal eksponensial kompleks adalah sinyal eksponensial kompleks yang sama, dengan perubahan amplitudo

Representasi deret Fourier sinyal periodik

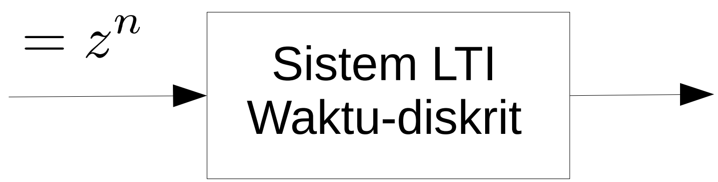
Bukti:

$$x(t) = e^{st}$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$
$$= e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$
$$y(t) = H(s) e^{st}$$

$H(s)$ Adalah konstanta kompleks yang mempunyai harga tergantung pada s

$$x[n] = z^n$$



$$y[n] = h[n] * x[n]$$
$$= z^n \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$$
$$y[n] = H(z) z^n$$

$H(z)$ Adalah konstanta kompleks yang mempunyai harga tergantung pada z

Representasi deret Fourier sinyal periodik

Bentuk kombinasi linier

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistem LTI}\\ \text{Waktu-kontinu}\end{array}} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistem LTI}\\ \text{Waktu-diskrit}\end{array}} \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

II.Representasi deret Fourier pada sinyal periodik waktu-kontinu

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

dimana $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ dan a_k adalah **koefisien-koefisien deret Fourier**

- **Kombinasi linier dari sinyal eksponensial kompleks yang dihubungkan secara harmonik**

Representasi deret Fourier sinyal periodik

- **Penentuan koefisien-koefisien deret Fourier** a_k

1. Kalikan kedua sisi representasi deret Fourier dengan $e^{-jn\omega_0 t}$

$$e^{-jn\omega_0 t}x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

2. Integrasikan kedua sisi dengan interval 0 s/d T

$$\int_0^T e^{-jn\omega_0 t}x(t)dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}dt$$

3. Keluarkan jumlahan dan koefisien deret Fourier dari integral

$$\int_0^T e^{-jn\omega_0 t}x(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

4. Ubah integral eksponensial di sisi kanan dengan hubungan Euler

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T cos[(k-n)\omega_0 t]dt + j\int_0^T sin[(k-n)\omega_0 t]dt$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

5. Selesaikan integral nomor 4

- Untuk $k \neq n$

$$\int_0^T cos[(k-n)\omega_0 t]dt + j\int_0^T sin[(k-n)\omega_0 t]dt = 0$$

Pandang integral sebagai luasan di bawah kurva

- Untuk $k = n$

$$\int_0^T cos[(k-n)\omega_0 t]dt + j\int_0^T sin[(k-n)\omega_0 t]dt = T$$

Sehingga

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & , \; k \neq n \\ T & , \; k = n \end{cases}$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

5.Nomor 3 dapat dituliskan kembali sebagai

$$\int_0^T e^{-jn\omega_0 t} x(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k T$$

$$\int_0^T e^{-jn\omega_0 t} x(t)dt = a_k T$$

Sehingga

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-jn\omega_0 t} x(t)dt$$

atau

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_T e^{-jk\omega_0 t} x(t)dt}$$

koefisien-koefisien deret Fourier sepanjang periode T

Representasi deret Fourier sinyal periodik

Representasi deret Fourier sinyal periodik waktu-diskrit

Persamaan sintesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

Persamaan analitis

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T e^{-jk\omega_0 t} x(t) dt = \int_T e^{-jk(2\pi/T)t}$$

