

Глава 1

Выбор субоптимальной структуры модели

В данной главе рассматривается задача выбора структуры модели глубокого обучения. Предлагается ввести вероятностные предположения о распределениях параметров и структуры модели. Проводится градиентная оптимизация параметров и гиперпараметров модели на основе байесовского вариационного вывода. В качестве оптимизируемой функции для гиперпараметров модели предлагается обобщенная функция обоснованности. Показано, что данная функция позволяет проводить оптимизацию, соответствующую нескольким критериям выбора структуры модели: методу максимального правдоподобия, последовательному увеличению и снижению сложности модели, полному перебору структуры модели, а также получению максимума вариационной оценки обоснованности модели. Решается двухуровневая задача оптимизации: на первом уровне проводится оптимизация нижней оценки обоснованности модели по вариационным параметрам модели. На втором уровне проводится оптимизация гиперпараметров модели.

1.1. Вероятностная модель

Определим априорные распределения параметров и структуры модели следующим образом. Пусть параметры модели распределены нормально с нулевым средним:

$$\mathbf{w}_k^{i,j} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \gamma_k^{i,j} (\mathbf{A}_k^{i,j})^{-1}),$$

где $(\mathbf{A}_k^{i,j})^{-1}$ — диагональная матрица. Априорное распределение $p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h})$ параметров $\mathbf{w}_k^{i,j}$ зависит не только от гиперпараметров $\mathbf{A}_k^{i,j}$, но и от структурного параметра $\gamma_k^{i,j}$.

В качестве априорного распределения для структуры $\mathbf{\Gamma}$ предлагается использовать произведение распределение Gumbel-Softmax [?]:

$$p(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{(j,k) \in E} p(\gamma^{j,k}|\mathbf{s}, \lambda_{\text{temp}}),$$

где для каждого структурного параметра γ с количеством базовых функций K вероятность $p(\gamma|\mathbf{s}, \lambda_{\text{temp}})$ определена следующим образом:

$$p(\gamma|\mathbf{s}, \lambda_{\text{temp}}) = (K-1)! \lambda_{\text{temp}}^{K-1} \prod_{p=1}^K s_p \gamma_p^{-\lambda_{\text{temp}}-1} \left(\sum_{p=1}^K s_p \gamma_p^{-\lambda_{\text{temp}}} \right)^{-K},$$

где $\mathbf{s} \in (0, \infty)^K$ — гиперпараметр, отвечающий за смещенность плотности распределения относительно точек симплекса на K вершинах, λ_{temp} — метапараметр температуры, отвечающий за концентрацию плотности вблизи вершин симплекса или в центре симплекса.

- Перечислим свойства, которыми обладает распределение Gumbel-Softmax:
1. Реализацию $\hat{\gamma}_p$, т.е. p -й компоненты случайной величины γ можно породить следующим образом:

$$\hat{\gamma}_p = \frac{\exp(\log s_p + \hat{g}_p)/\lambda_{\text{temp}}}{\sum_{p'=1}^K \exp(\log s_{p'} + \hat{g}_{p'})/\lambda_{\text{temp}}},$$

где $\hat{\mathbf{g}} \sim -\log(-\log \mathcal{U}(0, 1)^K)$.

2. Свойство округления: $p(\gamma_{p_1} > \gamma_{p_2}, p_1 \neq p_2) = \frac{s_{p_1}}{\sum_{p'} s_{p'}}$.
3. При устремлении температуры к нулю реализация случайной величины концентрируется на вершинах симплекса:

$$p(\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0} \gamma_p = 1) = \frac{s_p}{\sum_{p'} s_{p'}}.$$

4. При устремлении температуры к бесконечности плотность распределения концентрируется в центре симплекса:

$$\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty} p(\gamma | \mathbf{h}) = \begin{cases} \infty, \gamma_p = \frac{1}{K}, p \in \{1, \dots, K\}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Доказательства первых трех утверждений приведены в [?]. Докажем утверждение 4.

