

# Байесовский выбор субоптимальной структуры модели глубокого обучения

О. Ю. Бахтеев

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
05.13.17 — Теоретические основы информатики  
Научный руководитель: д.ф.-м.н. В.В. Стрижов

Московский физико-технический институт  
6 февраля 2020 г.

# Выбор структуры модели глубокого обучения

**Цель:** предложить метод выбора структуры модели глубокого обучения.

## Задачи

- 1 Предложить критерии оптимальной и субоптимальной сложности модели глубокого обучения.
- 2 Предложить алгоритм построения модели субоптимальной сложности и оптимизации параметров.

## Исследуемые проблемы

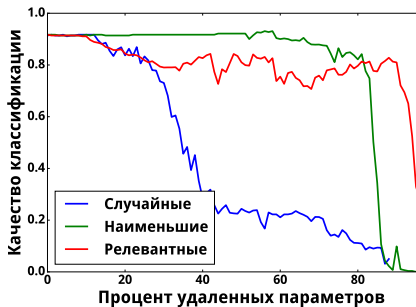
- 1 Большое число параметров и гиперпараметров модели, высокая вычислительная сложность оптимизации.
- 2 Многоэкстремальность и невыпуклость задачи оптимизации.

## Методы исследования

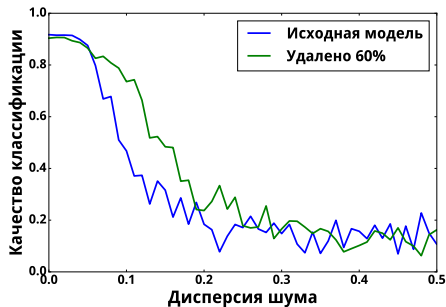
Рассматривается графовое представление нейронной сети. Используются методы вариационного байесовского вывода. Для получения модели субоптимальной сложности используется метод автоматического определения релевантности параметров с использованием градиентных методов оптимизации гиперпараметров и структурных параметров модели.

# Проблема выбора оптимальной структуры

Правдоподобие моделей с избыточным числом параметров значительно не меняется при их удалении.



Избыточность параметров модели



Устойчивость модели

Глубокое обучение предполагает оптимизацию моделей с заведомо избыточной сложностью.

# Модель глубокого обучения

## Определение

Моделью  $\mathbf{f}(\mathbf{w}, \mathbf{x})$  назовем дифференцируемую по параметрам  $\mathbf{w}$  функцию из множества признаков описаний объекта во множество меток:

$$\mathbf{f} : \mathbb{X} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Y},$$

где  $\mathbb{W}$  — пространство параметров функции  $\mathbf{f}$ .

**Особенность задачи** выбора модели *глубокого обучения* — значительное число параметров моделей приводит к неприменимости ряда методов оптимизации и выбора структуры модели (AIC, BIC, кросс-валидация).

Модель определяется параметрами  $\mathbf{W}$  и структурой  $\Gamma$ .

**Структура** задает набор суперпозиций, входящих в модель и выбирается согласно статистическим критериям сложности модели.

**Эмпирические оценки статистической сложности модели:**

- ① число параметров;
- ② число суперпозиций, из которых состоит модель.

# Выбор структуры: двуслойная нейросеть

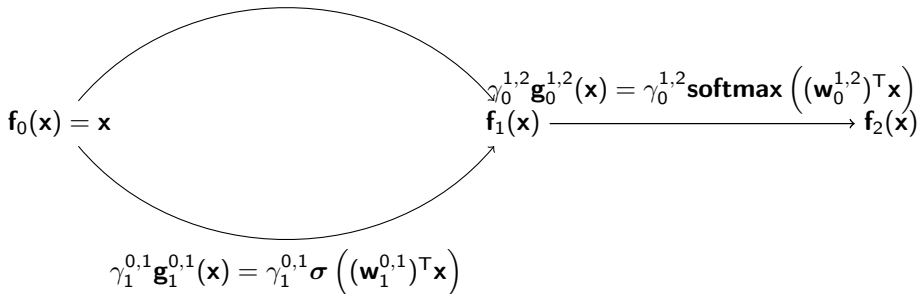
Модель  $\mathbf{f}$  задана структурой  $\Gamma = [\gamma^{0,1}, \gamma^{1,2}]$ .

