

Глава 1

Выбор субоптимальной структуры модели

В данной главе рассматривается задача выбора структуры модели глубокого обучения. Предлагается ввести вероятностные предположения о распределении параметров и распределении структуры модели. Проводится градиентная оптимизация параметров и гиперпараметров модели на основе байесовского вариационного вывода. В качестве оптимизируемой функции для гиперпараметров модели предлагается обобщенная функция ее обоснованности. Показано, что данная функция оптимизирует ряд критериев выбора структуры модели: метод максимального правдоподобия, последовательное увеличение и снижению сложности модели, полный перебор структуры модели, а также получение максимума вариационной оценки обоснованности модели. Решается двухуровневая задача оптимизации: на первом уровне проводится оптимизация нижней оценки обоснованности модели по вариационным параметрам модели. На втором уровне проводится оптимизация гиперпараметров модели.

1.1. Вероятностная модель

Определим априорные распределения параметров и структуры модели следующим образом. Пусть для каждого ребра $(j, k) \in E$ и каждой базовой функции $\mathbf{g}_l^{j,k}$ параметры модели $\mathbf{w}_l^{j,k}$ распределены нормально с нулевым средним:

$$\mathbf{w}_l^{j,k} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \gamma_l^{j,k} (\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}),$$

где $(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}$ — диагональная матрица, $l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}$, где $K^{j,k}$ — количество базовых функций для ребра $K^{j,k}$. Априорное распределение $p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h})$ параметров $\mathbf{w}_l^{j,k}$ зависит не только от гиперпараметров $\mathbf{A}_k^{j,k}$, но и от структурного параметра $\gamma_l^{j,k} \in (0, 1)$.

В качестве априорного распределения для структуры $\mathbf{\Gamma}$ предлагается использовать произведение распределений Gumbel-Softmax (\mathcal{GS}) [?]:

$$p(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{(j,k) \in E} p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}),$$

где для каждого структурного параметра $\boldsymbol{\gamma}^{j,k}$ с количеством базовых функций $K^{j,k}$ вероятность $p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}})$ определена следующим образом:

$$p(\boldsymbol{\gamma}^{j,k}|\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = (K-1)! (\lambda_{\text{temp}})^{K-1} \prod_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\lambda_{\text{temp}}-1} \left(\sum_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\lambda_{\text{temp}}} \right)^{-K^{j,k}},$$

где $\mathbf{s}^{j,k} \in (0, \infty)^{K^{j,k}}$ — гиперпараметр, отвечающий за смещенность плотности распределения относительно точек симплекса на $K^{j,k}$ вершинах, $\lambda_{\text{temp}} > 0$ —

метапараметр температуры, отвечающий за концентрацию плотности вблизи вершин симплекса или в центре симплекса.

Перечислим свойства, которыми обладает распределение Gumbel-Softmax:

1. Компонента l случайной величины $\gamma^{j,k}$ представима следующим образом:

$$\gamma_l^{j,k} = \frac{\exp(\log s_l^{j,k} + g_l^{j,k})/\lambda_{\text{temp}}}{\sum_{l'=1}^{K^{j,k}} \exp(\log s_{l'}^{j,k} + g_{l'}^{j,k})/\lambda_{\text{temp}}},$$

где $g^{j,k} \sim -\log(-\log \mathcal{U}(0,1)^{K^{j,k}})$.

2. Свойство округления: $p(\gamma_{l_1} > \gamma_{l_2}, l_1 \neq l_2 | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \frac{s_{l_1}^{j,k}}{\sum_{l'} s_{l'}^{j,k}}$.
3. При устремлении температуры к нулю реализация $\hat{\gamma}^{j,k}$ случайной величины концентрируется на вершинах симплекса:

$$p(\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0} \hat{\gamma}_l^{j,k} = 1 | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \frac{s_l}{\sum_{l'} s_{l'}^{j,k}}.$$

4. При устремлении температуры к бесконечности плотность распределения концентрируется в центре симплекса:

$$\lim_{\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty} p(\gamma^{j,k} | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) = \begin{cases} \infty, \gamma^{j,k} = \frac{1}{K^{j,k}}, l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Доказательства первых трех утверждений приведены в [?]. Докажем утверждение 4.

Доказательство. Формула плотности с точностью до множителя записывается следующим образом :

$$p(\gamma^{j,k} | \mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}}) \propto \frac{(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}}{\left(\sum_{l=1}^{K^{j,k}} s_l^{j,k} (\gamma_l^{j,k})^{-\frac{K^{j,k}-1}{K}} \lambda_{\text{temp}} \prod_{l'=1}^{K^{j,k}} [l \neq l'] (\gamma_{l'}^{j,k})^{\frac{1}{K^{j,k}} \lambda_{\text{temp}}} \right)^{K^{j,k}}}. \quad (1.2)$$

Заметим, что числитель $(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}$ имеет меньшую скорость сходимости, чем знаменатель, поэтому для вычисления предела достаточно проанализировать только знаменатель. Знаменатель под степенью $(-K^{j,k})$ представляется суммой слагаемых следующего вида:

$$\left(\frac{\prod_{l' \neq l} \gamma_{l'}^{\frac{1}{K^{j,k}}}}{\gamma_l^{\frac{K-1}{K^{j,k}}}} \right)^{\lambda_{\text{temp}}}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим два случая: когда вектор $\gamma^{j,k}$ лежит не в центре симплекса, и когда $\gamma^{j,k}$ лежит в центре симплекса. Пусть хотя бы для одной компоненты l выполнено: $\gamma_l^{j,k} \neq \frac{1}{K^{j,k}}$. Пусть l' соответствует индексу максимальной компоненты

вектора $\gamma^{j,k}$:

$$l' = \arg \max_{l \in \{1, \dots, K^{j,k}\}} \gamma_l^{j,k}.$$

Для $l = l'$ предел выражения (1.3) при $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. Для $l \neq l'$ предел выражения (1.3) при $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Возводя сумму пределов в степень $(-K^{j,k})$ получаем предел плотности, равный нулю.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\gamma_l^{j,k} = \frac{1}{K^{j,k}}$ для всех компонент вектора $\gamma^{j,k}$. Тогда выражение (1.2) с точностью до множителя упрощается до $(\lambda_{\text{temp}})^{K^{j,k}-1}$. Предел данного выражения стремится к бесконечности. Таким образом, предел плотности Gumbel-Softmax равен выражению (1.1), что и требовалось доказать. □

Первое свойство Gumbel-Softmax распределения позволяет использовать репараметризацию при вычислении градиента в вариационном выводе (англ. reparametrization trick).

Определение 1. Случайную величину ψ с распределением q с параметрами θ_ψ назовем репараметризованной через случайную величину ε , чье распределение не зависит от параметров θ_ψ , если:

$$\psi = g(\varepsilon, \theta_\psi)$$

где g — некоторая непрерывная функция.

Идею репараметризации поясним на следующем примере.

Пример 1. Пусть структура Γ зафиксирована для модели \mathbf{f} . Рассмотрим математическое ожидание логарифма правдоподобия выборки модели по некоторому непрерывному распределению $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$:

$$\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \int_{\mathbf{w}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) d\mathbf{w}.$$

Продифференцируем данное выражение по параметрам $\theta_{\mathbf{w}}$ вариационного распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$, полагая что оно удовлетворяет необходимым условиям для переноса оператора дифференцирования под знак интеграла:

$$\nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \int_{\mathbf{w}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}}) d\mathbf{w}.$$

Это выражение в общем виде не имеет аналитического решения. Пусть распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \theta_{\mathbf{w}})$ для параметров \mathbf{w} подлжит репараметризации через случайную величину ε :

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}(\varepsilon, \theta_{\mathbf{w}}).$$

Тогда справедливо следующее выражение:

$$\nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) = \nabla_{\theta_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{\varepsilon} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}(\varepsilon), \Gamma) =$$



Рис. 1.1. Пример распределения Gumbel-Softmax при различных значениях параметров: а) $\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0$, б) $\lambda_{\text{temp}} = 1, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, в) $\lambda_{\text{temp}} = 5, \mathbf{s} = [1, 1, 1]$, г) $\lambda_{\text{temp}} = 5, \mathbf{s} = [10, 0.1, 0.1]$.

$$= \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\Gamma}) p(\boldsymbol{\varepsilon}) d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}), \boldsymbol{\Gamma}).$$

Таким образом, распределение, позволяющее произвести репараметризацию, является более удобным для вычисления интегральных оценок вида $\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma})$, а также позволяет повысить точность приближенного вычисления значений таких функций [?]. Подробный анализ репараметризации для генеративных моделей глубокого обучения представлен в [?].

