Faculté des Sciences appliquées

MECA0011-2 : Eléments de mécanique des fluides

Projet Transversal

Professeur :
PIROTTON Michel

Groupe :
ELOUDRHIRI Rayane
JACQUET Charles
NAVEZ Tom

9 avril 2021

Table des matières

1 Questions générales

1.1 De quel(s) principe(s) fondamental(aux) découle l'équation $\Delta\Psi = 0$ résolue dans ce projet, Ψ étant la fonction de courant ?

L'équation $\Delta\Psi = 0$ est une conséquence directe du principe de conservation de la masse.
Dans le cadre de ce projet, nous considérons un fluide incompréssible (i.e $\frac{d\rho}{dt} = 0$).
On peut donc exprimer la conservation de la masse comme suit :

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0$$

1.2 Dans le cadre de ce projet, comment se traduit numériquement la résolution de l'équation $\Delta\Psi = 0$?

Sachant que $\Delta x = \Delta y = h$ entre deux noeuds adjacents, il nous est possible d'écrire :

$$b = \left(\frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}}{h^2} \right)$$

Cette expression nous permet de résoudre un système de la forme $Ax = b$ à n équations, où b représente le vecteur de conditions limites, x la matrice des $f_{i,j}$,
A le Laplacien et n le nombre de noeuds présents dans le maillage.

1.3 Pour un écoulement irrotationnel, quelles sont les hypothèses nécessaires et suffisantes pour avoir une charge uniforme dans l'écoulement ? Justifiez.

Pour que la charge soit uniforme dans un écoulement stationnaire, il faut que la fonction d'*Helmholtz* soit constante sur tout l'ensemble du domaine, soit :

$$\frac{P}{\rho g} + Z + \frac{\|U\|^2}{2g} = cst$$

Pour cela, il faut que le fluide soit idéal, barotrope ainsi qu'incompressible pour que la résultante des contraintes visqueuses agissant en tout point de l'espace s'annule.

Les hypothèses nécessaires et suffisantes sont donc que le fluide doit être à la fois idéale, incompressible, barotrope **et** que son écoulement soit stationnaire.

1.4 Où les conditions aux limites doivent-elles être imposées dans cette configuration ? Pour un débit d'entrée imposé (voir Annexe), quelles valeurs doivent-elles prendre, et pourquoi ?

Pour le cas d'un canal rectiligne avec élargissements et rétrécissements brusques, les conditions limites doivent être imposées sur la limite du domaine de calcul (i.e. les parois du canal). Les valeurs que doivent prendre ces conditions dépendent directement du débit d'entrée imposé Q_{in} dont on connait la valeur.
Afin de déterminer les valeurs des conditions limites, nous posons notre référentiel sur le noeud inférieur du canal d'entrée. Cela sert à fixer la valeur de la fonction de courant Ψ de ce noeud à 0 (i.e $\Psi_0 = 0$).
Il nous suffit ensuite de déterminer les conditions limites de l'entrée et sortie comme suit :

$$\frac{d\Psi}{dy} = u \quad \text{et} \quad \frac{Q_{in}}{l} = u \iff \Psi_i - \Psi_0 = dy\,\frac{Q_{in}}{l} \implies \Psi_i = dy\frac{Q_{in}}{l}$$

On a donc une progression linéaire, de bas en haut, de 0 à Q_{in} (resp. Q_{out}) à l'entrée (resp. à la sortie) de pas h puisque $dy = h \cdot k$ où k est le nombre de noeuds de calcul entre i et l'origine (à la fin $h \cdot k$ sera donc égale à l et on aura $\Psi = Q_{in}$).