Модель:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \text{softmax} \left( (\mathbf{w}_0^{1,2})^\top \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \right)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]^{|Y|}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \gamma_0^{0,1} \mathbf{g}_0^{0,1}(\mathbf{x}) + \gamma_1^{0,1} \mathbf{g}_1^{0,1}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_0^{0,1}, \mathbf{w}_1^{0,1}, \mathbf{w}_0^{1,2}]^\top$  — матрицы параметров,  $\{\mathbf{g}_0^{0,1}, \mathbf{g}_1^{0,1}, \mathbf{g}_0^{1,2}\}$  — обобщенно-линейные функции скрытых слоев нейросети.

$$\gamma_0^{0,1} \mathbf{g}_0^{0,1}(\mathbf{x}) = \gamma_0^{0,1} \sigma \left( (\mathbf{w}_0^{0,1})^\top \mathbf{x} \right)$$



# Графовое представление модели глубокого обучения

Заданы:

- 1 ациклический граф  $(V, E)$ ;
- 2 для каждого ребра  $(j, k) \in E$ : вектор базовых дифференцируемых функций  $\mathbf{g}^{j,k} = [\mathbf{g}_0^{j,k}, \dots, \mathbf{g}_{K^{j,k}}^{j,k}]$  мощности  $K^{j,k}$ ;
- 3 для каждой вершины  $v \in V$ : дифференцируемая функция агрегации  $\text{agg}_v$ .
- 4 Функция  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{|V|-1}$ , задаваемая по правилу

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \text{agg}_v \left( \{ \langle \gamma^{j,k}, \mathbf{g}^{j,k} \rangle \circ \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) \mid j \in \text{Adj}(v_k) \} \right), v \in \{1, \dots, |V|-1\}, \quad \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (1)$$

и являющаяся функцией из признакового пространства  $\mathbb{X}$  в пространство меток  $\mathbb{Y}$  при значениях векторов,  $\gamma^{j,k} \in [0, 1]^{K^{j,k}}$ .

## Определение

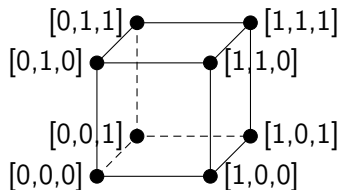
Граф  $(V, E)$  со множеством векторов базовых функций  $\{\mathbf{g}^{j,k}, (j, k) \in E\}$  и функций агрегаций  $\{\text{agg}_v, v \in V\}$  назовем *параметрическим семейством моделей*  $\mathfrak{F}$ .

## Утверждение

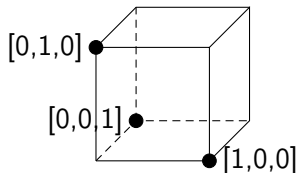
Для любого значения  $\gamma^{j,k} \in [0, 1]^{K^{j,k}}$  функция  $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}$  является моделью.

# Ограничения на структурные параметры

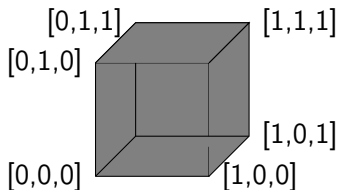
Примеры ограничений для одного структурного параметра  $\gamma$ ,  $|\gamma| = 3$ .



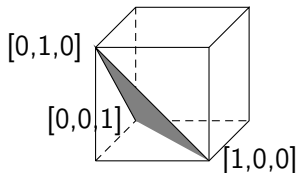
На вершинах куба



На вершинах симплекса



Внутри куба

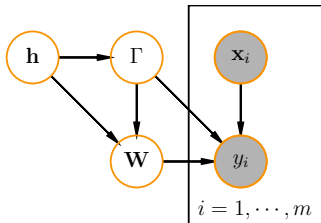


Внутри симплекса

# Априорное распределение параметров

## Определение

Априорным распределением параметров  $\mathbf{w}$  и структуры  $\Gamma$  модели  $\mathbf{f}$  назовем вероятностное распределение  $p(\mathbf{W}, \Gamma | \mathbf{h}, \lambda) : \mathbb{W} \times \mathbb{\Gamma} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , где  $\mathbb{W}$  — множество значений параметров модели,  $\mathbb{\Gamma}$  — множество значений структуры модели.



## Определение

Гиперпараметрами  $\mathbf{h} \in \mathbb{H}$  модели назовем параметры распределения  $p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \mathbf{f})$  (параметры распределения параметров модели  $\mathbf{f}$ ).