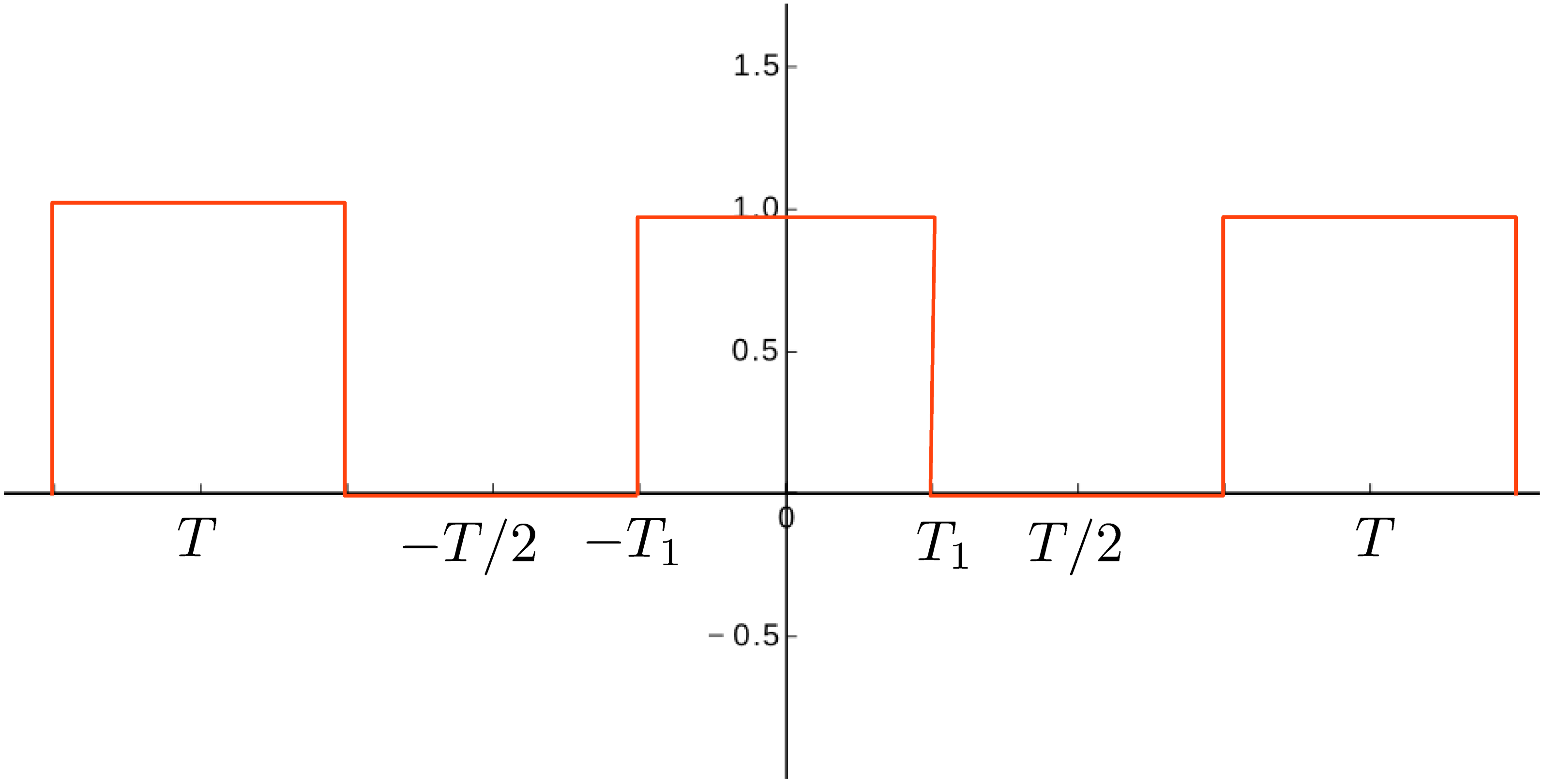
Representasi deret Fourier sinyal periodik

Contoh:

Gelombang bujur sangkar periodik

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T_1 \\ 0 & , T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

Tentukan koefisien-koefisien deret Fourier-nya!