Finalement, il ne nous reste plus qu'à déterminer les valeurs des conditions limites sur les bords du canal. Pour se faire, nous tirons profit de la condition d'imperméabilité disant que la valeur de la fonction de courant Ψ est constante le long d'une ligne de courant. Cela revient à dire que les conditions limites sont constantes le long des berges, fixant donc la berge supérieure à Q_{in} et la berge inférieure à 0. Par le principe de la conservation de la masse on a que $Q_{in} = Q_{out}$ et donc que les valeurs des "coins" supérieurs (resp. inférieurs) du canal sont bien égales ne posant alors pas de problème de continuié le long de la berge supérieure (resp. inférieure).

1.5 Si on souhaite que le débit d'entrée change de sens, comment les conditions aux limites doivent-elles être modifiées ? Comparez les caractéristiques de l'écoulement pour chaque sens du débit d'entrée.

Si le débit d'entrée change de sens, seules les conditions limites sur l'entrée et la sortie varient, les autres conditions limites situées sur la paroi vont quant à elles rester constantes vis-à-vis de l'entrée et sortie et donc être changée en conséquence. Si on souhaite que le debit d'entrée change de sens, cela veut dire que :

$$Q_{in}^{cas\ inversé} = -Q_{in}^{cas\ initial} \quad \text{et} \quad Q_{out}^{cas\ inversé} = -Q_{out}^{cas\ initial}$$

Par conséquent, les valeurs des conditions limites changent tout simplement de signe.

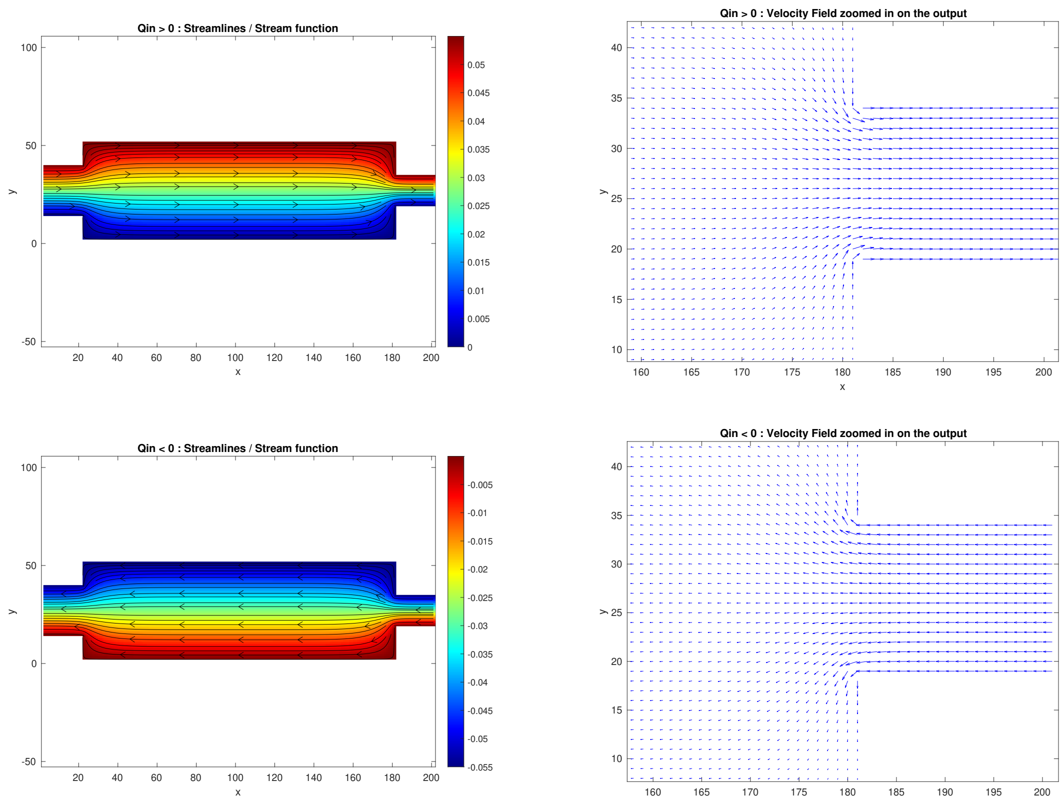

FIGURE 1 – Contraste entre $Q_{in} > 0$ et $Q_{in} < 0$

On remarque que les vecteurs de vitesses, tout comme les lignes de courants, ont changé de sens. L'écoulement se fait donc bien dans le sens inverse et les pressions restent inchangées puisque ce changement de sens ne les influe pas dans ce cas.