Модель  $\mathbf{f}$  задается следующими величинами:

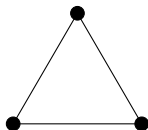
- **Параметры**  $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$  задают суперпозиции  $\mathbf{f}_v$ , из которых состоит модель  $\mathbf{f}$ .
- **Структурные параметры**  $\Gamma = \{\gamma^{j,k}\}_{(j,k) \in E} \in \mathbb{\Gamma}$  задают вклад суперпозиций  $\mathbf{f}_v$  в модель  $\mathbf{f}$ .
- **Гиперпараметры**  $\mathbf{h} \in \mathbb{H}$  задают распределение параметров и структурных параметров модели.
- **Метапараметры**  $\lambda \in \mathbb{A}$  задают вид оптимизации модели.



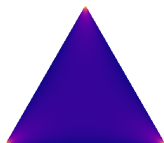
# Априорное распределение на структуре модели

Каждая точка на симплексе задает модель.

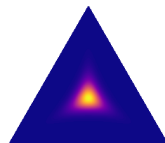
Распределение Гумбель-софтмакс:  $\Gamma \sim \text{GS}(\mathbf{s}, \lambda_{\text{temp}})$



$\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0$

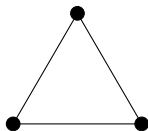


$\lambda_{\text{temp}} = 0.995$

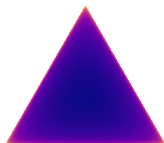


$\lambda_{\text{temp}} = 5.0$

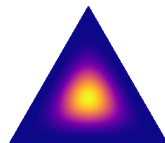
Распределение Дирихле:  $\Gamma \sim \text{Dir}(\mathbf{s}, \lambda_{\text{temp}})$



$\lambda_{\text{temp}} \rightarrow 0$



$\lambda_{\text{temp}} = 0.995$

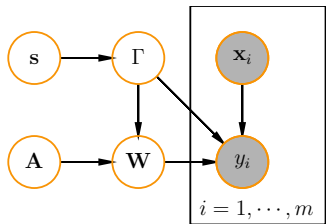


$\lambda_{\text{temp}} = 5.0$

# Байесовский выбор модели

## Базовая модель:

- параметры модели  
 $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \alpha^{-1})$ ,
- гиперпараметры модели  $\mathbf{h} = [\alpha]$ .



## Предлагаемая модель:

- параметры модели  
 $\mathbf{w}_r^{j,k} \sim \mathcal{N}(0, (\gamma_r^{j,k})^2 (\mathbf{A}_r^{j,k})^{-1})$ ,  $\mathbf{A}_r^{j,k}$  —  
диагональная матрица параметров,  
соответствующих базовых функций  
 $\mathbf{g}_r^{j,k}$ ,  
 $(\mathbf{A}_r^{j,k})^{-1} \sim \text{inv-gamma}(\lambda_1, \lambda_2)$ ,
- структурные параметры модели  
 $\Gamma = \{\gamma^{j,k}, (j, k) \in E\}$ ,  
 $\gamma^{j,k} \sim \text{GS}(\mathbf{s}^{j,k}, \lambda_{\text{temp}})$ ,
- гиперпараметры модели  
 $\mathbf{h} = [\text{diag}(\mathbf{A}), s]$ ,
- метапараметры  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\text{temp}}$ .

# Обоснованность как статистическая сложность

Статистическая сложность модели  $f$ :

$$\text{MDL}(\mathbf{y}, f) = -\log p(\mathbf{h}|\mathbf{f}) - \log p(\hat{\mathbf{w}}|\mathbf{h}, \mathbf{f}) - \log (p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{f})\delta\mathfrak{D}),$$

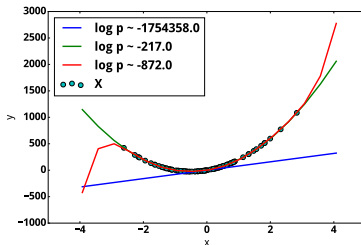
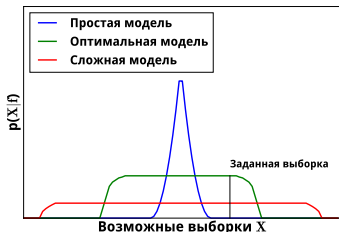
где  $\delta\mathfrak{D}$  — допустимая точность передачи информации о выборке  $\mathfrak{D}$ .

