

Глава 1

Выбор субоптимальной структуры модели

В данной главе рассматривается задача выбора структуры модели глубокого обучения. Предлагается ввести вероятностные предположения о распределении параметров и распределении структуры модели. Проводится градиентная оптимизация параметров и гиперпараметров модели на основе байесовского вариационного вывода. В качестве оптимизируемой функции для гиперпараметров модели предлагается обобщенная функция ее обоснованности. Показано, что данная функция оптимизирует ряд критериев выбора структуры модели: метод максимального правдоподобия, последовательное увеличение и снижению сложности модели, полный перебор структуры модели, а также получение максимума вариационной оценки обоснованности модели. Решается двухуровневая задача оптимизации: на первом уровне проводится оптимизация нижней оценки обоснованности модели по вариационным параметрам модели. На втором уровне проводится оптимизация гиперпараметров модели.

1.1. Вероятностная модель

Определим априорные распределения параметров и структуры модели следующим образом. Пусть для каждого ребра $(j, k) \in E$ и каждой базовой функции $\mathbf{g}_l^{j,k}$ параметры модели $\mathbf{w}_l^{j,k}$ распределены нормально с нулевым средним:

$$\mathbf{w}_l^{j,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \gamma_l^{j,k} (\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}),$$

где $(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}$ — диагональная матрица, $l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}$, где $K^{j,k}$ — количество базовых функций для ребра $K^{j,k}$. Априорное распределение $p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h})$ параметров $\mathbf{w}_l^{j,k}$ зависит не только от гиперпараметров $\mathbf{A}_k^{j,k}$, но и от структурного параметра $\gamma_l^{j,k} \in (0, 1)$.

В качестве априорного распределения для структуры $\mathbf{\Gamma}$ предлагается использовать произведение распределений Gumbel-Softmax (\mathcal{GS}) [?]:

$$p(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{(j,k) \in E} p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}),$$

где для каждого структурного параметра $\boldsymbol{\gamma}^{j,k}$ с количеством базовых функций $K^{j,k}$ вероятность $p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}})$ определена следующим образом:

$$p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = (K-1)! (\lambda_{\text{temp}})^{K-1} \prod_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\lambda_{\text{temp}}-1} \left(\sum_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\lambda_{\text{temp}}} \right)^{-K^{j,k}},$$

где $\mathbf{s}^{j,k} \in (0, \infty)^{K^{j,k}}$ — гиперпараметр, отвечающий за смещенность плотности распределения относительно точек симплекса на $K^{j,k}$ вершинах, $\lambda_{\text{temp}} > 0$ —

метапараметр температуры, отвечающий за концентрацию плотности вблизи вершин симплекса или в центре симплекса.

Перечислим свойства, которыми обладает распределение Gumbel-Softmax:

1. Реализация l -й компоненты случайной величины $\gamma^{j,k}$ порождается следующим образом:

$$\hat{\gamma}_l^{j,k} = \frac{\exp(\log s_l^{j,k} + \hat{g}_l^{j,k})/\lambda_{\text{temp}}}{\sum_{l'=1}^K \exp(\log s_{l'}^{j,k} + \hat{g}_{l'}^{j,k})/\lambda_{\text{temp}}},$$

где $\hat{\gamma}_l^{j,k} \sim -\log(-\log \mathcal{U}(0, 1)^{K^{j,k}})$.

2. Свойство округления: $p(\gamma_{l_1} > \gamma_{l_2}, l_1 \neq l_2 | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \frac{s_{l_1}^{j,k}}{\sum_{l'} s_{l'}^{j,k}}$.
3. При устремлении температуры к нулю реализация $\hat{\gamma}^{j,k}$ случайной величины концентрируется на вершинах симплекса:

$$p(\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0} \hat{\gamma}_l^{j,k} = 1 | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \frac{s_l}{\sum_{l'} s_{l'}^{j,k}}.$$

4. При устремлении температуры к бесконечности плотность распределения концентрируется в центре симплекса:

$$\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty} p(\gamma^{j,k} | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \begin{cases} \infty, & \gamma^{j,k} = \frac{1}{K^{j,k}}, l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Доказательства первых трех утверждений приведены в [?]. Докажем утверждение 4.

