بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان المفتوحة

برنامج التربية

الجبر الخطي

رمز المقرر ورقمه: ريض **2030**

المؤلف:

بروفيسور . عبد الرحمن محمّد سعيد

التصميم التعليمي:

أ .عبد الباسط محمّد شريف محمّد

مراجعة:

أ . محمّد حسن الزبير

التصميم الفني:

أسعد جلال الدين محمّد بشير

منشورات جامعة السودان المفتوحة، الطبعة الثانية 2006

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة المقرر

الحمد لله ، الذي خلق الإنسان ، علم البيان ، وله الحمد أن رفع الذين آمنوا والذين أوتوا العلم درجات.

والصلاة والسلام على رسول الله المبعوث معلماً للناس أجمعين ، ورضي الله عن صحابته أجمعين ، ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين.

وبعد ، فقد كان لتطور علم الجبر أثر بعيد في تطوير فروع أخرى في الرياضيات ، مثل التحليل الرِّياضي ، والتبولوجيا. كما أدى الاهتمام المضطرد بالجبر في الآونة الأخيرة إلى اكتشاف صلات جديدة بين الجبر والفروع العلمية الأخرى ، مثل الفيزياء والكيمياء.

ويحوي هذا الكتاب بعض الموضوعات التي تعتبر أساسية في الجبر الخطي ، حيث يغطي الملاح الرئيسة للمتجهات وأنظمة المعادلات الخطية والمصفوفات والفضاءات الاتجاهية والفضاءات الاتجاهية الجزئية.

هنيئا لك عزيزي الدَّارس بهذا المقرر، وأنا واثق من أنك ستجده ممتعا ومفيدا، وسأوجز لك فيما يلي أهم الأهداف العامة منه.

الأهداف العامة لهذا المقرر

بعد فراغك من دراسة هذا المقرر ينبغي أن تكون قادراً على أن:

- **تجري** العمليات الجبرية على المتجهات.
- **تعطي أمثلة** لعمليتي الجمع والضرب بعدد في الفضاء R^n .
- **تعرف** المعادلة الخطية.
- **تعطي أمثلة** لبعض أنواع المصفوفات.
- **تشرح بالأمثلة** المنطلقات الثمانية للفضاء الاتجاهي.
- **تجري** العمليات الجبرية على المصفوفات ونظم المعادلات الخطية.
- **تعرف** الفضاء الاتجاهي والفضاء الجزئي اتجاهي.

عزيزي الدَّارس نعرض في هذا الكتاب بعض الموضوعات التي تعتبر أساسية في الجبر الخطي ، ولتحقيق أهداف هذا المقرر فقد وزعت هذه الموضوعات على أربع وحدات ، تعالج الوحدة الأولى موضوع المتجهات والمفاهيم المتعلقة به ، ولهذا الموضوع أهمية كبيرة ، فهو أداة لا غنى عنها لدراسة الرياضيات في ثوبها المعاصر الجديد ، أما الوحدة الثانية فقد عالجت موضوع أنظمة المعادلات الخطية والطرق المنتظمة لحل هذه الأنظمة ،وتناولت الوحدة الثالثة موضوع المصفوفات ، من حيث أنواعها والعمليات الجبرية المعرَّفة عليها ، الوحدة الرابعة عالجت موضوع الفضاءات الاتجاهية والفضاءات الاتجاهية الجزئية ، حيث تناولت ثمانية منطلقات تسمى بديهيات الفضاءات الاتجاهية (الخطية) ، تتعلق الأربع الأول منها بعملية الجمع بينما تتعلق الأربع الأخيرة بعملية الضرب بعدد.

عزيزي الدَّارس ، دعماً للأفكار الواردة في هذا المقرر أوردنا كماً كبيراً من الأمثلة المحلولة يساندها أسئلة التقويم الذاتي والتدريبات والتي نأمل أن تحظى بالاهتمام لان محاولة حل هذه التدريبات والأسئلة يزيد من الاستيعاب والإدراك الصحيح والسليم للمفاهيم الرياضية المعروضة في هذا الكتاب .

ونؤكد لك عزيزي الدَّارس أن جهدك الذي تبذله في حل الأمثلة وأسئلة التقويم الذاتي والتدريبات وحضور اللقاءات الأكاديمية سيثمر فهماً عميقاً للمفاهيم الواردة في هذا المقرر مما يمكن لك مستقبلاً فهم بقية المقررات التي تعتمد على هذا المنهج.

وستدعمك جامعتك "جامعة السودان المفتوحة" بالإشراف الأكاديمي والإرشاد، وبالعديد من الوسائط المساندة من أجل تجاوز أي عقبات في هذا المقرر.

أرجو أن توفق في دراستك لهذا المقرر، وأن تساهم معنا في نقده وتطويره.

وفيما يلي قائمة بعناوين الوحدات الواردة في هذا المقرر مع أرقام صفحاتها.

محتويات المقرر

رقم الوحدة	اسم الوحدة	الصفحة
1	المتجهات	**1**
2	أنظمة المعادلات الخطية	**81**
3	المصفوفات	**117**
4	الفضاءات الاتجاهيةوالفضاءات الاتجاهية الجزئية	**193**

الوحدة الأولى

المتجهات

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**3**
تمهيد	3
الأهداف	4
1. المتجهات في المستوى	**5**
1.1 جبر وقوانين المتجهات	7
2.1 الاعتماد و الاستقلال الخطي للمتجهات	27
2. حاصل الضرب القياسي (مضروب النقطة)	**28**
1.2 إسقاط متجه على آخر	35
2.2 العمل كحاصل ضرب نقطة	37
3. المتجهات في الفضاء	**39**
1.3 حاصل ضرب النقطة	42
2.3 زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه	44
4. المتجهات في الفضاء R^n	**46**
1.4 جمع المتجهات وضربها بقياسيات	47
5. المتجهات في الفضاء المركب c^n	**58**
الخلاصة	**65**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**66**
إجابات التدريبات	**67**
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	**75**
مسرد المصطلحات	**79**
المراجع	**80**

المقدمة

تمهيد

مرحباً بك عزيزى الدَّارس الى الوحدة الأُولى من مقرر الجبر الخَطِّي والذى يعالج موضوع المتجهات و أهم المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتجهات في المستوى والفراغ والى طريقة جمع المتجهات وضربها بأعداد إلى أهم الخصائص التي تتمتع بها عمليتا الجمع والضرب ، ويذهب بك القسم بعد ذلك إلى الاعتماد والاستقلال للمتجهات كل هذه الموضوعات وغيرها سبق شرحها في القسم الأول من الوحدة.في القسم الثاني من هذه الوحدة نتناول حاصل الضرب القياسي (مضروب النقطة) الذي ينشأ في مسائل هندسية أو فيزيائية، وسوف نقوم بشرح كيفية إسقاط متجه على أخر، والعمل كحاصل ضرب نقطة.

في القسم الثالث سنذهب بعيداً إلى الفضاء حيث المتجهات في الفضاء أي توسيع مفهوم المتجه ليكون في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد بدلاً من البعدين فيه، وسنعرف حاصل ضرب النقطة أو حاصل الضرب القياسي، وسنتعرف أيضاً على زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه.

القسم الرَّابع من هذه الوحدة يتناول المتجهات في الفضاء R^n وفيه نعالج جمع المتجهات وضربها بقياسات ، مضروب النقطة ، خصائص مضروب النقطة الأَساسية في R^n ، وسنقوم ببرهان بعض النظريات، في القسم الأخير(الخامس) من الوحدة سنتعرف على المتجهات في الفضاء المركّب C^n وفيه نتعرف على الحقل وهو النظام الجبري الذي يشبه نظام الأَعداد الحقيقية ح في خصائص الضرب والجمع وغيرهما.

تجد في متن الوحدة عزيزي الدَّارس أسئلة التقويم الذاتي ، وتدريبات ، وأمثلة مع حلولها.

أهداف الوحدة

عزيزي الدَّارس بعد فراغك من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على أن :

- **تُعرِّف بالأمثلة** المتجهات في المستوى.
- **تجري** العمليات الجبرية على المتجهات.
- **تَعْرِف** الخواص الأساسية للعمليات الجبرية على المتجهات.
- **تجري** بعض التطبيقات على حاصل الضرب لقياس بعض المسائل الهندسية والفيزيائية.
- **تعدد** خصائص مضروب النقطة الأساسية في R^n.
- **تعرف** الفضاء R^n وتمثل عمليتى الجمع والضرب بعدد في الفضاءات R^2 R^3.
- **تَعْرِف** الفضاء الأقليدي النوني.
- **تُعْطِي أمثلة** للمتجهات في الفضاء المركب C^n.

1. المتجهات في المستوى

في مجالات العلوم والتكنولوجيا نُميز بين نوعين من الكميات: القياسيات والمتجهات. القياسيات هي كميات يكمن وصفها بإعطاء عدد واحد (مع وحدة قياس مناسبة). مثلاً ضغط غاز محصور، ارتفاع طائرة، درجة حرارة جسم ما أو الزمن الذي تستغرقه عملية ما. هذه كلها قياسيات. أما المتجهات فنحتاج لوصفها ليس فقط لعدد، يسمي مقدارها، وإنما أيضاً لإعطاء اتجاهها. مثلاً سرعة الرياح في محطة مراقبة أو موضع هدف بالنسبة لمدفع أو القوة التي تعمل على اليكترون في مجال مغناطيسي في هذه الحالات لابد من إعطاء الاتجاه إلى جانب المقدار لوصف هذه الكميات.

➢ **تعريف المتجهات**

المتجه هو كمية لها مقدار واتجاه مثل السرعة ، التسارع ،...الخ.

نرمز للمتجهات بحروف لاتينية سميكة:

......, v, u, c, b, a

وهذه تفضل في الطباعة، ولكن في الكتابة بخط اليد تفضل حروف لاتينية صغيرة مع أسهم فوقها مثل:

$$......,\ \vec{v},\vec{u},\vec{c},\vec{b},\vec{a}$$

المتجه المقيد $\overrightarrow{AB}$ هو قطعة مستقيمة موجهة بدايتها A ونهايتها B .

نسمي النقطة A مبدأ المتجه والنقطة B منتهاه ، ونسمي المسافة بين النقطتين B, A طول المتَّجه ، أما المستقيم الذي تقع عليه القطعة المستقيمة AB فنسميه حامل المتجه.

وفي هذه الحالة نرمز للمتجه أيضاً بالرمز $\overrightarrow{AB}$ ولذلك فإن $a = \overrightarrow{AB}$ وترتيب الحروف مهم هنا، حيث أن $\overrightarrow{BA}$ سيكون متجهاً آخر. ونرمز لمقدار المتجه بالحرف اللاتيني العادي مثلاً a أو الحرف اللاتيني السميك مع خطين عموديين حوله مثل $|\boldsymbol{a}|$ أو كذلك بالرمز $\overrightarrow{AB}$ مع خطين عموديين حوله كالآتي:

$$a = |a| = |\overrightarrow{AB}|$$

➢ تعريف القياسات

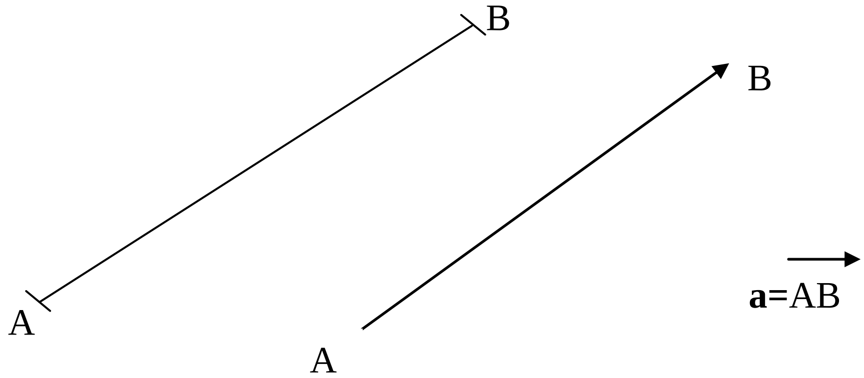
كميه لها مقدار وليس لها اتجاه ، مثل الحجم ، الكثافة ، ...الخ.

نرمز للقياسات بحروف لاتينية عادية بدون أسهم.

لتمثيل المتجهات هندسياً نستعمل أسهم في المستوى تعطي الاتجاه بينما يعطي طولها مقدار المتجه. كل متجه له نقطة بداية ونقطة نهاية نرمز لهما بحروف كبيرة مثل A و B و C مثلاً:

إذا نظرنا في القطعة المستقيمة AB ، فإننا نلاحظ أن لهذه القطعة طرفين هما A,B أو القطعة AB أو BA دون تمييز فمن الممكن أن نبدأ بهذا الطَّرف أو ذاك شكل 1(a).

أما إذا اخترنا أحد الطرفين بداية للقطعة ، وبالتالي يكون الطرف الأخر نهاية لها ، فإننا نقول في هذه الحالة عن القطعة المستقيمة أنها قطعة مستقيمة موجهة ، فإذا اخترنا الطرف A بداية للقطعة فإننا نرمز لها بالرمز $\overrightarrow{AB}$ الشكل 1(b) .



الشكل 1(a)

الشكل 1(b)

أسئلة التقويم الذاتي (1)

؟

ميز المتجه من غير المتجه فيما يلي:

(أ) المساحة (ب) درجة الحرارة

(ج) العزم (د) الإزاحة

(هـ) الطاقة (و) المجال المغناطيسي

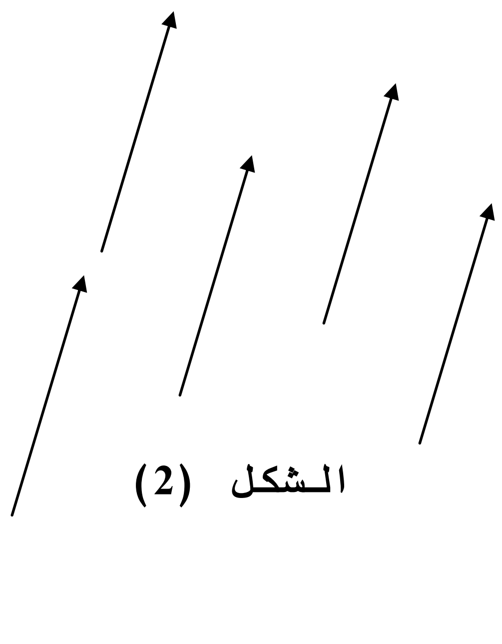
(ح) القوة (ز) المسافة

(ط) المجال الكهربي

1.1 جبر وقوانين المتجهات

(أ) نعتبر أي متجهين متساويين إذا كانا متوازيين أو في نفس الاستقامة ويشيرأن في نفس الاتجاه ولهما نفس المقدار. لكن المساواة هنا لا تعني التطابق مثلما لا تعني مساواة الكسرين $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{4}$ تطابقهما.