Оптимизация параметров  $\mathbf{w}$  производится согласно апостериорному распределению параметров:

$$L = \log p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) \propto \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) + \log p(\mathbf{w}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Оптимизация гиперпараметров производится в согласно апостериорному распределению гиперпараметров:

$$Q = \log p(\mathbf{f}|\mathbf{X}, \mathbf{y}) \propto \log p(\mathbf{h}|\boldsymbol{\lambda}) + \log \int p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) p(\mathbf{w}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{w}.$$



# Вариационная нижняя оценка обоснованности

Интеграл обоснованности невычислим аналитически.

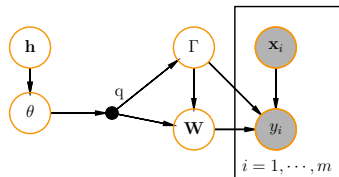
Обоснованность модели:

$$p(y|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) = \iint_{\mathbf{w}, \Gamma} p(y|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda) d\mathbf{w} d\Gamma.$$

## Определение

Вариационными параметрами модели  $\theta \in \Theta$  назовем параметры распределения  $q$ , приближающие апостериорное распределение параметров и структуры  $p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \lambda)$ :

$$q \approx \frac{p(y|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)}{\iint_{\mathbf{w}', \Gamma'} p(y|\mathbf{X}, \mathbf{w}', \Gamma') p(\mathbf{w}', \Gamma'|\mathbf{h}, \lambda) d\mathbf{w}' d\Gamma'}.$$



Получим нижнюю оценку  $\log \hat{p}(y|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$  интеграла

$$\log p(y|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) \geq E_q \log p(y|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma, \mathbf{h}, \lambda) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma) \| p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)).$$

Она совпадает с интегралом обоснованности при

$$D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma) \| p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \lambda, \mathbf{h})) = 0.$$

# Задача выбора модели

Зададим вариационное распределение  $q = q_w q_\Gamma$  с параметрами  $\theta$ , приближающие апостериорное распределение  $p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \lambda)$  параметров и структуры.

## Определение

*Функцией потерь*  $L(\theta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)$  назовем дифференцируемую функцию, качество модели на обучающей выборке при параметрах  $\theta$  распределения  $q$ .

*Функцией валидации*  $Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda)$  назовем дифференцируемую функцию, качество модели при векторе  $\theta$ , заданном неявно.

*Задачей выбора модели*  $\mathbf{f}$  назовем двухуровневую задачу оптимизации:

$$\mathbf{h}^* = \arg \max_{\mathbf{h} \in \mathbb{H}} Q(\mathbf{h} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta^*, \lambda),$$

где  $\theta^*$  — решение задачи оптимизации

$$\theta^* = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda).$$

# Обобщающая задача

Задачу выбора модели  $\mathbf{h}^*, \theta^*$  назовем обобщающей на множестве  $U_\theta \times U_h \times U_\lambda \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{H} \times \mathbb{A}$ , если выполнены условия:

- 1 Область параметров, гиперпараметров и метапараметров не является пустым или точкой.
- 2 Для каждого  $\mathbf{h} \in U_h$  и каждого  $\lambda \in U_\lambda$  решение  $\theta^*$  определено однозначно.
- 3 Критерий непрерывности:  $L, Q$  непрерывны по метапараметрам.
- 4 Критерий **перехода между структурами**: существует константа  $K_3 > 0$ , такая, что для произвольных локальных оптимумов  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  задачи оптимизации  $Q$ , полученных при метапараметрах  $\lambda$  и удовлетворяющих неравенствам

$$D_{\text{KL}}(p(\Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda)|p(\Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda)) > K_3, D_{\text{KL}}(p(\Gamma|\mathbf{h}_1, \lambda)|p(\Gamma|\mathbf{h}_2, \lambda)) > K_3,$$

$$Q(\mathbf{h}_1|\lambda) > Q(\mathbf{h}_2|\lambda),$$

существует значение метапараметров  $\lambda' \neq \lambda$ , такое, что

- 1 соответствие между вариационными параметрами  $\theta^*(\mathbf{h}_1), \theta^*(\mathbf{h}_2)$  сохраняется при  $\lambda'$ ,
- 2 выполняется неравенство  $Q(\mathbf{h}_1|\lambda') < Q(\mathbf{h}_2|\lambda')$ .