Пример распределения Gumbel-Softmax при различных параметрах представлен на Рис. 1.1. В качестве альтернативы для априорного распределения структуры выступает распределение Дирихле. В качестве предельного случая, когда все структуры $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{I}$ равнозначны, выступает равномерное распределение. Выбор в качестве распределения структуры произведения распределений Gumbel-Softmax обоснован выбором этого распределения в качестве вариационного.

Заметим, что предлагаемое априорное распределение неоднозначно: одно и то же распределение можно получить с различными значениями гиперпараметра $\mathbf{A}_l^{j,k}$ и структурного параметра $\gamma_l^{j,k}$. В качестве регуляризатора для матрицы $(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1}$ предлагается использовать обратное гамма-распределение:

$$(\mathbf{A}_l^{j,k})^{-1} \sim \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{\lambda}$ — метапараметры оптимизации. Использование обратного гамма-распределения в качестве распределения гиперпараметров можно найти в [?, ?]. В данной работе обратное распределение выступает как регуляризатор гиперпараметров. Варьированием метапараметров λ_1, λ_2 получается более сильная или более слабая регуляризация [?]. Пример распределений $\text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$ для разных значений метапараметров λ_1, λ_2 изображен на Рис. 1.2. Оптимизации без регуляризации соответствует случай предельного распределения $\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0} \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Таким образом, предлагаемая вероятностная модель содержит следующие компоненты:

1. Параметры \mathbf{w} модели, распределенные нормально.

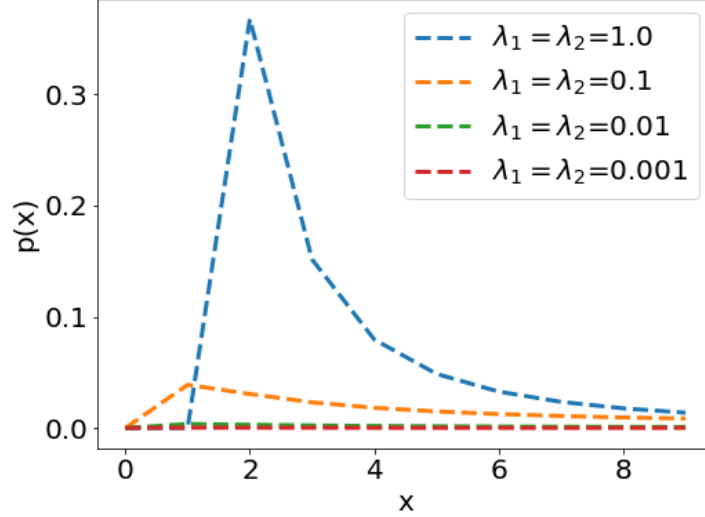


Рис. 1.2. Графики обратных гамма распределений для различных значений метапараметров.

2. Структура модели Γ , содержащая все структурные параметры $\{\gamma^{j,k}, (j,k) \in E\}$, распределенные по распределению Gumbel-Softmax.
3. Гиперпараметры $\mathbf{h} = [\text{diag}(\mathbf{A}), \mathbf{s}]$, где \mathbf{A} — конкатенация матриц $\mathbf{A}^{j,k}, (j,k) \in E$, \mathbf{s} — конкатенация параметров Gumbel-Softmax распределений $\mathbf{s}^{j,k}, (j,k) \in E$, где E — множество ребер, соответствующих графу рассматриваемого параметрического семейства моделей \mathfrak{F} .
4. Метапараметры: $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}]$. Эти параметры не подлежат оптимизации и задаются экспертно.

График вероятностной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.3.

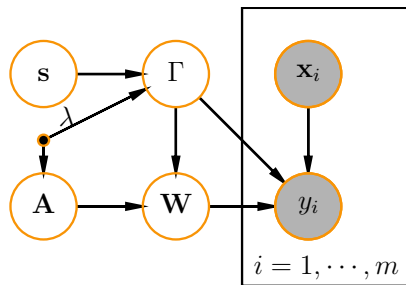


Рис. 1.3. TODO: сделать лямбду красивой (снова). График предлагаемой вероятностной модели в формате плоских нотаций. Переменные обозначены белыми и серыми кругами, константы обозначены обведенными черными кругами. Наблюдаемые переменные обозначены серыми кругами.

1.2. Вариационная оценка обоснованности вероятностной модели

Задача выбора структуры Γ и параметров \mathbf{w} заключается в получении оценок на апостериорное распределение $p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$. Оно зависит от гиперпараметров \mathbf{h} . В качестве критерия выбора гиперпараметров предлагается использовать апостериорную вероятность гиперпараметров:

$$p(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) \propto p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}}. \quad (1.4)$$

Структура модели и параметры модели выбираются на основе полученных значений гиперпараметров:

$$\mathbf{w}^*, \Gamma^* = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}, \Gamma \in \mathbb{\Gamma}} p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}^*, \boldsymbol{\lambda}),$$

где \mathbf{h}^* — решение задачи оптимизации (1.4).

Для вычисления обоснованности модели

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma d\mathbf{w}$$

из (1.4) предлагается использовать нижнюю вариационную оценку обоснованности.

Теорема 1. Пусть $q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) = q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ — вариационное распределение с параметрами $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}]$, аппроксимирующее апостериорное распределение структуры и параметров:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) &\approx p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}), \\ q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) &\approx p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}), \\ q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) &\approx p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}). \end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) || p(\Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ &- D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \end{aligned}$$

где $D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$ вычисляется по формуле условной дивергенции [?]:

$$D_{\text{KL}}(q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) || p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right).$$

Доказательство. Перепишем обоснованность:

$$\begin{aligned}
\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= \log \int \int_{\Gamma, \mathbf{w}} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) p(\Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma d\mathbf{w} = \\
&= \log \int \int_{\Gamma, \mathbf{w}} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \frac{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} d\Gamma d\mathbf{w} = \\
&= \log \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})}.
\end{aligned}$$

Используя неравенство Йенсена получим

$$\begin{aligned}
\log \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} &\geq \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} = \\
&= -\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Декомпозируем распределение q по свойству условной дивергенции:

$$\begin{aligned}
D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) &= \\
&= D_{\text{KL}}(q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) || p(\Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \right). \quad (1.6)
\end{aligned}$$

□

В качестве вариационного распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ предлагается использовать нормальное распределение, не зависящее от структуры модели Γ :

$$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_q, \mathbf{A}_q),$$

где \mathbf{A}_q — диагональная матрица с диагональю $\boldsymbol{\alpha}_q$.

В качестве вариационного распределения $q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ предлагается использовать произведение распределений Gumbel-Softmax. Конкатенацию параметров концентрации распределений обозначим \mathbf{s}_q . Его температуру, общую для всех структурных параметров $\boldsymbol{\gamma} \in \Gamma$, обозначим θ_{temp} . Вариационными параметрами распределения $q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ являются параметры распределений $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$, $q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$:

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\mu}_q, \boldsymbol{\alpha}_q, \mathbf{s}_q, \theta_{\text{temp}}].$$

График вероятностной вариационной модели в формате плоских нотаций представлен на Рис. 1.4.