Доказательство. Формула плотности с точностью до множителя записывается следующим образом :

$$p(\gamma^{j,k} | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) \propto \frac{(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}}{\left(\sum_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\frac{K^{j,k}-1}{K}} \lambda_{\text{temp}} \prod_{l'=1}^{K^{j,k}} [l \neq l'] (\gamma_{l'}^{j,k})^{\frac{1}{K^{j,k}}} \lambda_{\text{temp}} \right)^{K^{j,k}}}. \quad (1.2)$$

Заметим, что числитель $(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}$ имеет меньшую скорость сходимости, чем знаменатель, поэтому для вычисления предела достаточно проанализировать только знаменатель. Знаменатель под степенью $(-K^{j,k})$ представляется суммой слагаемых следующего вида:

$$\left(\frac{\prod_{l' \neq l} \gamma_{l'}^{\frac{1}{K^{j,k}}}}{\gamma_l^{\frac{K-1}{K^{j,k}}}} \right)^{\lambda_{\text{temp}}}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим два случая: когда вектор $\gamma^{j,k}$ лежит не в центре симплекса, и когда $\gamma^{j,k}$ лежит в центре симплекса. Пусть хотя бы для одной компоненты l выполнено: $\gamma_l^{j,k} \neq \frac{1}{K^{j,k}}$. Пусть l' соответствует индексу максимальной компоненты вектора $\gamma^{j,k}$:

$$l' = \arg \max l \in \{1, \dots, K^{j,k}\} \gamma_l^{j,k}.$$

Для $l = l'$ предел выражения (1.3) при $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. Для $l \neq l'$ предел выражения (1.3) при $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Возводя сумму пределов в степень $(-K^{j,k})$ получаем предел плотности, равный нулю.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\gamma_l^{j,k} = \frac{1}{K^{j,k}}$ для всех компонент вектора $\gamma^{j,k}$. Тогда выражение (1.2) с точностью до множителя упрощается до $\lambda_{\text{temp}}^{K^{j,k}-1}$. Предел данного выражения стремится к бесконечности. Таким образом, предел плотности Gumbel-Softmax равен выражению (1.1), что и требовалось доказать. \square

Первое свойство Gumbel-Softmax распределения позволяет использовать репараметризацию при вычислении градиента в вариационном выводе (англ. reparameterization trick).

Определение 1. Случайную величину ψ с плотностью вероятности q с параметрами θ_ψ назовем подлежащей репараметризации через распределение q_2 , если q_2 не зависит от параметров θ_ψ и плотность q можно записать как суперпозицию вида:

$$q = g(\theta) \circ q_2,$$

где g — некоторая непрерывная функция.

Идею репараметризации поясним на следующем примере¹.

Пример 1. Пусть структура Γ зафиксирована для модели \mathbf{f} . Рассмотрим математическое ожидание логарифма правдоподобия выборки модели по некоторому непрерывному распределению $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$:

$$\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \int_{\mathbf{w}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) d\mathbf{w}.$$

Продифференцируем данное выражение по параметрам $\theta_{\mathbf{w}}$ вариационного распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$, полагая что $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$ удовлетворяет необходимым требованиям для переноса оператора дифференцирования под знак интеграла:

$$\nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \int_{\mathbf{w}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) d\mathbf{w}.$$

Выражение общем виде не имеет аналитического решения. Пусть распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$ для параметров \mathbf{w} подлежит репараметризации по некоторому распределению ε с известной плотностью q_2 :

$$q = g(\theta) \circ q_2, \quad \varepsilon \sim q_2.$$

¹Подробный анализ репараметризации для генеративных моделей глубокого обучения представлен по адресу <http://gregorygundersen.com/blog/2018/04/29/reparameterization/>



Рис. 1.1. Пример распределения Gumbel-Softmax при различных значениях параметров: а) $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0$, б) $\lambda_{\text{temp}} = 1, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, в) $\lambda_{\text{temp}} = 5, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, г) $\lambda_{\text{temp}} = 5, \mathbf{s} = [10, 0.1, 0.1]$.

TODO Тогда справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) &= \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{\epsilon} \log p(\mathbf{y} | g(\epsilon, \theta_{\mathbf{w}}), \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) = \\ &= \int_{\epsilon} \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \log p(\mathbf{y} | g(\epsilon, \theta), \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) p(\epsilon) d\epsilon = \mathbb{E}_{\epsilon} \nabla_{\theta} \log p(\mathbf{y} | g(\epsilon, \theta), \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, распределение, позволяющее произвести репараметризацию, является более удобным для вычисления интегральных оценок вида $\nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma)$, а также позволяет повысить точность приближенного вычисления значений таких функций [?].

Пример распределения Gumbel-Softmax при различных параметрах представлен на Рис. 1.1. В качестве альтернативы для априорного распределения структуры выступает распределение Дирихле. В качестве предельного случая, когда все структуры $\Gamma \in \mathbb{G}$ равнозначны, выступает равномерное распределение. Выбор в качестве распределения структуры произведения распределений Gumbel-Softmax обоснован выбором этого распределения в качестве вариационного.