# Обобщающая задача

Задачу выбора модели  $\mathbf{h}^*, \theta^*$  назовем обобщающей на множестве  $U_\theta \times U_h \times U_\lambda \subset \mathbb{R}^u \times \mathbb{H} \times \mathbb{A}$ , если выполнены условия:

- ⑤ **Критерий максимизации правдоподобия выборки:** существует  $\lambda \in U_\lambda$  и  $K_1 \in \mathbb{R}_+$ , такие что для любых векторов гиперпараметров  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_h$ ,  $Q(\mathbf{h}_1) - Q(\mathbf{h}_2) > K_1$ : выполнено:  
$$E_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta^*(\mathbf{h}_1))} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) > E_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta^*(\mathbf{h}_2))} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma).$$
- ⑥ **Критерий минимизации параметрической сложности модели:** существует  $\lambda \in U_\lambda$  и  $K_2 \in \mathbb{R}_+$ , такие что для любых векторов гиперпараметров  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in U_h$ ,  $Q(\mathbf{h}_1) - Q(\mathbf{h}_2) > K_2$ , сложность первой модели меньше, чем второй.
- ⑦ **Критерий максимизации обоснованности модели:** существует значение гиперпараметров  $\lambda$ , такое что оптимизация задачи эквивалента оптимизации вариационной оценки обоснованности модели:  
$$\mathbf{h}^* \propto \arg \max E_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - D_{\text{KL}}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \lambda)) + \log p(\mathbf{h} | \lambda),$$

$$\theta^* = \arg \min D_{\text{KL}}(q | p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)).$$

# Анализ задач выбора моделей

## Теорема [Бахтеев, 2019]

Следующие задачи выбора модели не являются обобщающими:

- ① критерий максимума правдоподобия:  $\max_{\theta} E_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \theta, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f})$ ;
- ② критерий максимума апостериорной вероятности  $\max_{\theta} E_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \theta, \mathbf{f}) p(\theta|\mathbf{h}, \lambda_{\text{temp}})$ ;
- ③ метод максимума вариационной оценки обоснованности модели  $\max_{\mathbf{h}} \max_{\theta} E_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{f}) - D_{KL}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}) || p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}, \lambda_{\text{temp}})) + \log p(\mathbf{h}|\mathbf{f})$ ;
- ④ кросс-валидация  $\max_{\mathbf{h}} E_q \log p(\mathbf{y}_{\text{valid}}|\mathbf{X}_{\text{valid}}, \theta^*, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f})$ ,  
 $\theta^* = \arg \max_{\theta} E_q \log p(\mathbf{y}_{\text{train}}|\mathbf{X}_{\text{train}}, \theta, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) p(\theta|\mathbf{h})$ .
- ⑤ AIC:  $\max_{\theta} E_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \theta, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) - |\theta_i : D_{KL}(q(w_i) || p(w_i|\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \lambda)) < \lambda|$ ;
- ⑥ BIC:  
 $\max_{\theta} E_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \theta, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) - \frac{1}{2} \log(|\mathbb{W}| |\theta_i : D_{KL}(q(w_i) || p(w_i|\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}, \lambda)) < \lambda|$ ;
- ⑦ перебор структуры модели:  
 $\max \boldsymbol{\Gamma}' \max_{\theta} E_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \theta, \lambda_{\text{temp}}, \mathbf{f}) \mathbb{I}(q(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{p}'))$ , где  $\mathbf{p}'$  — распределение на структуре (метапараметр).



# Предлагаемая задача оптимизации

## Теорема [Бахтеев, 2018]

Тогда следующая задача является обобщающей:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^* &= \arg \max_{\mathbf{h}} Q = \\ &= \lambda_{\text{likelihood}}^Q \mathbb{E}_{q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta^*)} \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma, \mathbf{h}, \lambda) - \\ &\quad - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{KL}(q(\mathbf{w}, \Gamma | \theta^*) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \lambda)) - \\ &\quad - \sum_{p' \in \mathfrak{P}, \lambda \in \lambda_Q^{\text{struct}}} \lambda D_{KL}(p(\Gamma | \mathbf{h}, \lambda) | p') + \log p(\mathbf{h} | \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \theta^* &= \arg \max_{\theta} L = \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma, \mathbf{h}, \lambda) \\ &\quad - \lambda_{\text{prior}}^Q D_{KL}(q^*(\mathbf{w}, \Gamma) || p(\mathbf{w}, \Gamma | \mathbf{h}, \lambda)). \end{aligned}$$

Оптимизационная задача обобщает алгоритмы оптимизации: оптимизация правдоподобия и обоснованности, последовательное увеличение и снижение сложности модели, полный перебор структуры.



$$\lambda_{\text{struct}}^Q = [0; 0; 0].$$



$$\lambda_{\text{struct}}^Q = [1; 0; 0].$$



$$\lambda_{\text{struct}}^Q = [1; 1; 0].$$

# Адекватность задачи оптимизации

## Теорема, [Бахтеев, 2018]

Пусть задано параметрическое множество вариационных распределений:  $q(\theta)$ .