مثال

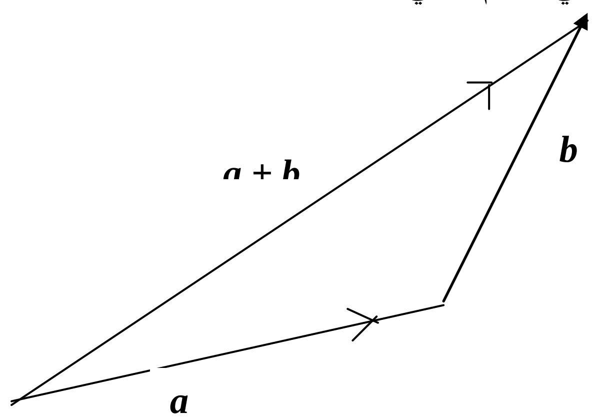


الشكل (2)

المتجهات الخمس في الشكل (2) كلها متساوية.

(ب) يعرف مجموع متجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ ويكتب $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ كالتالي :

هو المتجه الذي نحصل عليه بوضع نقطة بداية $\boldsymbol{b}$ عند نقطة نهاية $\boldsymbol{a}$ وتوصيل بداية $\boldsymbol{a}$ مع نهاية $\boldsymbol{b}$ كما في الرسم التالي :

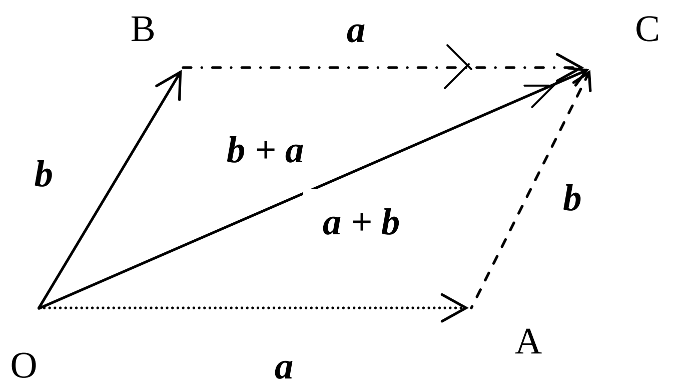


الـشكل (3)

هذا الجمع يعرف عادة ب" قانون متوازي الأضلاع " الذي يرد عادة في الفيزياء الأولية حيث يستعمل لإيجاد " الناتج " (Resultant) من إزاحتين أو سرعتين أو قوتين ، ....إلخ. وفي الواقع إذا رسمنا $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ من نقطة بداية مشتركة كما في الرسم أدناه ثم كونّا متوازي الأضلاع OACB المكون من $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ فإن $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ سيكون هو القطر OC من متوازي الأضلاع . فمن نفس الشكل نستطيع أن نقرأ أن:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$



الـشكل (4)

هاتان الصيغتان يعنيان أن:

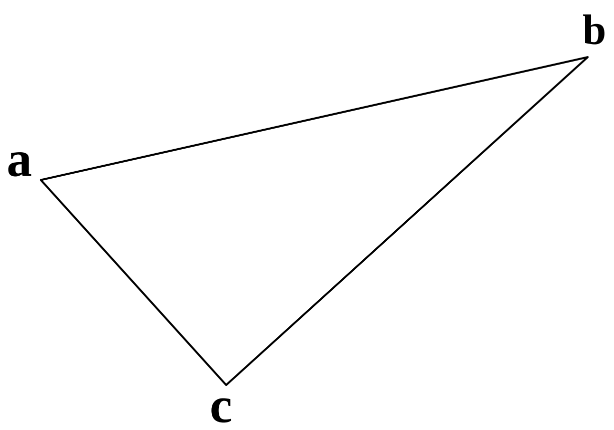
(ج) $\qquad$ (1) $\qquad$ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

وهو قانون التبديل للجمع. ويلاحظ الدَّارس أننا رسمنا $\boldsymbol{b}$ بنقاط متقطعة من A إلى C موازياً للمتجه $\boldsymbol{b}$ (الممثل بخط متصل من O إلى B) لتلتحم بدايته مع نهاية $\boldsymbol{a}$ وذلك لأننا حسب التعريف نستطيع أن نضع $\boldsymbol{b}$ في أي مكان في المستوى بشرط أن يكون بنفس الطول والاتجاه. بهذه الطريقة نستطيع أن نوصل القطر من O إلى C الذي يقفل المثلث OAC وبالتالي يكون حسب التعريف هو $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. كذلك فعلنا نفس الشيء بالمتجه $\boldsymbol{a}$ حيث رسمناه مرة أخرى بخط متقطع من B إلي C موازياً للمتجه $\boldsymbol{a}$ (الممثل بخط متصل من O إلى A) وجعلناه مبتدئاً من نهاية $\boldsymbol{b}$. بعد ذلك نوصل القطر من O إلى C ليكون هو $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (بهذا الترتيب). ولذلك يكون نفس المتجه OC هو مرة $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ومرة $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ مما يبرهن المعادلة (1).

تدريب (1)

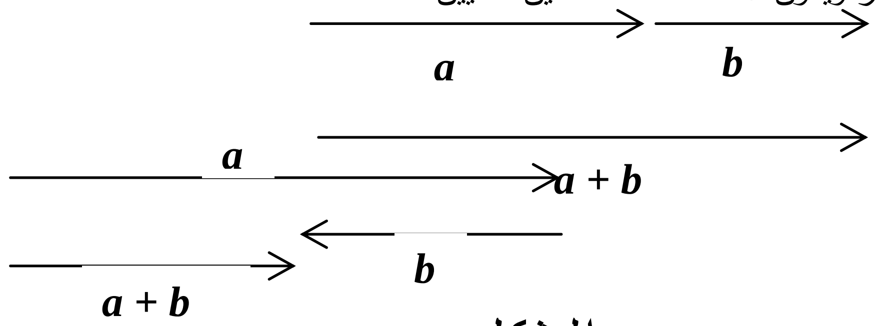
من الشكل الذي أمامك :

أثبت أن : $\vec{bc} + \vec{ca} + \vec{ab} = 0$



➢ **ملاحظة**

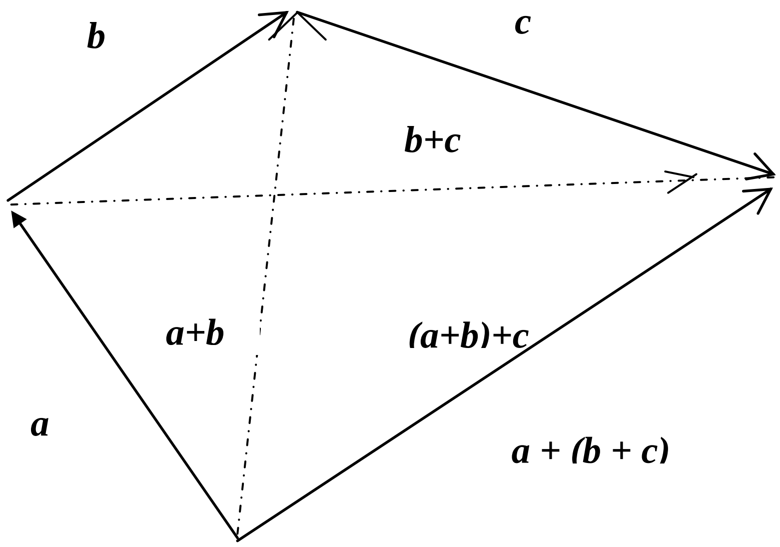
في الشكل (3)، الذي يعرف الجمع، إذا كان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ متوازيين أو في إستقامة واحدة، فإن المثلث ينهار ويكون $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ أحد الشكلين الآتيين:



الـشكل

أي $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ هو إما المتجه في نفس الاتجاه ومقداره مجموع مقادير $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ إذا كان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ لهما نفس الاتجاه. أو $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ هو المتجه الذي يشير في اتجاه الأكبر من $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ ومقداره هو فرق المقادير إذا كانا في اتجاهين متعاكسين.

كما يتضح من الشكل (6) نستطيع أن نكون مجموع ثلاثة متجهات $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$ بطريقتين:



الـشكل (6)

إما أن نرسم $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (متقطع) بأن نوصل الوتر في المثلث ذي الأضلاع $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$. ثم نعمد إلى المثلث الذي أضلاعه $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$ فنقفله بالضلع الثالث ليكون $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ ، لكننا أيضاً نستطيع أن نُكوِّن $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ بأن نوصل الوتر في المثلث ذي الأضلاع $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$ (مُتَقطِّع) ثم نجمع $\boldsymbol{a}$ مع $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ فيكون هو الضلع الأخير في الشكل ويساوي $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ ، ولذلك يكون الضلع الأخير هو مرة $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ ومرة $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ ونكون قد برهنا أن :

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \qquad (2) \qquad \textbf{(د)}$$

وهو قانون التجميع أي أننا نستطيع أن نجمع $\boldsymbol{a}$ إلى $\boldsymbol{b}$ ثم نضيف إلى ذلك $\boldsymbol{c}$ أو أن نضيف $\boldsymbol{a}$ إلى مجموع $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$. بكلمات أخرى نستطيع أن نضع الأقواس إما على الاثنين الأوائل أو الاثنين الأواخر.

من (1) و (2) يتضح أن جمع ثلاثة متجهات لا يعتمد على ترتيب هذه المتجهات أو الطريقة التي نضمها بها إلى بعضها . كذلك بتطبيق (1) و (2) مراراً نجد أن جمع أربعة متجهات يمكن أن يكون بأي من الأشكال الآتية:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=[(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}]+\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{d}$$

أو أي ترتيب وتجميع آخر

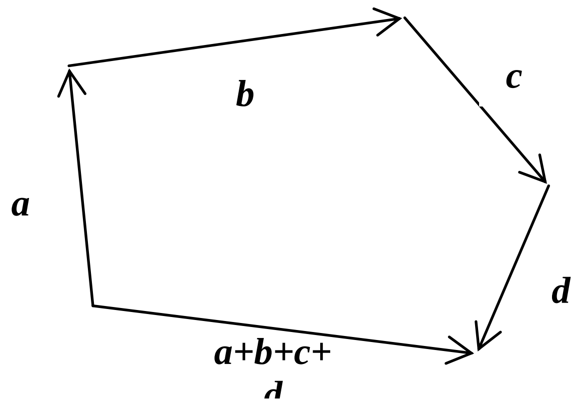
بالنظر إلى الشكل (3) نرى أن أضلاع المثلث هي $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ وكما نعلم من الهندسة الأولية فإن أي ضلع لا يمكن أن يكون أطول من مجموع الضلعين الآخرين وهذه الحقيقة تعطينا ما يسمى بمتباينة المثلث:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

وذلك لأي متجهات $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ ويعني هنا الخطان العموديان حول المتجه ما يسمى بمقدار المتجه وهو طول المتجه. أما إذا كان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ في استقامة واحدة ، فهذه هي الحالة الخاصة التي تعني بالقياسيات وهي التي أوردناها في الشكل (5) والتعليق عليها وهي إما مجموع أو مطروح مقداري المتجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$.

مثال

في الشكل (7) يعني المجموع $\boldsymbol{a+b+c+d}$ المتجه الذي يقفل الرباعي ونحصل عليه بوضع بداية $\boldsymbol{b}$ عند نهاية $\boldsymbol{a}$ وبداية $\boldsymbol{c}$ عند نهاية $\boldsymbol{b}$ وبداية $\boldsymbol{d}$ عند نهاية $\boldsymbol{c}$ فيكون $\boldsymbol{a+b+c+d}$ هو المتجه الموصل من بداية $\boldsymbol{a}$ إلى نهاية $\boldsymbol{d}$.



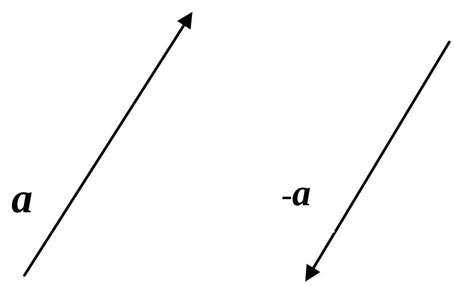
الـشكـل (7)

(هـ) المتجه الصِّفري ونرمز له بالحرف **0** (صفر سميك) هو" المتجه " الذي تتطابق نقطة بدايته مع نقطة نهايته وليس له اتجاه. بكلمات أخرى هو المتجه الذي يكون مقداره صفراً ولا اتجاه له. وهو يلعب مع المتجهات نفس الدور الذي يلعبه الصفر مع الأعداد أي:

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$$

وذلك لأي متجه $\boldsymbol{a}$.

وإذا كان لدينا متجه $\boldsymbol{a}$ فإن المتجه الذي يملك نفس المقدار ولكن في الاتجاه المعاكس يسمى سالب $\boldsymbol{a}$ ونشير له بالرمز $-\boldsymbol{a}$ (انظر الرسم (8)).



الـشكـل (8)

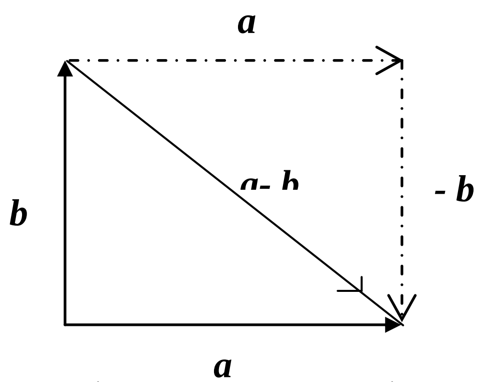
من هذا التعريف يتبع أن : $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$

($\mathbf{0}$ هو المتجه الوحيد الذي يساوي سالبه).

وبما أن $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ ، فإننا نضع $\mathbf{0} = \mathbf{0}-$. من ذلك نعرف الفرق بين متجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{b}$ ، كالتالي:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

ولرسم $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ نضع $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ بحيث تتطابق نقاط بدايتهما ثم نوصل الوتر من نهاية $\boldsymbol{b}$ إلى نهاية $\boldsymbol{a}$ وسيكون هذا هو الفرق $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. وفي الشكل (9) بعد رسم $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ نرسم $\boldsymbol{a}$ من نهاية $\boldsymbol{b}$ موازياً للمتجه $\boldsymbol{a}$ (خطوط متقطعة) ومن نهاية هذا الأخير نرسم $\boldsymbol{b}$ – موازياً للمتجه $\boldsymbol{b}$ وفي الاتجاه المعاكس له (خطوط متقطعة) لذلك ففي المثلث ذي الأضلاع الممثلة بخطوط متقطعة نقفل المثلث بمتجه ثالث سيكون هو $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

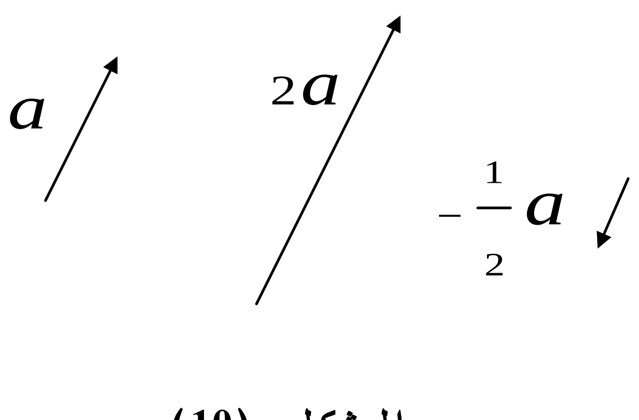


المضروب $p\,\boldsymbol{a}$ ، حيث p هو أي قياسي غير الصفر (أي عدد) ، الذي يساوي $p\,\boldsymbol{a}$ (تعريفاً) يعرف على أنه المتجه الذي مقداره دار $\boldsymbol{a}$ بحيث يكون

الشكل

$|p\boldsymbol{a}| = |p||\boldsymbol{a}|$ وله نفس اتجاه $\boldsymbol{a}$ إذا كان $p>o$ والاتجاه المعاكس إذا كان $p<o$

(انظر الشكل 10).