Заметим, что предлагаемое априорное распределение неоднозначно: одно и то же распределение можно получить с различными значениями гиперпараметра $\mathbf{A}_l^{j,k}$ и структурного параметра $\gamma_l^{j,k}$. В качестве регуляризатора для матрицы $(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}$ предлагается использовать обратное гамма-распределение:

$$(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1} \sim \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{\lambda}$ — метапараметры оптимизации. Использование обратного гамма-распределения в качестве распределения гиперпараметров можно найти в [?, ?]. В данной работе обратное распределение выступает как регуляризатор гиперпараметров. Варьированием метапараметров λ_1, λ_2 получается более сильная или более слабая регуляризация [?]. Пример распределений $\text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$ для разных значений метапараметров λ_1, λ_2 изображен на Рис. 1.2. Оптимизации без регуляризации соответствует случай предельного распределения $\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Таким образом, предлагаемая вероятностная модель содержит следующие компоненты:

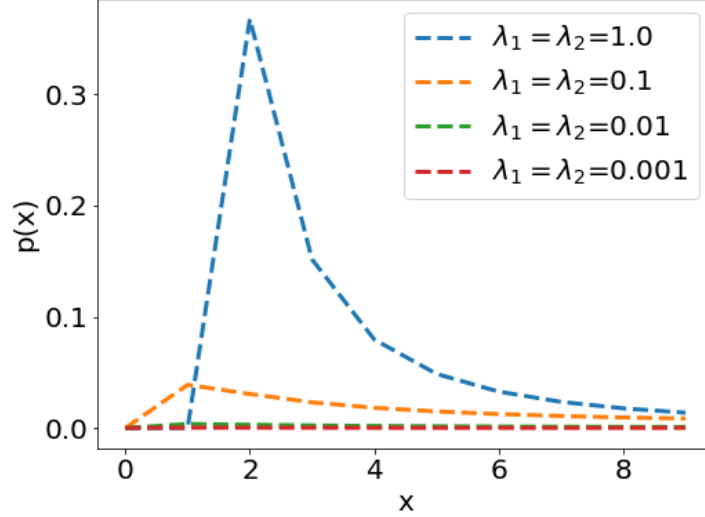


Рис. 1.2. Графики обратных гамма распределений для различных значений метапараметров.

1. Параметры \mathbf{w} модели, распределенные нормально.
2. Структура модели $\mathbf{\Gamma}$, содержащая все структурные параметры $\{\gamma^{j,k}, (j,k) \in E\}$, распределенные по распределению Gumbel-Softmax.
3. Гиперпараметры $\mathbf{h} = [\text{diag}(\mathbf{A}), \mathbf{s}]$, где \mathbf{A} — конкатенация матриц $\mathbf{A}^{j,k}, (j,k) \in E$, \mathbf{s} — конкатенация параметров Gumbel-Softmax распределений $\mathbf{s}^{j,k}, (j,k) \in E$, где E — множество ребер, соответствующих графу рассматриваемого параметрического семейства моделей \mathfrak{F} .
4. Метапараметры: $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}]$. Эти параметры не подлежат оптимизации и задаются экспертно.

График вероятностной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.3.

1.2. Вариационная оценка обоснованности вероятностной модели

Задача выбора структуры $\mathbf{\Gamma}$ и параметров \mathbf{w} заключается в получении оценок на апостериорное распределение $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = p(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$. Оно зависит от гиперпараметров \mathbf{h} . В качестве критерия выбора гиперпараметров предлагается использовать апостериорную вероятность гиперпараметров:

$$p(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) \propto p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}}. \quad (1.4)$$

Структура модели и параметры модели выбираются на основе полученных значений гиперпараметров:

$$\mathbf{\Gamma}^* = \arg \max_{\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{\Gamma}} p(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}^*, \boldsymbol{\lambda}),$$

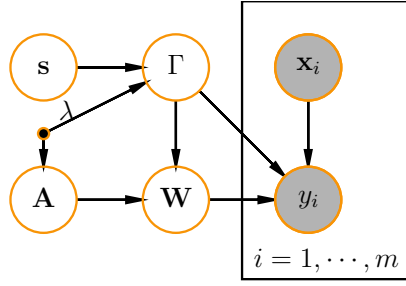


Рис. 1.3. График предлагаемой вероятностной модели в формате плоских нотаций. Переменные обозначены белыми и серыми кругами, константы обозначены обведенными черными кругами. Наблюдаемые переменные обозначены серыми кругами.

$$\mathbf{w}^* = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}} p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}^*, \boldsymbol{\lambda}),$$

где \mathbf{h}^* — решение задачи оптимизации (1.4).

Для вычисления обоснованности модели

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \iint_{\mathbf{\Gamma}, \mathbf{w}} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) p(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{\Gamma} d\mathbf{w}$$

из (1.4) предлагается использовать вариационную оценку обоснованности.