Пусть  $\lambda_{\text{likelihood}}^L = \lambda_{\text{prior}}^L = \lambda_{\text{prior}}^Q = 1, \lambda_{\text{struct}}^Q = 0$ . Тогда:

- 1 Предлагаемая задача оптимизации доставляет максимум апостериорной вероятности гиперпараметров с использованием вариационной оценки обоснованности:  
$$\log \hat{p}(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) + \log p(\mathbf{h}|\lambda) \rightarrow \max_{\mathbf{h}}.$$
- 2 Вариационное распределение  $q$  приближает апостериорное распределение  $p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda, \mathbf{f})$  наилучшим образом:  
$$D_{\text{KL}}(q||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda)) \rightarrow \min_{\theta}.$$

Пусть также распределение  $q$  декомпозируется на два независимых распределения для параметров  $\mathbf{w}$  и структуры  $\Gamma$  модели  $\mathbf{f}$ :

$$q = q_{\mathbf{w}} q_{\Gamma}, q_{\Gamma} \approx p(\Gamma|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda), q_{\mathbf{w}} \approx p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda).$$

Если существуют значения вариационных параметров, такие что  $q(\mathbf{w}) = p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \lambda)$ ,  $q(\Gamma) = p(\Gamma|\mathbf{h}, \lambda)$ , то решение задачи оптимизации для функции  $L$  доставляет эти значения.

# Оператор оптимизации

## Определение

Назовем *оператором оптимизации*  $T$  выбор вектора параметров  $\theta'$  по параметрам предыдущего шага  $\theta$ .

Оператор стохастического градиентного спуска:

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= T \circ T \circ \dots \circ T(\theta_0, \mathbf{h}) = T^\eta(\theta_0, \mathbf{h}), \quad \text{где } T(\theta, \mathbf{h}) = \\ &= \theta - \lambda_{lr} \nabla (-L(\theta, \mathbf{h})|_{\hat{\mathcal{D}}}),\end{aligned}$$

$\lambda_{lr}$  — длина шага градиентного спуска,  $\theta_0$  — начальное значение параметров  $\theta$ ,  $\hat{\mathcal{D}}$  — случайная подвыборка исходной выборки  $\mathcal{D}$ .

Перепишем итоговую задачу оптимизации:

$$\mathbf{h}' = T^\eta(Q, \mathbf{h}, T^\eta(L, \theta_0, \mathbf{h})),$$

где  $\theta_0$  — начальное значение  $\theta$ .

## Теорема, [Бахтеев, 2019]

Пусть  $\frac{\lambda_{\text{prior}}^Q}{\lambda_{\text{likelihood}}^Q} = \lambda_{\text{prior}}^L$ . Тогда задача оптимизации представима в виде одноуровневой задач.

# Нижняя вариационная оценка обоснованности на основе мультистарта

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) \geq E_{q(\mathbf{w})} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{h}, \lambda) - E_{q_{\mathbf{w}}}(-\log(q_{\mathbf{w}})).$$

## Теорема [Бахтеев, 2016]

Пусть  $L$  — функция потерь, градиент которой — непрерывно-дифференцируемая функция с константой Липшица  $C$ .

Пусть  $\theta = [\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k]$  — начальные приближения оптимизации модели,  $\lambda_{lr}$  — шаг градиентного спуска.

Тогда разность энтропий на смежных шагах оптимизации приближается следующим образом:

$$E_{q_{\mathbf{w}}^{\tau}}(-\log(q_{\mathbf{w}}^{\tau})) - E_{q_{\mathbf{w}}^{\tau-1}}(-\log(q_{\mathbf{w}}^{\tau-1})) \approx \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k (\lambda_{lr} \text{Tr}[\mathbf{H}(\mathbf{w}^r)] - \lambda_{lr}^2 \text{Tr}[\mathbf{H}(\mathbf{w}^r)\mathbf{H}(\mathbf{w}^r)]),$$

