

Глава 1

Выбор субоптимальной структуры модели

В данной главе рассматривается задача выбора структуры модели глубокого обучения. Предлагается ввести вероятностные предположения о распределении параметров и распределении структуры модели. Проводится градиентная оптимизация параметров и гиперпараметров модели на основе байесовского вариационного вывода. В качестве оптимизируемой функции для гиперпараметров модели предлагается обобщенная функция ее обоснованности. Показано, что данная функция оптимизирует ряд критериев выбора структуры модели: метод максимального правдоподобия, последовательное увеличение и снижению сложности модели, полный перебор структуры модели, а также получение максимума вариационной оценки обоснованности модели. Решается двухуровневая задача оптимизации: на первом уровне проводится оптимизация нижней оценки обоснованности модели по вариационным параметрам модели. На втором уровне проводится оптимизация гиперпараметров модели.

1.1. Вероятностная модель

Определим априорные распределения параметров и структуры модели следующим образом. Пусть для каждого ребра $(j, k) \in E$ и каждой базовой функции $\mathbf{g}_l^{j,k}$ параметры модели $\mathbf{w}_l^{j,k}$ распределены нормально с нулевым средним:

$$\mathbf{w}_l^{j,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \gamma_l^{j,k} (\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}),$$

где $(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}$ — диагональная матрица, $l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}$, где $K^{j,k}$ — количество базовых функций для ребра $K^{j,k}$. Априорное распределение $p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h})$ параметров $\mathbf{w}_l^{j,k}$ зависит не только от гиперпараметров $\mathbf{A}_k^{j,k}$, но и от структурного параметра $\gamma_l^{j,k} \in (0, 1)$.

В качестве априорного распределения для структуры $\mathbf{\Gamma}$ предлагается использовать произведение распределений Gumbel-Softmax (\mathcal{GS}) [?]:

$$p(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{(j,k) \in E} p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}),$$

где для каждого структурного параметра $\boldsymbol{\gamma}^{j,k}$ с количеством базовых функций $K^{j,k}$ вероятность $p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}})$ определена следующим образом:

$$p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = (K-1)! (\lambda_{\text{temp}})^{K-1} \prod_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\lambda_{\text{temp}}-1} \left(\sum_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\lambda_{\text{temp}}} \right)^{-K^{j,k}},$$

где $\mathbf{s}^{j,k} \in (0, \infty)^{K^{j,k}}$ — гиперпараметр, отвечающий за смещенность плотности распределения относительно точек симплекса на $K^{j,k}$ вершинах, $\lambda_{\text{temp}} > 0$ —

метапараметр температуры, отвечающий за концентрацию плотности вблизи вершин симплекса или в центре симплекса.

Перечислим свойства, которыми обладает распределение Gumbel-Softmax:

1. Компонента l случайной величины $\gamma^{j,k}$ представима следующим образом:

$$\gamma_l^{j,k} = \frac{\exp(\log s_l^{j,k} + g_l^{j,k})/\lambda_{\text{temp}}}{\sum_{l'=1}^{K^{j,k}} \exp(\log s_{l'}^{j,k} + g_{l'}^{j,k})/\lambda_{\text{temp}}},$$

где $g^{j,k} \sim -\log(-\log \mathcal{U}(0,1)^{K^{j,k}})$.

2. Свойство округления: $p(\gamma_{l_1} > \gamma_{l_2}, l_1 \neq l_2 | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \frac{s_{l_1}^{j,k}}{\sum_{l'} s_{l'}^{j,k}}$.
3. При устремлении температуры к нулю реализация $\hat{\gamma}^{j,k}$ случайной величины концентрируется на вершинах симплекса:

$$p(\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0} \hat{\gamma}_l^{j,k} = 1 | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \frac{s_l}{\sum_{l'} s_{l'}^{j,k}}.$$

4. При устремлении температуры к бесконечности плотность распределения концентрируется в центре симплекса:

$$\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty} p(\gamma^{j,k} | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \begin{cases} \infty, \gamma^{j,k} = \frac{1}{K^{j,k}}, l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Доказательства первых трех утверждений приведены в [?]. Докажем утверждение 4.

Доказательство. Формула плотности с точностью до множителя записывается следующим образом :

$$p(\gamma^{j,k} | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) \propto \frac{(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}}{\left(\sum_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\frac{K^{j,k}-1}{K^{j,k}} \lambda_{\text{temp}}} \prod_{l'=1}^{K^{j,k}} [l \neq l'] (\gamma_{l'}^{j,k})^{\frac{1}{K^{j,k}} \lambda_{\text{temp}}} \right)^{K^{j,k}}}. \quad (1.2)$$

Заметим, что числитель $(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}$ имеет меньшую скорость сходимости, чем знаменатель, поэтому для вычисления предела достаточно проанализировать только знаменатель. Знаменатель под степенью $(-K^{j,k})$ представляется суммой слагаемых следующего вида:

$$\left(\frac{\prod_{l' \neq l} \gamma_{l'}^{\frac{1}{K^{j,k}}}}{\gamma_l^{\frac{K^{j,k}-1}{K^{j,k}}}} \right)^{\lambda_{\text{temp}}}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим два случая: когда вектор $\gamma^{j,k}$ лежит не в центре симплекса, и когда $\gamma^{j,k}$ лежит в центре симплекса. Пусть хотя бы для одной компоненты l выполнено: $\gamma_l^{j,k} \neq \frac{1}{K^{j,k}}$. Пусть l' соответствует индексу максимальной компоненты

вектора $\gamma^{j,k}$:

$$l' = \arg \max_{l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}} \gamma_l^{j,k}.$$

Для $l = l'$ предел выражения (1.3) при $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. Для $l \neq l'$ предел выражения (1.3) при $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Возводя сумму пределов в степень $(-K^{j,k})$ получаем предел плотности, равный нулю.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\gamma_l^{j,k} = \frac{1}{K^{j,k}}$ для всех компонент вектора $\gamma^{j,k}$. Тогда выражение (1.2) с точностью до множителя упрощается до $(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}$. Предел данного выражения стремится к бесконечности. Таким образом, предел плотности Gumbel-Softmax равен выражению (1.1), что и требовалось доказать. □

Первое свойство Gumbel-Softmax распределения позволяет использовать репараметризацию при вычислении градиента в вариационном выводе (англ. reparametrization trick).

Определение 1. Случайную величину ψ с распределением q с параметрами θ_ψ назовем репараметризованной через случайную величину ε , чье распределение не зависит от параметров θ_ψ , если:

$$\psi = g(\varepsilon, \theta_\psi)$$

где g — некоторая непрерывная функция.

Идею репараметризации поясним на следующем примере.

Пример 1. Пусть структура Γ зафиксирована для модели \mathbf{f} . Рассмотрим математическое ожидание логарифма правдоподобия выборки модели по некоторому непрерывному распределению $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$:

$$\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \int_{\mathbf{w}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) d\mathbf{w}.$$

Продифференцируем данное выражение по параметрам $\theta_{\mathbf{w}}$ вариационного распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$, полагая что оно удовлетворяет необходимым условиям для переноса оператора дифференцирования под знак интеграла:

$$\nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \int_{\mathbf{w}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) d\mathbf{w}.$$

Это выражение в общем виде не имеет аналитического решения. Пусть распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$ для параметров \mathbf{w} подлжит репараметризации через случайную величину ε :

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}(\varepsilon, \theta_{\mathbf{w}}).$$

Тогда справедливо следующее выражение:

$$\nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{\varepsilon} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}(\varepsilon), \Gamma) =$$



Рис. 1.1. Пример распределения Gumbel-Softmax при различных значениях параметров: а) $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0$, б) $\lambda_{\text{temp}} = 1, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, в) $\lambda_{\text{temp}} = 5, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, г) $\lambda_{\text{temp}} = 5, \mathbf{s} = [10, 0.1, 0.1]$.

$$= \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\Gamma}) p(\boldsymbol{\varepsilon}) d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\Gamma}).$$

Таким образом, распределение, позволяющее произвести репараметризацию, является более удобным для вычисления интегральных оценок вида $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma})$, а также позволяет повысить точность приближенного вычисления значений таких функций [?]. Подробный анализ репараметризации для генеративных моделей глубокого обучения представлен в [?].

Пример распределения Gumbel-Softmax при различных параметрах представлен на Рис. 1.1. В качестве альтернативы для априорного распределения структуры выступает распределение Дирихле. В качестве предельного случая, когда все структуры $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{G}$ равнозначны, выступает равномерное распределение. Выбор в качестве распределения структуры произведения распределений Gumbel-Softmax обоснован выбором этого распределения в качестве вариационного.