Для анализа сложности полученной модели введем понятие *параметрической сложности*.

Определение 2. Параметрической сложностью $C_p(\boldsymbol{\theta}|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda})$ модели с вариационными параметрами $\boldsymbol{\theta}$ на компакте $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ назовем минимальную дивергенцию между вариационным и априорным распределением:

$$C_p(\boldsymbol{\theta}|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).$$

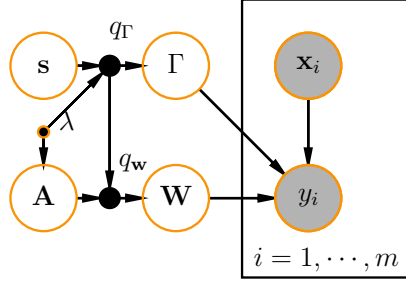


Рис. 1.4. График предлагаемой вероятностной вариационной модели в формате плоских нотаций. Переменные обозначены белыми и серыми кругами, константы обозначены обведенными черными кругами. Вариационное распределение обозначено черным кругом. Наблюдаемые переменные обозначены серыми кругами.

Параметрическая сложность модели соответствует минимальной по $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$ ожидаемой длине описания параметров модели при условии заданного параметрического априорного распределения [?].

Одним из критериев удаления неинформативных параметров в вероятностных моделях является отношение вариационной плотности параметров в моде распределения к вариационной плотности параметра в нуле [?]:

$$\frac{q_{\mathbf{w}}(w = \mu_q | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(w = 0 | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} = \exp \left(-\frac{2\alpha_q^2}{\mu_q^2} \right),$$

где параметру модели w соответствуют вариационные параметры μ_q, α_q : $q_{\mathbf{w}}(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) \sim \mathcal{N}(\mu_q, \alpha_q)$.

Обобщим понятие относительной вариационной плотности на случай произвольных непрерывных распределений.

Определение 3. Относительной вариационной плотностью параметра $w \in \mathbf{w}$ при условии структуры Γ и гиперпараметров \mathbf{h} назовем отношение вариационной плотности в моде вариационного распределения параметра к вариационной плотности в моде априорного распределения параметра:

$$\rho(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \lambda) = \frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) | \Gamma, \mathbf{h}, \lambda)}.$$

Относительной вариационной плотностью вектора параметров \mathbf{w} назовем следующее выражение:

$$\rho(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \lambda) = \prod_{w \in \mathbf{w}} \rho(w | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \lambda).$$

Сформулируем и докажем теорему о связи относительной плотности и параметрической сложности модели:

Теорема 2. Пусть

1. Заданы компактные множества $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$, $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \subset \Theta_{\mathbf{w}}$, $U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} \subset \Theta_{\Gamma}$.
2. Мода априорного распределения $p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ не зависит от гиперпараметров \mathbf{h} на $U_{\mathbf{h}}$ и структуры Γ на $U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}}$:

$$\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma_1, \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda}) = \text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma_1, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{m}$$

для любых $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in U_{\Gamma}$.

3. Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ и априорное распределение $p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ являются абсолютно непрерывными и унимодальными на $U_{\mathbf{h}}, U_{\boldsymbol{\theta}}$. Их мода и матожидание совпадают:

$$\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w};$$

$$\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) = \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}.$$

4. Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ является липшецевым по \mathbf{w} .
5. Значение $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ не равно нулю при $\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$.
6. Решение задачи

$$\mathbf{h}^* = \arg \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \quad (1.7)$$

единственно для любого $\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$.

7. Параметры модели \mathbf{w} имеют конечные вторые моменты по распределениям:

$$\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma, \quad \int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma.$$

8. Задана бесконечная последовательность векторов вариационных параметров $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_i, \dots \in U_{\boldsymbol{\theta}}$, такая что $\lim_{i \rightarrow \infty} C_p(\boldsymbol{\theta}_i | U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$.

Тогда следующее выражение стремится к единице:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{q_{\Gamma}((\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \rho(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i, (\mathbf{h})_i, \boldsymbol{\lambda}) = 1.$$

Доказательство. Обозначим за \mathbf{h}_i — решение задачи (1.7) для вектора вариационных параметров $\boldsymbol{\theta}_i = [(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i, (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i]$.

Воспользуемся неравенством Пинскера:

$$\|F_q((\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} \leq \sqrt{2 \log q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - \log p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{w}} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ — расстояние по вариации, F_q, F_p — функции распределения $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}), p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$. Правая часть неравенства под корнем соответствует дивергенции Кульбака-Лейблера между распределениями $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i), p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})$ при фиксированном значении структуры Γ .

По условию дивергенция (1.6) стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$. Она состоит из двух неотрицательных величин, поэтому обе они стремятся к нулю. Рассмотрим вторую величину:

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\Gamma \sim q_{\Gamma}(\Gamma | (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i)} \mathbb{E}_{\mathbf{w} \sim q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i)} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i)}{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})} \right) =$$

расписывая матожидание как интеграл

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} \int_{\mathbf{w}} \log \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i)}{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma | (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) d\mathbf{w} d\Gamma \right| \geq$$

по неравенству Пинскера

$$\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \|F_q((\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} q_{\Gamma}(\Gamma | (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\Gamma.$$

Отсюда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \|F_q((\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - F_p(\mathbf{h}_i)\|_{\text{TV}} q_{\Gamma}(\Gamma | (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\Gamma = 0.$$

По теореме Шеффе данное выражение можно переписать как:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i)| q_{\Gamma}(\Gamma | (\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\Gamma d\mathbf{w} = 0.$$

Для произвольного $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}]$ рассмотрим выражение:

$$|\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \rho(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - 1| =$$

$$\left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma - 1 \right| =$$

представляя единицу как $\frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}$

$$= \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode } p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| =$$

заменяя моду на матожидание (по условию теоремы)

$$= \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \right) q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| \leq$$

занося модуль под знак интеграла

$$\leq \int_{\Gamma} \left| \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} - \frac{q_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}_{p(\mathbf{w} | \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right| \leq$$

используя липшецевость функции $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$

$$\frac{C_l}{\min_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \int_{\Gamma} |\mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w} - \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w}| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \leq$$

расписывая матожидание через интеграл

$$\leq \frac{C_l}{\min_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} q_{\mathbf{w}}(\mathbf{m}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma,$$

где C_l — максимальная константа Липшица для $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ на $U_{\boldsymbol{\theta}}$.

Определим случайную величину $\boldsymbol{\nu}(t), t \geq 0$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \max(-t \cdot \mathbf{1}, \min(t \cdot \mathbf{1}, \mathbf{w})).$$

Данная величина совпадает с \mathbf{w} при $|\mathbf{w}| < t$ и принимает значение t или $-t$ при $|\mathbf{w}| \geq t$. Тогда для любого $t > 0$ справедливо:

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

по неравенству треугольника и используя выражение $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\nu}(t) - \boldsymbol{\nu}(t)$

$$\begin{aligned} &\leq \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma + \\ &+ \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\boldsymbol{\nu}(t)| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Рассмотрим первое слагаемое суммы (1.8). Т.к. вторые моменты $\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} \mathbf{w}^2, \mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} \mathbf{w}^2$ конечны, то случайная величина \mathbf{w} равномерно интегрируема как при маргинальном распределении $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma$, так и при маргинальном распределении $\int_{\Gamma} q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma$. По определению равномерной интегрируемости для \mathbf{w} для любого числа ε существует число t_0 , такое что для любого $t \geq t_0$, любого $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$, справедливо выражение:

$$\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| = \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma \leq \varepsilon,$$

$$\mathbb{E}_{q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})} \mathbb{E}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| = \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

так как модуль разностей меньше или равен суммы модулей

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) d\Gamma d\mathbf{w} < 2\varepsilon$$