Теорема 1. Пусть $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}) = q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) q_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}})$ — вариационное распределение с параметрами $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}]$, аппроксимирующее апостериорное распределение структуры и параметров:

$$q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}) \approx p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}),$$

$$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) \approx p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}),$$

$$q_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}) \approx p(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}) || p(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ & - D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \end{aligned}$$

где $D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$ вычисляется по формуле условной дивергенции [?]:

$$D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \mathbb{E}_{\mathbf{\Gamma} \sim q_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{\Gamma} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}})} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right).$$

Доказательство. Перепишем обоснованность:

$$\begin{aligned}
\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= \log \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma d\mathbf{w} = \\
&= \log \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \frac{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} d\Gamma d\mathbf{w} = \\
&= \log \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})}.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Йенсена получим

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} &\geq \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} = \\
&= -\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Декомпозируем распределение q по свойству условной дивергенции:

$$\begin{aligned}
D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) &= \\
&= D_{\text{KL}}(q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) || p(\Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right). \tag{1.6}
\end{aligned}$$

□

В качестве вариационного распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ предлагается использовать нормальное распределение, не зависящее от структуры модели Γ :

$$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_q, \mathbf{A}_q),$$

где \mathbf{A}_q — диагональная матрица с диагональю $\boldsymbol{\alpha}_q$.

В качестве вариационного распределения $q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ предлагается использовать произведение распределений Gumbel-Softmax. Конкатенацию параметров концентрации распределений обозначим \mathbf{s}_q . Его температуру, общую для всех структурных параметров $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$, обозначим θ_{temp} . Вариационными параметрами распределения $q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ являются параметры распределений $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$, $q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$:

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\mu}_q, \boldsymbol{\alpha}_q, \mathbf{s}_q, \theta_{\text{temp}}].$$

График вероятностной вариационной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.4.

Для анализа сложности полученной модели введем понятие *параметрической сложности*.

Относительной вариационной плотностью вектора параметров \mathbf{w} назовем следующее выражение:

$$\rho(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{w \in \mathbf{w}} \rho(w|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Сформулируем и докажем теорему о связи относительной плотности и параметрической сложности модели:

Теорема 2. Пусть

1. Заданы компактные множества $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$, $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \subset \Theta_{\mathbf{w}}$, $U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} \subset \Theta_{\Gamma}$.
2. Мода априорного распределения $p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ не зависит от гиперпараметров \mathbf{h} на $U_{\mathbf{h}}$ и структуры Γ на $U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}}$:

$$\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma_1, \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda}) = \text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma_1, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{m} \text{ для любых } \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}, \Gamma_1, \Gamma_2$$

3. Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ и априорное распределение $p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ являются абсолютно непрерывными и унимодальными на $U_{\mathbf{h}}, U_{\boldsymbol{\theta}}$.
4. Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ является липшецевым по \mathbf{w} .
5. Значение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ не равно нулю при $\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$.
6. Решение задачи

$$\mathbf{h}^* = \arg \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \quad (1.7)$$

единственно для любого $\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$.

7. Параметры модели \mathbf{w} имеют конечные вторые моменты по распределениям:

$$\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma, \quad \int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma.$$

8. Мода и матожидание вариационного распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ и априорного распределения $p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ совпадают:

$$\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w};$$

$$\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}.$$

9. Задана бесконечная последовательность векторов вариационных параметров $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_i, \dots \in U_{\boldsymbol{\theta}}$, такая что $\lim_{i \rightarrow \infty} C_p(\boldsymbol{\theta}_i|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$.

Тогда следующее выражение стремится к единице:

$$\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \rho(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow 1.$$

Доказательство. Обозначим за \mathbf{h}_i — решение задачи (1.7) для вектора вариационных параметров $\boldsymbol{\theta}_i$. Воспользуемся неравенством Пинскера:

$$\|F_q(\boldsymbol{\theta}_i) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} \leq \sqrt{2D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_i) \| p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda}))},$$

где $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ — расстояние по вариации, F_q, F_p — функции распределения $q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_i), p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})$. Т.к. дивергенция (1.6) состоит из двух неотрицательных величин, то обе они стремятся к нулю. Рассмотрим вторую величину:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} \int_{\mathbf{w}} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\mathbf{w} d\Gamma \right| \geq \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \|F_q(\boldsymbol{\theta}_i) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma. \end{aligned}$$

Отсюда $\lim_{i \rightarrow \infty} \|F_q(\boldsymbol{\theta}) - F_p(\mathbf{h})\|_{\text{TV}} = 0$. По теореме Шеффе данное выражение можно переписать как:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma d\mathbf{w} = 0.$$

Для произвольного $\boldsymbol{\theta}$ рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{[q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})]} \right) q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| = \\ &\left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{[q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})]} \right) q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| \leq \\ &\int_{\Gamma} \left| \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{[q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})]} \right| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \leq \\ &\frac{C_l}{\min_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \int_{\Gamma} |\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w} - \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w}| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \leq \\ &\leq \frac{C_l}{\min_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{M}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma, \end{aligned}$$

где C_l — максимальная константа Липшица для $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ на $U_{\boldsymbol{\theta}}$.