Доказательство. Формула плотности записывается следующим образом с точностью до множителя:

$$\frac{\lambda_{\text{temp}}^{K-1}}{\left(\sum_{p=1}^K s_p \gamma_p^{-\frac{K-1}{K} \lambda_{\text{temp}}} \sum_{p'=1}^K [p \neq p'] s_{p'} \gamma_{p'}^{-\frac{1}{K} \lambda_{\text{temp}}} \right)^K}$$

Заметим, что числитель $\lambda_{\text{temp}}^{K-1}$ имеет меньшую скорость сходимости, чем знаменатель. Знаменатель является суммой слагаемых вида:

$$\left(\frac{\prod_{p' \neq p} \gamma_{p'}^{\frac{1}{K}}}{\gamma_p^{\frac{K-1}{K}}} \right)^{\lambda_{\text{temp}}}. \quad (1.2)$$

Пусть хотя бы для одного p : $\gamma_p \neq \frac{1}{K}$. Пусть p' соответствует индексу максимальной компоненты вектора γ . Для $p = p'$ предел выражения (1.2) при λ_{temp} стремится к бесконечности. Для $p \neq p'$ предел выражения (1.2) при λ_{temp} стремится к нулю. Возводя сумму пределов в степень $-K$ получаем предел плотности, равный нулю.

Пусть $\gamma = \frac{1}{K}$. Тогда выражение с точностью до множителя упрощается до λ^{K-1} . Предел данного выражения стремится к бесконечности. Таким образом, предел плотности Gumbel-Softmax равен выражению (1.1), что и требовалось доказать.

□

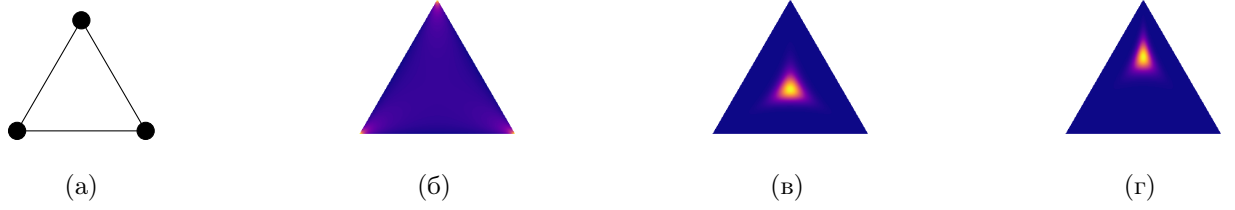


Рис. 1.1. Пример распределения Gumbel-Softmax при различных значениях параметров: а) $\lambda_{temp} \rightarrow 0$, б) $\lambda_{temp} = 1, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, в) $\lambda_{temp} = 5, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, г) $\lambda_{temp} = 5, \mathbf{s} = [10, 0.1, 0.1]$.

Первое свойство Gumbel-Softmax распределения позволяет использовать репараметризацию при вычислении градиента в вариационном выводе (англ. reparametrization trick). Данный подход позволяет значительно повысить точность вычисления градиента от функций, зависящих от случайных величин [?]. Пример распределения Gumbel-Softmax при различных параметрах представлен на Рис. 1.1. В качестве альтернативы для априорного распределения на структуре выступает распределение Дирихле и равномерное распределение. Выбор в качестве распределения на структуре произведения Gumbel-Softmax распределения обоснован выбором этого же распределения в качестве вариационного. TODO: подробнее.

Заметим, что предлагаемое априорное распределение неоднозначно: одно и то же распределение можно получить с различными значениями гиперпараметра $\mathbf{A}_k^{i,j}$ и структурного параметра $\gamma_k^{i,j}$. В качестве регуляризатора для матрицы $(\mathbf{A}_k^{i,j})^{-1}$ предлагается использовать обратное гамма-распределение:

$$(\mathbf{A}_k^{i,j})^{-1} \sim \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{\lambda}$ — метапараметры оптимизации. Использование обратного гамма-распределения в качестве распределения гиперпараметров можно найти в [?, ?]. В данной работе обратное распределение выступает как регуляризатор гиперпараметров. Калибруя метапарамы λ_1, λ_2 можно получить более сильную или более слабую регуляризацию [?]. Пример распределений $\text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$ для разных значений метапараметров λ_1, λ_2 изображен на Рис. 1.2.