для любого $t \geq t_0$. Обозначим за $\varepsilon(t)$ минимальное число ε , удовлетворяющее предыдущим неравенствам. Тогда

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})| d\mathbf{w} d\Gamma \leq 2\varepsilon(t),$$

где $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Рассмотрим второе слагаемое.

$$\iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\boldsymbol{\nu}(t)| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

по ограниченности функции $\boldsymbol{\nu}(t)$

$$\leq t \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\mathbf{w} d\Gamma.$$

Переходя к пределу в (1.8) получим:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|(\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma =$$

добавим предел по t , от которого не зависит данное выражение

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w}| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|(\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma \leq$$

из выше написанных неравенств

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\mathbf{w} - \boldsymbol{\nu}(t)| |p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i)| d\mathbf{w} d\Gamma + \\ & + \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |\boldsymbol{\nu}(t)| |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|(\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma \leq \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} 2\varepsilon(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} t \iint_{\Gamma, \mathbf{w}} |q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})_i) - p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}_i, \boldsymbol{\lambda})| q_{\Gamma}(\Gamma|(\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})_i) d\mathbf{w} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Таким образом выражение $\left| \int_{\Gamma} \frac{q_{\mathbf{w}}(\text{mode}_{q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})}{q_{\mathbf{w}}(\text{mode}_{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})} q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}) d\Gamma \right|$ стремится к единице, что и требовалось доказать. \square

Теорема утверждает, что при устремлении параметрической сложности модели к нулю, все параметры модели подлежат удалению в среднем по всем возможным значениям структуры $\mathbf{\Gamma}$ модели. Заметим, что теорема применима для случая, когда последовательность вариационных распределений q не имеет предела. Так, в случае, если структура $\mathbf{\Gamma}$ определена однозначно, последовательность $\boldsymbol{\theta}_i$ может являться последовательностью нормальных распределений, чье матожидание стремится к нулю:

$$\boldsymbol{\theta}_i \sim \mathcal{N}((\boldsymbol{\mu}_q)_i, (\mathbf{A}_q^{-1})_i), (\boldsymbol{\mu}_q)_i \rightarrow \mathbf{0}.$$

Априорным распределением $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = p(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ при этом может являться семейство нормальных распределений с нулевым средним:

$$p(\mathbf{w} | \mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}).$$

При этом сама последовательность распределений $\boldsymbol{\theta}_i$ не обязана иметь предел.

1.3. Обобщающая задача

В данном разделе проводится анализ основных критериев выбора моделей, а также предлагается их обобщение на случай моделей, использующих вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})$ для аппроксимации неизвестного апостериорного распределения параметров $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$.

Рассмотрим основные статистические критерии выбора вероятностных моделей.

1. Критерий максимального правдоподобия:

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in U_{\mathbf{w}}, \mathbf{\Gamma} \in U_{\mathbf{\Gamma}}}.$$

Для использования данного критерия в качестве задачи выбора модели предлагается следующее обобщение:

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}). \quad (1.9)$$

Данное обобщение (1.9) эквивалентно критерию правдоподобия при выборе в качестве $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})$ эмпирического распределения параметров и структуры. Метод не предполагает оптимизации гиперпараметров \mathbf{h} . Для формального соответствия данной задачи задаче выбора модели (??), т.е. двухуровневой задачи оптимизации, положим $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}},$$

$$Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma} | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}},$$

2. Метод максимальной апостериорной вероятности.

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma})p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{w} \in U_{\mathbf{w}}, \mathbf{\Gamma} \in U_{\mathbf{\Gamma}}}.$$

Аналогично предыдущему методу сформулируем вариационное обобщение данной задачи:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \\ &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})}(\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) + \log p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Т.к. в рамках данной задачи (1.10) не предполагается оптимизации гиперпараметров \mathbf{h} , положим параметры распределения $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ фиксированными:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{s}, \text{diag}(\mathbf{A})].$$

3. Полный перебор структуры:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(q_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}) = p'|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) \quad (1.11)$$

где p' — некоторое распределение на структуре $\mathbf{\Gamma}$, выступающее в качестве метапараметра.

4. Критерий Акаике:

$$\text{AIC} = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) + |\mathbb{W}|.$$

Т.к. все рассматриваемые модели принадлежат одному параметрическому семейству моделей \mathfrak{F} , то количество параметров у всех рассматриваемых моделей совпадает. Тогда критерий Акаике совпадает с критерием максимального правдоподобия. Для использования критерия Акаике для сравнения моделей, принадлежащих одному параметрическому семейству \mathfrak{F} предлагается следующая переформулировка:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - \\ &- |\{w : D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < \lambda_{\text{prune}}\}|, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$\mathbf{h} = \arg \min_{\mathbf{h}' \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \quad (1.13)$$

λ_{prune} — метапараметр алгоритма, $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ — область определения задачи по гиперпараметрам. Предложенное обобщение (1.12) применимо только в случае, если выражение (1.13) определено однозначно, т.е. существует единственный вектор гиперпараметров $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$, доставляющий минимум дивергенции $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$.

5. Информационный критерий Шварца:

$$\text{BIC} = \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - 0.5 \log(m)|\mathbb{W}|.$$

Переформулируем данный критерий аналогично критерию AIC:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.14)$$

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \log m |\{w : D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) < \lambda_{\text{prune}}\}|,$$

метапараметр λ_{prune} определен аналогично (1.13).

6. Метод вариационной оценки обоснованности:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \quad (1.15)$$

$$= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}}$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) =$$

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}}$$

В рамках данной задачи функции $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ и $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ совпадают, все гиперпараметры \mathbf{h} подлежат оптимизации.

7. Валидация на отложенной выборке:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \mathbf{y}_{\text{train}} \mathbf{X}_{\text{train}} + p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (1.16)$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \mathbf{y}_{\text{test}} \mathbf{y}_{\text{test}} \rightarrow \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}},$$

где $(\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}), (\mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{y}_{\text{test}})$ — разбиение выборки на обучающую и контрольную подвыборку. В рамках данной задачи, все гиперпараметры \mathbf{h} подлежат оптимизации.

Каждый из рассмотренных критериев удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных свойств:

- 1) модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум правдоподобия выборки;
- 2) модель, оптимизируемая согласно критерию, доставляет максимум оценки обоснованности;
- 3) для моделей, доставляющих сопоставимые значения правдоподобия выборки, выбирается модель с меньшим количеством информативных параметров.
- 4) критерий позволяет производить перебор структур для отбора наилучших.

Формализуем рассмотренные критерии. Оптимизационную задачу, которая удовлетворяет всем перечисленным свойствам при некоторых значениях метапараметров, будет называть *обобщающей*.

Определение 4. Двухуровневую задачу оптимизации будем называть *обобщающей* на компакте

$$U = U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \times U_{\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}} \times U_{\mathbf{h}} \times U_{\boldsymbol{\lambda}} \subset \Theta_{\mathbf{w}} \times \Theta_{\Gamma} \times \mathbb{H} \times \Lambda,$$

если она удовлетворяет следующим критериям.

1. Область определения каждого параметра $w \in \mathbf{w}$, гиперпараметра $h \in \mathbf{h}$ и метапараметра $\lambda \in \boldsymbol{\lambda}$ не является пустым множеством и не является точкой.
2. Для каждого значения гиперпараметров \mathbf{h} оптимальное решение нижней (??) задачи оптимизации

$$\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}) = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$$

определено однозначно при любых значениях метапараметров $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$.