Representasi deret Fourier sinyal periodik

Solusi

- Untuk $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T} = \frac{1}{2}$$

dengan $T = 4T_1$

- Untuk $k \neq 0$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

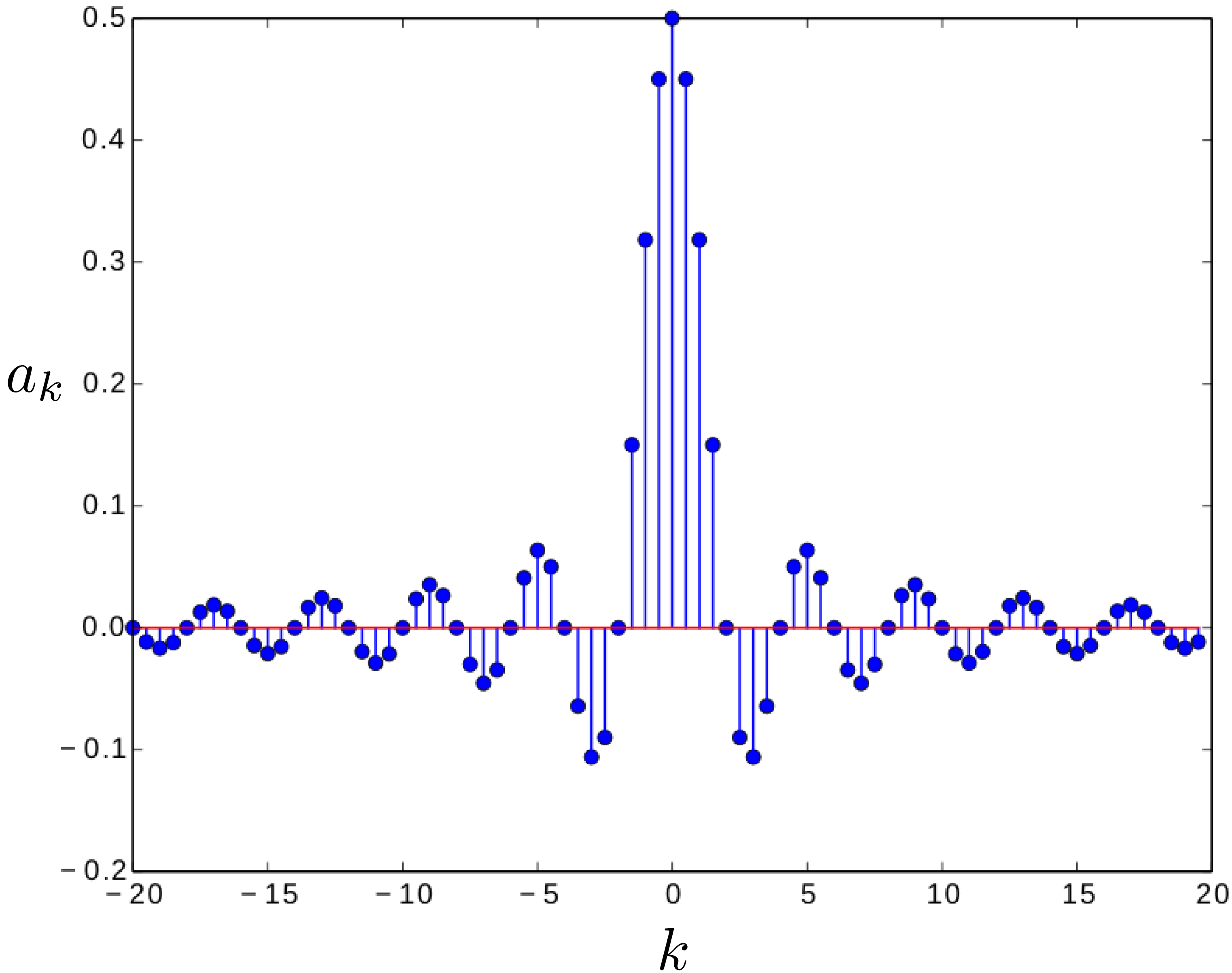
$$= \frac{2}{kT\omega_0}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]$$

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

dengan $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

Grafik fungsi koefisien deret Fourier terhadap k



Representasi deret Fourier sinyal periodik

III.Sifat-sifat deret Fourier waktu-kontinu

$$\boxed{x(t) \xleftrightarrow{Fs} a_k}$$

Pasangan sinyal periodik dan koefisien deret Fourier

1.linieritas

Dua sinyal periodik

$$x(t) \xleftrightarrow{Fs} a_k$$
$$y(t) \xleftrightarrow{Fs} b_k$$

Jika $z(t)$ adalah kombinasi linier dari kedua sinyal,

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{Fs}{\leftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