Определим случайную величину $\boldsymbol{\nu}(t), t \geq 0$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \max(-t \cdot \mathbf{1}, \min(t \cdot \mathbf{1}, \mathbf{w})).$$

Данная величина совпадает с \mathbf{w} при $|\mathbf{w}| < t$ и принимает значение t или $-t$ при $|\mathbf{w}| \geq t$. Тогда для любого $t > 0$ справедливо:

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma + \\
&\quad + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} \leq \\
&\leq \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} d\Gamma + \\
&\quad + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\boldsymbol{\nu}(t)| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma. \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое суммы (1.8). Т.к. вторые моменты $\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}^2$, $\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w}^2$ конечны, то случайная величина \mathbf{w} равномерно интегрируема как при маргинальном распределении $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma$, так и при маргинальном распределении $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma$. По определению равномерной интегрируемости для \mathbf{w} для любого числа ε существует число t_0 , такое что для любого $t \geq t_0$ справедливо выражение:

$$\mathbb{E} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| d\mathbf{w} d\Gamma \leq \varepsilon.$$

где матожидание берется по распределениям $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma$, $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} d\Gamma \leq \\
&\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma d\mathbf{w}
\end{aligned}$$

для любого t . Устремляя t к бесконечности, получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} d\Gamma = 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое. При $t \rightarrow \infty$ выражение $\boldsymbol{\nu}(t)$ стремится к \mathbf{w} . Поэтому

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma = \\
&\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma \leq \\
&\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma +
\end{aligned}$$

$$+ \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\nu(t)| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma = 0,$$

где $\boldsymbol{\theta}_i = [(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i, (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i]$.

Таким образом выражение $\left| \int_{\Gamma} \frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right|$ стремится к единице, что и требовалось доказать. \square

Теорема утверждает, что при устремлении параметрической сложности модели к нулю, все параметры модели подлежат удалению в среднем по всем возможным значениям структуры Γ модели. Заметим, что теорема применима для случая, когда последовательность вариационных распределений q не имеет предела. Так, в случае, если структура Γ определена однозначно, последовательность $\boldsymbol{\theta}_i$ может являться последовательностью нормальных распределений, чье матожидание стремится к нулю:

$$\boldsymbol{\theta}_i \sim \mathcal{N}((\boldsymbol{\mu}_q)_i, (\mathbf{A}_q^{-1})_i), (\boldsymbol{\mu}_q)_i \rightarrow \mathbf{0}.$$

Априорным распределением $p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ при этом может являться семейство нормальных распределений с нулевым средним:

$$p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}).$$

При этом сама последовательность распределений $\boldsymbol{\theta}_i$ не обязана иметь предел.

1.3. Обобщающая задача

В данном разделе проводится анализ основных критериев выбора моделей, а также предлагается их обобщение на случай моделей, использующих вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ для аппроксимации неизвестного апостериорного распределения параметров $p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$.

Рассмотрим основные статистические критерии выбора вероятностных моделей.

1. Критерий максимального правдоподобия:

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in U_{\mathbf{w}}, \Gamma \in U_{\Gamma}}.$$

Для использования данного критерия в качестве задачи выбора модели предлагается следующее обобщение:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma). \quad (1.9)$$

Данное обобщение (1.9) эквивалентно критерию правдоподобия при выборе в качестве $q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ эмпирического распределения параметров и структуры. Метод не предполагает оптимизации гиперпараметров \mathbf{h} . Для формального соответствия данной задачи задаче выбора модели (??),

т.е. двухуровневой задачи оптимизации, положим $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}}$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}}$$

2. Метод максимальной апостериорной вероятности.

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in U_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\Gamma} \in U_{\boldsymbol{\Gamma}}}.$$

Аналогично предыдущему методу сформулируем вариационное обобщение данной задачи:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.10)$$

$$= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} (\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) + \log p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).$$

Т.к. в рамках данной задачи (1.10) не предполагается оптимизации гиперпараметров \mathbf{h} , положим параметры распределения $p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ фиксированными:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{s}, \text{diag}(\mathbf{A})].$$

3. Полный перебор структуры:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(q_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Gamma}}) = p'|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) \quad (1.11)$$

где p' — некоторое распределение на структуре $\boldsymbol{\Gamma}$, выступающее в качестве метапараметра.