الشكل (10)

على وجه الخصوص سيكون $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ (1 -) . أما إذا كان $p = 0$ أو $\boldsymbol{a} = 0$ ، فإننا نضع $p\,\boldsymbol{a} = 0$. وإذا كان لدينا قياسيان p و q ، فإننا نرى فوراً أن

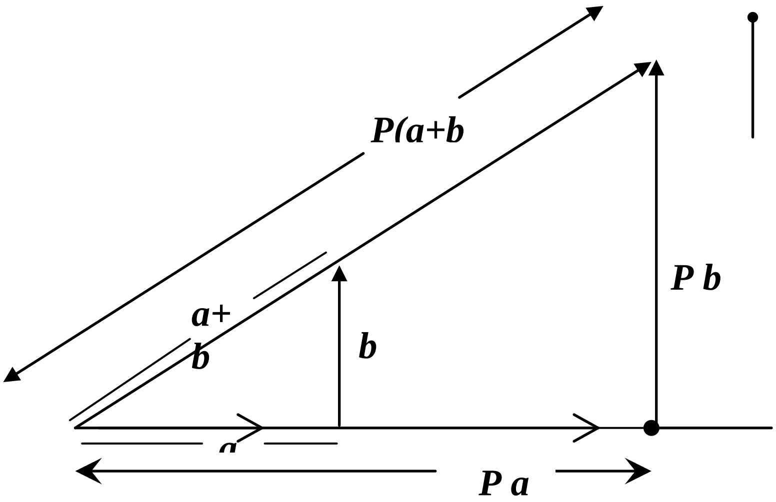
$$p\,(q\,\boldsymbol{a}) = (p\,q)\,\boldsymbol{a}$$

حيث الجانب الأيمن هو مضروب العدد (p q) في المتجه $\boldsymbol{a}$. أيضاً إذا كان لدينا أي متجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ وأي قياسيين p و q ، فإن قانوني التوزيع الآتيين يسريان:

$$(p + q)\,\boldsymbol{a} = p\,\boldsymbol{a} + q\,\boldsymbol{a} \qquad (4)$$

$$p\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = p\,\boldsymbol{a} + p\,\boldsymbol{b} \qquad (5)$$

والشكل (11) يبرهن المعادلة (5):



الـشكل (11)

هنا $p\,\boldsymbol{a}$ هي الطول من بداية $\boldsymbol{a}$ وكذلك $p\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ هي الطول من بداية $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. لذلك من المثلث الكبير نجد أن:

$$p\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = p\,\boldsymbol{a} + p\,\boldsymbol{b}$$

أما المعادلة (4) فهي بسيطة وتُتْرَك كتمرين للدارس .

أيضاً تعرف قسمة متجه على قياسي (عدد) كالتالي:

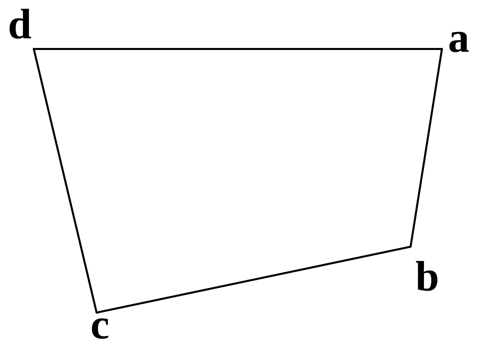
$$\frac{a}{p} = \frac{1}{p}a$$

ويسمى المتجه الذي طوله 1 متجهاً آحادياً فإذا كان لدينا أي متجه غير صفري ***a*** ، فإن:

$$\left|\frac{a}{|a|}\right| = \frac{1}{|a|}|a| = 1$$

أسئلة التقويم الذاتي(2)

(أ)إذا كانت a ، b ، c ، d أربع نقاط في المستوى



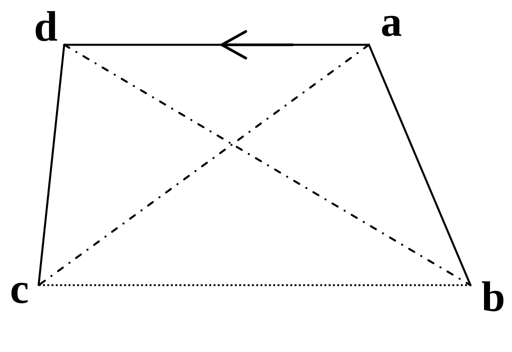
أوجد مايلي:

1) $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd}$

2) $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \vec{da}$

(ب) abcd شبه منحرف فيه: 2ad = bc

أثبت أن : ac + bd = 3ad

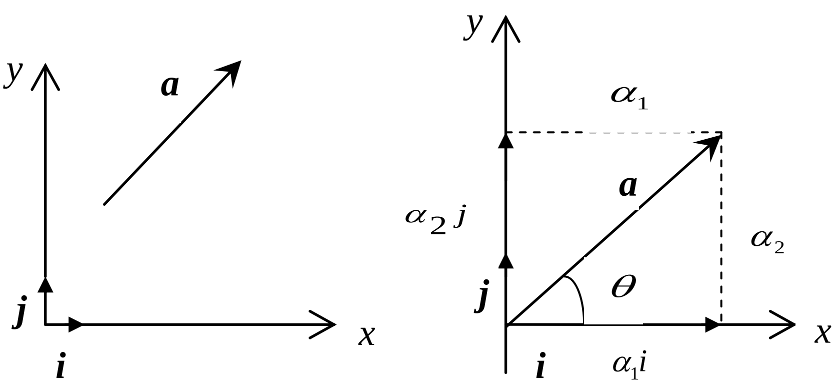


⮜ مكونات المتجه:

عرضنا المتجهات حتى الآن عرضاً هندسياً خالصاً و " خالياً من المكونات " . الآن ندخل نظام إحداثيات مستطيله x و y في مستوى له نقطة أصل 0 ليكن $\boldsymbol{i}$ متجهاً آحادياً في اتجاه محور x الموجب و $\boldsymbol{j}$ متجهاً آحادياً في اتجاه محور y الموجب كما في الشكل 12(a) . في هذه الحالة سَيُمثَّل أي متجه $\boldsymbol{a}$ في المستوى تمثيلاً فريداً بالشكل :

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{i} + \alpha_2 \boldsymbol{j} \qquad (6)$$

الأعداد α_1 و α_2 تسمى مكونات $\boldsymbol{a}$ وتحدد كالآتي :



نحرك المتجه $\boldsymbol{a}$ موازياً لنفسه بدون تدوير إلى أن تتطبق نقطة بدايته مع نقطة الأصل 0 . في هذا الوضع سـ الشكل 12 (b) : $\boldsymbol{a}$ هي النقطة $(,\alpha_2)$ الشكل 12 (a) ، y x ، وبالطبع ستكون OA ن كل النسخ المزاحة لبعضها البعض . ولكن كما يتضح من الشكل 12(b) فان المكونات α_1 و α_2 للنقطة A هي بالضبط القياسيات المشار إليها α_1 و α_2 في التمثيل (6) ، إلى جانب ذلك سيكون مقدار $\boldsymbol{a}$ هو بالضبط المسافة من O إلى A ، أي:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \qquad (7)$$

الشكل (b)12 يوضح أيضاً ، إذا كانت θ هي الزاوية بين محور x والمتجه $\boldsymbol{a}$ فإن

$$\alpha_1 = |a| Cos\theta \qquad و \qquad \alpha_2 = |a| Sin\theta$$

سنستعمل مفهوم الأساس في المستوى لنعني به أي متجهين ثابتين e_1 و e_2 ، ويسميان متجهي الأساس ، بحيث يكون لأي متجه $\boldsymbol{a}$ في المستوى تمثيل فريد بالشكل

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad (6^1)$$

ويسمى تمثيل $\boldsymbol{a}$ بالنسبة ل $\boldsymbol{e_1}$ و $\boldsymbol{e_2}$. أما القياسيان α_1 و α_2 فيسميان مكونا $\boldsymbol{a}$ بالنسبة إلى الأساس $\boldsymbol{e_1}$ و $\boldsymbol{e_2}$ ويمكن الإثبات بأن أي متجهين غير صفريين $\boldsymbol{e_1}$ و $\boldsymbol{e_2}$ يكونان أساساً في المستوى إذا كانا و فقط إذا كانا في غير استقامة واحدة . أي لا يقعان في خط مستقيم واحد أو في خطين متوازيين وإذا كان المتجهان $\boldsymbol{e_1}$ و $\boldsymbol{e_2}$ لأي أساس متعامدين ، فإن الأساس يسمى أساساً متعامداً وإذا كانا إلى جانب ذلك متجهين آحاديين فيسمى الأساس أساساً متعامداً آحادياً . وهكذا فإن المتجهين $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}$ في اتجاه محور x ومحور y يكونان أساساً متعامداً آحادياً . ولكن لابد من الملاحظة بأن الصيغة (7) تَصح فقط في حالة الأساس المتعامد الآحادي .

للاعتبارات السالفة سنستعمل من الآن فصاعداً الأزواج المرتبة لتمثل النقاط وأيضاً المتجهات في المستوى وهكذا فإن $(\alpha_1 ، \alpha_2)$ يمكن أن تمثل إما نقطة بإحداثيات α_1 و α_2 في المستوى أو متجه $\alpha_1 \boldsymbol{i} + \alpha_2 \boldsymbol{j}$ بمكونات α_1 و α_2 بالنسبة للأساس المتعامد الآحادي $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}$.

وبما أن $i = 1.i + 0.j$ و $j = 0.i + 1.j$ ، فإن الزوجين المرتبين الَّذَين يمثلان متجهى الأساس أنفسهما هما

$$\boldsymbol{i} = (1, 0) \qquad , \qquad \boldsymbol{j} = (0, 1)$$

والآن نستطيع أن نفسر العمليات الجبرية على المتجهات من منطلق الأزواج المرتبة . فإذا كانت $\boldsymbol{a} = (\alpha_1 ، \alpha_2)$ و $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2)$ أي متجهين فإن:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\alpha_1 i + \alpha_2 j) + (\beta_1 i + \beta_2 j)$$

$$= (\alpha_1 i + \beta_1 i) + (\alpha_2 j + \beta_2 j)$$

ولذلك يكون بإستعمال (4)

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\alpha_1 + \beta_1)i + (\alpha_2 + \beta_2)j \qquad (8)$$

وذلك يكافئ الصيغة

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) \qquad (8^1)$$

عموماً إذا كان p أي قياسي ، فإن $p\boldsymbol{a} = p(\alpha_1 i + \alpha_2 j)$ ولذلك باستعمال (5) يكون:

$$p\boldsymbol{a} = p\alpha_1 i + p\alpha_2 j \qquad (9)$$

أو

$$p(\alpha_1, \alpha_2) = (p\alpha_1, p\alpha_2) \qquad (9^1)$$

وينبع من (8^1)

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (0,0) = (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

وذلك لكل متجه $\boldsymbol{a} = (\alpha_1 ، \alpha_2)$ وبذلك يكون (0,0) هو الزوج المرتب الذي يمثل المتجه الصفري $\boldsymbol{0}$. وللحصول على $\boldsymbol{a}$ – نضع في (9) $p = -1$ فيصير $-\boldsymbol{a} = -\alpha_1 i - \alpha_2 j$ ويعادل ذلك بالأزواج المرتبة :

$$-\boldsymbol{a} = (-\alpha_1 ، -\alpha_2)$$

وذلك يعطينا فوراً صيغة لطرح متجهين باعتبار $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ فيكون

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (\alpha_1, \alpha_2) + (-\beta_1, -\beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \qquad (10)$$

أو

$$(\alpha_1, \alpha_2) - (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \quad (11)$$

من ذلك نخلص إلى أن أي متجهين $\boldsymbol{a} = (\alpha_1 ، \alpha_2)$ و $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \beta_2)$ يكونان متساويين إذا كان وفقط إذا كان $\alpha_1 = \beta_1$ و $\alpha_2 = \beta_2$ ، أي إذا كان وفقط إذا كان المتجهان ممثلين بنفس الزوج المرتب .

هذا واضح من الشكل 12(b) حيث أن أي متجهين متساويين إما ان يكونا متطابقين أو نسخين مزاحتين من نفس المتجه . وهكذا فإذا كان ***b=a*** ، فإن ***b*** سينطبق على $\overrightarrow{OA}$ ، إذا أزيحت نقطة بداية ***b*** إلى نقطة الأصل بحيث يصير ***b*** ممثلاً بنفس الزوج المرتب A= $(\alpha_1 \text{ ،} \alpha_2)$ مثل ***a*** .