Заметим, что предлагаемое априорное распределение неоднозначно: одно и то же распределение можно получить с различными значениями гиперпараметра $\mathbf{A}_l^{j,k}$ и структурного параметра $\gamma_l^{j,k}$. В качестве регуляризатора для матрицы $(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}$ предлагается использовать обратное гамма-распределение:

$$(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1} \sim \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{\lambda}$ — метапараметры оптимизации. Использование обратного гамма-распределения в качестве распределения гиперпараметров можно найти в [?, ?]. В данной работе обратное распределение выступает как регуляризатор гиперпараметров. Варьированием метапараметров λ_1, λ_2 получается более сильная или более слабая регуляризация [?]. Пример распределений $\text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$ для разных значений метапараметров λ_1, λ_2 изображен на Рис. 1.2. Оптимизации без регуляризации соответствует случай предельного распределения $\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Таким образом, предлагаемая вероятностная модель содержит следующие компоненты:

1. Параметры \mathbf{w} модели, распределенные нормально.

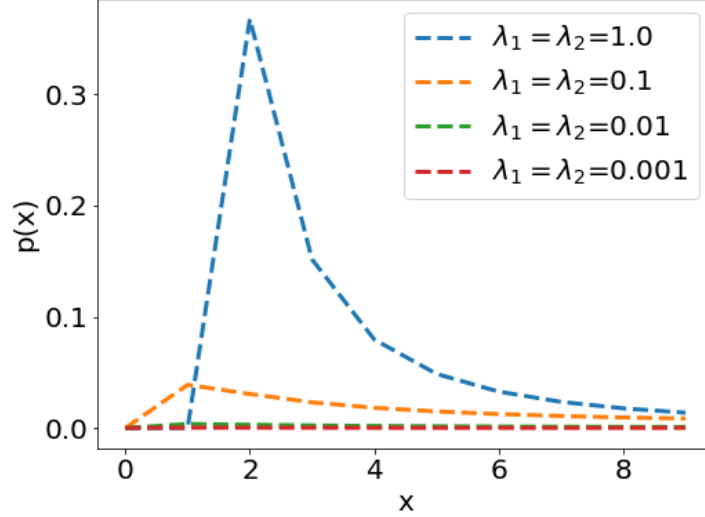


Рис. 1.2. Графики обратных гамма распределений для различных значений метапараметров.

2. Структура модели Γ , содержащая все структурные параметры $\{\gamma^{j,k}, (j,k) \in E\}$, распределенные по распределению Gumbel-Softmax.
3. Гиперпараметры $\mathbf{h} = [\text{diag}(\mathbf{A}), \mathbf{s}]$, где \mathbf{A} — конкатенация матриц $\mathbf{A}^{j,k}, (j,k) \in E$, \mathbf{s} — конкатенация параметров Gumbel-Softmax распределений $\mathbf{s}^{j,k}, (j,k) \in E$, где E — множество ребер, соответствующих графу рассматриваемого параметрического семейства моделей \mathfrak{F} .
4. Метапараметры: $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}]$. Эти параметры не подлежат оптимизации и задаются экспертно.

График вероятностной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.3.

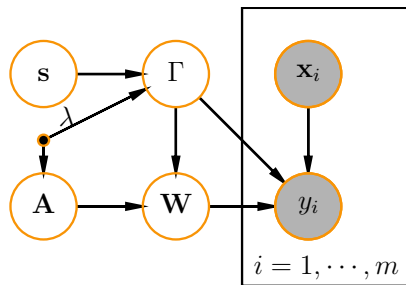


Рис. 1.3. TODO: сделать лямбду красивой (снова). График предлагаемой вероятностной модели в формате плоских нотаций. Переменные обозначены белыми и серыми кругами, константы обозначены обведенными черными кругами. Наблюдаемые переменные обозначены серыми кругами.

1.2. Вариационная оценка обоснованности вероятностной модели

Задача выбора структуры Γ и параметров \mathbf{w} заключается в получении оценок на апостериорное распределение $p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$. Оно зависит от гиперпараметров \mathbf{h} . В качестве критерия выбора гиперпараметров предлагается использовать апостериорную вероятность гиперпараметров:

$$p(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) \propto p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}}. \quad (1.4)$$

Структура модели и параметры модели выбираются на основе полученных значений гиперпараметров:

$$\mathbf{w}^*, \Gamma^* = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}, \Gamma \in \mathbb{\Gamma}} p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}^*, \boldsymbol{\lambda}),$$

где \mathbf{h}^* — решение задачи оптимизации (1.4).

Для вычисления обоснованности модели

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma d\mathbf{w}$$

из (1.4) предлагается использовать нижнюю вариационную оценку обоснованности.

Теорема 1. Пусть $q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) = q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ — вариационное распределение с параметрами $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}]$, аппроксимирующее апостериорное распределение структуры и параметров:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) &\approx p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}), \\ q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) &\approx p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}), \\ q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) &\approx p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}). \end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) || p(\Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ &- D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \end{aligned}$$

где $D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$ вычисляется по формуле условной дивергенции [?]:

$$D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right).$$

Доказательство. Перепишем обоснованность:

$$\begin{aligned}
\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= \log \iint_{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{w}} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\Gamma} d\mathbf{w} = \\
&= \log \iint_{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{w}} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \frac{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})}{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{\Gamma} d\mathbf{w} = \\
&= \log \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})}.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Йенсена получим

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} &\geq \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} = \\
&= -\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Декомпозируем распределение q по свойству условной дивергенции:

$$\begin{aligned}
D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) &= \\
&= D_{\text{KL}}(q_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Gamma}}) || p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \mathbb{E}_{\boldsymbol{\Gamma} \sim q_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Gamma}})} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right). \quad (1.6)
\end{aligned}$$

□

В качестве вариационного распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ предлагается использовать нормальное распределение, не зависящее от структуры модели $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_q, \mathbf{A}_q),$$

где \mathbf{A}_q — диагональная матрица с диагональю $\boldsymbol{\alpha}_q$.

В качестве вариационного распределения $q_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Gamma}})$ предлагается использовать произведение распределений Gumbel-Softmax. Конкатенацию параметров концентрации распределений обозначим \mathbf{s}_q . Его температуру, общую для всех структурных параметров $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Gamma}$, обозначим θ_{temp} . Вариационными параметрами распределения $q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ являются параметры распределений $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$, $q_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Gamma}})$:

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\mu}_q, \boldsymbol{\alpha}_q, \mathbf{s}_q, \theta_{\text{temp}}].$$

График вероятностной вариационной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.4. Для анализа сложности полученной модели введем понятие *параметрической сложности*.

Определение 2. Параметрической сложностью $C_p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda})$ модели с вариационными параметрами $\boldsymbol{\theta}$ на компакте $\mathbf{U}_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ назовем минимальную дивергенцию между вариационным и априорным распределением:

$$C_p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{U}_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{h} \in \mathbf{U}_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).$$

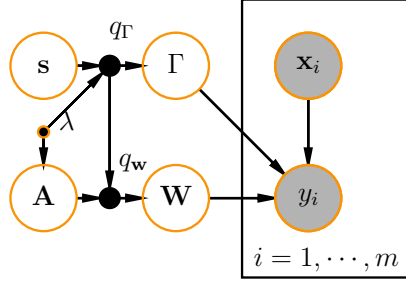


Рис. 1.4. График предлагаемой вероятностной вариационной модели в формате плоских нотаций. Переменные обозначены белыми и серыми кругами, константы обозначены обведенными черными кругами. Вариационное распределение обозначено черным кругом. Наблюдаемые переменные обозначены серыми кругами.

Параметрическая сложность модели соответствует минимальной по $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$ ожидаемой длине описания параметров модели при условии заданного параметрического априорного распределения [?].

Одним из критериев удаления неинформативных параметров в вероятностных моделях является отношение вариационной плотности параметров в моде распределения к вариационной плотности параметра в нуле [?]:

$$\frac{q_{\mathbf{w}}(w = \mu_q | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(w = 0 | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} = \exp \left(-\frac{2\alpha_q^2}{\mu_q^2} \right),$$

где параметру модели w соответствуют вариационные параметры μ_q, α_q : $q_{\mathbf{w}}(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) \sim \mathcal{N}(\mu_q, \alpha_q)$.

Обобщим понятие относительной вариационной плотности на случай произвольных непрерывных распределений.

Определение 3. Относительной вариационной плотностью параметра $w \in \mathbf{w}$ при условии структуры Γ и гиперпараметров \mathbf{h} назовем отношение вариационной плотности в моде вариационного распределения параметра к вариационной плотности в моде априорного распределения параметра:

$$\rho(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \lambda) = \frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(w | \Gamma, \mathbf{h}, \lambda) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}.$$

Относительной вариационной плотностью вектора параметров \mathbf{w} назовем следующее выражение:

$$\rho(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \lambda) = \prod_{w \in \mathbf{w}} \rho(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \lambda).$$

Сформулируем и докажем теорему о связи относительной плотности и параметрической сложности модели. Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть

1. Заданы компактные множества $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$, $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \subset \Theta_{\mathbf{w}}$, $U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} \subset \Theta_{\Gamma}$.
2. Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ и априорное распределение $p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ являются абсолютно непрерывными и унимодальными на $U_{\mathbf{h}}, U_{\boldsymbol{\theta}}$. Их мода и матожидание совпадают:

$$\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w};$$

$$\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}.$$

3. Мода априорного распределения $p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ не зависит от гиперпараметров \mathbf{h} на $U_{\mathbf{h}}$ и структуры Γ на $U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}}$:

$$\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma_1, \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda}) = \text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma_1, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{m}$$

для любых $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in U_{\Gamma}$.