4. Критерий Акаике:

$$\text{AIC} = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) + |\mathbb{W}|.$$

Т.к. все рассматриваемые модели принадлежат одному параметрическому семейству моделей \mathfrak{F} , то количество параметров у всех рассматриваемых моделей совпадает. Тогда критерий Акаике совпадает с критерием максимального правдоподобия. Для использования критерия Акаике для сравнения моделей, принадлежащих одному параметрическому семейству \mathfrak{F} предлагается следующая переформулировка:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \quad (1.12)$$

$$- |\{w : D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < \lambda_{\text{prune}}\}|,$$

где

$$\mathbf{h} = \arg \min_{\mathbf{h}' \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \quad (1.13)$$

λ_{prune} — метапараметр алгоритма, $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ — область определения задачи по гиперпараметрам. Предложенное обобщение (1.12) применимо только в случае, если выражение (1.13) определено однозначно, т.е. существует единственный вектор гиперпараметров $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$, доставляющий минимум дивергенции $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$.

5. Информационный критерий Шварца:

$$\text{BIC} = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - 0.5 \log(m)|\mathbb{W}|.$$

Переформулируем данный критерий аналогично критерию AIC:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.14)$$

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \log m|\{w : D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < \lambda_{\text{prune}}\}|,$$

метапараметр λ_{prune} определен аналогично (1.13).

6. Метод вариационной оценки обоснованности:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.15)$$

$$= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}},$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}},$$

В рамках данной задачи функции $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ и $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ совпадают, все гиперпараметры \mathbf{h} подлежат оптимизации.

7. Валидация на отложенной выборке:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \mathbf{y}_{\text{train}} \mathbf{X}_{\text{train}} + p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (1.16)$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \mathbf{y}_{\text{test}} \mathbf{y}_{\text{test}} \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}},$$

где $(\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}})$, $(\mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{y}_{\text{test}})$ — разбиение выборки на обучающую и контрольную подвыборку. В рамках данной задачи, все гиперпараметры \mathbf{h} подлежат оптимизации.

Каждый из рассмотренных критериев удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных свойств:

- 1) модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум правдоподобия выборки;
- 2) модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум оценки обоснованности;
- 3) для моделей, доставляющих сопоставимые значения правдоподобия выборки, выбирается модель с меньшим количеством информативных параметров.

- 4) критерий позволяет производить перебор структур для отбора наилучших.

Формализуем рассмотренные критерии. Оптимизационную задачу, которая удовлетворяет всем перечисленным свойствам при некоторых значениях метапараметров, будет называть *обобщающей*.

Определение 4. Двухуровневую задачу оптимизации будем называть *обобщающей* на компакте

$$U = U_{\theta_w} \times U_{\theta_\Gamma} \times U_{\mathbf{h}} \times U_{\lambda} \subset \Theta_w \times \Theta_\Gamma \times \mathbb{H} \times \Lambda$$

, если она удовлетворяет следующим критериям.

1. Область определения каждого параметра $w \in \mathbf{w}$, гиперпараметра $h \in \mathbf{h}$ и метапараметра $\lambda \in \Lambda$ не является пустым множеством и не является точкой.
2. Для каждого значения гиперпараметров \mathbf{h} оптимальное решение нижней (??) задачи оптимизации

$$\theta^*(\mathbf{h}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$$

определено однозначно при любых значениях метапараметров $\lambda \in U_\lambda$.

3. Критерий максимизации правдоподобия выборки: существует $\lambda \in U_\lambda$ и

$$K_1 > 0, \quad K_1 < \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_1), \lambda) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_2), \lambda),$$

такие что для любых векторов гиперпараметров, удовлетворяющих неравенству

$$\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}, Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_1), \lambda) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_2), \lambda) > K_1,$$

выполняется неравенство

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta^*(\mathbf{h}_1))} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) > \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta^*(\mathbf{h}_2))} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma).$$

4. Критерий минимизации параметрической сложности: существует $\lambda \in U_\lambda$ и

$$K_2 > 0, \quad K_2 < \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_1), \lambda) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_2), \lambda),$$

такие что для любых векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$, удовлетворяющих неравенству

$$Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_1), \lambda) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*(\mathbf{h}_2), \lambda) > K_2,$$

параметрическая сложность первой модели меньше, чем второй:

$$C_p(\theta^*(\mathbf{h}_1) | U_{\mathbf{h}}, \lambda) < C_p(\theta^*(\mathbf{h}_2) | U_{\mathbf{h}}, \lambda).$$

5. Критерий приближения оценки обоснованности: существует значение гиперпараметров λ , такое что значение функций потерь $L(\theta|y, X, h, \lambda)$ и валидации $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$ пропорционален вариационной оценке обоснованности модели:

$$L(\theta|y, X, h, \lambda) \propto Q(h|y, X, \theta, \lambda) \propto$$

$$\propto \mathbb{E}_{q(w, \Gamma|\theta)} p(y|X, w, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(w, \Gamma|\theta) || p(w, \Gamma|h, \lambda)) + \log p(h|\lambda)$$

для всех $\theta \in U_\theta, h \in U_h$. TODO: пояснение про все оптимизационные гиперпараметры.