Таким образом, предлагаемая вероятностная модель содержит следующие компоненты:

1. Параметры \mathbf{w} модели, распределенные нормально.
2. Структура модели $\boldsymbol{\Gamma}$ распределены по распределению Gumbel-Softmax.
3. Гиперпараметры: $\mathbf{h} = [\text{diag}(\mathbf{A}), \mathbf{s}]$, где \mathbf{A} — конкатенация матриц $\mathbf{A}^{j,k}, (j, k) \in E$, \mathbf{s} — конкатенация параметров Gumbel-Softmax распределений $\mathbf{s}^{j,k}, (j, k) \in E$, где E — множество ребер, соответствующих графу рассматриваемого параметрического семейства.
4. Метапараметры: $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2]$.

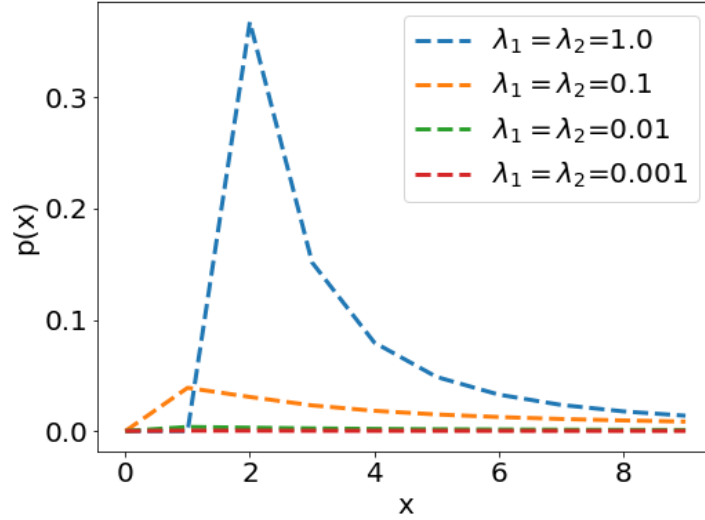


Рис. 1.2. Графики обратных гамма распределений для различных значений метапараметров.

График вероятностной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.3.

1.2. Вариационная оценка для обоснованности вероятностной модели

В качестве критерия выбора структуры модели предлагается использовать апостериорную вероятность гиперпараметров:

$$p(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}}, \quad (1.3)$$

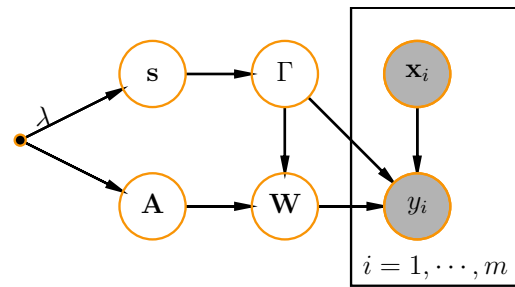


Рис. 1.3. График предлагаемой вероятностной модели в формате плоских нотаций. Переменные обозначены белыми и серыми кругами, константы обозначены обведенными черными кругами. Наблюдаемые переменные обозначены серыми кругами.

где структура модели и параметры модели выбираются на основе полученных значений гиперпараметров:

$$\Gamma^* = \arg \max_{\Gamma \in \mathbb{T}} p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}^*),$$

$$\mathbf{w}^* = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}} p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma^*, \mathbf{h}^*),$$

где \mathbf{h}^* — решение задачи оптимизации (1.3).

Для вычисления обоснованности

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) = \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma, \lambda) p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \lambda) p(\Gamma | \mathbf{h}, \lambda)$$

из (1.3) предлагается использовать вариационную оценку обоснованности.