4. Параметры модели \mathbf{w} имеют конечные вторые моменты по распределениям:

$$\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma, \quad \int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma.$$

5. Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ является липшецевым по \mathbf{w} .
6. Значение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ не равно нулю при $\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$.

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \rho(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - 1 \right| \leq \\ & \leq \frac{C_l}{\min_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma, \end{aligned}$$

где C_l — максимальная константа Липшица для $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ на $U_{\boldsymbol{\theta}}$.

Доказательство. Для произвольного $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}]$ рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \rho(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - 1 \right| = \\ & \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma - 1 \right| = \end{aligned}$$

представляя единицу как дробь с равными знаменателем и числителем

$$= \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| =$$

заменяя моду на матожидание (по условию теоремы)

$$= \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| \leq$$

занося модуль под знак интеграла

$$\leq \int_{\Gamma} \left| \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| \leq$$

используя липшецевость функции $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$

$$\frac{C_l}{\min_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \int_{\Gamma} |\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w} - \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w}| q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \leq$$

расписывая матожидание через интеграл

$$\leq \frac{C_l}{\min_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma,$$

□

Лемма 2. Пусть

1. Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ и априорное распределение $p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ являются абсолютно непрерывными.
2. Решение задачи

$$\mathbf{h}^* = \arg \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \quad (1.7)$$

единственно для любого $\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$.

3. Задана бесконечная последовательность векторов вариационных параметров $\boldsymbol{\theta}[1], \boldsymbol{\theta}[2], \dots, \boldsymbol{\theta}[i], \dots \in U_{\boldsymbol{\theta}}$, такая что $\lim_{i \rightarrow \infty} C_p(\boldsymbol{\theta}[i] | U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Тогда следующее выражение стремится к нулю:

$$\iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i])| q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]) d\Gamma d\mathbf{w},$$

где $\boldsymbol{\theta}[i] = [\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i], \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]]$, $\mathbf{h}[i]$ — решение задачи (1.7) для $\boldsymbol{\theta}[i]$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Пинскера:

$$\|F_q((\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \widehat{\text{KL}}(p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) || q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}))},$$

где $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ — расстояние по вариации, F_q, F_p — функции распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}), p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, $\widehat{\text{KL}}(p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) || q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}))$ — дивергенция при фиксированной структуре Γ :

$$\int_{\mathbf{w}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right) d\mathbf{w}.$$

По условию дивергенция (1.6) стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$. Она декомпозируется на два неотрицательных слагаемых, поэтому оба они стремятся к нулю. Рассмотрим второе слагаемое:

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i])} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \theta_{\mathbf{w}}[i])} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \theta_{\mathbf{w}}[i])}{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda})} \right) =$$

расписывая матожидание как интеграл

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} \int_{\mathbf{w}} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \theta_{\mathbf{w}}[i])}{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i]) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \theta_{\mathbf{w}}[i]) d\mathbf{w} d\Gamma \right| \geq$$

по неравенству Пинскера

$$\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \|F_q(\theta_{\mathbf{w}}[i]) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}}^2 q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i]) d\Gamma \geq 0.$$

Отсюда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \|F_q(\theta_{\mathbf{w}}[i]) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}}^2 q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i]) d\Gamma = 0.$$

По неравенству Йенсена

$$0 \leq \left(\int_{\Gamma} \|F_q(\theta_{\mathbf{w}}[i]) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i]) d\Gamma \right)^2 \leq \int_{\Gamma} \|F_q(\theta_{\mathbf{w}}[i]) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}}^2 q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i]) d\Gamma.$$

Тогда по свойству степени предела

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \|F_q(\theta_{\mathbf{w}}[i]) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i]) d\Gamma = 0.$$

По теореме Шеффе данное выражение можно переписать как:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \theta_{\mathbf{w}}[i])| q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i]) d\Gamma d\mathbf{w} = 0, \quad (1.8)$$

что и требовалось доказать. \square

Теорема 2. Пусть выполнены условия Леммы 1 и Леммы 2. Тогда справедливо следующее выражение:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}[i])} \rho(\mathbf{w} | \Gamma, \theta_{\mathbf{w}}[i], \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda}) = 1.$$

Доказательство. По Лемме 2

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})}\rho(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \lambda) \leq \\ & \leq \frac{C_l}{\min_{\theta_{\mathbf{w}} \in U_{\theta}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)| q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma. \end{aligned}$$

Докажем что величина

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)| q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma$$

стремится к нулю. Определим случайную величину $\nu(t), t \geq 0$ следующим образом:

$$\nu(t) = \max(-t \cdot \mathbf{1}, \min(t \cdot \mathbf{1}, \mathbf{w})).$$

Данная величина совпадает с \mathbf{w} при $|\mathbf{w}| < t$ и принимает значение t или $-t$ при $|\mathbf{w}| \geq t$. Тогда для любого $t > 0$ справедливо:

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| \cdot |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)| q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

по неравенству треугольника и используя выражение $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \nu(t) - \nu(t)$

$$\begin{aligned} & \leq \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \nu(t)| \cdot |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})| q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma + \\ & + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\nu(t)| \cdot |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)| q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Рассмотрим первое слагаемое суммы (1.9). Т.к. вторые моменты $\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}^2, \mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})} \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)} \mathbf{w}^2$ конечны, то случайная величина \mathbf{w} равномерно интегрируема как при маргинальном распределении $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) d\Gamma$, так и при маргинальном распределении $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda) d\Gamma$. По определению равномерной интегрируемости для \mathbf{w} для любого числа ε существует число t_0 , такое что для любого $t \geq t_0$, любого $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \theta \in U_{\theta}$, справедливо выражение:

$$\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} |\mathbf{w} - \nu(t)| = \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |\mathbf{w} - \nu(t)| q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma \leq \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})} \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)} |\mathbf{w} - \nu(t)| = \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |\mathbf{w} - \nu(t)| p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda) q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \nu(t)| \cdot |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

так как модуль разностей меньше или равен суммы модулей

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma d\mathbf{w} < 2\varepsilon$$

для любого $t \geq t_0$. Обозначим за $\varepsilon(t)$ минимальное число ε , удовлетворяющее предыдущим неравенствам. Тогда

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| \cdot |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} d\Gamma \leq 2\varepsilon(t),$$

где $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Рассмотрим второе слагаемое.

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\boldsymbol{\nu}(t)| \cdot |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

по ограниченности функции $\boldsymbol{\nu}(t)$

$$\leq t \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma.$$

Переходя к пределу в (1.9) получим:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| \cdot |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]) d\mathbf{w} d\Gamma =$$

добавим предел по t , от которого не зависит данное выражение

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| \cdot |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i]) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]) d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

из выше написанных неравенств

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| \cdot |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i])| d\mathbf{w} d\Gamma + \\ & + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\boldsymbol{\nu}(t)| \cdot |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i]) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]) d\mathbf{w} d\Gamma \leq \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} 2\varepsilon(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} t \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i]) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]) d\mathbf{w} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из Леммы 2. Таким образом выражение

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode}_{q_{\mathbf{w}}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right|$$

стремится к единице, что и требовалось доказать. □

Теорема утверждает, что при устремлении параметрической сложности модели к нулю, все параметры \mathbf{w} модели подлежат удалению в среднем по всем возможным значениям структуры $\mathbf{\Gamma}$ модели. Заметим, что теорема применима для случая, когда последовательность вариационных распределений $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ не имеет предела. Так, в случае, если структура $\mathbf{\Gamma}$ определена однозначно, последовательность $\boldsymbol{\theta}_i$ может являться последовательностью нормальных распределений, чье матожидание стремится к нулю:

$$\boldsymbol{\theta}_i \sim \mathcal{N}((\boldsymbol{\mu}_q)_i, (\mathbf{A}_q^{-1})_i), (\boldsymbol{\mu}_q)_i \rightarrow \mathbf{0}.$$

Априорным распределением $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ при этом может являться семейство нормальных распределений с нулевым средним:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}).$$

При этом сама последовательность распределений $\boldsymbol{\theta}_i$ не обязана иметь предел.

1.3. Обобщающая задача

В данном разделе проводится анализ основных критериев выбора моделей, а также предлагается их обобщение на случай моделей, использующих вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ для аппроксимации неизвестного апостериорного распределения параметров $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$.

Рассмотрим основные статистические критерии выбора вероятностных моделей.

1. Критерий максимального правдоподобия:

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in U_{\mathbf{w}}, \mathbf{\Gamma} \in U_{\mathbf{\Gamma}}}.$$

Для использования данного критерия в качестве задачи выбора модели предлагается следующее обобщение:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}). \quad (1.10)$$

Данное обобщение (1.10) эквивалентно критерию правдоподобия при выборе в качестве $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ эмпирического распределения параметров и структуры. Метод не предполагает оптимизации гиперпараметров \mathbf{h} . Для формального соответствия данной задачи задаче выбора модели (??), т.е. двухуровневой задачи оптимизации, положим $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}},$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}}.$$

2. Метод максимальной апостериорной вероятности.