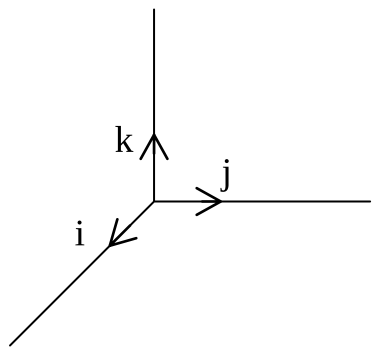
➢ **وحدة المتجه:**

وحدة المتجه A هو متجه آخر مثل a ويعطي حسب العلاقة التالية:

$$a = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$

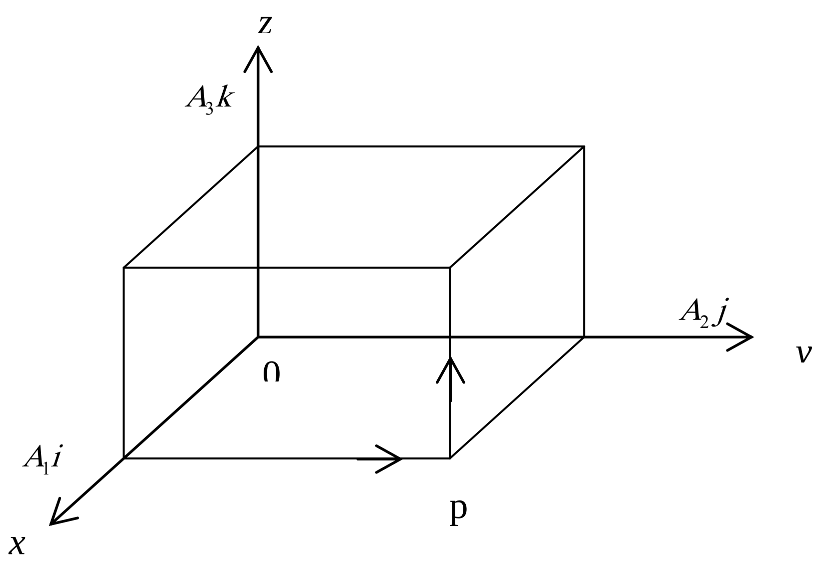
متجهات الوحدة الأساسية : i , j , k

متجهات الوحدة الأساسية تكون في نفس الاتجاه الموجب للمحاور الثلاثة x , y , z ، وهذه المحاور تكون متعامدة مع بعضها البعض مع تطبيق قاعدة اليد اليمنى على حركة وحدة المتجه.



➢ **مركبات المتجهات:**

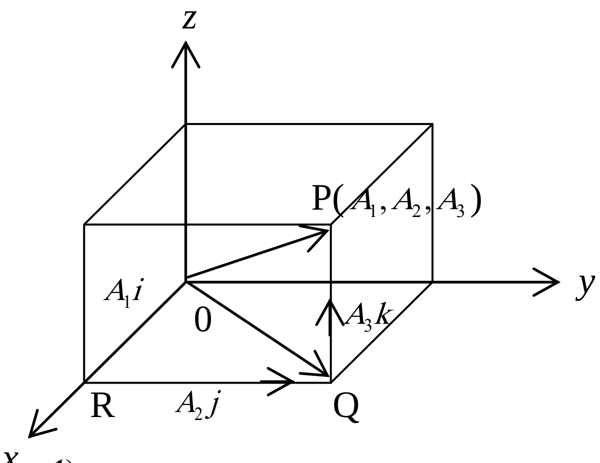
ليكن $\overrightarrow{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ فإن $A_1 i, A_2 j, A_3 k$ هي مركبات المتجه $\overrightarrow{A}$ وهي في نفس اتجاه المحاور الثلاثة ويمكن توضيحها في الشكل التالي:



➢ **مقدار المتجه:**

ليكن $\vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ فإن مقدار $\vec{A}$ ويرمز له بالرمز $\left|\vec{A}\right|$ ويعطي حسب العلاقة التالية :

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$



البرهان :

$$\left|\vec{OP}\right|^2 = \left|\vec{OQ}\right|^2 + \left|\vec{QP}\right|^2 \;......(1)$$

$$\left|\vec{OQ}\right|^2 = \left|\vec{OR}\right|^2 + \left|\vec{RQ}\right|^2 \;......(2)$$

نعوض (2) في (1)

$$\Rightarrow \left|\vec{OP}\right|^2 = \left|\vec{OR}\right|^2 + \left|\vec{RQ}\right|^2 + \left|\vec{QP}\right|^2 \;......(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OP} = \vec{A} \\ \vec{OR} = A_1 i \\ \vec{RQ} = A_2 j \\ \vec{QP} = A_3 k \end{array}\right\} ......(4)$$

نعوض (4) في (3) مع أخذ المقدار لكل حد

$$\Rightarrow \left|\vec{A}\right|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

نأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

- **المتجه القياسي:**

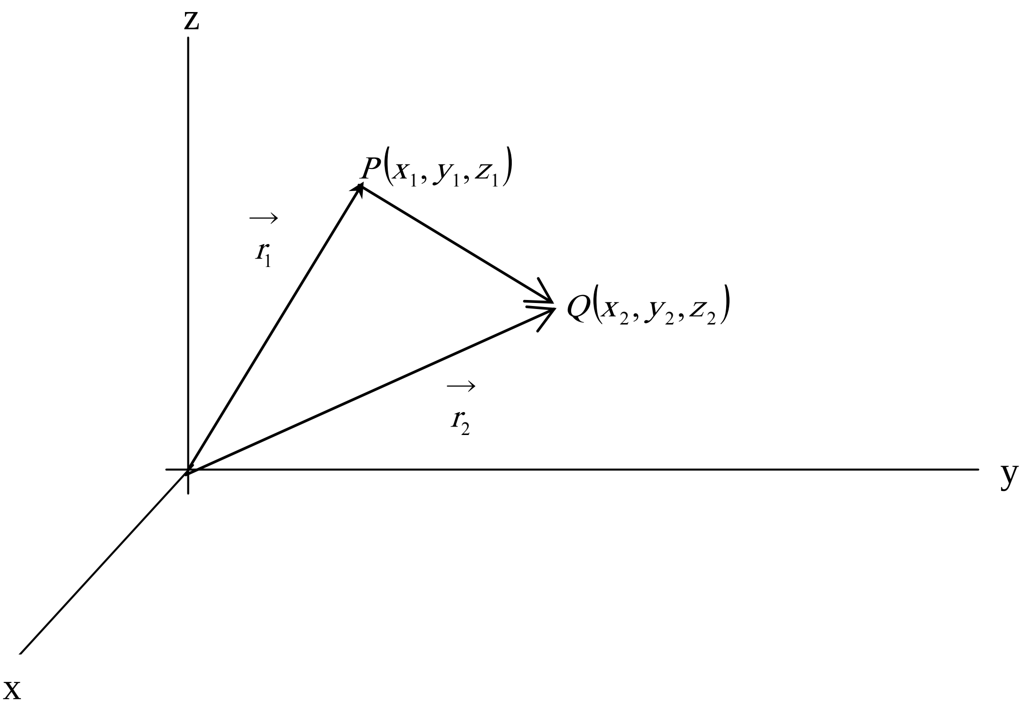
هو المتجه الذي بدايته نقطة الأصل ونهايته أي نقطة في الفضاء.

ليكن $\vec{A} = \vec{PQ}$ بحيث أن احدثيات $P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q(x_2, y_2, z_2)$ فإن

$$\vec{A} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

ومقياسه هو

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)_2 + (z_2 - z_1)^2}$$



$$\vec{r}_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k \ldots\ldots(1)$$

$$\vec{r}_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k \ldots\ldots(2)$$

$$\vec{r}_1 + \vec{PQ} = \vec{r}_2$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (x_2 i + y_2 j + z_2 k) - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)$$
$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1) i + (y_2 - y_1) j + (z_2 - z_1) k$$
$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

تدريب (2)

أوجد وحدة المتجه الذي يساوي محصلة المتجهين :

$$\overrightarrow{r_1} = 2i + 4j - 5k$$
$$\overrightarrow{r_2} = i + 2j + 3k$$

ملاحظة

مقدار وحدة المتجه يساوي 1 وحدة دائماً.

تدريب (3)

أوجد مقدار وحدة المتجه $\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}$ في التدريب (2)

تدريب (4)

أوجد المتجهين القياسين $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ للنقطتين P(2,4,3) و Q(1,-5,2) ثم أوجد $\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}$

تدريب (5)

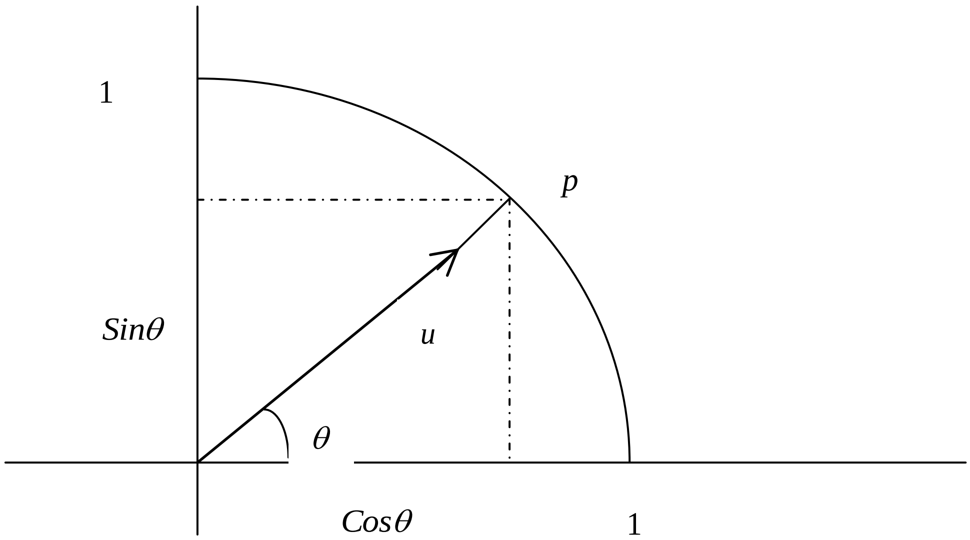
لتكن $\boldsymbol{a}=(3,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,5)$, $\boldsymbol{c}=(-3,1)$. أحسب المتجه $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ ثم أوجد مقداره؟

مثال

أوجد المتجه الوحدوي u الذي يكوّن مع محور x الموجب زاوية قدرها θ درجة

الحل:

إذا وضعنا نقطة بداية u عند نقطة الأصل 0 فإن نقطة نهايته ستكون لها إحداثيات قطبية $\theta, |u| = 1$ وإحداثيات مستطيلة $|u|Cos\theta$ و $|u|Sin\theta$ كما في الشكل أدناه:



الـشكـل (13)

لذلك سيكون

$$u = (Cos\theta, Sin\theta) = (Cos\theta)i + (Sin\theta)j$$

مثلاً في أسئلة التقويم الذاتي (2) ستكون $\theta = \arctan\frac{5}{12} \approx 22.6^\circ$

تدريب (6)

أوجد مكونات المتجهAB الذي يبدأ من النقطة A= $(\alpha_1 \text{ ، } \alpha_2)$ وينتهي عند النقطة B = (β_1, β_2)

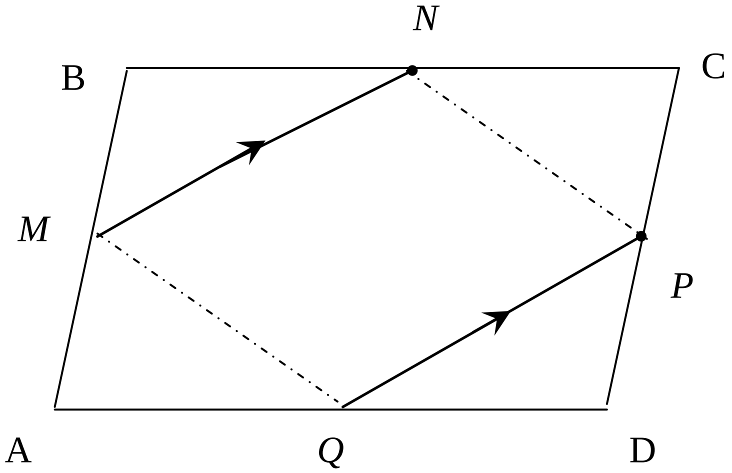
تشكل المتجهات أدوات قوية لبرهان النظريات الهندسية وهذا ما سنراه في المثال التالي.

مثال

برهن أن الشكل الذي نحصل عليه بتوصيل منصفات الأضلاع المتجاورة في أي شكل رباعي ABCD يكون دائماً متوازي أضلاع.

الحل:

لتكن Q,P,N,M هي منصفات الأضلاع $DA, CD, BC. AB$ كما في الشكل (15)



$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}AA = 0$$

لذلك فستكون $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ أي أن ضلعين متقابلين من الرباعي MNPQ متساويين ومتوازيين ، ولذلك فإن MNPQ متوازي أضلاع .

أسئلة التقويم الذاتي (3)

❓

(أ) أوجد المتجه الآحادي u الذي يكون له نفس اتجاه المتجه $12i + 5j$

(ب) بين أي من المتجهات التالية متجه وحدة وإذا لم يكن كذلك، أوجد له متجه الوحدة:

1) $a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$ 2) $b = (3,4)$

3) $c = (0,2)$ 4) $d = (1,0)$

2.1 الاعتماد و الاستقلال الخطي للمتجهات

إذا كان $a_1, a_2, \ldots, a_n$ متجهات في المستوى ، فإن التعبير :

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots\ldots + c_n a_n \qquad (11)$$

حيث $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ قياسيات يسمى تركيبة خطية من هذه المتجهات . وواضح مما سبق أن (11) هي نفسها متجه في المستوى . وقد رأينا في الجدول عن مكونات المتجه أن أي متجه a يمكن تمثيله بتركيبة خطية من المتجهين الوحدويين i ,j . التركيبة الخطية (11) توصف بنها تافهة إذا كانت $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ كلها تساوي الصفر فتكون التركيبة (11) نفسها تساوي الصفر، لكن إذا كان على الأقل واحداً من هذه القياسيات مختلف عن الصفر ، فإننا نقول أن (11) تركيبة غير تافهة . وتسمى المتجهات $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ معتمدة خطياً (على بعضها البعض) إذا وجدت تركيبة خطية منها تساوي الصفر أي :

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots\ldots + c_n a_n = 0$$

لا تصح إلا إذا كانت $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

فإن المتجهات $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ تسمى مستقلة خطياً،

مثلاً المتجهين الآحاديين i, j . مستقلان خطياً لأن :

$$c_1 i + c_2 j = c_1(1,0) + c_2(0,1) = (c_1, c_2) = 0$$

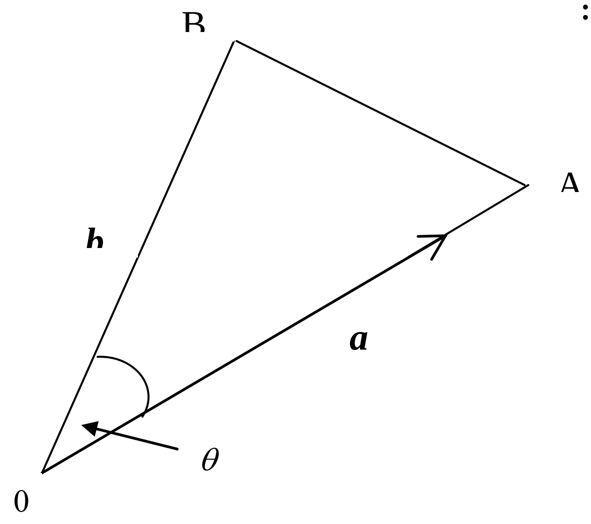
تصح فقط إذا كان $c_1 = c_2 = 0$. لكن المتجهات الثلاثة $\boldsymbol{a}_n = (1,2)$ ، $\boldsymbol{a}_2 = (3,4)$ ، $\boldsymbol{a}_3 = (2,3)$ معتمدة خطياً لأن :

$$\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3 = (1,2) + (3,4) - 2\,(2,3) = (1+3-4\ ,\ 2+4-6) = (0,0) = 0$$

عموماً يمكن البرهان ، بأن أي ثلاثة متجهات في المستوى معتمدة خطياً وأن أي متجهين في المستوى سيكونان مستقلين خطياً إذا كانا وفقط إذا كانا في غير استقامة واحدة أي لا يقعان في خط واحد وليسا موازيين لبعضهما البعض.