Теорема 1. Пусть $q = q_{\mathbf{w}} q_{\Gamma}$ — вариационное распределение с параметрами θ , аппроксимирующее апостериорное распределение структуры и параметров:

$$q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta) \approx p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda),$$

$$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \theta_{\mathbf{w}}, \Gamma) \approx p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \lambda),$$

$$q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}) \approx p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda).$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) \geq \quad (1.4)$$

$$\mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{w}, \Gamma, \mathbf{X}) - D_{\text{KL}}(q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}) | p(\Gamma | \mathbf{h}, \lambda)) - D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \theta_{\mathbf{w}}, \Gamma) | p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h})),$$

где $D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \theta_{\mathbf{w}}, \Gamma) | p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}))$ вычисляется по формуле условной дивергенции [?]:

$$D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \theta_{\mathbf{w}}, \Gamma) | p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h})) = \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}} \frac{\log q(\mathbf{w} | \Gamma)}{\log p(\mathbf{w} | \mathbf{h}, \Gamma)}.$$

Доказательство. Используя неравенство Йенсена получим

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) \geq$$

$$\mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y} | \mathbf{w}, \Gamma, \mathbf{X}) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta) | p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h})).$$

Декомпозируем распределение q по свойству условной дивергенции:

$$D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta) | p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h})) = D_{\text{KL}}(q_{\Gamma}(\Gamma | \theta_{\Gamma}) | p(\Gamma | \mathbf{h}, \lambda)) - D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \theta_{\mathbf{w}}, \Gamma) | p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h})).$$

□

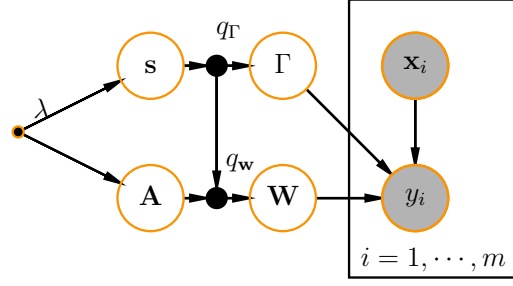


Рис. 1.4. График предлагаемой вероятностной вариационной модели в формате плоских нотаций. Переменные обозначены белыми и серыми кругами, константы обозначены обведенными черными кругами. Вариационное распределение обозначено черным кругом. Наблюдаемые переменные обозначены серыми кругами.

В качестве вариационного распределения $q_{\mathbf{W}}$ предлагается использовать нормальное распределение, не зависящее от структуры модели $\mathbf{\Gamma}$:

$$q_{\mathbf{W}} = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}_q),$$

где \mathbf{A}_q — диагональная матрица с диагональю $\boldsymbol{\alpha}_q$.

В качестве вариационного распределения $q_{\mathbf{\Gamma}}$ предлагается использовать произведение распределений Gumbel-Softmax. конкатенацию параметров концентрации распределений обозначим как \mathbf{s}_q . Температуру вариационного распределения на структуре $\mathbf{\Gamma}$ обозначим как θ_{temp} .

Вариационными параметрами распределения q являются параметры распределений $q_{\mathbf{W}}, q_{\mathbf{\Gamma}}$:

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}_q^2, \mathbf{s}_q, \theta_{\text{temp}}],$$

где $\mathbf{s}_q, \theta_{\text{temp}}$ — параметры Gumbel-Softmax распределений.

График вероятностной вариационной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.4.

Для вычисления приближенного значения вариационной оценки обоснованности (1.4) предлагается использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^R \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}_q \circ \hat{\epsilon}_r, \hat{\mathbf{\Gamma}}_r, \mathbf{X}) - \sum_{r=1}^R \left(\log q_{\mathbf{\Gamma}}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_r | \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}) - p(\hat{\mathbf{\Gamma}} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \right) - \\ & - \sum_{r=1}^R \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{\Gamma}}_r^{-1} \text{tr}(\mathbf{A}_q \mathbf{A}^{-1}) + \boldsymbol{\mu}^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_r^{-1} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\mu} - |\mathbf{W}| + \log \frac{|\mathbf{\Gamma}_r \mathbf{A}|}{|\mathbf{A})_q|} \right), \end{aligned}$$

где r — множество реализаций случайных величин, по котором вычисляется значения вариационной оценки обоснованности, $\hat{\epsilon}_r \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\hat{\Gamma}_r$ — реализация случайной величины, соответствующей структуре Γ .