6. Критерий перебора оптимальных структур: существует набор метапараметров λ и константа $K_3 > 0$:

$$K_3 < \max_{h_1, h_2} \min (D_{\text{KL}}(p(\Gamma|h_1, \lambda) || p(\Gamma|h_2, \lambda)), D_{\text{KL}}(p(\Gamma|h_2, \lambda) || p(\Gamma|h_1, \lambda))) ,$$

такие что для локальных оптимумов задачи оптимизации h_1, h_2 , полученных при метапараметрах λ и удовлетворяющих неравенствам

$$D_{\text{KL}}(p(\Gamma|h_1, \lambda) || p(\Gamma|h_2, \lambda)) > K_3, D_{\text{KL}}(p(\Gamma|h_2, \lambda) || p(\Gamma|h_1, \lambda)) > K_3,$$

,

$$Q(h_1|y, X, \theta, \lambda) > Q(h_2|y, X, \theta, \lambda),$$

существует значение метапараметров $\lambda' \neq \lambda$, такие что

- (а) соответствие между вариационными параметрами $\theta^*(h_1), \theta^*(h_2)$ сохраняется при λ' ,
 - (б) выполняется неравенство $Q(h_1|y, X, \theta, \lambda) < Q(h_2|y, X, \theta, \lambda)$ при λ' .
7. Критерий непрерывности: функции $L(\theta|y, X, h, \lambda)$ и $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$ непрерывны по метапараметрам $\lambda \in U_\lambda$.

Первый критерий является техническим и используется для исключения из рассмотрения вырожденных задач оптимизации. Второй критерий говорит о том, что решение первого и второго уровня должны быть согласованы и определены однозначно. Критерии 3-5 определяют возможные критерии оптимизации, которые должны приближаться обобщающей задачей. Критерий 6 говорит о возможности перехода между различными структурами модели. Данный критерий говорит о том, что мы можем перейти от одного набора гиперпараметров h_1 к другим h_2 , если они соответствуют локальным оптимумам задачи оптимизации, и дивергенция соответствующих априорных распределений на структурах $p(\Gamma|h, \lambda)$ значимо высока. При этом соответствующие вариационные распределения $q_\Gamma(\Gamma|\Gamma, \theta_\Gamma)$ могут оказаться достаточно близки. Возможным дополнением этого критерия был бы критерий, позволяющий переходить от структуры к структуре, если соответствующие распределения $q_\Gamma(\Gamma|\Gamma, \theta_\Gamma)$ различаются значимо. Последний критерий говорит о том, что обобщающая задача должна позволять производить переход между различными методами выбора параметров и структуры модели непрерывно.

Теорема 3. Рассмотренные задачи (1.9),(1.10),(1.11),(1.12),(1.14),(1.16) не являются обобщающими.

Доказательство. Задачи (1.9),(1.10),(1.11),(1.12),(1.14) не имеют гиперпараметров \mathbf{h} , подлежащих оптимизации, поэтому не могут оптимизировать вариационную оценку.

При использовании валидации на отложенной выборке (1.16) в функцию валидации $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ не входит ни один метапараметр, поэтому критерий перебора структур \mathfrak{b} для нее также не выполняется. \square

Теорема 4. Пусть q_{Γ} — абсолютно непрерывное распределение с дифференцируемой плотностью, такой что:

1. Градиент плотности $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} q(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ является нулевым не более чем счетное количество раз.
2. Выражение $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} q(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) \log p(\Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ ограничено на $U_{\boldsymbol{\theta}}$ некоторой случайной величиной с конечным первым моментом.

Тогда задача (1.15) не является обобщающей.

Доказательство. Пусть выполнены условия критерия \mathfrak{b} о переборе структур, и $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ — локальные оптимумы функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ при метапараметрах $\boldsymbol{\lambda}$. По условию критерия соответствие $\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1)$ и $\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2)$ должны сохраняться, т.е. для некоторого $\boldsymbol{\lambda}'$ решение нижней задачи оптимизации $\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1)$ должно совпадать с решением $\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1)$ при метапараметрах $\boldsymbol{\lambda}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)|p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda})) = \\ & = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)|p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda}')). \end{aligned}$$

Сокращая равные слагаемые в равенстве получим:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)|p(\Gamma|\boldsymbol{\lambda})) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)|p(\Gamma|\boldsymbol{\lambda}')),$$

Из второго условия теоремы следует, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости осуществим переход дифференцирования под знак интеграла:

$$\int_{\Gamma \in \Gamma} \nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} q(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) (\log p(\Gamma|\boldsymbol{\lambda}) - \log p(\Gamma|\boldsymbol{\lambda}')) d\Gamma = 0.$$