2. حاصل الضرب القياسي (مضروب النقطة)

مفهوم حاصل الضرب القياسي والذي يعرف أيضاً بحاصل ضرب النقطة لمتجهين ينشأ في مسائل هندسية عندما يراد إيجاد مكون متجه في اتجاه متجه آخر أو مسائل فيزيائية عندما يراد إيجاد العمل الذي تقوم به قوة لا تعمل في اتجاه حركة الجسم الذي تعمل عليه . ولتعريف حاصل ضرب النقطة لمتجهين ، نحتاج لمعرفة الزاوية بين المتجهين . لنفرض أن متجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ وضعتا بحيث تكون بدايتيهما عند النقطة 0 وليكن $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ و $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ كما في الشكل:



الشكل (14)

في هذه الحالة ستكون الزاوية بين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ (في أي ترتيب) هي الزاوية θ عند النقطة 0 من المثلث AOB . هذا المثلث سينهار إذا كان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ متوازيين ، أي إذا كان $\boldsymbol{a}$=p

b، حيث p هو أي قياسي ، وفي هذه الحال نعرف $\theta = 0$ إذا كان p>0 و $\theta = \pi$ إذا كان p<0

لاحظ أن θ تقع دائماً في الفترة $0 \le \theta \le \pi$.

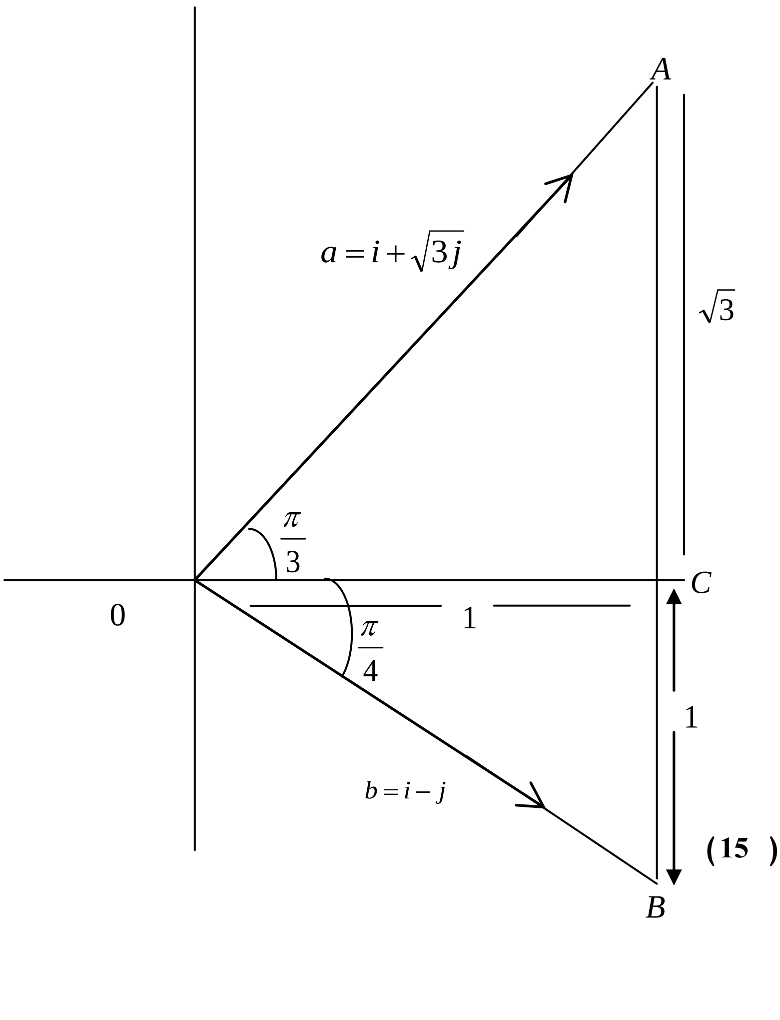
مثال

أوجد الزاوية بين المتجهين $\boldsymbol{a} = i + \sqrt{3}j$ و $\boldsymbol{b} = i - j$.

الحل:

من الشكل (15) أدناه نجد أن الزاوية AOC هي $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ ، بينما الزاوية BOC تساوي $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. لذلك الزاوية AOB بين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ هي حاصل الجمع:

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} = 105^\circ$$



الشكل (15)

تعريف : حاصل ضرب النقطة $\boldsymbol{a.b}$ للمتجهين $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{a}$ يعرف بالصيغة:

$$\boldsymbol{a.b} = |a||b| Cos\theta \qquad (1)$$

حيث θ هي الزاوية بين $\boldsymbol{a.b}$. وفي حالة $\boldsymbol{a}= 0$ أو $\boldsymbol{b} = 0$ ، فإن θ غير معرفة ونضع $\boldsymbol{a.b} = 0$ (تعريفاً) . حاصل ضرب النقطة يسمى أيضاً حاصل الضرب القياسي لأن $\boldsymbol{a.b}$ هو عدد ، أي قياسي . وكنتيجة مباشرة للتعريف (1) أعلاه نجد أن :

$$\boldsymbol{a \,.\, b = b \,.\, a}$$

وبما أن الزاوية بين متجه $\boldsymbol{a}$ ونفسه هي $\theta = 0$ ، فإن:

$$\boldsymbol{a.a} = |a||a| Cos 0 = |a|^2 \qquad (1)$$

على وجه الخصوص سيكون $\boldsymbol{a.a}=0$ إذا كان وفقط إذا كان $|a| = 0$ ، أي إذا كان $a = 0$. ويكون حاصل ضرب النقطة مساوياً للصفر إذا كان وفقط إذا كان $a \perp b$ ، وهنا نعتبر المتجه صفر معامداً لكل متجه . في الواقع ، فإن الصيغة :

$$\boldsymbol{a.b} = |a||b| Cos\theta = 0 \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

تصح إذا كان وفقط إذا كان $Cos\theta = 0$ أي $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، أو على الأقل واحداً من المتجهين $\boldsymbol{a}$ أو $\boldsymbol{b}$ يساوي صفراً ، بحيث $a \perp b$ في أي حال .

الآن نستطيع أن نُعَبِّر عن حاصل ضرب النقطة بواسطة مكونات المتجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ بالنسبة للمتجهين الآحاديين $\boldsymbol{i} = (1,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1)$ وذلك من النظرية الآتية:

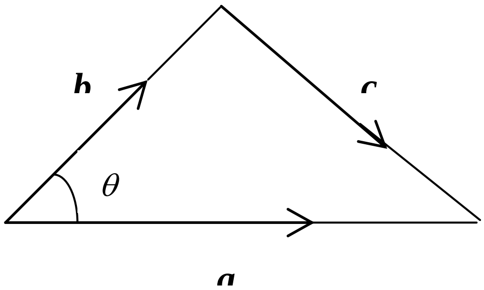
نظرية 1: إذا كان $a = \alpha_1 i + \alpha_2 j$ و $b = \beta_1 i + \beta_2 j$ أو بشكل مكافئ $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $b = (\beta_1, \beta_2)$ ، فإن:

$$\boldsymbol{a.b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \qquad (2)$$

البرهان:

لتكن $c = a - b = (\alpha_1 - \beta_1)i + (\alpha_2 - \beta_2)\, j$

وبتطبيق قانون جيب التمام للمثلث أدناه نجد :



$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|Cos\theta$$

ولذلك يتبع من تعريف حاصل الضرب القياسي أن

$$a.b = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2) \qquad (3)$$

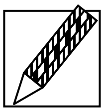
ولكن

$$|b|^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 \quad \text{و} \quad |a|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

و $$|c|^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\beta_2 + \beta_2^2$$

وبوضع هذه القيم في (3) نحصل على (2). #

تدريب (7)



ليكن $\boldsymbol{a}$ = (3,1,-2)

$\boldsymbol{b}$= (1,-3,4)

$\boldsymbol{c}$= (2,3,5)

أوجد (2a+3b).(5b+2c)

استخلاص: إذا كان p و q قياسيين فإن:

$$(p\,\boldsymbol{a}).(q\,\boldsymbol{b}) = p\,q\,(\boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b}) \qquad (4)$$

لأي متجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$. ويحقق حاصل ضرب النقطة القوانين التوزيعية التالية:

$$(\boldsymbol{a}).(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\,\boldsymbol{c} \qquad (5)$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \qquad (5^1)$$

لأي متجهات $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

البرهان:

لتكن:

$$\boldsymbol{a}=\alpha_1 i+\alpha_2 j \quad \text{و} \quad \boldsymbol{b}=\beta_1 i+\beta_2 j \quad \text{و} \quad \boldsymbol{c}=\gamma_1 i+\gamma_2 j$$

في هذه الحال سيكون:

$$p\boldsymbol{a}=p\alpha_1 i+p\alpha_2 j \quad , \quad q\boldsymbol{b}=q\beta_1 i+q\beta_2 j$$

$$\text{و} \quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\beta_1+\gamma_1)i+(\beta_2+\gamma_2)j$$

لذلك

$$(p\,\boldsymbol{a})\,.(q\,\boldsymbol{b})=(p\alpha_1)(q\beta_1)+(p\alpha_2)(q\beta_2)$$
$$=(p\,q)\,(\alpha_1\,\beta_1+\alpha_2\,\beta_2)=p\,q\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a}).(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\alpha_1(\beta_1\gamma_1)+\alpha_2(\beta_2\gamma_2)=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_2\gamma_2$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)+(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)$$

وهذا يبرهن القانون (5) ، نظراً لأن الجانب الأيمن في كل من السطرين الأخيرين يساوي الآخر

الصيغتان متساويتان . وباستعمال (5) يمكن برهان (5^1) كالآتي:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

حيث استعملنا خاصية حاصل الضرب القياسي التبادلية.

تدريب (8)

أوجد قيمة $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,.\,(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$. ومن ثم $\left|a+b\right|^2$ بوساطة القيم المطلقة وحاصل الضرب القياسي .

تدريب (9)

لأي قيم المتغير الوسيط t يكون المتجهان $\boldsymbol{a}=3i+j$ و $\boldsymbol{b} = -2i+t\,j$

متوازيين؟ متعامدين؟ .

لتكن θ هي الزاوية بين المتجهين $a = \alpha_1 i + \alpha_2 j$ و $b = \beta_1 i + \beta_2 j$

من التعريف (1) لحاصل الضرب القياسي نجد أن:

$$Cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} \qquad (6)$$

ولكن بما أن $|Cos\theta| \le 1$ ، فإن:

$$\frac{a.b}{|a||b|} \le 1$$

$$|\boldsymbol{a.b}| \le |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \qquad (7)$$

وبلغة المكونات تكون هذه الصيغ:

$$Cos\theta = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \qquad (6^1)$$

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \le \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \qquad (7^1)$$

هذه الصيغة (7^1) هي حالة خاصة من متباينة كوشي وشوارتز

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}$$

لأي أعداد α_i و β_i .

لاحظ في (7) أن المساواة تتحقق إذا كانت وفقط إذا كانت $Cos\theta = \pm 1$ أي في حالة $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$. في هذه الحالة سيكون $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ متوازيين بنفس الاتجاه إذا كان

$\theta = 0$ وباتجاه متعاكس إذا كان $\theta = \pi$. ومعلوم أن θ ستكون حادة $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

إذا كان $0 < Cos\theta < 1$ ومنفرجة $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ إذا كان $-1 < Cos\theta < 0$

تدريب (10)

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\boldsymbol{a}$ = , $\boldsymbol{b}$ = 2i+j ..

تدريب (11)

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\boldsymbol{a}$ = (1,-1,2) , $\boldsymbol{b}$ = (2,1,1)

فائدة

إذا كان a,b متجهين غير صفرين في R^2 , R^3 وكانت θ الزاوية بينهما فإن:

- ✓ θ **زاوية حادة إذا وقط إذا كان $a.b > 0$**
- ✓ θ **زاوية منفرجة إذا وقط إذا كان $a.b < 0$**
- ✓ θ **زاوية قائمة إذا وقط إذا كان $a.b = 0$**

أسئلة التقويم الذاتي (4)

أ) باستعمال الصيغة (2) أوجد حاصل ضرب النقطة للمتجهين $\boldsymbol{b}$ =(4,-1) , $\boldsymbol{a}$ = (2,5) .

ب) إذا كانت $\boldsymbol{a}$ = (3,-2,1) , $\boldsymbol{b}$ = (2,4,-3), $\boldsymbol{c}$ = (3,6,3)

صف الزوايا بين المتجهات التالية: ***(1) a,b (2) a,c (3) b,c***

1.2 إسقاط متجه على آخر

إذا كان a , b متجهان مختلفان عن الصفر ، فإننا نعني بمكون a في اتجاه b ونكتبه $Comp_b\ a$ ، القياسي الذي يساوي حاصل ضرب النقطة $a \cdot u_b$ ، حيث u_b هو متجه آحادي في اتجاه b . ونظراً لأن :

$$u_b = \frac{b}{|b|}$$

فإن

$$comp_b a = \frac{a.b}{|b|}$$

أو ما يكافئ ذلك:

$$comp_b a = |a| Cos\theta$$

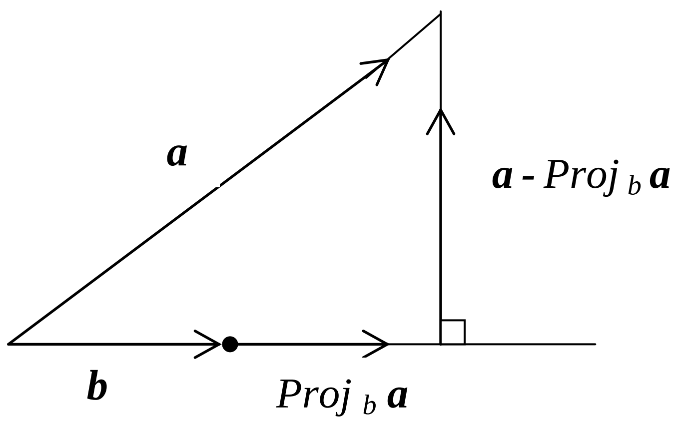
حيث θ هي الزاوية بين a , b كذلك نعني بمسقط a على b ونكتبه $Proj_b\ a$ ، المتجه الذي قدره $Comp_b\ a$ موازياً للمتجه b أي:

$$Proj_b\ a = (Comp_b\ a)\ \mathbf{u}_b$$

وباستعمال حاصل الضرب القياسي يمكن أن نكتب ذلك كالتالي:

$$proj_b a = \frac{a.b}{|b|} u_b = \frac{(a.b)b}{|b|^2}$$

ونوضح بالرسم أدناه معنى مسقط a على b ، فإذا كانت بدايات a , b متطابقتين ، فإن نهاية $Proj_b\ a$ هي أسفل العمودي من نهاية a على الخط الذي يحتوي على b . من ذلك يتبع أن: $a - Proj_b\ a$ معامد للمتجه b .