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma})p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in U_{\mathbf{w}}, \mathbf{\Gamma} \in U_{\mathbf{\Gamma}}}.$$

Аналогично предыдущему методу сформулируем вариационное обобщение данной задачи:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \\ &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})}(\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) + \log p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Т.к. в рамках данной задачи (1.11) не предполагается оптимизации гиперпараметров \mathbf{h} , положим параметры распределения $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ фиксированными:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{s}, \text{diag}(\mathbf{A})].$$

3. Полный перебор структуры:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(q_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}) = p'|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \quad (1.12)$$

где p' — некоторое распределение на структуре $\mathbf{\Gamma}$, выступающее в качестве метапараметра.

4. Критерий Акаике:

$$\text{AIC} = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) + |\mathbb{W}|.$$

Т.к. все рассматриваемые модели принадлежат одному параметрическому семейству моделей \mathfrak{F} , то количество параметров у всех рассматриваемых моделей совпадает. Тогда критерий Акаике совпадает с критерием максимального правдоподобия. Для использования критерия Акаике для сравнения моделей, принадлежащих одному параметрическому семейству \mathfrak{F} предлагается следующая переформулировка:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - \\ &- |\{w : D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < \lambda_{\text{prune}}\}|, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\mathbf{h} = \arg \min_{\mathbf{h}' \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \quad (1.14)$$

λ_{prune} — метапараметр алгоритма, $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ — область определения задачи по гиперпараметрам. Предложенное обобщение (1.13) применимо только в случае, если выражение (1.14) определено однозначно, т.е. существует единственный вектор гиперпараметров $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$, доставляющий минимум дивергенции $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$.

5. Информационный критерий Шварца:

$$\text{BIC} = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - 0.5 \log(m)|\mathbb{W}|.$$

Переформулируем данный критерий аналогично критерию AIC:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.15)$$

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - \log m |\{w : D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < \lambda_{\text{prune}}\}|,$$

метапараметр λ_{prune} определен аналогично (1.14).

6. Метод вариационной оценки обоснованности:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.16)$$

$$= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}},$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}},$$

В рамках данной задачи функции $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ и $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ совпадают, все гиперпараметры \mathbf{h} подлежат оптимизации.

7. Валидация на отложенной выборке:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}_{\text{train}}|\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) + p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (1.17)$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{X}_{\text{test}}|\mathbf{y}_{\text{test}}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}},$$

где $(\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}})$, $(\mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{y}_{\text{test}})$ — разбиение выборки на обучающую и контрольную подвыборку. В рамках данной задачи, все гиперпараметры \mathbf{h} подлежат оптимизации.

Каждый из рассмотренных критериев удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных свойств:

- 1) модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум правдоподобия выборки;
- 2) модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум оценки обоснованности;
- 3) для моделей, доставляющих сопоставимые значения правдоподобия выборки, выбирается модель с меньшим количеством информативных параметров.
- 4) критерий позволяет производить перебор структур для отбора наилучших.

Формализуем рассмотренные критерии. Оптимизационную задачу, которая удовлетворяет всем перечисленным свойствам при некоторых значениях метапараметров, будет называть *обобщающей*.

Определение 4. Двухуровневую задачу оптимизации будем называть *обобщающей* на компакте

$$U = U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \times U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} \times U_{\mathbf{h}} \times U_{\boldsymbol{\lambda}} \subset \Theta_{\mathbf{w}} \times \Theta_{\Gamma} \times \mathbb{H} \times \Lambda,$$

если она удовлетворяет следующим критериям.

1. Область определения каждого параметра $w \in \mathbf{w}$, гиперпараметра $h \in \mathbf{h}$ и метапараметра $\lambda \in \boldsymbol{\lambda}$ не является пустым множеством и не является точкой.
2. Для каждого значения гиперпараметров \mathbf{h} оптимальное решение нижней (??) задачи оптимизации

$$\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$$

определено однозначно при любых значениях метапараметров $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$.

3. Критерий максимизации правдоподобия выборки: существует $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$ и $K_1 > 0$,

$$K_1 < \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}),$$

такие что для любых векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$, удовлетворяющих неравенству

$$Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}) > K_1,$$

выполняется неравенство

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1))} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) > \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2))} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma).$$

4. Критерий минимизации параметрической сложности: существует $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$ и $K_2 > 0$,

$$K_2 < \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}),$$

такие что для любых векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$, удовлетворяющих неравенству

$$Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}) > K_2,$$

параметрическая сложность первой модели меньше, чем второй:

$$C_p(\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1) | U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}) < C_p(\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2) | U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}).$$

5. Критерий приближения оценки обоснованности: существует значение гиперпараметров λ , такое что значение функций потерь $L(\theta|y, X, h, \lambda)$ и валидации $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$ пропорционален вариационной оценке обоснованности модели:

$$Q(h|y, X, \theta^*(h), \lambda) \propto \mathbb{E}_{q(w, \Gamma|\theta^*(h))} \log p(y|X, w, \Gamma) - D_{KL}(q(w, \Gamma|\theta^*(h)) || p(w, \Gamma|h, \lambda)) + \log p(h|\lambda)$$

для всех $h \in U_h$, где в качестве гиперпараметров h рассматриваются все гиперпараметры модели: $h = [A, s]$, где

$$\theta^*(h) = \arg \max_{\theta \in U_\theta} \mathbb{E}_{q(w, \Gamma|\theta)} \log p(y|X, w, \Gamma) - D_{KL}(q(w, \Gamma|\theta) || p(w, \Gamma|h, \lambda)).$$

6. Критерий перебора оптимальных структур: существует константа $K_3 > 0$, такая что существует хотя бы одна пара гиперпараметров $h_1, h_2 \in U_h$, удовлетворяющая неравенствам:

$$D_{KL}(p(\Gamma|h_1, \lambda) || p(\Gamma|h_2, \lambda)) > K_3, D_{KL}(p(\Gamma|h_2, \lambda) || p(\Gamma|h_1, \lambda)) > K_3$$

и набор метапараметров λ , такие что для локальных оптимумов h_1, h_2 задачи оптимизации $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$, полученных при метапараметрах λ и удовлетворяющих неравенствам

$$D_{KL}(p(\Gamma|h_1, \lambda) || p(\Gamma|h_2, \lambda)) > K_3, D_{KL}(p(\Gamma|h_2, \lambda) || p(\Gamma|h_1, \lambda)) > K_3,$$

$$Q(h_1|y, X, \theta, \lambda) > Q(h_2|y, X, \theta, \lambda),$$

существует значение метапараметров $\lambda' \neq \lambda$, такие что

- (а) соответствие между вариационными параметрами $\theta^*(h_1), \theta^*(h_2)$ сохраняется при λ' ,
 - (б) выполняется неравенство $Q(h_1|y, X, \theta, \lambda) < Q(h_2|y, X, \theta, \lambda)$ при λ' .
7. Критерий непрерывности: функции $L(\theta|y, X, h, \lambda)$ и $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$ непрерывны по метапараметрам $\lambda \in U_\lambda$.

Первый критерий является техническим и используется для исключения из рассмотрения вырожденных задач оптимизации. Второй критерий говорит о том, что решение первого и второго уровня должны быть согласованы и определены однозначно. Критерии 3-5 определяют возможные критерии оптимизации, которые должны приближаться обобщающей задачей. Критерий 6 говорит о возможности перехода между различными структурами модели. Данный критерий говорит о том, что мы можем перейти от одного набора гиперпараметров h_1 к другим h_2 , если они соответствуют локальным оптимумам задачи оптимизации, и дивергенция соответствующих априорных распределений на структурах $p(\Gamma|h, \lambda)$ значимо высока. При этом соответствующие вариационные распределения $q_\Gamma(\Gamma|\theta_\Gamma)$ могут оказаться достаточно близки, несмотря на значимые различия априорных распределений. Поэтому возможным дополнением этого критерия был бы критерий, позволяющий переходить от структуры

к структуре, если соответствующие распределения $q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})$ различаются значительно. Последний критерий говорит о том, что обобщающая задача должна позволять производить переход между различными методами выбора параметров и структуры модели непрерывно.

Теорема 3. Рассмотренные задачи (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), (1.15), (1.17) не являются обобщающими.

Доказательство. Задачи (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), (1.15) не имеют гиперпараметров \mathbf{h} , подлежащих оптимизации, поэтому не могут приближать вариационную оценку.

При использовании валидации на отложенной выборке (1.17) в функцию валидации $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda)$ не входит ни один метапараметр, поэтому критерий перебора структур 6 для нее также не выполняется. \square

Теорема 4. Пусть q_{Γ} — абсолютно непрерывное распределение с дифференцируемой плотностью, такой что:

1. Градиент плотности $\nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_{\Gamma})$ является нулевым не более чем счетное количество раз.
2. Выражение $\nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_{\Gamma}) \log p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ ограничено на U_{θ} некоторой случайной величиной с конечным первым моментом.