III. Sifat-sifat deret Fourier waktu-kontinu

2. Pergeseran waktu

Jika $y(t) = x(t - t_0)$,

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Ambil $\tau = t - t_0$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 (\tau + t_0)} dt$$

$$= \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 t_0} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau}$$

$$b_k = e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$$

sehingga

$$\boxed{x(t - t_0) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k}$$

- ✓ Nilai koefisien deret Fourier tidak bergantung pada pergeseran waktu

Representasi deret Fourier sinyal periodik

III. Sifat-sifat deret Fourier waktu-kontinu

3. Waktu-balikan

Jika $y(t) = x(-t)$, persamaan sintesis

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}$$

Ambil $-k = m$

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm\omega_0 t}$$

Sehingga, jika

$$x(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a_k,$$

$$\boxed{x(-t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a_{-k}}$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

III.Sifat-sifat deret Fourier waktu-kontinu

4.Penskalaan waktu

Jika $x(t)$ periodik dengan periode T dan frekuensi $\omega_0 = 2\pi/T$, $x(\alpha t)$ Periodik dengan periode T/α dan frekuensi $\alpha\omega_0$.

$$\boxed{x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}}$$

- ✓ **Koefisien deret Fourier tidak berubah, representasi deret Fourier berubah karena perubahan frekuensi dasar**

Representasi deret Fourier sinyal periodik

III. Sifat-sifat deret Fourier waktu-kontinu

4. Perkalian

Jika
$$x(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a_k$$
$$y(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} b_k,$$

Hasil kali
$$\boxed{x(t)y(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}}$$

5. Konjugasi

$$x(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a_k$$
$$x^*(t) \overset{Fs}{\longleftrightarrow} a^*_{-k},$$

konsekuensinya

jika $x(t) = x^*(t), \qquad a_{-k} = a^*_k$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

IV. Representasi <u>deret Fourier</u> pada sinyal periodik <u>waktu-diskrit</u>

Deret Fourier waktu-diskrit

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$
$$= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Persamaan sintesis

$k = \langle N \rangle$ → *k* yang bervariasi pada daerah *N* bilangan bulat

Representasi deret Fourier sinyal periodik

V.Penentuan koefisien-koefisien deret Fourier

Untuk menentukan koefisien-koefisien deret Fourier, kalikan kedua sisi deret Fourier dengan $e^{-jr\omega_0 n}$ dan jumlahkan terhadap suku-suku *N*

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \boxed{\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & , k-r = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & , k-r = \text{lainnya} \end{cases}$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