ولذلك فإن $\boldsymbol{a}$ يمكن أن يمثل على أنه مجموع المتجه $Proj_{\,b}\,\boldsymbol{a}$ والمتجه $\boldsymbol{a} - Proj_{\,b}\,\boldsymbol{a}$. هذان المتجهان يعرفان أيضاً بأنهما المتجهات المكونة للمتجه $\boldsymbol{a}$ في اتجاه $\boldsymbol{b}$ وفي الاتجاه المعامد له .

تدريب (12)

أوجد $Comp_{\,b}\,\boldsymbol{a}$ و $Proj_{\,b}\,\boldsymbol{a}$

إذا كان $\boldsymbol{a} = 3i+2j$ و $\boldsymbol{b} = 5i - j$ ، ومثِّل لِـ $\boldsymbol{a}$ كمجموع متجه موازي للمتجه $\boldsymbol{b}$ ومتجه معامد له.

2.2 العمل كحاصل ضرب نقطة

نفرض أن جسماً ما يتحرك لمسافة d تحت تأثير قوة F تعمل في اتجاه الحركة ، في هذه الحالة نعلم أن العمل الذي تقوم به القوة تعطينا إياه الصيغة :

$$W = F\,d$$

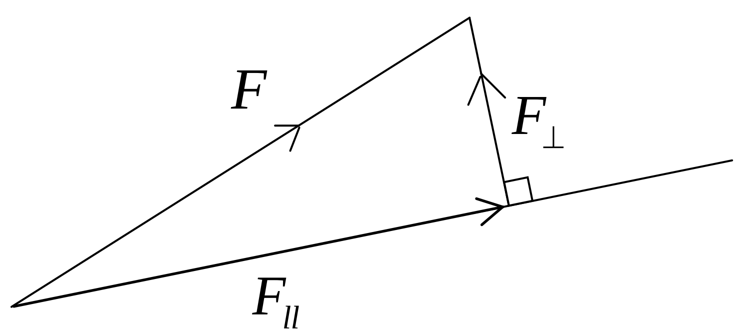
ويمكن تعميم هذه الصيغة لتشمل الحالة عندما تكون لدينا قوة متجهة F لاتعمل في اتجاه حركة الجسم . فنقول أن إزاحة الجسم ستكون متجهاً d ولتكن θ هي الزاوية بين F و d ، فستكون هذه القوة مساوية لمكونين :

$$F = F_{11} + F_{\perp}$$

حيث $F_{11} = proj_{d} F = \dfrac{(F.d)d}{|d|^2}$ هو المكون المتجه للقوة F الموازي للإزاحة **d** و

$$F_{\perp} = F - proj_{d} F$$

وهي المتجه المكون للقوة F المعامد للإزاحة **d** . انظر الشكل أدناه :



المكون $F_{\perp}$ لا ينتج أي حركة في اتجاه **d** ، ولذلك بالنسبة للحركة في اتجاه **d** فإن F يمكن أن يستعاض عنها بالمكون F_{11} لذلك كل العمل يقوم به المكون F_{11} ،
ولذلك فإن:

$$W = \begin{cases} |F_{11}||d| & if \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \\ -|F_{11}||d| & if \quad \pi/2 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

ولكن

$$|F_{11}| \; |d| = \frac{|F.d| \quad d}{|d|^2} \; |d| \quad = |F.d|$$

$$= \begin{cases} F.d & if \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \\ -F.d & if \quad \pi/2 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

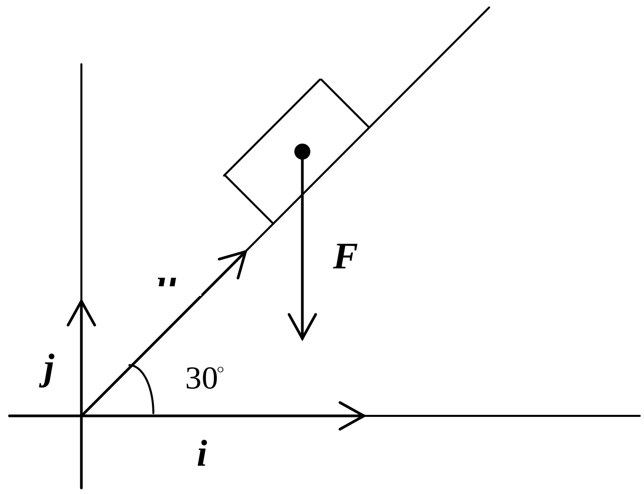
ولذلك فإن : $W = \boldsymbol{F} \,.\, d$

وهكذا فإن العمل تقوم به القوة $\boldsymbol{F}$ في اتجاه حركة الجسم هو حاصل ضرب القوة $\boldsymbol{F}$ في الإزاحة $\boldsymbol{d}$ وقد افترضنا هنا أن $\boldsymbol{F}$ ثابتة وأن الإزاحة في خط مستقيم . في غير ذلك فإن التعريف الصحيح للعمل يحتاج إلى استعمال مفهوم التكامل .

مثال

كتلة خشبية تزن 4 أرطال تدفع إلى أعلي مستوى مائل خالٍ من الاحتكاك يكوّن زاوية 30° مع الخط الأفقي . كم هي كمية العمل الذي تعمله قوة الجاذبية في تحريك الكتلة لمسافة 5 أقدام ؟

الحل:



في الشكل أعلاه تمثل i , j متجهين وحدويين في الاتجاه الأفقي والعمودي لذلك سيكون المتجه الوحدوي في اتجاه الحركة $u = Cos\ 30^\circ\ i + Sin\ 30^\circ\ j$. وتعمل قوة

الجاذبية عمودياً إلى أسفل وقدرها 4 أرطال لذلك $\boldsymbol{F} = -4\ j$ وتكون الإزاحة $\boldsymbol{d} = 5\boldsymbol{u}$.

لذلك يكون العمل :

$$F.d = (-4j).5u = -20j.\ (Cos30^\circ\ \ i + Sin30^\circ\ \ j)$$

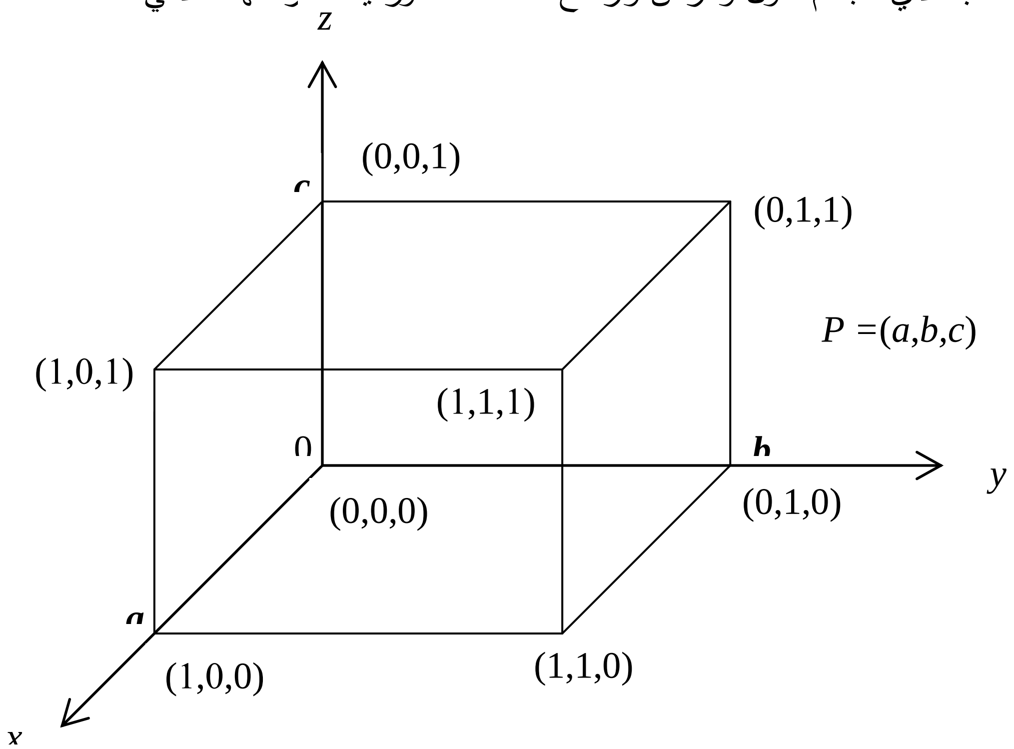
$$= -20\, j.\ \ Sin30^\circ\ j = -10\ \ ft\ .lb$$

وهو العمل الذي يعمل ضد قوى الجاذبية. #

3. المتجهات في الفضاء

عزيزي الدَّارس ، سنذهب الآن بعيداً إلى الفضاء، حيث يمكننا توسيع مفهوم المتجه ليكون في الفضاء ذي الثلاثة أبعاد بدلاً من أن يكون في المستوى ذي البعدين . هذا التطوير ***سيمكننا*** من وصف أحداث في عالمنا الطبيعي مثل حركة الكواكب أو الجسيمات في مجال كهربي أو مغناطيسي وصياغة قوانين كيبلر ونيوتن وغيرها . لهذا الفرض يلزمنا إدخال نظام إحداثيات ثلاثي يمكن بواسطته وصف حركة أي جسم بإعطاء مسافاته في

كل لحظة من ثلاثة محاور متعامدة نرمز لها بمحور x ومحور y ومحور z التي تمثل بالنسبة لأي مجسم طول وعرض وارتفاع . هذه المحاور يمكن رسمها كالآتي:



وتعطى إحداثيات أي نقطة P مثلاً بإعطاء مسافاتها العمودية من محور x ومحور y ومحور z لتكتب كمركب ثلاثي (a , b , c) . هذه الإحداثيات الثلاثة يمكن أن تكون موجبة أو سالبة حسب قاعدة اليد اليمنى بحيث إذا أدرنا الأصابع من محور x الموجب إلى محور y الموجب يشير الإصبع الإبهام في اتجاه محور z الموجب إلى أعلى ويعطي السهم في كل محور الاتجاه الموجب والاتجاه المعاكس له هو اتجاه سالب . مثلاً إحداثيات أركان مكعب وحدوي في المربع الأول هي (0،0،0) ،(1،0،0) ، (1،1،0) ، (0،1،0) ، (0،1،1)، (0،0،1)، (1،0،1) ، (1،1،1) .

في هذا النظام يُعَرَّف المتجه على أنه خط له اتجاه معين وطول معين . كل قواعد الجمع والطرح والضرب في عدد، وغيرها تسري كما كانت في المستوى فإذا أدخلنا أساساً لهذه المتجهات مثلاً المتجهات k , j , i صار بالإمكان تمثيل أي متجه كتركيبة خطية منها :

$$a = \alpha_1 \, i + \alpha_2 \, j + \alpha_3 \, k \qquad (1)$$

هذه المكونات نحصل عليها بإزاحة $\boldsymbol{a}$ بدون دوران حتى تصير بدايته في نقطة الأصل . في هذه الحالة ستكون نقطة النهاية هي $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ وهي تمثل نقطة النهاية والمتجه في آن واحد حيث أن $\alpha_3 \, , \alpha_2 \, , \alpha_1$ هي مكونات المتجه وفي نفس الوقت

إحداثيات النقطة A .

ويمكن الآن كتابة كل المتجهات في شكل مرتبات ثلاثية. مثلاً متجهات الأساس k , j , i تكوّن المرتبات:

$$k=(0،0،1) \; ، \qquad j=(0،1،0), \qquad i=(1،0،0)$$

ويكون المقدار هو الآتي:

$$\left| \; a \; \right| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \qquad (2)$$

ومثلما فعلنا في المستوى يمكن تفسير العمليات الحسابية على المتجهات بأنها عمليات على المكونات . فنجمع المتجهات أو نطرحها بأن نجمع أو نطرح المكونات المتقابلة ونضرب المتجه في عدد بأن نضرب كل من مكوناته في نفس العدد. وبما أننا قد أوردنا كل خواص هذه العمليات وبرهنّا ما يلزم برهانه فإننا نكتفي بشرح حالة المتجهات في الفضاء ببعض الأمثلة.

مثال

إذا كان $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$ ، $\boldsymbol{b}=(1,-4, 2)$ ، $\boldsymbol{c}=(1,8,7)$,

أحسب المتجه $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ وأوجد مقداره.

الحل:

$$2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 2\,(2,-1,3) + (-1,4,-2) - (1,8,7)$$
$$= (4-1-1) \, , (-2,+4-8) \, ,(6-2-7) = (2,-6,-3)$$

أو بتمثيل مكافئ:

$$2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 2\,i - 6\,j - 3\,k$$

أما مقدار المتجه فهو:

$$\left| \; 2i - 6j - 3k \; \right| = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

تدريب (13)

جِدْ متجهاً آحادياً $\boldsymbol{u}$ له نفس اتجاه المتجه $15\,i - 12\,j - 16\,k$

1.3 حاصل ضرب النقطة

يعرف حاصل ضرب النقطة لمتجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ أو حاصل الضرب القياسي كالتالي:

$$\boldsymbol{a.b} = |a||b| Cos\,\theta \qquad (6)$$

حيث θ هي الزاوية بين $\boldsymbol{a.b}$. $0 \le \theta \le \pi$ وأيضاً $\boldsymbol{a.b} = 0$ إذا كان وفقط إذا كان $\boldsymbol{a}$ عمودي على $\boldsymbol{b}$ (ويعتبر المتجه الصفري عمودياً على كل متجه).