Для анализа сложности полученной модели введем понятие *параметрической сложности*.

Определение 1. Параметрической сложностью $C_p(\theta)$ модели с вариационными параметрами θ назовем минимальную дивергенцию между вариационным и априорным распределением:

$$C_p(\theta) = \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta) | p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h})).$$

Параметрическая сложность модели соответствует ожидаемой длине описания параметров модели при условии заданного параметрического априорного распределения [?].

Одним из критериев удаления неинформативных параметров в вероятностных моделях является вариационная плотность [?]: отношение вариационной плотности параметров в моде распределения к вариационной плотности параметра в нуле:

$$\rho(q_{\mathbf{w}} | \Gamma) = \frac{q(\mu)}{q(0)} = \exp\left(\frac{-2\sigma_q^2}{\mu^2}\right).$$

Обобщим понятие относительной вариационной плотности на случай произвольных распределений.

Определение 2. Относительной вариационной параметра плотностью $w \in \mathbf{w}$ при условии структуры Γ и гиперпараметров \mathbf{h} назовем отношение моды вариационного распределения параметра к моде априорного распределению параметра:

$$\rho(w | \Gamma, \mathbf{h}) = \frac{q(\text{mode } q(w | \Gamma) | \Gamma)}{q(\text{mode } p(w | \Gamma, \mathbf{h}))},$$

$$\rho(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}) = \prod_{w \in \mathbf{w}} \rho(w | \Gamma, \mathbf{h}).$$

Сформулируем и докажем теорему о связи относительной плотности и параметрической сложности модели:

Теорема 2. Пусть вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}$ и априорное распределение $p(w | \Gamma, \mathbf{h})$ являются унимодальными со свойством:

$$\text{mode } q_{\mathbf{w}} = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}} w, \quad \text{mode } p(w | \Gamma, \mathbf{h}) = \mathbb{E}_p(w | \Gamma, \mathbf{h}) \quad w.$$

Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots$ — бесконечная последовательность векторов вариационных параметров, такая что $\lim_{i \rightarrow \infty} C_p(\theta_i) = 0$, $\lim \sigma_q \neq 0$, $\lim \theta_q \neq 0$. С вариационной вероятностью q_{Γ} вариационная плотность данной последовательности стремится к единице:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}_i) q(\Gamma) d\Gamma = 1,$$

где $\mathbf{h}_i = \arg \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) | p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}))$. Пусть мода априорного распределения не зависит от гиперпараметров.

Доказательство. Предел параметрической сложности перепишем как

$$D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}} | p | \gamma) + D_{\text{KL}}(q_{\gamma} | p).$$

Т.к. параметрическая сложность состоит из двух неотрицательных слагаемых, то в пределе оба слагаемых достигают нуля. Рассмотрим первое слагаемое:

$$D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}} | p | \gamma) = \mathbb{E}_q D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}} | p | \gamma).$$

Отсюда и используя свойство теоремы о монотонной сходимости:

$$0 = \lim D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}} | p | \gamma) = \mathbb{E} \lim D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}} | p | \gamma).$$

Поэтому для измеримого множества единичной меры дивергенция между априорным распределением и вариационным будет нулевой. Рассмотрим разность предел разности мод двух распределений при Γ :

$$\lim(\text{mode } q - \text{mode } p) = \lim \mathbb{E}_q \mathbf{w} - \mathbb{E}_p \mathbf{w} = \lim \int_{\mathbf{w}} \mathbf{w}(p - q) d\mathbf{w}.$$

Т.к. $(p - q) \rightarrow 0$ почти наверно, то

$$\lim \int_{\mathbf{w}} \mathbf{w}(p - q) d\mathbf{w} = \int_{\mathbf{w}} \lim \mathbf{w}(p - q) d\mathbf{w} = 0.$$

Отсюда разность мод для данных распределений в пределе равняется нулю.