V.Penentuan koefisien-koefisien deret Fourier

Sehingga jika dituliskan

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} a_k N$$

Koefisien-koefisien deret Fourier dapat dicari dengan

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n}}$$

Persamaan analitis

- ✓ **Harga a_k berulang secara periodik dengan periode N**

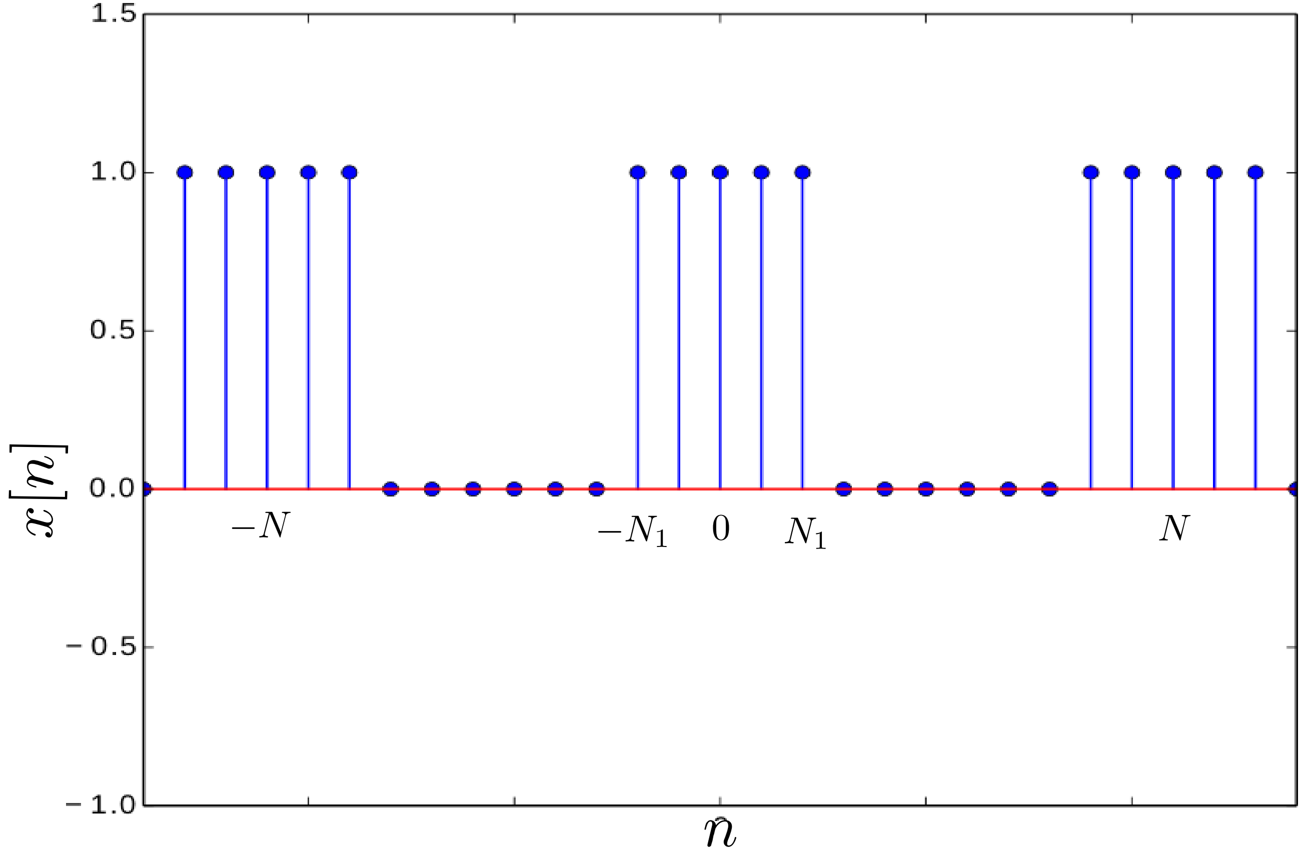
$$\boxed{a_k = a_{k+N}}$$

Contoh: $a_0 = a_N \; ; \; a_1 = a_{1+N}$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

Contoh soal:

Gelombang bujur sangkar periodik waktu-diskrit



Tentukan koefisien-koefisien deret Fourier sinyal tersebut!

Representasi deret Fourier sinyal periodik

solusi

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1\ e^{-jk\omega_0 n}$$

Gunakan **rumus jumlahan terbatas** untuk menyelesaikan

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} \alpha^n = \begin{cases} N+1 & , \ \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^{N+1}}{1-\alpha} & , \ \alpha \neq 1 \end{cases}}$$

Ambil $m = n + N_1$, sehingga

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)}$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)}$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$$

$$= \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \left[\frac{1 - e^{-jk(2\pi/N)(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk(2\pi/N)}} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[\frac{e^{jk(N_1+1/2)2\pi/N} - e^{-jk(N_1+1/2)2\pi/N}}{e^{jk\pi/N} - e^{-jk\pi/N}} \right]$$