	Q_{in}	$-Q_{in}$
Circulation	$2.18 \times 10^{-16} \approx 0 \frac{m^2}{s}$	$-2.18 \times 10^{-16} \approx 0 \frac{m^2}{s}$
Trainée	$0.4133 \frac{N}{m}$	$-0.4133 \frac{N}{m}$
Portance	$-1.5987 \times 10^{-14} \approx 0 \frac{N}{m}$	$-1.5987 \times 10^{-14} \approx 0 \frac{N}{m}$

En comparant les résultats obtenus, on remarque que seule la trainée change lorsque le débit s'inverse ce qui est logique étant donné que la trainée est dans le sens de l'écoulement du fluide. On peut aussi justifier le changement de signe de la trainée par le changement de signe de la vitesse horizontal moyenne. Les autres caractéristiques de l'écoulement ne sont pas impactées lors de l'inversion de Q_{in}.

1.6 Comment les conditions aux limites doivent-elles être fixées pour représenter les deux types d'écoulement demandés ?

Pour le cas de l'ilot présentant un écoulement symétrique de part et d'autre, les conditions limites sur les parois peuvent êtres fixées de façon identique au cas précédent. En revanche, sur l'ilot cela se complique un peu.
En effet, puisque la condition d'imperméabilité est d'application, les conditions limites doivent prendre la même valeur tout autour de l'ilot. Cette valeur est $\frac{1}{2} \cdot Q_{in}$ dans le cas où le débit est réparti uniformément autour de l'îlot étant donné que l'on doit faire passer 50 % du débit au dessus ainsi qu'en dessous de l'ilot.
En revanche, dans le cas où le débit n'est pas réparti uniformément, les conditions limites autour de l'ilot valent $F \cdot Q_{in}$ où Q_{in}, dans notre cas, vaut 55×10^{-3} $m^2 s^{-1}$ et F, la fraction du débit passant en dessous de l'îlot, vaut 20.7 %

1.7 Quelles sont les valeurs de traînée, portance et circulation dans les deux cas ? Discutez et comparez brièvement les résultats obtenus.

Concernant le cas dans lequel la répartition du débit se fait uniformément autour de l'ilot, nous obtenons les résultats suivants :

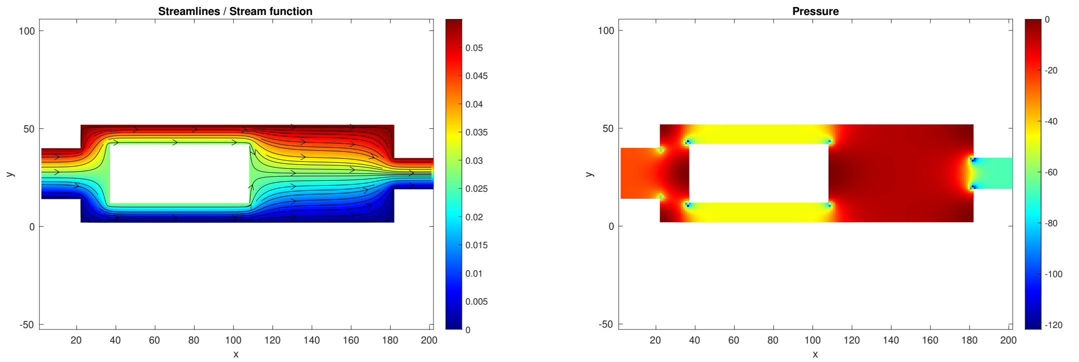

FIGURE 2 – Représentations graphiques du cas uniforme

Circulation	$-3.1697 \times 10^{-16} \approx 0 \, \frac{m^2}{s}$
Trainee	$1.6445 \, \frac{N}{m}$
Portance	$-2.8422 \times 10^{-14} \approx 0 \, \frac{N}{m}$