Рассмотрим относительную плотность:

$$\frac{q}{q} = \lim = 1.$$

□

Теорема утверждает, что при устремлении параметрической сложности моделей к нулю, параметры модели становятся неинформативными и подлежащими удалению. Заметим, что последовательность q не обязана иметь предел. Примером такой последовательности может быть последовательность гауссовых распределений, чье среднее стремится к нулю.

1.3. Обобщающая задача

Рассмотрим основные критерии выбора вероятностных моделей.

1. Критерий максимального правдоподобия:

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}}.$$

Метод заключается в максимизации правдоподобия обучающей выборки и подвержен переобучению. Для использования данного метода в контексте вариационных распределений предлагается следующее обобщение:

$$L = \mathbb{E}_q \log \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}).$$

Для данного метода нет оптимизируемых гиперпараметров. Для формального соответствия данной задачи задаче выбора положим $L = Q$. Заметим, что частным случаем задачи является метод правдоподобия при выборе в качестве q эмпирического распределения параметров и структуры.

2. Перебор структуры:

$$L = Q = \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|\mathbf{X})[q_{\Gamma} = p']$$

где p' — некоторое распределение на структуре, выступающее в качестве метопараметра.

3. Метод максимальной апостериорной вероятности.

$$\log p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{h}) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}}.$$

Аналогично предыдущему методу сформулируем вариационное обобщение данной задачи:

$$L = Q = \mathbb{E}_q \log \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) + \log p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\lambda}) + \log p(\boldsymbol{\gamma}|\mathbf{X}, \mathbf{w}).$$

В рамках данной задачи оптимизации параметры априорных распределений \mathbf{A}, \mathbf{s} выступают в качестве метопараметров, и поэтому не подлежат оптимизации.

4. Метод вариационной оценки обоснованности.

$$L = Q = \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) - D_{\text{KL}}(q|p).$$

5. Hold-out кросс-валидация.

$$L = \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{h}),$$

$$Q = \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}).$$

6. Критерий Акаике:

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) - |\mathbb{W}|.$$

Заметим, что в условия выбора модели на параметрическом множестве моделей данный критерий не имеет смысла, т.к. количество параметров для каждой модели одинаково. Прелагается следующая переформулировка:

$$AIC_\lambda = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) - |\{w : C_p(w) < \lambda\}|.$$

7. Информационный критерий Шварца:

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) - 0.5 \log(m) |\mathbb{W}|.$$

Переформулируем данный критерий аналогично критерию AIC:

$$BIC_\lambda = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) - \log(m) |\{w : C_p(w) < \lambda\}|.$$

Каждый из рассмотренных критерии удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных свойств:

1. Модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум правдоподобия выборки;
2. Модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум оценки обоснованности;
3. Для моделей, доставляющих сопоставимые значения правдоподобия выборки, выбирается модель с меньшим количеством информативных параметров.
4. Критерий позволяет производить перебор структур для отбора наилучших модели.

Формализуем рассмотренные критерии. Оптимизационную задачу, которая удовлетворяет всем перечисленным свойствам, будет называть *обобщающей*.

Определение 3. Двухуровневую задачу оптимизации будем называть *обобщающей* на области $U \subset \Theta \times \mathbb{H} \times \mathbb{A}$, если она удовлетворяет следующим свойствам:

1. Для каждого значения гиперпараметров \mathbf{h} оптимальное решение нижней задачи оптимизации $\boldsymbol{\theta}^*$ определено однозначно.
2. Свойство максимизации правдоподобия выборки: существует $\boldsymbol{\lambda} \in U_\lambda$ и $K_1 \in \mathbb{R}_+$, такие что для любых векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_h$, $Q(\mathbf{h}_1) - Q(\mathbf{h}_2) > K_1$: матожидания правдоподобия выборок: $\mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_1, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) > \log \mathbb{E}_q p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}_2, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f})$.
3. Свойство минимизации параметрической сложности: существует $\boldsymbol{\lambda} \in U_\lambda$ и $K_2 \in \mathbb{R}_+$, такие что для любых векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_h$, $Q(\mathbf{h}_1) - Q(\mathbf{h}_2) > K_2$, $\mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_1, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) = \log \mathbb{E}_q p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}_2, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f})$, количество ненулевых параметров у первой модели меньше, чем у второй.
4. Свойства приближения оценки обоснованности: существует значение гиперпараметров $\boldsymbol{\lambda}$, такое что оптимизация задачи эквивалента оптимизации вариационной оценки обоснованности модели.