إذا كان $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ فيمكن البرهان بنفس الطريقة التي اتبعناها في حالة المستوى أن:

$$\boldsymbol{a.b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \qquad (7)$$

أيضاً يمكن البرهان بأن:

$$(p\,\boldsymbol{a}).(q\,\boldsymbol{b}) = p\,q\,(\boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b})$$
$$(\boldsymbol{a}).(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\,\boldsymbol{c}$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,.\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\,.\,\boldsymbol{c}$$

وهي قوانين التوزيع

أما المتجهات الآحادية

$$k=(0،0،1) \; ، \qquad j=(0،1،0), \qquad i=(1،0،0)$$

فهي تحقق الصيغ المهمة الآتية:

$$i.i = 1 \quad \text{و} \quad j.j = 1 \quad \text{و} \quad k.k = 1 \qquad (8)$$
$$i.j = j.i = 0 \quad \text{و} \quad j.k = k.j = 0 \quad \text{و} \quad i.k = k.i = 0$$

مثلاً:

$$\boldsymbol{i} \,.\, \boldsymbol{i} = 1(1) + 0(0) + 0(0) = 1$$
$$\boldsymbol{i} \,.\boldsymbol{j} = 1(0) + 0(1) + 0(0) = 0$$

هذه الصيغ هي نتيجة مباشرة للتعريف (6) وحقيقة أن $i \;,\; j \;,\; k$ تشكل أساساً آحادياً متعامداً . لاحظ أنه إذا كان

$$a = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

فإن:
$$a.i = (\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k).i = \alpha_1 i.i + \alpha_2 j.i + \alpha_3 k.i = \alpha_1$$

بصورة مشابهة نجد أن: $a.j = \alpha_2$ و $a.k = \alpha_3$

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين $\boldsymbol{b}\,,\boldsymbol{a}$ ، فيتبع من (6) أن:

$$Cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} \qquad (9)$$

تدريب (14)

أوجد الزاوية بين المتجهين $\boldsymbol{a}= i\text{-}2j\text{+}4k$, $\boldsymbol{b}= \text{-}4i\text{+}j\text{-}2k$

تدريب (15)

إذا كان $\boldsymbol{a}$ =(3,0)، $\boldsymbol{b}$ =(5,5) فأوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}$

إذا كان لدينا $\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{b}$ متجهين غير صفريين في الفضاء ، فإننا نعرف كما أسلفنا مكون $\boldsymbol{a}$ في اتجاه $\boldsymbol{b}$ ، $Comp_{\,b}\, \boldsymbol{a}$ ، ومسقط $\boldsymbol{a}$ على $\boldsymbol{b}$ ، $Proj_{\,b}\, \boldsymbol{a}$ كالآتي:

$$proj_b a = \frac{(a.b)b}{|b|^2} \qquad\qquad comp_b a = \frac{a.b}{|b|}$$

لاحظ أن $comp_b a$ كمية قياسية بينما $proj_b a$ كمية متجهة .

تدريب (16)

إذا كان $\boldsymbol{a} = 2\,i - 3j + k$ و $\boldsymbol{b} = i + 2\,j - 2\,k$ أوجد $comp_b a$ و $proj_b a$ وعبر عنه كمجموع لمتجه موازي ل $\boldsymbol{b}$ ومتجه عمودي على $\boldsymbol{b}$.

أسئلة التقويم الذاتي (5)

أوجد حاصل ضرب النقطة للمتجهين $\boldsymbol{b}= (2,5,-1)$, $\boldsymbol{a}=(4,-3,6)$

2.3 زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه

إذا كان $a = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ متجه غير صفري و $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ الزوايا بين $\boldsymbol{a}$ والمتجهات الآحادية $i\,, j\,, k$ فإننا نستخلص من (9) أن:

$$Cos\theta_1 = \frac{a.i}{|a||i|} = \frac{\alpha_1}{|a|} \quad \text{و} \quad Cos\theta_2 = \frac{a.j}{|a||j|} = \frac{\alpha_2}{|a|} \quad \text{و} \quad Cos\theta_3 = \frac{a.k}{|a||k|} = \frac{\alpha_3}{|a|} \qquad (10)$$

ويكافئ ذلك الصيغ

$$\alpha_1 = |a| Cos\theta_1 \quad \text{و} \quad \alpha_2 = |a| Cos\theta_2 \quad \text{و} \quad \alpha_3 = |a| Cos\theta_3 \qquad (10^1)$$

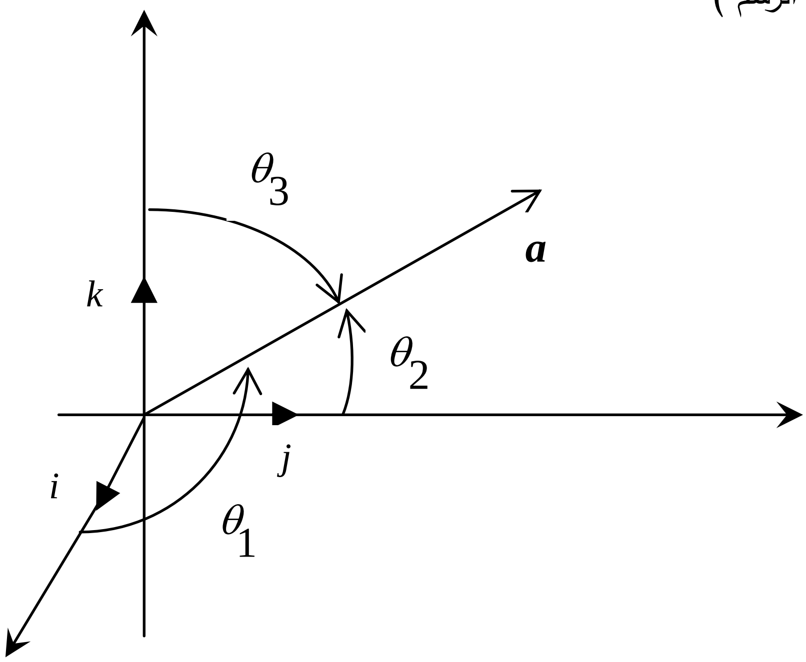
الزوايا $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ تسمى زوايا اتجاه المتجه $\boldsymbol{a}$ (أو لأي خط L له نفس الاتجاه) بينما الأعداد $Cos\theta_3$ و $Cos\theta_2$ و $Cos\theta_1$ تسمى جيوب تمام اتجاه المتجه $\boldsymbol{a}$. جيوب تمام الاتجاه تحدد اتجاه $\boldsymbol{a}$ بالكامل ، ولكنها لا تقول شيئاً عن مقدار $\boldsymbol{a}$. فإذا وضعنا (10^1) في الصيغة $|\,a\,|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ ، وجدنا

$$|a|^2 = |a|^2(Cos^2\theta_1 + Cos^2\theta_2 + Cos^2\theta_3)$$

لذلك فهذه الجيوب التمامية لابد أن تحقق الصيغة

$$Cos^2\theta_1 + Cos^2\theta_2 + Cos^2\theta_3 = 1$$

(انظر الرسم)



تدريب (17)

هل يمكن لأي متجه أن تكون له زوايا اتجاه

$\theta_3 = 60^\circ, \quad \theta_2 = 135^\circ, \quad \theta_1 = 45^\circ$ ؟

أسئلة التقويم الذاتي (6)

أوجد تمام جيوب الاتجاه وزوايا الاتجاه للمتجه(1 , 8- ,4) = ***a***

4. المتجهات في الفضاء R^n

نرمز للمستوى بالرمز R^2 وللفضاء بالرمز R^3 . قياساً على ما قدمنا يمكن أن نتصور فضاءً له عدد من الأبعاد نرمز له بـ R^n حيث n عدد طبيعي ورغم أن هذا لا يتحقق في الفضاء الحسِّي الذي نعرفه ، إلا أننا نستطيع أن ننطلق من المرتبات بأي عدد من المكونات ، لنقل n ، ويكون المتجه مرتب له n مكوِّن من الشكل $(u_1,u_2,\dots, u_n)$. ونعرف لهذه المرتبات صيغ للجمع والطرح وأيضاً للضرب في قياسي ونستطيع أن نبرهن أن كل القواعد التي برهناها بـ R^2 و R^3 تصح أيضاً بـ R^n .

تعريف: تسمى فئة كل المرتبات من n عنصر من الأعداد الحقيقية ، ونرمز لها بالرمز R^n ، الفضاء من n مكون . مثلاً المرتب

$$u = (u_1 ,u_2 , \dots, u_n)$$

يسمى نقطة أو متجه في هذا الفضاء، الأعداد الحقيقية $u_1 , u_2,\dots, u_n$ تسمى مكونات أو إحداثيات المتجه u ، أيضاً عندما نتحدث عن الفضاء R^n فإننا نستعمل كلمة قياسي لعناصر R ونعني بذلك الأعداد الحقيقية .

مثال

انظر إلى المتجهات الآتية:

$$(0,2) \quad و \quad (-1,3) \quad و \quad (2,1,-3) \quad و \quad (-4,\sqrt{3},0,\pi)$$

المتجهان الأول والثاني لهما مكونان ولذلك فهما نقاط في R^2 و الثالث متجه له ثلاثة مكونات وبذلك فهو متجه في R^3 ، المتجه الأخير له أربعة مكونات وبذلك فهو متجه في R^4 . يعتبر المتجهان u و v متساويين إذا كان لهما نفس عدد المكونات أي أنهما ينتميان لنفس الفضاء الاتجاهي وكانت المكونات المتقابلة متساوية . مثلاً المتجهان (1،2،3) و (2،3،1) ليسا متساويين لأن المكوِّنات المتقابلة غير متساوية

مثال

لنفرض أن $(x-y,\ x+y,\ z-1\ ) = (4,\ 2,\ 3)$ من تعريف مساواة المتجهات يتبع أن

$$x-y=4$$
$$x+y=2$$
$$z-1=3$$

ومن هذه المعادلات نحصل على الحلول $z=4,\ \ y=-1,\ \ x=3$

1.4 جمع المتجهات وضربها بقياسيات

لتكن $u,v \in R^n$

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{و} \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

في هذه الحالة يكون مجموع u , v ونكتبه $u+v$ هو المتجه الذي نحصل عليه بجمع المكونات المتقابلة :

$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots\ldots, u_n+v_n)$$

كذلك يكون مضروب عدد حقيقي k ، ومتجه u ويكتب $k\,u$ هو المتجه الذي نحصل عليه بضرب k في كل مكون من u :

$$k\,u = (k\,u_1, k\,u_2, \ldots, k\,u_n)$$

لاحظ أن $u+v$ و $k\,u$ هي متجهات في R^n .

أيضاً نعرف:

$$-u = 1\,u$$
$$u-v = u+(-v)$$

تدريب (18)

ليكن $u = (2, -4, 3, 1)$, $v = (1, 3, 5, -2)$ أوجد :

$u+v$ و $3u$ و $4u-3v$

المتجه (0، ....، 0، 0) في R^n ويرمز إليه بالحرف 0 يسمى المتجه الصفري.

الصفات الأساسية للمتجهات في الفضاء R^n تحت عمليات الجمع الاتجاهي والضرب القياسي تُفَصِّلها النظرية الآتية:

نظرية 1:

لأي متجهات $w, \ v, \ u \ \in R^n$ وأيّ قياسيات $k_1 \, k_2$ يصح التالي:

أ- $(u + v) + w = u + (v + w)$ (قانون التجميع)

ب- $u+0 = 0+u = u$ (خاصية الصفر)

ج- $u + (- \ u) = 0$ (خاصية السالب)

د- $u + v = v + u$ (قانون التبديل)

هـ- $k (u + v) = k u + k v$ (توزيع الضرب يقاس على الجمع)

و- $(k^1 + k)u = k^1 u + k \ u$

ز- $(k^1 \ k) \ u = k \ (k^1 \ u)$

ح- $1 \, . \, u = u$

البرهان:

لتكن $w_i \, , v_i \, , u_i$ المكون رقم i من كلٍ من $w \, , v \, , u$.

أ- من التعريف نعلم أن $u_i + v_i$ المكون رقم i من المتجه $u + v$ ولذلك فإن: $(u_i + v_i) + w_i$ هو المكون رقم i من المتجه $(u + v) + w$. كذلك $v_i + w_i$ المكون رقم i من المتجه $v + w$ ، ولذلك فإن $u_i + (v_i + w_i)$ هو المكون رقم i من المتجه $u + (v + w)$. ولكن $w_i \, , \, v_i \, , \, u_i$ هي أعداد حقيقية ويسري عليها قانون التجميع أي:

$$(u_i + v_i) + w_i = u_i + (v_i + w_i)$$

لكل $i = 1, 2 \, , \, \ldots\ldots, n$. لذلك فإن

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

نظراً لمكوناتها المتقابلة متساوية.

ب- هنا تعلم أن (0،......، 0، 0) =0 . لذلك فإن:

$$u + 0 = (u_1 , u_2 , \ldots, u_n) + (0,0,\ldots,0)$$
$$= (u_1+0 , u_2+0 , \ldots, u_n+0) = (u_1 , u_2 , \ldots, u_n)$$

أي $u + 0 = u$

ج- نظراً لأن

$$-u = -(u_1 , u_2 , \ldots, u_n) = (-u_1 ,- u_2 , \ldots,- u_n)$$

فإن $u + (-u) = (u_1 , u_2 , \ldots, u_n) + (-u_1 ,- u_2 , \ldots,- u_n)$

$$= (u_1 - u_1 , u_2 - u_2 , \ldots, u_n- u_n) = (0,0,\ldots,0) = 0$$

د- من التعريف نعلم أن $u_i+ v_i$ هو المكون رقم i من المتجه $u + v$. كذلك $v_i+ u_i$ هو المكون رقم i من المتجه $v + u$. ولكن v_i و u_i أعداد حقيقية . ويسري عليها قانون التبديل لذلك فإن:

$$u_i+ v_i = v_i+ u_i \qquad i= 1, 2,\ldots,n$$

لذلك ستكون $u+ v = v+ u$ نظراً لأن مكوناتها المتقابلة متساوية.

هـ- نظراً لأن $u_i+ v_i$ هو المكون رقم i من المتجه $u + v$ ، فإن: $k(u_i+ v_i)+$ ستكون المكون رقم i من المتجه $k (u+ v)$. وبما أن $k v_i$ و $k u_i$ هي المكونات رقم i من المتجه $k u$ و $k v$ بالتتالي ، فإن $k u_i+ k v_i$ هي المكون رقم i من $(k u + k v)$. ولكن k , v_i , u_i أعداد حقيقية. لذلك فإن : $k(u_i+ v_i)=k u_i+k v_i$ لكل $i= 1, 2,\ldots,n$ لذلك فإن:

$k (u+ v) = k u+k v$ تساوي مكوناتها المتقابلة.

و- لاحظ أن علامة الجمع الأولى ترمز لجميع قياسيات $k^1,\ k$ بينما علامة الجمع الثانية ترمز لجميع متجهات $k^1\ u,\ \ k\ u$. ومن التعريف نعلم أن $(k+k^1)u_i$

هو المكون رقم i من المتجه $(k+k^1)u$. ولأن $k\ \ u_i$ و $k^1\ u_i$ هما المكونان رقم i من المتجه $k\ u + k^1\ u$ ولكن $k^1\ ,\ \ k$ و u_i أعداد حقيقية.

لذلك:

$$(k+k^1)u_i = k\ u_i + k^1\ u_i \qquad i= 1, 2,\ldots,n$$

لذلك فإن $k\,u + k^1\,u = (k+k^1)u$ لتساوي مكوناتهما المتقابلة.