Тогда задача (1.16) не является обобщающей.

Доказательство. Пусть выполнены условия критерия 6 о переборе структур, и $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ — локальные оптимумы функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda)$ при метапараметрах λ . По условию критерия соответствие $\theta^*(\mathbf{h}_1)$ и $\theta^*(\mathbf{h}_2)$ должны сохраняться, т.е. для некоторого λ' решение нижней задачи оптимизации $\theta^*(\mathbf{h}_1)$ должно совпадать с решением $\theta^*(\mathbf{h}_1)$ при метапараметрах λ . Тогда

$$\begin{aligned} & \nabla_{\theta} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)|p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda)) = \\ & = \nabla_{\theta} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)|p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda')). \end{aligned}$$

Сокращая равные слагаемые в равенстве получим:

$$\nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\Gamma|\theta_1)|p(\Gamma|\lambda)) = \nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\Gamma|\theta_1)|p(\Gamma|\lambda')),$$

Из второго условия теоремы следует, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости осуществим переход дифференцирования под знак интеграла:

$$\int_{\Gamma \in \Gamma} \nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_2) (\log p(\Gamma|\lambda) - \log p(\Gamma|\lambda')) d\Gamma = 0.$$

Т.к. выражение $\nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_2)$ принимает нулевое значение в счетном количестве точек, то выражение $\log p(\Gamma|\lambda) - \log p(\Gamma|\lambda')$ равно нулю почти всюду, что

означает что метапараметр температуры λ_{temp} равен при разных значениях метапараметров:

$$\lambda_{\text{temp}} = \lambda'_{\text{temp}}, \quad \lambda_{\text{temp}} \in \boldsymbol{\lambda}, \lambda'_{\text{temp}} \in \boldsymbol{\lambda}'.$$

Таким образом, метапараметры $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'$ отличаются лишь на метапараметры λ_1, λ_2 регуляризации ковариационной матрицы \mathbf{A}^{-1} . Возьмем в качестве векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ гиперпараметры, отличающиеся только параметрами распределения структуры:

$$\mathbf{h}_1 = [\mathbf{s}_1, \text{diag}(\mathbf{A}_1)], \mathbf{h}_2 = [\mathbf{s}_2, \text{diag}(\mathbf{A}_2)], \quad \mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2, \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2.$$

Метапараметры λ_1, λ_2 не влияют на значение функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ при гиперпараметрах, отличающихся только параметрами распределения структуры, поэтому значение функции Q для них будет неизменно при любых значениях λ_1, λ_2 . Приходим к противоречию: значение $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ не меняется при изменении метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$. □

В качестве обобщающей задачи оптимизации предлагается оптимизационную задачу следующего вида:

$$\mathbf{h}^* = \arg \max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \\ &- \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ &- \sum_{p', \lambda \in \mathfrak{P}, \lambda_{\text{struct}}^Q} \lambda D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*) || p') + \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}), \\ \boldsymbol{\theta}^* &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.19) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \lambda_{\text{prior}}^L D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})),$$

где \mathfrak{P} — непустое множество распределений на структуре $\boldsymbol{\Gamma}$, $\lambda_{\text{prior}}^Q, \lambda_{\text{prior}}^L, \lambda_{\text{struct}}^Q$ — некоторые числа. Множество распределений \mathfrak{P} отвечает за перебор структур $\boldsymbol{\Gamma}$ в процессе оптимизации модели. В предельном случае, когда температура λ_{temp} близка к нулю, а множество \mathfrak{P} состоит из распределений, близких к дискретным, а соответствующим всем возможным структурам, калибровка $\lambda_{\text{struct}}^Q$ порождает последовательность задач оптимизаций, схожую с перебором структур. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим вырожденный случай поведения функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$, когда $\lambda_{\text{likelihood}}^Q = \lambda_{\text{prior}}^Q = 0$. Пусть модель использует один структурный параметр, в качестве априорного распределения на структуре задано распределение Gumbel-Softmax с λ_{temp} . Пусть в качестве

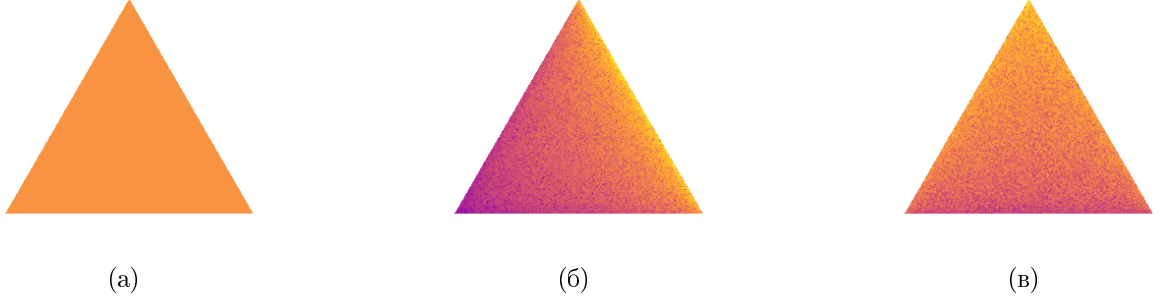


Рис. 1.5. Пример зависимости функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ от гиперпараметра \mathbf{s} при различных значениях метапараметров $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$. Темные точки на графике соответствуют наименее предпочтительным значениям гиперпараметра. а) $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = [0, 0]$, б) $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = [1, 0]$, в) $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = [1, 1]$.

множества распределений \mathfrak{P} используется два распределения Gumbel-Softmax, сконцентрированных близко к вершинам симплекса:

$$\mathfrak{P} = [\mathcal{GS}([0.95, 0.05, 0.05]^T, 1.0), \mathcal{GS}([0.95, 0.05, 0.05]^T, 1.0)].$$

Из определения распределения Gumbel-Softmax следует, что достаточно рассмотреть только значения параметра \mathbf{s} , находящиеся внутри симплекса. На рис. 1.5 изображены значения функции Q в зависимости от метапараметров $\boldsymbol{\lambda}_Q^{\text{struct}}$ и значений гиперпараметра \mathbf{s} распределения на структуре. Видно, что варьируя коэффициенты метапараметров получается последовательность оптимизаций, схожая с полным перебором структуры.

Теорема 5. Пусть

1. Задано непустое множество непрерывных по параметрам распределений на структуре \mathfrak{P} , чьи плотности не принимают нулевое значение, где хотя бы одно распределение $p_1 \in \mathfrak{P}$ является Gumbel-Softmax распределением и для произвольного значения $\mathbf{s} \in U_{\mathbf{h}}, \lambda_{\text{temp}} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$ существует значение параметров распределения p_1 , такое что $p_1 = p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$.
2. Вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ является абсолютно непрерывным, плотность которого непрерывна по метапараметрам $\boldsymbol{\lambda}$ и не принимает нулевое значение.
3. Задан компакт $U = U_{\boldsymbol{\theta}_w} \times U_{\boldsymbol{\theta}_r} \times U_{\mathbf{h}} \times U_{\boldsymbol{\lambda}}$, где параметры распределений $p \in \mathfrak{P}$ принадлежат множеству метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$.
4. Область определения каждого параметра $w \in \mathbf{w}$, гиперпараметра $h \in \mathbf{h}$ и метапараметра $\lambda \in \boldsymbol{\lambda}$ не является пустым и не является точкой.
5. Для каждого значения гиперпараметров $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$ оптимальное решение нижней задачи оптимизации $\boldsymbol{\theta}^*$ определено однозначно на $U_{\boldsymbol{\theta}} = U_{\boldsymbol{\theta}_w} \times U_{\boldsymbol{\theta}_r}$ при любых значениях метапараметров $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$.
6. Область значений метапараметров $\lambda_{\text{likelihood}}^Q, \lambda_{\text{prior}}^Q, \lambda_{\text{prior}}^L, \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$ включает отрезок от нуля до единицы.

7. Существует значение метапараметров

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{\text{likelihood}}^Q > 0 \in U_{\lambda},$$

такое что

$$\max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) < \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$$

при $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}, \lambda_{\text{prior}}^Q = 0$.

8. Существует значение метапараметров

$$\lambda_{\text{prior}}^L > 0, \lambda_{\text{prior}}^Q > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{\text{temp}} > 0 \in U_{\lambda},$$

такое что

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) + \\ & + \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ & \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \\ & - \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) < \\ & < \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ & - \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \end{aligned}$$

при $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}, \lambda_{\text{likelihood}}^Q = 0$.

9. Существуют значения метапараметров $\lambda_{\text{prior}}^Q > 0, \lambda_{\text{likelihood}}^Q > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_{\text{temp}} > 0 \in U_{\lambda}$, такие что существуют гиперпараметры $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$:

$$\begin{aligned} & D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) < \\ & < \frac{\max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})}{\max_{\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q}}, \\ & D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda})) < \\ & < \frac{\max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})}{\max_{\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q}}. \end{aligned}$$

при $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. TODO - как написать?