3. Критерий максимизации правдоподобия выборки: существует $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$ и $K_1 > 0$,

$$K_1 < \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}),$$

такие что для любых векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$, удовлетворяющих неравенству

$$Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}) > K_1,$$

выполняется неравенство

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1))} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) > \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2))} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma).$$

4. Критерий минимизации параметрической сложности: существует $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$ и $K_2 > 0$,

$$K_2 < \max_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}),$$

такие что для любых векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$, удовлетворяющих неравенству

$$Q(\mathbf{h}_1 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1), \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2), \boldsymbol{\lambda}) > K_2,$$

параметрическая сложность первой модели меньше, чем второй:

$$C_p(\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1) | U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}) < C_p(\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2) | U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}).$$

5. Критерий приближения оценки обоснованности: существует значение гиперпараметров λ , такое что значение функций потерь $L(\theta|y, X, h, \lambda)$ и валидации $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$ пропорционален вариационной оценке обоснованности модели:

$$Q(h|y, X, \theta^*(h), \lambda) \propto \mathbb{E}_{q(w, \Gamma|\theta^*(h))} \log p(y|X, w, \Gamma) - D_{KL}(q(w, \Gamma|\theta^*(h)) || p(w, \Gamma|h, \lambda)) + \log p(h|\lambda)$$

для всех $h \in U_h$, где в качестве гиперпараметров h рассматриваются все гиперпараметры модели: $h = [A, s]$, где

$$\theta^*(h) = \arg \max_{\theta \in U_\theta} \mathbb{E}_{q(w, \Gamma|\theta)} \log p(y|X, w, \Gamma) - D_{KL}(q(w, \Gamma|\theta) || p(w, \Gamma|h, \lambda)).$$

6. Критерий перебора оптимальных структур: существует набор метопараметров λ и константа TODO $K_3 > 0$:

$$K_3 < \max_{h_1, h_2} \min (D_{KL}(p(\Gamma|h_1, \lambda) || p(\Gamma|h_2, \lambda)), D_{KL}(p(\Gamma|h_2, \lambda) || p(\Gamma|h_1, \lambda))),$$

такие что для локальных оптимумов h_1, h_2 задачи оптимизации $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$, полученных при метопараметрах λ и удовлетворяющих неравенствам

$$D_{KL}(p(\Gamma|h_1, \lambda) || p(\Gamma|h_2, \lambda)) > K_3, D_{KL}(p(\Gamma|h_2, \lambda) || p(\Gamma|h_1, \lambda)) > K_3,$$

$$Q(h_1|y, X, \theta, \lambda) > Q(h_2|y, X, \theta, \lambda),$$

существует значение метопараметров $\lambda' \neq \lambda$, такие что

- (а) соответствие между вариационными параметрами $\theta^*(h_1), \theta^*(h_2)$ сохраняется при λ' ,
 - (б) выполняется неравенство $Q(h_1|y, X, \theta, \lambda) < Q(h_2|y, X, \theta, \lambda)$ при λ' .
7. Критерий непрерывности: функции $L(\theta|y, X, h, \lambda)$ и $Q(h|y, X, \theta, \lambda)$ непрерывны по метопараметрам $\lambda \in U_\lambda$.

Первый критерий является техническим и используется для исключения из рассмотрения вырожденных задач оптимизации. Второй критерий говорит о том, что решение первого и второго уровня должны быть согласованы и определены однозначно. Критерии 3-5 определяют возможные критерии оптимизации, которые должны приближаться обобщающей задачей. Критерий 6 говорит о возможности перехода между различными структурами модели. Данный критерий говорит о том, что мы можем перейти от одного набора гиперпараметров h_1 к другим h_2 , если они соответствуют локальным оптимумам задачи оптимизации, и дивергенция соответствующих априорных распределений на структурах $p(\Gamma|h, \lambda)$ значимо высока. При этом соответствующие вариационные распределения $q_\Gamma(\Gamma|\theta_\Gamma)$ могут оказаться достаточно близки. Возможным дополнением этого критерия был бы критерий, позволяющий переходить от

структуры к структуре, если соответствующие распределения $q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})$ различаются значительно. Последний критерий говорит о том, что обобщающая задача должна позволять производить переход между различными методами выбора параметров и структуры модели непрерывно.

Теорема 3. Рассмотренные задачи (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.14), (1.16) не являются обобщающими.

Доказательство. Задачи (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.14) не имеют гиперпараметров \mathbf{h} , подлежащих оптимизации, поэтому не могут оптимизировать вариационную оценку.

При использовании валидации на отложенной выборке (1.16) в функцию валидации $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda)$ не входит ни один метапараметр, поэтому критерий перебора структур 6 для нее также не выполняется. \square

Теорема 4. Пусть q_{Γ} — абсолютно непрерывное распределение с дифференцируемой плотностью, такой что:

1. Градиент плотности $\nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_{\Gamma})$ является нулевым не более чем счетное количество раз.
2. Выражение $\nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_{\Gamma}) \log p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ ограничено на U_{θ} некоторой случайной величиной с конечным первым моментом.

Тогда задача (1.15) не является обобщающей.

Доказательство. Пусть выполнены условия критерия 6 о переборе структур, и $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ — локальные оптимумы функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda)$ при метапараметрах λ . По условию критерия соответствие $\theta^*(\mathbf{h}_1)$ и $\theta^*(\mathbf{h}_2)$ должны сохраняться, т.е. для некоторого λ' решение нижней задачи оптимизации $\theta^*(\mathbf{h}_1)$ должно совпадать с решением $\theta^*(\mathbf{h}_1)$ при метапараметрах λ . Тогда

$$\begin{aligned} & \nabla_{\theta} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)|p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda)) = \\ & = \nabla_{\theta} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\theta_1)|p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda')). \end{aligned}$$

Сокращая равные слагаемые в равенстве получим:

$$\nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\Gamma|\theta_1)|p(\Gamma|\lambda)) = \nabla_{\theta} D_{\text{KL}}(q(\Gamma|\theta_1)|p(\Gamma|\lambda')),$$

Из второго условия теоремы следует, что по теореме Лебега о мажорируемой сходимости осуществим переход дифференцирования под знак интеграла:

$$\int_{\Gamma \in \Gamma} \nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_2) (\log p(\Gamma|\lambda) - \log p(\Gamma|\lambda')) d\Gamma = 0.$$

Т.к. выражение $\nabla_{\theta_{\Gamma}} q(\Gamma|\theta_2)$ принимает нулевое значение в счетном количестве точек, то выражение $\log p(\Gamma|\lambda) - \log p(\Gamma|\lambda')$ равно нулю почти всюду, что

означает что метапараметр температуры λ_{temp} равен при разных значениях метапараметров:

$$\lambda_{\text{temp}} = \lambda'_{\text{temp}}, \quad \lambda_{\text{temp}} \in \boldsymbol{\lambda}, \lambda'_{\text{temp}} \in \boldsymbol{\lambda}'.$$

Таким образом, метапараметры $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'$ отличаются лишь на метапараметры λ_1, λ_2 регуляризации ковариационной матрицы \mathbf{A}^{-1} . Возьмем в качестве векторов гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ гиперпараметры, отличающиеся только параметрами распределения структуры:

$$\mathbf{h}_1 = [\mathbf{s}_1, \text{diag}(\mathbf{A}_1)], \mathbf{h}_2 = [\mathbf{s}_2, \text{diag}(\mathbf{A}_2)], \quad \mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2, \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2.$$

Метапараметры λ_1, λ_2 не влияют на значение функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ при гиперпараметрах, отличающихся только параметрами распределения структуры, поэтому значение функции Q для них будет неизменно при любых значениях λ_1, λ_2 . Приходим к противоречию: значение $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ не меняется при изменении метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$. □

В качестве обобщающей задачи оптимизации предлагается оптимизационную задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^* &= \arg \max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = & (1.17) \\ &= \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \\ &\quad - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ &\quad - \sum_{p', \lambda \in \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q} \lambda D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*) || p') + \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}), \\ \boldsymbol{\theta}^* &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = & (L^*) \\ &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) - \lambda_{\text{prior}}^L D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}^*) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \end{aligned}$$

где \mathbf{P} — непустое множество распределений на структуре $\boldsymbol{\Gamma}$, $\lambda_{\text{prior}}^Q, \lambda_{\text{prior}}^L, \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$ — некоторые числа. Множество распределений \mathbf{P} отвечает за перебор структур $\boldsymbol{\Gamma}$ в процессе оптимизации модели. Более подробное объяснение данного множества дано ниже.