5. Свойство перебора структур: существует константа K_3 , такая что для любых двух векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ и соответствующих векторов $\boldsymbol{\theta}_1^*, \boldsymbol{\theta}_2^* : D_{\text{KL}}(q_{\Gamma_2}, q_{\Gamma_1}) > K_3, D_{\text{KL}}(q_{\Gamma_1}, q_{\Gamma_2}) > K_3$: существуют значения гиперпараметров $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$, такие что $Q(\mathbf{h}_1, \lambda_1) > Q(\mathbf{h}_2, \lambda_1), Q(\mathbf{h}_1, \lambda_1) < Q(\mathbf{h}_2, \lambda_2)$.
6. Свойство непрерывности: $\mathbf{h}^*, \boldsymbol{\theta}^*$ непрерывны по метопараметрам.

Первое свойство говорит о том, что решение первого и второго уровня должны быть согласованы и определены однозначно. Свойства 2-4 определяют возможные критерии оптимизации, которые должны приближаться обобщающей задачей. Свойство 5 говорит о возможности перехода между различными структурами модели. Отметим, что данное условие крайне важно в условиях оптимизации моделей глубокого обучения, которые отличаются многоэкстремальностью. Последнее свойство говорит о том, что обобщающая задача должна позволять производить переход между различными критериями выбора параметров и структуры модели непрерывно.

Теорема 3. Рассмотренные задачи не являются обобщающими.

Доказательство. TODO □

Теорема 4. Пусть задано непустое множество непрерывных по параметрам распределений на структуре \mathbf{P} . Пусть функции потерь и валидации L, Q являются непрерывно-дифференцируемыми на некоторой области $U \subset \Theta \times \mathbb{H} \times \mathbb{A}$, где параметры распределений $\mathbf{P} \in \mathbb{A}$. Тогда следующая задача является обобщающей на U .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}^* &= \arg \max_{\mathbf{h}} Q = & (Q^*) \\
 &= \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q^*} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) - \\
 &\quad - \lambda_Q^{\text{prior}} D_{\text{KL}}(q^*(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f})) - \\
 &\quad - \sum_{p' \in \mathbf{P}, \lambda \in \lambda_Q^{\text{struct}}} \lambda D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\Gamma} | p') + \log p(\mathbf{h} | \mathbf{f}),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 q^* &= \arg \max_q L = \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) & (L^*) \\
 &\quad - \lambda_L^{\text{prior}} D_{\text{KL}}(q^*(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma} | \mathbf{h}, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f})).
 \end{aligned}$$

Доказательство. TODO □

Метопараметрами данной задачи являются коэффициенты $\lambda_Q^{\text{prior}}, \lambda_L^{\text{prior}}$, отвечающие за регуляризацию верхней и нижней задачи оптимизации, коэффициент $\lambda_{\text{likelihood}}^Q$ за максимизацию правдоподобия, а также параметры распределений \mathbf{P} и вектор коэффициентов перед ними $\lambda_Q^{\text{struct}}$.

В предельном случае, когда температура λ_{temp} близка к нулю, а множество \mathbf{P} состоит из распределений, близких к дискретным, и соответствующих всем возможным структурам, калибровка $\lambda_Q^{\text{struct}}$ порождает последовательность задач оптимизаций, схожую с перебором структур.

TODO

Обобщающая задача: переформулировка через градиент

Обобщающая задача: адекватность задачи

Обобщающая задача: свойства коэффициентов

Решение задачи

Эксперимент: пример 1

Эксперимент: пример 2