Тогда задача (1.18) является обобщающей на U .

Доказательство. Для доказательства теоремы требуется доказать критерии 1-7 из определения обобщающей задачи. Выполнение критериев 1 и 2 следует из условий задачи.

Докажем критерий 3. Пусть $\lambda_{\text{prior}}^Q = 0, \lambda_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{likelihood}}^Q$ удовлетворяют седьмому условию теоремы. Возьмем в качестве K_1 следующее выражение:

$$K_1 = \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}).$$

Пусть $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$ — гиперпараметры, удовлетворяющие условию третьего критерия:

$$Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) > K_1$$

. Тогда

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &= \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1))} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ &- \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2))} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \log p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda}) - \log p(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\lambda}) > K_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует выполнение критерия 3:

$$\lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) > 0.$$

Т.к. $\lambda_{\text{likelihood}}^Q > 0$:

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) > 0.$$

Докажем критерий 4. Пусть $\boldsymbol{\lambda}$ удовлетворяют восьмому условию теоремы и $\lambda_{\text{likelihood}}^Q = 0, \lambda_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Пусть

$$\begin{aligned} K_2 &= \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) + \\ &+ \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ &\min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ &\min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}, Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) > K_2$. Рассмотрим разность параметрических сложностей двух векторов:

$$\begin{aligned} C_p(\boldsymbol{\theta}_2) - C_p(\boldsymbol{\theta}_1) &= \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ &- \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \geq \end{aligned}$$

оценим снизу, а также добавим и вычтем $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}))$

$$\begin{aligned}
&\geq \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda})) + \\
&\quad + D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) = \\
&\text{сведем выражение до } Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \\
&= Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \log p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \log p(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\lambda}) + \\
&\quad + \min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) > \\
&\text{воспользуемся неравенством } Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) > K_2 \\
&> K_2 - \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \log p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^Q} \log p(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\lambda}) + \min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \\
&\quad - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Рассмотрим разность:

$$\min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) =$$

т.к. $\boldsymbol{\theta}_2$ — решение нижней задачи оптимизации:

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \\
&\max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \right) \geq
\end{aligned}$$

получим оценку снизу:

$$\begin{aligned}
&\geq \min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \\
&\max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\min_{\boldsymbol{\theta}'} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}')} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \right) \geq \\
&\text{оценим первое слагаемое}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \\
&\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \min_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \geq
\end{aligned}$$

оценим последнее слагаемое

$$\begin{aligned} &\geq \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) \\ &\quad + \min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}}} \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \max_{\mathbf{h}} \min_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Складывая полученную оценку с $K_2 - \log \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^{\text{Q}}} p(\mathbf{h}_2 | \boldsymbol{\lambda}) + \log \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^{\text{Q}}} p(\mathbf{h}_2 | \boldsymbol{\lambda})$ получаем разность параметрических сложностей больше нуля, что и требовалось доказать.

Докажем критерий 5. Пусть $\lambda_{\text{prior}}^{\text{Q}} = \lambda_{\text{prior}}^{\text{L}} = \lambda_{\text{likelihood}}^{\text{Q}} = 1$, $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}} = \mathbf{0}$. Тогда функции $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ и $Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ можно записать как:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \\ Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \\ &\quad + \log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}). \end{aligned}$$

Двухуровневая задача оптимизации совпадает с оптимизацией вариационной оценки обоснованности, что и требовалось доказать.

Докажем критерий 6. Пусть задан вектор метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющий девятому условию теоремы и $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}} = \mathbf{0}$. Пусть заданы векторы гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$, такие что $Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) > 0$. Возьмем в качестве K_4 следующее выражение:

$$K_4 = \frac{\max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})}{\max_{\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})}.$$

Пусть вектор метапараметров $\boldsymbol{\lambda}'$ отличается от $\boldsymbol{\lambda}$ лишь метапараметром $\lambda_{\text{struct}}^{\text{Q}}$. Для обоих векторов метапараметров нижняя задача оптимизации $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ совпадает, поэтому выполняется первое условие критерия.

По условию теоремы во множество \mathfrak{P} входит хотя бы одно распределение Gumbel-Softmax:

$$p_1 \sim \mathcal{GS}, p \in \mathfrak{P}.$$

Положим для $\boldsymbol{\lambda}'$ метапараметр перед данным распределением $\lambda_{\text{struct}}^{\text{Q}} \in \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}}$ равным максимальному значению. Положим также значение параметров данного распределения равным параметрам распределения $p(\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$p_1 = p(\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Для остальных распределений $p' \in \mathfrak{P}$ положим коэффициент $\lambda_{\text{struct}}^{\text{Q}} \in \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}}$ равным нулю. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}') - Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}') =$$

$$\begin{aligned}
&= Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) + \max_{\lambda_{\text{struct}}^Q} D_{\text{KL}}(p(\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) || p(\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\
&= Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) + \max_{\lambda_{\text{struct}}^Q} K_4 > 0.
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем критерий 7. Достаточным условием непрерывности функций $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ является непрерывность входящих в нее слагаемых.

Слагаемое $E_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma})$ не зависит от метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$. Слагаемое $\log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda})$ непрерывно по метапараметрам по свойству обратного гамма-распределения.

Достаточным условием непрерывности функций вида $D_{\text{KL}}(p_1||p_2)$ является непрерывность по метапараметрам функций $p_1(\log p_1 - \log p_2)$ почти всюду и ограниченность интегрируемой функцией. Априорные распределения задаются непрерывными функциями плотности $p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, $p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, не принимающими нулевое значение, и являющимися непрерывными по метапараметрам. Функция $q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ принимает нулевое значение лишь в конечном количестве точек, поэтому функция $q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})(\log q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) - \log p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$ почти всюду непрерывна по метапараметрам. Она ограничена на компакте $U_{\boldsymbol{\lambda}}$, поэтому слагаемое $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$ является непрерывным по метапараметрам. Выражения вида $p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})(\log p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - \log p)$, $p \in \mathfrak{P}$ также являются непрерывными по метапараметрам и ограниченными, поэтому слагаемые вида $D_{\text{KL}}(p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})||p)$ являются непрерывными. Поэтому функции $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ являются непрерывными по метапараметрам, что и требовалось доказать. \square

Метапараметрами данной задачи (1.18) являются коэффициенты $\lambda_{\text{prior}}^L, \lambda_{\text{prior}}^Q$, отвечающие за регуляризацию верхней и нижней задачи оптимизации, коэффициент $\lambda_{\text{likelihood}}^Q$ отвечает за максимизацию правдоподобия, а также параметры распределений \mathfrak{P} и вектор коэффициентов перед ними $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$.

Условия 7-9 теоремы задают вид области U , на которой представленная оптимизационная задача является обобщающей. Условие 7 выполняется при небольшом разбросе значений $\log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda})$ в зависимости от λ_1, λ_2 . Т.к. эти метапараметры выполняют роль регуляризатора, для области гиперпараметров $U_{\mathbf{h}}$, выбранной адекватно, данное условие выполняется.

В случае, если $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ — нормальное распределение, а $q_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Gamma}})$ — распределение Gumbel-softmax, такие что для любого \mathbf{h} существует $\boldsymbol{\theta}$:

$$p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}),$$

а также полагая что $\log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda})$ приблизительно равен для всех $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$, восьмое условие можно представить в следующем виде:

$$\max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} E_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) -$$

$$\begin{aligned}
& - \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) < \\
& < \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\
& - \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Это условие говорит, что существует набор метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$, такой что максимальная разница дивергенций на U больше, чем максимальная разница между усредненными по $q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})$ логарифмами правдоподобия выборки, поделенными на $\lambda_{\text{likelihood}}^Q$. Данное условие будет выполняться при достаточно больших $\lambda_{\text{likelihood}}^Q$.

Условие 9 выполняется при достаточно больших значениях метапараметра $\lambda_{\text{struct}}^Q$.

1.4. Анализ обобщающей задачи

В данном разделе рассматриваются свойства предложенной задачи при различных значениях метапараметров, а также характер асимптотического поведения задач.

Теорема 6. Пусть $m \gg 0$, $\lambda_{\text{prior}}^L > 0$, $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L} \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L} \gg 0$. Тогда оптимизация функции

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \lambda_{\text{prior}}^L D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$$

эквивалентна оптимизации вариационной оценки обоснованности

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\hat{\mathbf{y}} | \hat{\mathbf{X}}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$$

для произвольной случайной подвыборки $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{X}}$ мощности $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L}$ из генеральной совокупности.