Теорема 5. Пусть:

- 1) задано непустое множество непрерывных по параметрам распределений на структуре \mathbf{P} , не принимающих нулевое значение, где хотя бы одно распределение $p_1 \in \mathbf{H}$ является Gumbel-Softmax распределением и для любого значения $\mathbf{s} \in U_{\mathbf{h}}, \lambda_{\text{temp}} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$ существует значение параметров распределения p_1 , такое что $p_1 = p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$.

- 2) Вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})$ является абсолютно непрерывным, плотность которого непрерывна по метапараметрам $\boldsymbol{\lambda}$ и не принимает нулевое значение.
- 3) Задан компакт $U = U_{\boldsymbol{\theta}_w} \times U_{\boldsymbol{\theta}_\Gamma} \times U_{\mathbf{h}} \times U_{\boldsymbol{\lambda}}$, где параметры распределений $\mathbf{P} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$.
- 4) Область определения каждого параметра $w \in \mathbf{w}$, гиперпараметра $h \in \mathbf{h}$ и метапараметра $\lambda \in \boldsymbol{\lambda}$ не является пустым и не является точкой.
- 5) Для каждого значения гиперпараметров $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}$ оптимальное решение нижней задачи оптимизации $\boldsymbol{\theta}^*$ определено однозначно на $U_{\boldsymbol{\theta}} = U_{\boldsymbol{\theta}_w} \times U_{\boldsymbol{\theta}_\Gamma}$ при любых значениях метапараметров $\boldsymbol{\lambda} \in U_{\boldsymbol{\lambda}}$.
- 6) Область значений метапараметров $\lambda_{\text{likelihood}}^Q, \lambda_{\text{prior}}^Q, \lambda_{\text{prior}}^L, \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$ включает отрезок от нуля до единицы.
- 7) Существует значение метапараметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{likelihood}}^Q$, такое что

$$\max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) < \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$$

при $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}, \lambda_{\text{prior}}^Q = 0$.

- 8) Существует значение метапараметров $\lambda_{\text{prior}}^Q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}$, такое что

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) + \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ & \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) < \\ & < \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ & - \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

- 9) Существуют значения метапараметров $\lambda_{\text{prior}}^Q, \lambda_{\text{likelihood}}^Q, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}$, такие что существуют гиперпараметры $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}$:

$$\begin{aligned} & D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) < \\ & < \frac{\max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})}{\max_{\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q}}, \\ & D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\lambda})) < \\ & < \frac{\max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})}{\max_{\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q}}. \end{aligned}$$

при $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$.

Тогда задача (1.17) является обобщающей на U .

Доказательство. Для доказательства теоремы требуется доказать критерии 1-7 из определения обобщающей задачи. Выполнение критериев 1 и 2 следует из условий задачи.

Докажем критерий 3. Пусть $\lambda_{\text{prior}}^Q = 0, \lambda_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{likelihood}}^Q$ удовлетворяют седьмому условию теоремы. Возьмем в качестве K_1 следующее выражение:

$$K_1 = \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\lambda) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\lambda).$$

Пусть $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}, Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) > K_1$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) &= \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_1))} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ &- \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}_2))} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \log p(\mathbf{h}_1|\lambda) - \log p(\mathbf{h}_2|\lambda) > K_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует выполнение критерия 3:

$$\lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) > 0.$$

Докажем критерий 4. Пусть λ удовлетворяют восьмому условию теоремы и $\lambda_{\text{likelihood}}^Q = 0, \lambda_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Пусть

$$\begin{aligned} K_2 &= \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\lambda) - \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \log p(\mathbf{h}|\lambda) + \max_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \min_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)) - \\ &- \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)) + \max_{\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ &- \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_{\mathbf{h}}, Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) > K_2$. Рассмотрим разность параметрических сложностей двух векторов:

$$\begin{aligned} C_p(\boldsymbol{\theta}_2) - C_p(\boldsymbol{\theta}_1) &= \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)) - \\ &- \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)) \geq \end{aligned}$$

оценим снизу, а также добавим и вычтем $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \lambda))$

$$\begin{aligned} &\geq \min_{\mathbf{h} \in U_{\mathbf{h}}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)) - KLq(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda) + \\ &+ D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \lambda)) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \lambda)) = \end{aligned}$$

сведем выражение до $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda)$

$$= Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda) - \log p(\mathbf{h}_1|\lambda) + \log p(\mathbf{h}_2|\lambda) +$$

$$\begin{aligned}
& + \min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) > \\
& \text{воспользуемся неравенством } Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) > K_2 \\
& > K_2 - \log p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda}) + \log p(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\lambda}) + \min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \\
& \quad - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Рассмотрим разность:

$$\min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}_2, \boldsymbol{\lambda})) =$$

т.к. $\boldsymbol{\theta}_1$ — решение нижней задачи оптимизации:

$$\min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) +$$

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda})) \right) \geq$$

получим оценку снизу:

$$\begin{aligned}
& \geq \min_{\mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}_2)||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \\
& \max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\min_{\boldsymbol{\theta}'} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}')} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda})) \right) \geq
\end{aligned}$$

оценим первое слагаемое

$$\begin{aligned}
& \geq \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) + \\
& \min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \min_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda})) \geq
\end{aligned}$$

оценим последнее слагаемое

$$\begin{aligned}
& \geq \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \max_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) \\
& + \min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{\lambda_{\text{prior}}^L} \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \max_{\mathbf{h}} \min_{\boldsymbol{\theta}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).
\end{aligned}$$

Складывая полученную оценку с $K_2 - \log p(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\lambda}) + \log p(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda})$ получаем разность параметрических сложностей больше нуля.

Докажем критерий 5. Пусть $\lambda_{\text{prior}}^Q = \lambda_{\text{prior}}^L = \lambda_{\text{likelihood}}^Q = 1$, $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Тогда функции $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ и $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ можно записать как:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})),$$

$$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda})$$

Двухуровневая задача оптимизации совпадает с оптимизацией вариационной оценки обоснованности, что и требовалось доказать.

Докажем критерий 6. Пусть задан вектор метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$, удовлетворяющий девятому условию теоремы и $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Пусть заданы векторы гиперпараметров $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$, такие что $Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) > 0$. Возьмем в качестве K_4 следующее выражение:

$$K_4 = \frac{\max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - \min_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})}{\max_{\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q} Q}.$$

Пусть вектор метапараметров $\boldsymbol{\lambda}'$ отличается от $\boldsymbol{\lambda}$ лишь метапараметром $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$. Для обоих векторов метапараметров нижняя задача оптимизации $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ совпадает, поэтому выполняется первое условие критерия.

По условию теоремы во множество \mathbf{P} входит хотя бы одно распределение Gumbel-Softmax:

$$p_1 \sim \mathcal{GS}, p \in \mathbf{P}.$$

Положим для $\boldsymbol{\lambda}'$ метапараметр перед данным распределением $\lambda_{\text{struct}}^Q \in \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$ равным максимальному значению. Положим также значение параметров данного распределения равным параметрам распределения $p(\mathbf{h}_1, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$p_1 = p(\mathbf{h}_1, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Для остальных распределений $p' \in \mathbf{P}$ положим коэффициент $\lambda_{\text{struct}}^Q \in \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$ равным нулю. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}') - Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}') = \\ & = Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) + \max_{\lambda_{\text{struct}}^Q} \lambda_{\text{struct}}^Q D_{\text{KL}}(p(\mathbf{h}_2, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) || p(\mathbf{h}_1, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ & = Q(\mathbf{h}_2|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{h}_1|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) + \max_{\lambda_{\text{struct}}^Q} \lambda_{\text{struct}}^Q K_4 > 0. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем критерий 7. Достаточным условием непрерывности функций $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ является непрерывность входящих в нее слагаемых.