Т.к. выражение $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} q(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)$ принимает нулевое значение в счетном количестве точек, то выражение $\log p(\Gamma|\boldsymbol{\lambda}) - \log p(\Gamma|\boldsymbol{\lambda}')$ равно нулю почти всюду, что означает что метапараметр температуры λ_{temp} равен при разных значениях метапараметров:

$$\lambda_{\text{temp}} = \lambda'_{\text{temp}}, \quad \lambda_{\text{temp}} \in \boldsymbol{\lambda}, \lambda'_{\text{temp}} \in \boldsymbol{\lambda}'.$$

Таким образом, метапараметры $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'$ отличаются лишь на метапараметры λ_1, λ_2 регуляризации ковариационной матрицы \mathbf{A}^{-1} . Возьмем в качестве векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ гиперпараметры, отличающиеся только параметрами распределения структуры:

$$\mathbf{h}_1 = [\mathbf{s}_1, \text{diag}(\mathbf{A}_1)], \mathbf{h}_2 = [\mathbf{s}_2, \text{diag}(\mathbf{A}_2)], \quad \mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2, \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2.$$

Метапараметры λ_1, λ_2 не влияют на значение функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ при гиперпараметрах, отличающихся только параметрами распределения структуры, поэтому значение функции Q для них будет неизменно при любых значениях λ_1, λ_2 . Приходим к противоречию: значение $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ не меняется при изменении метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$.

□

Список основных обозначений

- $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ — вектор признакового описания i -го объекта
 $y_i \in \mathbf{y}$ — метка i -го объекта
 \mathcal{D} — выборка
 $\mathbf{X} \subset \mathbb{X}$ — матрица, содержащая признаковое описание объектов выборки
 $\mathbf{y} \subset \mathbb{Y}$ — вектор меток объектов выборки
 m — количество объектов в выборке
 n — количество признаков в признаковом описании объекта
 $\mathbb{X} = ?\mathbb{R}^m$ — признаковое пространство объектов
 \mathbb{Y} — множество меток объектов
 R — множество классов в задаче классификации
 (V, E) — граф со множеством вершин V и множеством ребер E
 $\mathbf{g}^{j,k}$ — вектор базовых функций для ребра (j, k)
 $K^{j,k}$ — мощность вектора базовых функций для ребра (j, k)
 agg_v — функция агрегации для вершины v
 $\gamma^{j,k}$ — структурный параметр для ребра (j, k)
 \mathfrak{F} — параметрическое семейство моделей
 U — область определения оптимизационной задачи
 $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ — параметры модели
 \mathbb{W} — пространство параметров модели
 $U_{\mathbf{w}} \subset \mathbb{W}$ — область определения параметров модели
 $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{\Gamma}$ — структура модели
 $\mathbb{\Gamma}$ — множество значений структуры модели
 $U_{\mathbf{\Gamma}} \subset \mathbb{\Gamma}$ — область определения параметров модели
 $\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ — гиперпараметры модели
 \mathbb{H} — пространство гиперпараметров модели
 $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ — область определения гиперпараметров
 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ — параметры вариационного распределения
 Θ — пространство параметров вариационного распределения
 $U_{\boldsymbol{\theta}} \subset \Theta$ — область определения вариационных параметров модели
 $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in \Theta_{\mathbf{w}}$ — параметры вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $\Theta_{\mathbf{w}}$ — пространство параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \subset \Theta_{\mathbf{w}}$ — область определения параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}} \in \Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — параметры вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели
 $\Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — пространство параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели
 $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}} \subset \Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — область определения параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели

$\lambda \in \Lambda$ — вектор метапараметров

Λ — пространство метапараметров

$U_\lambda \subset \Lambda$ — область определения метапараметров

$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma)$ — правдоподобие выборки

$p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение параметров и структуры модели

$p(\mathbf{h}|\lambda)$ — распределение гиперпараметров модели

$p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение структуры модели

$p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение параметров модели

$p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение параметров и структуры модели

$p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение структуры модели

$p(\Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение структуры модели

$p(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \lambda)$ — апостериорное распределение гиперпараметров

$p(y, \mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{x}, \mathbf{h})$ — вероятностная модель глубокого обучения

$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — обоснованность модели

$q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ — вариационное распределение параметров и структуры модели

$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ — вариационное распределение структуры модели

$q_{\Gamma}(\Gamma|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ — вариационное распределение параметров модели

$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — функция потерь

$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda)$ — валидационная функция

$T(\boldsymbol{\theta}|L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda))$ — оператор оптимизации

\mathfrak{Q} — семейство вариационных распределений

S — энтропия распределения

M — множество моделей без общей параметризации

$D_{\text{KL}}(p_1||p_2)$ — дивергенция Кульбака-Лейблера между распределениями p_1 и p_2

\mathbf{A}^{-1} — матрица ковариаций параметров модели

\mathbf{s} — конкатенация параметров концентрации на структуре модели