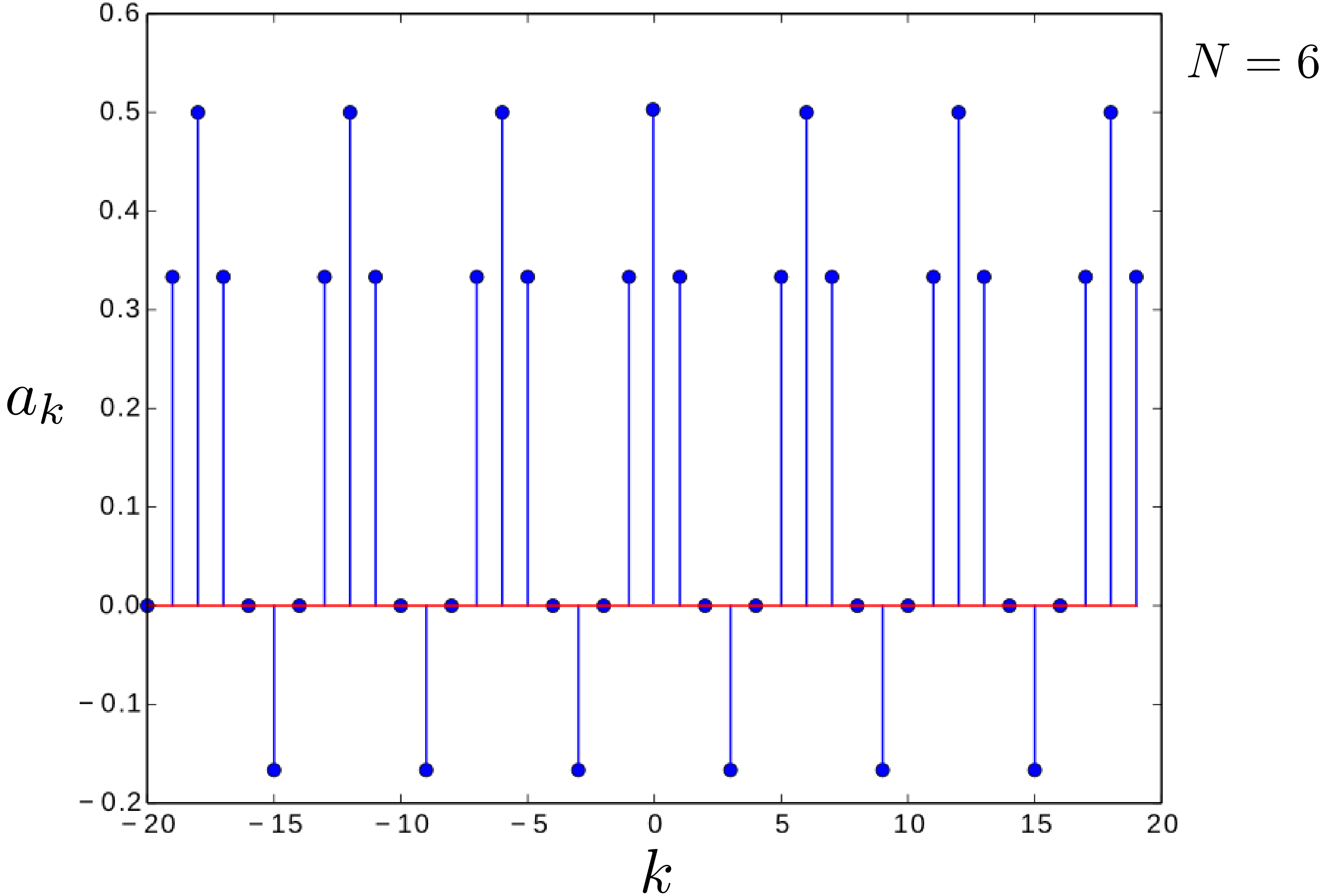
$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(k\pi/N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N. \ldots$$

Dan

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots$$

Representasi deret Fourier sinyal periodik

Grafik fungsi koefisien deret Fourier terhadap k



Perhatikan keterulangan yang terlihat. $a_k = a_{k+N}$

Referensi

(1) A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. H. Nawab, *Sinyal dan Sistem jilid 1*, (Penerbit Erlangga, Jakarta, 2000)

(2) Plot grafik dibuat dengan bantuan program iPython dan Inkscape

Referensi pemrograman Python:

(1) Python Scientific Lecture Notes, http://scipy-lectures.github.io/index.html

(2) The Python Tutorial, https://docs.python.org/2/tutorial/index.html

(3) Matplotlib, http://matplotlib.org/index.html