Слагаемое $\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma)$ не зависит от метапараметров $\boldsymbol{\lambda}$. Слагаемое $\log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda})$ непрерывно по метапараметрам по свойству обратного гамма-распределения.

Достаточным условием непрерывности функций вида $D_{\text{KL}}(p_1 || p_2)$ является непрерывность по метапараметрам функций $p_1(\log p_1 - \log p_2)$ почти всюду и ограниченность интегрируемой функцией. Априорные распределения задаются

непрерывными функциями плотности $p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}), p(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, не принимающими нулевое значение, и являющимися непрерывными по метапараметрам. Функция $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})$ принимает нулевое значение лишь в конечном количестве точек. Функция $q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})(\log q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) - \log p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$ ограничена на компакте $U_{\boldsymbol{\lambda}}$, поэтому слагаемое $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$ является непрерывным по метапараметрам. Выражения вида $p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})(\log p(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) - \log p), p \in \mathbf{P}$ также являются непрерывными по метапараметрам и ограниченными, поэтому слагаемые вида $D_{\text{KL}}(p(\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})||p)$ являются непрерывными. Поэтому функции $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}), Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ являются непрерывными по метапараметрам, что и требовалось доказать. \square

Метапараметрами данной задачи (1.17) являются коэффициенты $\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}}, \lambda_{\text{prior}}^{\text{Q}}$, отвечающие за регуляризацию верхней и нижней задачи оптимизации, коэффициент $\lambda_{\text{likelihood}}^{\text{Q}}$ отвечает за максимизацию правдоподобия, а также параметры распределений \mathbf{P} и вектор коэффициентов перед ними $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}}$.

В предельном случае, когда температура λ_{temp} близка к нулю, а множество \mathbf{P} состоит из распределений, близких к дискретным, а соответствующим всем возможным структурам, калибровка $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}}$ порождает последовательность задач оптимизаций, схожую с перебором структур. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим вырожденный случай поведения функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$, когда $\lambda_{\text{likelihood}}^{\text{Q}} = \lambda_{\text{prior}}^{\text{Q}} = 0$. Пусть модель использует один структурный параметр, в качестве априорного распределения на структуре задано распределение Gumbel-Softmax с λ_{temp} . Пусть в качестве множества распределений \mathbf{P} используется два распределения Gumbel-Softmax, сконцентрированных близко к вершинам симплекса:

$$\mathbf{P} = [\mathcal{GS}([0.95, 0.05, 0.05]^{\text{T}}, 1.0), \mathcal{GS}([0.95, 0.05, 0.05]^{\text{T}}, 1.0)].$$

Из определения распределения Gumbel-Softmax следует, что достаточно рассмотреть только значения параметра \mathbf{s} , находящиеся внутри симплекса. На рис. 1.5 изображены значения функции Q в зависимости от метапараметров $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^{\text{Q}}$ и значений гиперпараметра \mathbf{s} распределения на структуре. Видно, что варьируя коэффициенты метапараметров получается последовательность оптимизаций, схожая с полным перебором структуры.

1.4. Анализ обобщающей задачи

В данном разделе рассматриваются свойства предложенной задачи при различных значениях метапараметров, а также характер асимптотического поведения задач.

Теорема 6. Пусть $m \gg 0$, $\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}} > 0$, $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}}} \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^{\text{L}}} \gg 0$. Тогда оптимизация функции

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}) - \lambda_{\text{prior}}^{\text{L}} D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$$

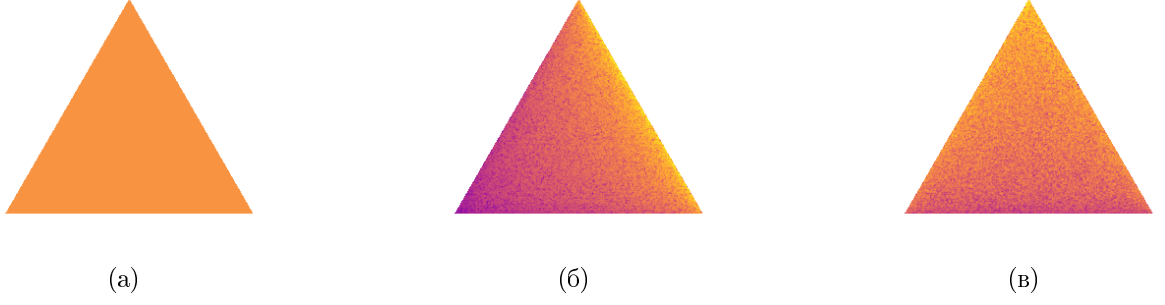


Рис. 1.5. Пример зависимости функции $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$ от гиперпараметра \mathbf{s} при различных значениях метапараметров $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$. Темные точки на графике соответствуют наименее предпочтительным значениям гиперпараметра. а) $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = [0, 0]$, б) $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = [1, 0]$, в) $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q = [1, 1]$.

эквивалентна оптимизации вариационной оценки обоснованности

$$\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\hat{\mathbf{y}}|\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$$

для произвольной случайной подвыборки $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{X}}$ мощности $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L}$ из генеральной совокупности.

Доказательство. Рассмотрим величину $\frac{1}{m}L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$:

$$\frac{1}{m}L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{m}\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{m}D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \quad (1.18)$$

При $m \gg 0$ по усиленному закону больших чисел данная функция эквивалентна:

$$\frac{1}{m}L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \approx \mathbb{E}_{y, \mathbf{x}}\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{m}D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})).$$

Аналогично рассмотрим вариационную оценку обоснованности для произвольной выборки мощностью $m_0 = \frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L}$, усредненную на мощность выборки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_0}\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{1}{m_0}D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) &\approx \\ &\approx \mathbb{E}_{y, \mathbf{x}}\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{1}{m_0}D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})||q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})) = \\ &= \mathbb{E}_{y, \mathbf{x}}\mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{m}D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Таким образом, задачи оптимизации функций (1.18), (1.19) совпадают, что и требовалось доказать. \square

Теорема показывает, что для достаточно большого m и $\lambda_{\text{prior}}^L > 0$, $\lambda_{\text{prior}}^L \neq 1$ оптимизация параметров и гиперпараметров эквивалентна нахождению оценки обоснованности для выборки другой мощности: чем выше значение λ_{prior}^L , тем выше мощность выборки, для которой проводится оптимизация.

Следующие теоремы говорят о соответствии предлагаемой обобщающей задачи вероятностной модели. В частности, задача оптимизации параметров и гиперпараметров соответствует двухуровневому байесовскому выводу.

Теорема 7. Пусть $\lambda_{\text{prior}}^Q = \lambda_{\text{prior}}^L = \lambda_{\text{likelihood}}^Q = 1$, $\lambda_{\text{struct}}^Q = \mathbf{0}$. Тогда:

1. Задача оптимизации (1.17) доставляет максимум апостериорной вероятности гиперпараметров с использованием вариационной оценки обоснованности:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \\ & + \log p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h}}. \end{aligned}$$

2. Вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})$ приближает апостериорное распределение $p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ наилучшим образом:

$$D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\theta}}.$$

3. Если существуют такие значения параметров $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}$, что $p(\mathbf{w} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w} | \Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$, $p(\Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) = q_{\Gamma}(\Gamma | \boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$, то решение задачи оптимизации $L(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ доставляет эти значения вариационных параметров.