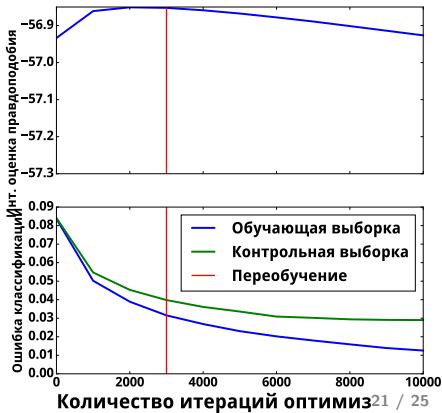
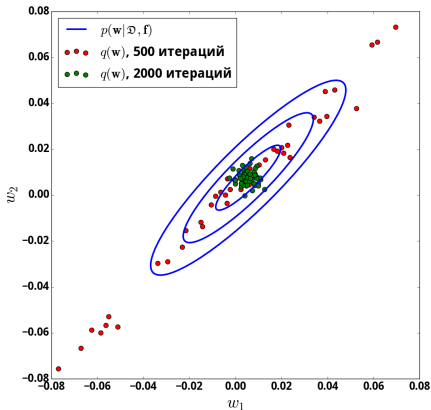
где  $\mathbf{H}$  — гессиан минус функции потерь  $-L$ ,  $q_{\mathbf{w}}^{\tau}$  — распределение  $q_{\mathbf{w}}^{\tau}$  в момент оптимизации  $\tau$ .

# Градиентный спуск как вариационная оценка обоснованности модели

Эмпирическое распределение на точках старта оптимизации — вариационное распределение.

Градиентный спуск не оптимизирует оценку обоснованности.

Снижение вариационной оценки обоснованности — начало переобучения.



# Анализ обобщающей задачи оптимизации

## Теорема, [Бахтеев, 2018]

Пусть  $\lambda_{\text{prior}}^L > 0$ ,  $m \gg 0$ ,  $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L} \in \mathbb{N}$ . Тогда оптимизация функции

$$L = E_q \log p(y|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \Gamma) - \lambda_{\text{prior}}^L D_{KL}(q||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda))$$

эквивалентна минимизации  $E_{\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{y}} \sim p(\mathbf{x}, y)} D_{KL}(q||p(\mathbf{w}, \Gamma|\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{h}, \lambda))$ , где  $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{y}}$  — случайные подвыборки мощностью  $\frac{m}{\lambda_{\text{prior}}^L}$  из генеральной совокупности.

## Определение

Параметрической сложностью модели назовем минимальную дивергенцию между априорным и вариационным распределением:

$$C_p = \min_{\mathbf{h}} D_{KL}(q||p(\mathbf{w}, \Gamma|\mathbf{h}, \lambda)).$$

## Теорема, [Бахтеев, 2018]

Пусть  $\lambda_{\text{struct}}^Q = 0$ . Пусть  $\theta_1, \theta_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  — результаты оптимизации при разных значениях гиперпараметров  $\lambda_{\text{prior}_1}^Q, \lambda_{\text{prior}_2}^Q, \lambda_{\text{prior}_1}^Q > \lambda_{\text{prior}_2}^Q$  на компакте  $U$ . Пусть функция  $Q(\mathbf{h}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \theta, \lambda)$  является вогнутой на  $U$  при  $\lambda_{\text{prior}_2}^Q$ . Тогда:

$$C_p(\theta_1|U_{\mathbf{h}}, \lambda_1) - C_p(\theta_2|U_{\mathbf{h}}, \lambda_2) < \frac{\lambda_{\text{prior}}^L}{\lambda_{\text{prior}_2}^Q} (\lambda_{\text{prior}_2}^Q - \lambda_{\text{prior}}^L) C,$$

где  $C$  — некоторая константа.

# Анализ параметрической сложности

## Определение

Относительной вариационной плотностью назовем отношение:

$$\rho(w|\Gamma, \theta_w, h, \lambda) = \frac{q_w(\text{mode } p(w|\Gamma, h, \lambda))}{q_w(\text{mode } q_w)}.$$

## Теорема, [Бахтеев, 2018]

Пусть заданы компактные множества  $U_h \subset \mathbb{H}$ ,  $U_{\theta_w} \subset \Theta_w$ ,  $U_{\theta_\Gamma} \subset \Theta_\Gamma$ , вариационное и априорное распределение  $q_w(w|\Gamma, \theta_w)$ ,  $p(w|\Gamma, h, \lambda)$  являются абсолютно непрерывным и унимодальным на  $U_\theta$  с совпадающей модой и матожиданием. Пусть мода и матожидание априорного распределения не зависят от гиперпараметров  $h$  и структуры  $\Gamma$ .