Доказательство. Рассмотрим величину $\frac{1}{m} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\frac{1}{m} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{m} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{m} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \quad (1.20)$$

При $m \gg 0$ по усиленному закону больших чисел данная функция может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) & \approx \mathbb{E}_{y, \mathbf{x}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \\
& - \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{m} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Аналогично рассмотрим вариационную оценку обоснованности для произвольной выборки мощностью $m_0 = \frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L}$, усредненную на мощность выборки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_0} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{1}{m_0} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) &\approx \quad (1.21) \\ &\approx \mathbb{E}_{y, \mathbf{x}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{1}{m_0} D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) || q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})) = \\ &= \mathbb{E}_{y, \mathbf{x}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{m} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Таким образом, задачи оптимизации функций (1.20), (1.21) совпадают, что и требовалось доказать. \square

Теорема показывает, что для достаточно большого m и $\lambda_{\text{prior}}^L > 0$, $\lambda_{\text{prior}}^L \neq 1$ оптимизация параметров и гиперпараметров эквивалентна нахождению оценки обоснованности для выборки другой мощности: чем выше значение λ_{prior}^L , тем выше мощность выборки, для которой проводится оптимизация.

Следующие теоремы говорят о соответствии предлагаемой обобщающей задачи вероятностной модели. В частности, задача оптимизации параметров и гиперпараметров соответствует двухуровневому байесовскому выводу.

Теорема 7. Пусть $\lambda_{\text{prior}}^Q = \lambda_{\text{prior}}^L = \lambda_{\text{likelihood}}^Q = 1$, $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Тогда:

1. Задача оптимизации (1.18) доставляет максимум апостериорной вероятности гиперпараметров с использованием вариационной оценки обоснованности:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \\ + \log p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h}}. \end{aligned}$$

2. Вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})$ приближает апостериорное распределение $p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ наилучшим образом:

$$D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\theta}}.$$

3. Если существуют такие значения параметров $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}$, что $p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$, $p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$, то решение задачи оптимизации $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ доставляет эти значения вариационных параметров.

Доказательство. Так как параметры $\boldsymbol{\theta}$ не зависят от слагаемых при коэффициентах $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$, а также от $\log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda})$, то при $\lambda_{\text{likelihood}}^Q = \lambda_{\text{prior}}^L = 1$ как верхняя, так и нижняя задачи оптимизации (1.18) эквивалентны оптимизации вариационной оценки обоснованности, поэтому первое утверждение выполняется.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим логарифм обоснованности модели:

$$\begin{aligned}\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} + D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \\ &\quad + D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).\end{aligned}$$

Из данного равенства следует:

$$\begin{aligned}\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})),\end{aligned}$$

где правая часть равенства соответствует вариационной оценки обоснованности. Выражение $\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ не зависит от вариационного распределения $q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$, поэтому максимизации вариационной оценки эквивалентна минимизации дивергенции $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$.

Докажем третье утверждение. Т.к. вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ декомпозируется на $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$, $q_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\Gamma}})$, апостериорное распределение $p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ декомпозируется на $p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, $p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, поэтому достижимо значение нулевого значения дивергенции: $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = 0$. Она представима в следующем виде (1.6). Отсюда следует что соответствующие вариационные и апостериорные распределения совпадают. \square

Таким образом, предлагаемая обобщающая задача позволяет производить оптимизацию вариационной оценки обоснованности, а также оптимизацию обоснованности для выбор с другим эффективным размером. Чем больше размер выборки, тем больше влияние априорного распределения, которое выступает в качестве регуляризатора. Можно регулировать сложность модели следующим образом:

1. Варьируя сложность на верхнем уровне оптимизации оптимизации с использованием коэффициента $\lambda_{\text{prior}}^{\text{Q}}$;
2. Варьируя сложность на нижнем уровне оптимизации оптимизации с использованием коэффициента $\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}}$;
3. Варьируя сложность на обоих уровнях оптимизации.

Рассмотрим различие вариантов 1-3 на примере.

Пример 3. Пусть $\lambda_{\text{struct}}^{\text{Q}} = 0$. Пусть требуется уменьшить вклад априорного распределения в итоговую оптимизацию. При варьировании нижней задачи оптимизации ($\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}} \rightarrow 0$) оптимизационная задача становится эквивалента методу максимального правдоподобия:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}).$$

При этом верхняя задача $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h}}$ не имеет смысла, т.к. параметры $\boldsymbol{\theta}$ не зависят от гиперпараметров \mathbf{h} .

При варьировании только верхней задачи оптимизации ($\lambda_{\text{prior}}^Q \rightarrow 0, \lambda_{\text{prior}}^L = \lambda_{\text{likelihood}}^Q = 1$), на нижнем уровне задача $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ совпадает с задачей поиска обоснованных параметров при фиксированном \mathbf{h} :

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).$$

При этом на верхнем уровне оптимизации выбираются гиперпараметры \mathbf{h} , при которых параметры будут доставать максимум правдоподобия с точностью до регуляризации:

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}).$$

Таким образом, варьирование сложности на верхнем оптимизации приводит к оптимизации параметров и гиперпараметров с большей регуляризацией, чем варьирование сложности на нижнем уровне оптимизации.

Следующая теорема анализирует оптимизацию при $\frac{\lambda_{\text{prior}}^Q}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} = \lambda_{\text{prior}}^L$. В частности, если $\lambda_{\text{likelihood}}^Q = 1$, то такая оптимизация соответствует оптимизации вариационной оценки обоснованности на обоих уровнях оптимизации для выборки размера $\lceil \frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L} \rceil$, о чем говорилось в Теореме 1.4.

Теорема 8. Пусть $\frac{\lambda_{\text{prior}}^Q}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} = \lambda_{\text{prior}}^L$. Тогда задача оптимизации (1.18) представима в виде одноуровневой задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ & - \sum_{p', \lambda \in \mathfrak{P}, \lambda_{\text{struct}}^Q} D_{\text{KL}}(p(\Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})||p') - \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Т.к. выполнено равенство $\frac{\lambda_{\text{prior}}^Q}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} = \lambda_{\text{prior}}^L$, то нижняя задача оптимизации эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Параметры $\boldsymbol{\theta}$ вариационного распределения $q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ не зависят от слагаемых вида $\log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda})$ и $D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})||p'), p' \in \mathfrak{P}$, поэтому нижняя задача оптимизации эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

$$- \sum_{p', \lambda \in \mathfrak{P}, \lambda_{\text{struct}}^Q} D_{\text{KL}}(p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda) || p') + \log p(\mathbf{h}|\lambda) \rightarrow \max_{\theta}$$

для любого вектора $\lambda_{\text{struct}}^Q$.

Поэтому верхняя и нижняя задачи совпадают:

$$\mathbf{h} = \arg \max_{\mathbf{h}'} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda),$$

где

$$\theta^*(\mathbf{h}') = \arg \max_{\theta} Q(\mathbf{h}'|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda).$$

Из свойства

$$\max_{\mathbf{h}} \max_{\theta} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda) = \max_{\theta, \mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda)$$

следует доказательство теоремы. \square

Для вычисления приближенного значения функций Q и L предлагается использовать приближение методом Монте-Карло с порождением R реализаций величин \mathbf{w}, Γ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \theta_1 \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) &\approx \sum_{r=1}^R \log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}_q \circ \hat{\epsilon}_r, \hat{\Gamma}_r, \mathbf{X}), \\ D_{\text{KL}}(q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})|p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda)) &\approx \sum_{r=1}^R \left(\log q_{\Gamma}(\hat{\Gamma}_r|\theta_{\Gamma}) - p(\hat{\Gamma}|\mathbf{h}, \lambda) \right), \\ D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\theta_{\mathbf{w}}, \Gamma)|p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h})) &= \sum_{(j,k) \in E} \sum_{l=1}^{K^{j,k}} D_{\text{KL}} \left(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}_l^{j,k}|\theta_{\mathbf{w}}, \gamma_l^{j,k}) | p(\mathbf{w}_l^{j,k}|\gamma_l^{j,k}, \mathbf{h}) \right) \approx \\ &\approx - \sum_{(j,k) \in E} \sum_{l=1}^{K_{j,k}} \sum_{r=1}^R \frac{1}{2} \left((\hat{\gamma}_r^{j,k}[l])^{-1} \text{tr}((\mathbf{A}_l^{j,k})_q (\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}) + (\boldsymbol{\mu}_l^{j,k})^{\top} \hat{\gamma}_r^{j,k}[l]^{-1} (\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1} \boldsymbol{\mu}_l^{j,k} - \right. \\ &\quad \left. - |\mathbf{w}_l^{j,k}| + \log \frac{|\hat{\gamma}_r^{j,k}[l]_r \mathbf{A}_l^{j,k}|}{|(\mathbf{A}_l^{j,k})_q|} \right), \end{aligned}$$

где R — количество реализаций случайных величин, по котором вычисляется значения вариационной оценки обоснованности, $\hat{\epsilon}_r \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\hat{\Gamma}_r = [\hat{\gamma}_r^{j,k}, (j, k) \in E]$ — реализация случайной величины, соответствующей структуре Γ .

Лемма 3. Пусть:

1. задан компакт $U = U_{\mathbf{h}} \times U_{\theta}$.
2. $\lambda_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$.