Доказательство. Так как параметры $\boldsymbol{\theta}$ не зависят от слагаемых при коэффициентах $\lambda_{\text{struct}}^Q$, а также от $\log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda})$, то при $\lambda_{\text{likelihood}}^Q = \lambda_{\text{prior}}^L = 1$ как верхняя, так и нижняя задачи оптимизации (1.17) эквивалентны оптимизации вариационной оценки обоснованности, поэтому первое утверждение выполняется.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим логарифм обоснованности модели:

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} + D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) + \\ &+ D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Из данного равенства следует:

$$\begin{aligned} & \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = \\ & \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})), \end{aligned}$$

где правая часть равенства соответствует вариационной оценки обоснованности. Выражение $\log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ не зависит от вариационного распределения

$q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$, поэтому максимизации вариационной оценки эквивалентна минимизация дивергенции $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$.

Докажем третье утверждение. Т.к. вариационное распределение $q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ декомпозируется на $q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$, $q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$, апостериорное распределение $p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ декомпозируется на $p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, $p(\Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$, поэтому достижимо значение нулевое значение дивергенции: $D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = 0$. Она представима в следующем виде (1.6). Отсюда следует что соответствующие вариационные и апостериорные распределения совпадают. \square

Таким образом, предлагаемая обобщающая задача позволяет производить оптимизацию вариационной оценки обоснованности, а также оптимизацию обоснованности для выбор с другим эффективным размером. Чем больше размер выборки, тем больше влияние априорного распределения, которое выступает в качестве регуляризатора. Можно регулировать сложность модели следующим образом:

1. Калибруя верхнюю оптимизацию;
2. Калибруя нижнюю оптимизацию;
3. Калибруя обе оптимизации.

Последний вариант соответствует теореме о калибровке. Рассмотрим различие варианта 1 и 2 на примере.

Пример 3. Пусть задана модель и выборка и мы хотим уменьшить вес априорного распределения. В случае, если мы калибруем нижнюю оптимизацию ($-\rightarrow 0$), на первом уровне задача совпадает с задачей поиска наиболее правдоподобных параметров, при этом на верхнем уровне мы ищем те параметры, которые отвечают наилучшим с точки зрения обоснованности.

Если мы калибруем верхнюю оптимизацию или обе оптимизации, то это приведет к поиску наиболее правдоподобных параметров и гиперпараметров.

Таким образом, основная разница между калибровкой верхней и нижней оптимизации заключается в следующем: при калибровке нижнего уровня мы получаем модель, соответствующую критерию максимального правдоподобия. В случае калибровки верхнего уровня мы получаем модель с параметрами, полученными в соответствии с методом максимальной обоснованности, но при минимально возможной регуляризации априорным распределением.

Теорема 8. Пусть $\frac{\lambda_{\text{prior}}^Q}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} = \lambda_{\text{prior}}^L$. Тогда задача оптимизации (1.17) представима в виде одноуровневой задачи оптимизации:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})} p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) - \\ & - \sum_{p', \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q} D_{\text{KL}}(p(\Gamma|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})||p') - \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Т.к. выполнено равенство $\frac{\lambda_{\text{prior}}^Q}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} = \lambda_{\text{prior}}^L$, то нижняя задача оптимизации эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \end{aligned}$$

Параметры $\boldsymbol{\theta}$ вариационного распределения $q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})$ не зависят от слагаемых вида $\log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda})$ и $D_{\text{KL}}(p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) || p')$, $p' \in \mathbf{P}$, поэтому нижняя задача оптимизации эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta})} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \\ & - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \boldsymbol{\theta}) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})). \\ & - \sum_{p', \lambda \in \mathbf{P}, \boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q} D_{\text{KL}}(p(\Gamma | \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) || p') + \log p(\mathbf{h} | \boldsymbol{\lambda}) \rightarrow \max_{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

для любого вектора $\boldsymbol{\lambda}_{\text{struct}}^Q$.

а значит верхняя и нижняя задачи совпадают:

$$\mathbf{h} = \arg \max_{\mathbf{h}'} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}),$$

где

$$\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{h}') = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\mathbf{h}' | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Из свойства

$$\max_{\mathbf{h}} \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) = \max_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{h}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda})$$

следует доказательство теоремы. □

Список основных обозначений

- $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ — вектор признакового описания i -го объекта
 $y_i \in \mathbf{y}$ — метка i -го объекта
 \mathcal{D} — выборка
 $\mathbf{X} \subset \mathbb{X}$ — матрица, содержащая признаковое описание объектов выборки
 $\mathbf{y} \subset \mathbb{Y}$ — вектор меток объектов выборки
 m — количество объектов в выборке
 n — количество признаков в признаковом описании объекта
 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^m$ — признаковое пространство объектов
 \mathbb{Y} — множество меток объектов
 R — множество классов в задаче классификации
 (V, E) — граф со множеством вершин V и множеством ребер E
 $\mathbf{g}^{j,k}$ — вектор базовых функций для ребра (j, k)
 $K^{j,k}$ — мощность вектора базовых функций для ребра (j, k)
 agg_v — функция агрегации для вершины v
 $\gamma^{j,k}$ — структурный параметр для ребра (j, k)
 \mathfrak{F} — параметрическое семейство моделей
 U — область определения оптимизационной задачи
 $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ — параметры модели
 \mathbb{W} — пространство параметров модели
 $U_{\mathbf{w}} \subset \mathbb{W}$ — область определения параметров модели
 $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{\Gamma}$ — структура модели
 $\mathbb{\Gamma}$ — множество значений структуры модели
 $U_{\mathbf{\Gamma}} \subset \mathbb{\Gamma}$ — область определения параметров модели
 $\mathbf{h} \in \mathbb{H}$ — гиперпараметры модели
 \mathbb{H} — пространство гиперпараметров модели
 $U_{\mathbf{h}} \subset \mathbb{H}$ — область определения гиперпараметров
 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ — параметры вариационного распределения
 Θ — пространство параметров вариационного распределения
 $U_{\boldsymbol{\theta}} \subset \Theta$ — область определения вариационных параметров модели
 $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}} \in \Theta_{\mathbf{w}}$ — параметры вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $\Theta_{\mathbf{w}}$ — пространство параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}} \subset \Theta_{\mathbf{w}}$ — область определения параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение параметров модели
 $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}} \in \Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — параметры вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели
 $\Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — пространство параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели
 $U_{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{\Gamma}}} \subset \Theta_{\mathbf{\Gamma}}$ — область определения параметров вариационного распределения, аппроксимирующего апостериорное распределение структуры модели

$\lambda \in \Lambda$ — вектор метапараметров

Λ — пространство метапараметров

$U_\lambda \subset \Lambda$ — область определения метапараметров

$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma)$ — правдоподобие выборки

$p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение параметров и структуры модели

$p(\mathbf{h}|\lambda)$ — распределение гиперпараметров модели

$p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение структуры модели

$p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)$ — априорное распределение параметров модели

$p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение параметров и структуры модели

$p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \Gamma, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение структуры модели

$p(\Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — апостериорное распределение структуры модели

$p(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \lambda)$ — апостериорное распределение гиперпараметров

$p(y, \mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{x}, \mathbf{h})$ — вероятностная модель глубокого обучения

$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — обоснованность модели

$q(\mathbf{w}, \Gamma|\boldsymbol{\theta})$ — вариационное распределение параметров и структуры модели

$q_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}})$ — вариационное распределение структуры модели

$q_{\Gamma}(\Gamma|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma})$ — вариационное распределение параметров модели

$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$ — функция потерь

$Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, \lambda)$ — валидационная функция

$T(\boldsymbol{\theta}|L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda))$ — оператор оптимизации

\mathfrak{Q} — семейство вариационных распределений

S — энтропия распределения

M — множество моделей без общей параметризации

$D_{\text{KL}}(p_1||p_2)$ — дивергенция Кульбака-Лейблера между распределениями p_1 и p_2

\mathbf{A}^{-1} — матрица ковариаций параметров модели

\mathbf{s} — конкатенация параметров концентрации на структуре модели