Пусть задана бесконечная последовательность векторов вариационных параметров  $\theta[1], \theta[2], \dots, \theta[i], \dots \in U_\theta$ , такая, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} C_p(\theta[i]|U_h, \lambda) = 0$ . Тогда:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_{q_\Gamma(\Gamma|\theta_\Gamma[i])} \rho(w|\Gamma, \theta_w[i], h[i], \lambda)^{-1} = 1, h[i] = \arg \min D_{KL}(q(w, \Gamma|\theta_i) || p(w, \Gamma|h, \lambda)).$$

# Результаты, выносимые на защиту

- ① Предложен метод байесовского выбора субоптимальной структуры модели глубокого обучения с использованием автоматического определения релевантности параметров.
- ② Предложены критерии оптимальной и субоптимальной сложности модели глубокого обучения.
- ③ Предложен метод графового описания моделей глубокого обучения.
- ④ Предложено обобщение задачи оптимизации структуры модели, включающее ранее описанные методы выбора модели:
  - ▶ оптимизация обоснованности;
  - ▶ последовательное увеличение сложности модели;
  - ▶ последовательное снижение сложности модели;
  - ▶ полный перебор вариантов структуры модели.
- ⑤ Предложен метод оптимизации вариационной оценки обоснованности на основе мултистарта оптимизации модели.
- ⑥ Предложен алгоритм оптимизации параметров, гиперпараметров и структурных параметров моделей глубокого обучения.
- ⑦ Исследованы свойства оптимизационной задачи при различных значениях метапараметров. Рассмотрены ее асимптотические свойства.



# Список работ автора по теме диссертации

## Публикации ВАК

- 1 Bakhteev, O., Kuznetsova, R., Romanov, A. and Khritankov, A. A monolingual approach to detection of text reuse in Russian-English collection // In 2015 Artificial Intelligence and Natural Language and Information Extraction, Social Media and Web Search FRUCT Conference (AINL-ISMW FRUCT) (pp. 3-10). IEEE. 2015.
- 2 Бахтеев О.Ю., Попова М.С., Стрижов В.В. Системы и средства глубокого обучения в задачах классификации // Системы и средства информатики. 2016. № 26.2. С. 4-22.
- 3 Romanov, A., Kuznetsova, R., Bakhteev, O. and Khritankov, A. Machine-Translated Text Detection in a Collection of Russian Scientific Papers. // Computational Linguistics and Intellectual Technologies. 2016.
- 4 Bakhteev, O. and Khazov, A., Author Masking using Sequence-to-Sequence Models // In CLEF (Working Notes). 2017.
- 5 Бахтеев О.Ю., Стрижов В.В. Выбор моделей глубокого обучения субоптимальной сложности // Автоматика и телемеханика. 2018. №8. С. 129-147.
- 6 Огальцов А.В., Бахтеев О.Ю. Автоматическое извлечение метаданных из научных PDF-документов // Информатика и её применения. 2018.
- 7 Смердов А.Н., Бахтеев О.Ю., Стрижов В.В. Выбор оптимальной модели рекуррентной сети в задачах поиска парафраза // Информатика и ее применения. 2019.
- 8 Грабовой А.В., Бахтеев О.Ю., Стрижов В.В. Определение релевантности параметров нейросети // Информатика и её применения. 2019.
- 9 Bakhteev O., Strijov V. Comprehensive analysis of gradient-based hyperparameter optimization algorithms // Annals of Operations Research. 2019.

## Выступления с докладом

- 1 "Восстановление панельной матрицы и ранжирующей модели в разнородных шкалах", Всероссийская конференция «57-я научная конференция МФТИ», 2014.
- 2 "Выбор модели глубокого обучения субоптимальной сложности с использованием вариационной оценки правдоподобия", Международная конференция «Интеллектуализация обработки информации», 2016.
- 3 "Градиентные методы оптимизации гиперпараметров моделей глубокого обучения", Всероссийская конференция «Математические методы распознавания образов ММРО», 2017.
- 4 "Детектирование переводных заимствований в текстах научных статей из журналов, входящих в РИНЦ", Всероссийская конференция «Математические методы распознавания образов ММРО», 2017.
- 5 "Байесовский выбор наиболее правдоподобной структуры модели глубокого обучения", Международная конференция «Интеллектуализация обработки информации», 2018.