La circulation autour de l'ilot est nulle étant donné que le débit est réparti uniformément autour de celui-ci. Par le théorème de Kutta, on peut ajouter que la force de portance est directement proportionnelle à la circulation donc, puisque la circulation est nulle, la portance est, elle aussi, nulle.
De plus, on peut justifier que la portance est nulle sur base du graphique des pressions. En effet, celui-ci nous montre que les pressions de part et d'autres des faces horizontales de l'ilot sont égales. Donc la force de portance est nulle étant donné que celle-ci résulte directement de l'intégrale de la pression sur les deux parois.
Quant à la force de trainée, celle-ci est non nulle étant donné que la pression s'exerçant sur la paroie verticale gauche de l'ilot est plus faible que celle s'exerçant sur la paroie verticale droite de l'ilot étant donné que juste derrière l'ilot, au niveau de la paroie verticale droite les vitesses sont très faibles voire nulle donc, par principe de conservation de l'énergie, la pression doit augmenter.

Quant au cas dans lequel la répartition du débit se fait selon les proportions 20.7% / 79.3% autour de l'ilot, nous obtenons les résultats suivants :

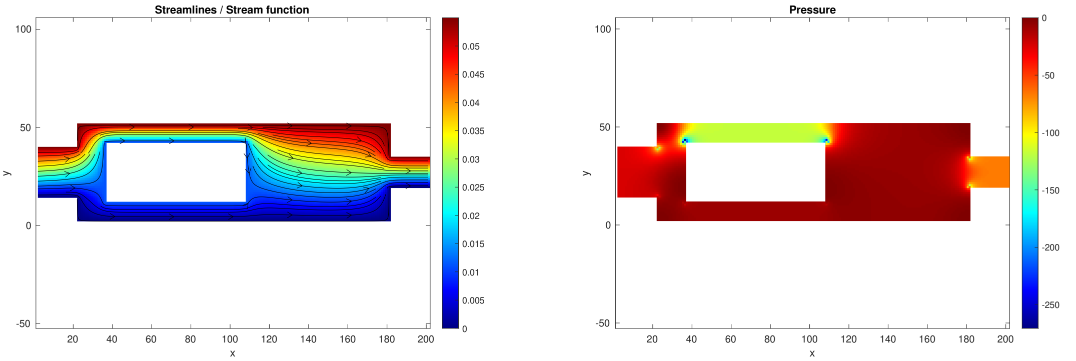

FIGURE 3 – Représentations graphiques du cas non-uniforme

Circulation	$-0.3435\ \frac{m^2}{s}$
Trainee	$2.4179\ \frac{N}{m}$
Portance	$83.1836\ \frac{N}{m}$

La circulation autour de l'ilot est non nulle puisque la distribution du débit autour de celui-ci est non-uniforme donc, par conséquent, une circulation est créée. Son signe dépend de la façon dont a parcouru notre volume de contrôle.
Quant à la trainée, la justification est identique au cas d'un ilot avec une distribution uniforme du débit autour de celui-ci. Et dans le cas de la portance, celle-ci est non nulle étant donné que le fluide n'est pas réparti uniformément lorsqu'il passe au dessus et en dessous de l'ilot. Son signe positif provient du fait que l'on a décidé, de façon arbitraire, de faire passer 79.3 % de notre débit au dessus de l'ilot.
Par conséquent, étant donné que l'on fait passer plus de débit au dessus de notre ilot, les vitesses augmentent et entrainent succintement une diminution de pression au dessus de l'ilot. On a donc, au final, une pression qui est supérieure en dessous de l'ilot qu'au dessus ce qui entraine une portance dirigé vers le haut d'où le signe positif.