3. Решение задачи

$$\min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \quad (1.22)$$

является единственным для некоторых $\lambda_{\text{prior}_1}^Q, \lambda_{\text{prior}_2}^Q, \lambda_{\text{prior}_1}^Q > \lambda_{\text{prior}_2}^Q$ на U при некоторых фиксированных $\lambda_{\text{likelihood}}^Q, \lambda_{\text{prior}}^L, \lambda_{\text{temp}}, \lambda_1, \lambda_2$.

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{h}_1, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})),$$

где $\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\theta}_2$ — решения задачи (??) при $\lambda_{\text{prior}_1}^Q, \lambda_{\text{prior}_2}^Q$,

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \quad \boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\theta}_2$ — решения задачи (??) при $\lambda_{\text{prior}_1}^Q, \lambda_{\text{prior}_2}^Q$. Тогда справедлива система неравенств:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}_1}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{h}_1, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \log p(\mathbf{h}_1 | \boldsymbol{\lambda}) > \\ & > \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}_1}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \log p(\mathbf{h}_2 | \boldsymbol{\lambda}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}_2}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \log p(\mathbf{h}_2 | \boldsymbol{\lambda}) > \\ & > \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}_2}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{h}_1, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \log p(\mathbf{h}_1 | \boldsymbol{\lambda}). \end{aligned}$$

Складывая неравенства получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & (\lambda_{\text{prior}_2}^Q - \lambda_{\text{prior}_1}^Q) D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{h}_1, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) > \\ & > (\lambda_{\text{prior}_2}^Q - \lambda_{\text{prior}_1}^Q) D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Т.к. по условию $\lambda_{\text{prior}_1}^Q > \lambda_{\text{prior}_2}^Q$, то отсюда следует:

$$D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{h}_1, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})),$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 9. Пусть

1. выполнены условия Леммы 3;
2. функция $Q(\mathbf{h} | \boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ является вогнутой по $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$ при $\lambda_{\text{prior}}^Q = \lambda_{\text{prior}_2}^Q$.

3. решение задачи (1.22) единственно при $\lambda_{\text{prior}}^Q = \lambda_{\text{prior}_2}^Q$.
Тогда справедлива следующая разность параметрических сложностей:

$$\begin{aligned} C_p(\boldsymbol{\theta}_1|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}_1) - C_p(\boldsymbol{\theta}_2|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}_2) &\leq \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} (\lambda_{\text{prior}}^Q - \lambda_{\text{prior}}^L) \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \nabla_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \times \\ &\quad \times \nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}} (D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})))^T \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2 (L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))^{-1} \times \\ &\quad \times \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ — два набора метапараметров, отличающихся лишь значениями $\lambda_{\text{prior}}^Q = \lambda_{\text{prior}_1}^Q, \lambda_{\text{prior}}^Q = \lambda_{\text{prior}_2}^Q$. Рассмотрим разность параметрических сложностей:

$$C_p(\boldsymbol{\theta}_1|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}_1) - C_p(\boldsymbol{\theta}_2|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}_2) =$$

по определению параметрической сложности:

$$= \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) <$$

используя оценку сверху:

$$< D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) =$$

добавляя и вычитая слагаемое $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$:

$$\begin{aligned} &= D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \\ &\quad + D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

По лемме 3 следует:

$$\begin{aligned} &D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1) || p(\mathbf{h}_1, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \\ &\quad + D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < \\ &D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Обозначим за \mathbf{h}' — решение задачи (1.22). Тогда справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned} &D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ &D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2) || p(\mathbf{h}', \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ &\quad \frac{1}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} (Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}'|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Т.к. $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ — вогнутая, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}'|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &\leq \nabla_{\mathbf{h}}(Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}))\|\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}'\| \leq \\ &\leq \nabla_{\mathbf{h}}(Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})) \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2} \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение $\nabla_{\mathbf{h}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$. Из [?] следует равенство:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{h}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &= \nabla_{\mathbf{h}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \\ &- \nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}}(L(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}))^\top \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2(L(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}))^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}), \end{aligned}$$

где левая часть равенства — градиент от $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ как от сложной функции, где $\boldsymbol{\theta}^*$ — решение нижней задачи оптимизации. Т.к. \mathbf{h}_2 — решение задачи оптимизации (??), то $\nabla_{\mathbf{h}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} &Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}'|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \\ &\leq \nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}}(L(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}))^\top \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2(L(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}))^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2} \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|. \end{aligned}$$

Функция $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ состоит из двух слагаемых, одно из которых не зависит от \mathbf{h} , поэтому

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}}(L(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}))^\top = \lambda_{\text{prior}}^L \nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}}(D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})))^\top.$$

Т.к. $\boldsymbol{\theta}_2$ — оптимум функции $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})$, то

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \lambda_{\text{prior}}^L D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) &= 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{\theta}}Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &= \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \\ &- \lambda_{\text{prior}}^Q \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ &= (\lambda_{\text{prior}}^Q - \lambda_{\text{prior}}^L) \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

С учетом переписанных выражений $\nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}}(L(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{h}_2, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))^\top$, $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ получаем:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{h}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) &= \nabla_{\mathbf{h}}Q(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\theta}_2, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \\ &- \lambda_{\text{prior}}^L (\lambda_{\text{prior}}^Q - \lambda_{\text{prior}}^L) \nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}}(D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})))^\top \times \\ &\times \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2(L(\boldsymbol{\theta}_2|\mathbf{h}_2, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Отсюда следует доказываемое неравенство:

$$\begin{aligned} C_p(\boldsymbol{\theta}_1|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}_1) - C_p(\boldsymbol{\theta}_2|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}_2) &\leq \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} (\lambda_{\text{prior}}^Q - \lambda_{\text{prior}}^L) \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \nabla_{\mathbf{h}}Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) \times \\ &\times \nabla_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}}(D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})))^\top \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2(L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))^{-1} \times \\ &\times \nabla_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

□

Список основных обозначений

- $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ — вектор признакового описания i -го объекта
 $y_i \in \mathbf{y}$ — метка i -го объекта
 \mathcal{D} — выборка
 $\mathbf{X} \subset \mathbb{X}$ — матрица, содержащая признаковое описание объектов выборки
 $\mathbf{y} \subset \mathbb{Y}$ — вектор меток объектов выборки
 m — количество объектов в выборке
 n — количество признаков в признаковом описании объекта
 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^m$ — признаковое пространство объектов
 \mathbb{Y} — множество меток объектов
 R — множество классов в задаче классификации
 (V, E) — граф со множеством вершин V и множеством ребер E
 $\mathbf{g}^{j,k}$ — вектор базовых функций для ребра (j, k)
 $K^{j,k}$ — мощность вектора базовых функций для ребра (j, k)
 agg_v — функция агрегации для вершины v
 $\gamma^{j,k}$ — структурный параметр для ребра (j, k)
 \mathfrak{F} — параметрическое семейство моделей
 U — область определения оптимизационной задачи
 $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ — параметры модели
 \mathbb{W} — пространство параметров модели
 $U_{\mathbf{w}} \subset \mathbb{W}$ — область определения параметров модели
 $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{\Gamma}$ — структура модели
 $\mathbb{\Gamma}$ — множество значений структуры модели
 $U_{\mathbf{\Gamma}} \subset \mathbb{\Gamma}$ — область определения параметров модели
 $\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ — гиперпараметры модели
 \mathbb{H} — пространство гиперпараметров модели
 $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ — область определения гиперпараметров
 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ — параметры вариационного распределения
 Θ — пространство параметров вариационного распределения
 $U_{\boldsymbol{\theta}} \subset \Theta$ — область определения вариационных параметров модели
 $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in \Theta_{\mathbf{w}}$ — параметры вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $\Theta_{\mathbf{w}}$ — пространство параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \subset \Theta_{\mathbf{w}}$ — область определения параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}} \in \Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — параметры вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели
 $\Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — пространство параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели
 $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}} \subset \Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — область определения параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели

$\lambda \in \Lambda$ — вектор метапараметров

Λ — пространство метапараметров

$U_\lambda \subset \Lambda$ — область определения метапараметров

$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma)$ — правдоподобие выборки

$p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение параметров и структуры модели

$p(\mathbf{h}|\lambda)$ — распределение гиперпараметров модели

$p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение структуры модели

$p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение параметров модели

$p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение параметров и структуры модели

$p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение структуры модели

$p(\Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение структуры модели

$p(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \lambda)$ — апостериорное распределение гиперпараметров

$p(y, \mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{x}, \mathbf{h})$ — вероятностная модель глубокого обучения

$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — обоснованность модели

$q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ — вариационное распределение параметров и структуры модели

$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ — вариационное распределение структуры модели

$q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ — вариационное распределение параметров модели

$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — функция потерь

$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda)$ — валидационная функция

$T(\boldsymbol{\theta}|L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda))$ — оператор оптимизации

\mathfrak{Q} — семейство вариационных распределений

S — энтропия распределения

M — множество моделей без общей параметризации

$D_{\text{KL}}(p_1||p_2)$ — дивергенция Кульбака-Лейблера между распределениями p_1 и p_2

\mathbf{A}^{-1} — матрица ковариаций параметров модели

\mathbf{s} — конкатенация параметров концентрации на структуре модели