ز- نظـراً لأن $k^1\,u_i$ هـو المكـون رقـم i مـن المتجـه $k^1\,u$ ، فـإن:

$k(k^1\,u_i)$ هـي المكـون رقـم i مـن المتجـه $k(k^1\,u)$. ولكـن

$(k\,k^1)u_i$ هـو المكـون رقـم i مـن المتجـه $(k\,k^1)u$ ، ونظـراً لأن

$k\,k^1$ و u_i أعداد حقيقية. فإن:

$(k\,k^1)u = k\,(k^1\,u)$ لتساوي مكوناتها المتقابلة.

ح- من التعريف نعلم أن

$$1\,.\,u = 1\,(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n) = (1\,u_1, 1\,u_2, \ldots\ldots, 1\,u_n)$$
$$= (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n) = u\ .$$

➢ **مضروب النقطة**

إذا كان $u\,,\,v$ متجهين في R^n أي:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{و} \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

فإن مضروب النقطة أو المضروب الداخلي أو القياسي للمتجهين u و v ويرمز إليه بالرمز $u\ .\ v$ يعرف بأنه القياسي الذي نحصل عليه بضرب المكونات المتقابلة وجمع المضاريب الناتجة ، أي:

$$u\,.v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots.. + u_nv_n$$

ويقال عن متجهين أنهما متعامدان إذا كان مضروب النقطة بالنسبة لهما يساوي صفراً أي

$$u\,.v = 0$$

تدريب (19)

إذا كان $u = (1,-2,3,-4)$ و
$v = (5,-4,5,7)$

أسئلة التقويم الذاتي (7)

> ؟
>
> إذا كـــــــــــان $u=(2,1,-3,4)$ و $v=(3,4,-2,1)$
>
> و $w=(5,-2,3,7)$ ، أوجد $u.v$ و $u.w$

➢ **خصائص مضروب النقطة الأساسية في R^n تتضمنها النظرية التالية:**

نظرية 2:

لأي متجهات $w,\ v,\ u \in R^n$ وأي قياسي k يصح :

أ- $(u+v).w = u.w + v.w$

ب- $(ku).v = k(u.v)$

ج- $u.v = v.u$

د- $u.u \geq 0$, $u.u = 0$ إذا كان وفقط إذا كان $u=0$

البرهان:

أ- بما إن: $u+v = u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots\ldots, u_n+v_n$

فإن:

$$(u+v).w = (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + \ldots\ldots + (u_n+v_n)w_n$$

$$= u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + \ldots\ldots + u_nw_n + v_nw_n$$

$$= (u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots\ldots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \ldots\ldots + v_nw_n)$$

$$= u.w + v.w$$

ب- نظراً لأن $ku = (ku_1, ku_2, \ldots\ldots, ku_n)$ فإن:

$$(ku).v = (ku_1v_1, ku_2v_2, \ldots\ldots, ku_nv_n)$$

$$= k(u_1v_1, u_2v_2, \ldots\ldots, u_nv_n) = k(u.v)$$

ج- $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n = v \cdot u$

د- بما أن $u_i^2 \geq 0$ لكل i ، وحاصل جمع أعداد غير سالبة يكون غير سالب فإن:

$$u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$$

فإذا كان $u^2 = 0$ لكل i فيلزم أن يكون $u_i^2 = 0$ لكل i وأيضاً إذا كان $u_i^2 = 0$ فإن $u^2 = 0$.

إذا كان $v, u \in R^n$: $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ و $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

فإن المسافة بين النقطتين u و v ، وتكتب $d(u, v)$ تعرف كالتالي:

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

أما مقياس (أو طول) المتجه u ويكتب $\| u \|$ فيعرف بأنه الجذر غير السالب للمضروب $u \cdot v$:

$$\| u \| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

ومن النظرية 2 يتبع أن $u \cdot u \geq 0$ و لذلك فإن الجذر التربيعي موجود . لاحظ أن:

$$d(u, v) = \|(u - v)\|$$

مثال

لتكن $u = (1,3,5,-2)$ و $v = (2,4,-5,1)$ ،

أوجد $d(u, v)$ و $\| v \|$

الحل:

$$d(u, v) = \sqrt{(1-2)^2 + (3-4)^2 + (5-(-5))^2 + (-2-1)^2}$$

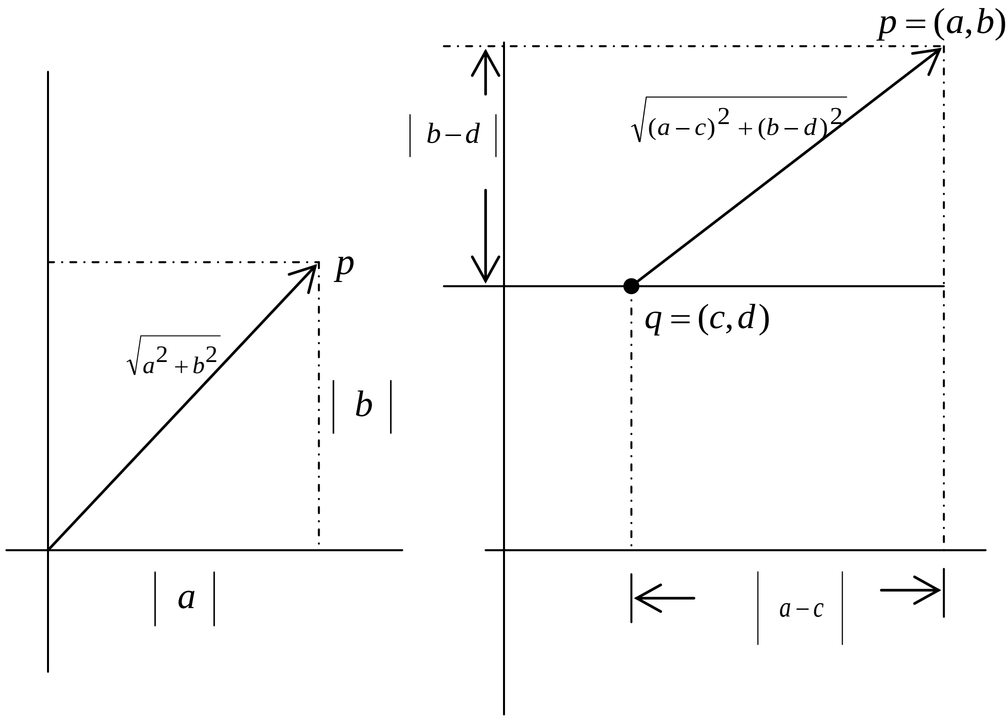
$$= \sqrt{1+1+100+9} = 111$$

$$\| \; v \; \| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{4+16+25+1} = \sqrt{46}$$

إذا تأملنا نقطتين $p = (a\ ,b)$ و $q = (c, d\ )$ في $\boldsymbol{R}^2$ ، فإن

$$\| \; p \; \| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad , d(p,q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

وذلك يعني أن $\| \; p \; \|$ تقابل الطول الأقليدي المعتاد لسهم من نقطة الأصل إلى النقطة p . كذلك $d(p,q)$ تعادل المسافة الأقليدية المعتادة بين النقطة $q\ , p$ كما في الرسم التالي



كذلك تصح نتيجة مشابهة للنقاط على الخط R والفضاء R^3

➢ **ملاحظة:**

يسمى المتجه e متجهاً آحادياً إذا كان مقياسه يحقق $\| e \| = 1$. لاحظ أنه يصح لأي متجه $u \in R^n$ أن المتجه $e_u = \frac{u}{\| u \|}$ هو متجه آحادي له نفس اتجاه u .

نظرية 3: (كوشي – شوارتس)

لأي متجهين $u, v \in R^n$ يصح التالي:

$$| u \, . \, v | \le \| u \| \; \| v \|$$

البرهان: نبرهن الصيغة القوية الآتية:

$$| u \, . \, v | \le \sum_{c=1}^{n} | u_i \; v_i | \le \| u \| \; \| v \|$$

إذا كان $u = 0$ أو $v=0$ ، فإن المتباينة أعلاه تصير

$$0 \le 0 \le 0$$

وهي صحيحة . لذلك نحتاج فقط لأن نبرهن الحالة عندما تكون $u \ne 0$ و $v \ne 0$

أي عندما تكون $\| u \| \ne 0$ و $\| b \| \ne 0$. بالنسبة للمتباينة اليسرى نلاحظ أن :

$$|u \, .v| = |u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n| \le |u_1 v_1| + |u_2 v_2| + ... + |u_n v_n| = \sum_{i=i}^{n} |u_i v_i|$$

وهذا يبرهن الجانب الأيسر من المتباينة أعلاه. والآن لبرهان المتباينة اليمنى نلاحظ أنه يصح لأي $y, x \in R$ أن:

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

وذلك يكافئ المتباينة $2 \; x \; y \le x^2 + y^2$

الآن نضع $x = \frac{|u_i|}{\| u \|}$ و $y = \frac{|v_i|}{\| v \|}$ فنحصل على:

$$2\frac{|u_i|\ |v_i|}{\|u\|\ \|v\|} \le \frac{|u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{|v_i|^2}{\|v\|^2}$$

ولكننا نعرف من تعريف مقياس المتجه أن:

$$\| u \|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \quad \text{وكذلك} \quad \| v \|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

لذلك نحصل بالجمع على المؤشر i وباستعمال الخاصية $|u_i v_i| = \| u_i \| \| v_i \|$ على التالي:

$$\frac{2\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i|}{\|u\|\ \|v\|} \le \frac{\sum |u_i|^2}{\|u\|^2} + \frac{\sum |v_i|^2}{\|v\|^2}$$

$$= \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} + \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 2$$

في هذه المتباينة نحصل على التالي:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i|}{\|u\|\ \|v\|} \le 1$$

وهذا يقودنا إلى المتباينة المطلوب برهانها:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \le \|u\|\ \|v\|$$

وبهذا نكون قد برهننا شِقي المتباينة الأقوى . وبالتالي تصح المتباينة التي أردنا برهانها:

$$| u \cdot v | \leq \| u \| \; \| v \|$$

باستعمال متباينة كوشي – شوارتس نستطيع الآن أن نعرف الزاوية θ بين أي متجهين اثنين $u, v \in R^n$ بالصيغة التالية:

$$Cos\,\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \; \|v\|}$$

لاحظ أنه إذا كانت $u.v = 0$ فإن $\theta = 90^\circ$ (أو $\frac{\pi}{2}$) وهذا يتفق مع تعريفنا للتعامد.

وهناك نظرية تعرف **بمتباينة مينكو فسكي** يمكن برهانها باستعمال متباينة كوش شفارتز هي الآتية:

نظرية:

إذا كانت $u, v \in R^n$

فإن $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ هذه النظرية تعميم لمتباينة المثلث.

البرهان:

إذا كان $\| u + v \| = 0$ ، فإن المتباينة تصح لأن الجهة اليمنى غير سالبة ، لذلك يمكن أن نعالج الحالة $\| u + v \| \neq 0$ لهذا الغرض نلاحظ أن

$| u_i + v_i | \leq | u_i | + | v_i |$ (متباينة المثلث لأي أعداد v_i, u_i) لذلك :

$$\|u + v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^2$$

$$= \sum |u_i + v_i| \; |u_i + v_i| \leq \sum |u_i + v_i| (|u_i| + |v_i|)$$

$$= \sum |u_i + v_i| \; | u_i | + \sum (|u_i + v_i| \; |v_i|)$$

والآن **بإستعمال متباينة كوش . شفارتس** نجد أن:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i| \ |u_i| \le \|u+v\| \ \|u\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i| \ |v_i| \le \|u+v\| \ \|v\|$$

لذلك نستنتج أن:

$$\| u+v\|^2 \le \| u+v\| \ \| u\| + \| u+v\| \ \| v\|$$

$$= \| u+v\| \ (\| u\| + \| v\|)$$

وبالقسمة على $\| u+v\|$ نحصل على المتباينة المطلوبة

$$\| u+v\| \le \| u\| + \| v\| \qquad \#$$

أسئلة تقويم ذاتي (8)

إ ذ ا كـا ن $z = 2+3i$ و $w = 5-2i$

فـأ و جد $z+w$ ، $z \ w$ ، $\bar{z}$ ، $\frac{w}{z}$

5. المتجهات في الفضاء المركب C^n

تعرف الأعداد المركبة بأنها أزواج مرتبة من أعداد حقيقية *(a,b)* لها القواعد الآتية في المساواة والجمع والضرب

$$(a, b) = (c, d)$$

إذا كان وفقط إذا كان $a = c$ و $b = d$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) . (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

وهي نظام جبري يسمى حقلاً ويشبه نظام الأعداد الحقيقية في صفات الجمع والضرب وغيرها . ومثلما نستعمل الرمز R ليعني مجموعة الأعداد الحقيقية ، فإننا نستعمل الرمز C ليرمز للأعداد المركبة .

وأول ما نلاحظه أن الأعداد الحقيقية هي فئة جزئية من الأعداد المركبة إذا كتبناها في شكل أزواج مرتبة من النوع $(a ،0)$ وذلك يعني أننا نوحد أو نساوي بين العدد الحقيقي a والعدد المركب $(a ،0)$ وذلك لأن نتائج جمع وضرب الأعداد ستكون متساوية ،مثلاً:

$$(a ،0) + (b ،0) = (a+b ،0) \quad و \quad (a ،0)\ (b ،0) = (ab ،0)$$

تماماً مثلما يكون $a . b = a\, b$ و $a + b = a+ b$

وما علينا إلا أن نستبدل العدد المركب $(a ،0)$ بالعدد الحقيقي a للانتقال للأعداد الحقيقية أو نستبدل العدد الحقيقي a بالعدد المركب $(a ،0)$ للانتقال للأعداد المركبة .

يرمز للعدد المركب $(1، 0)$ بالحرف i الذي يملك الخاصية المهمة:

$$i^2 = i\ .\ i\ = (0,1)\ (0,1) = (-1,0) = -1$$

أو بصورة أخري $\quad i = \sqrt{-1}$

وباستعمال الصيغ:

$$(a , b) = (a , 0) + (0 , b) , (0 , b) = (b , 0) (0 , 1)$$

نحصل على التمثيل:

$$(a , b) = (a , 0) + (0 , b) = (a , 0) + (b ,0) (0 ,1) \equiv\ a + i\, b$$

الرمزية $a + i\, b$ أسهل في الاستعمال من الرمزية (a , b) ، وذلك لأننا نستطيع أن نحصل على جمع وضرب أعداد مركبة فقط بالجمع والضرب العاديين مع ملاحظة أن $i^2 = 1$:

$$(a + b\, i\ ) + (c + d\, i) = a + c + b\, i + d\, i\ = (a + c\ )+i\ (b+d\ )$$

$$(a + b\, i\ ) . (c + d\, i) = a\ c + b\, c\, i + a\, d\, i + b\, d\ i^2$$
$$=(a\ c - b\, d\ ) + (b\, c + a\, d\ )\, i$$

وذلك بدون استذكار تعريف الجمع والضرب الذي قدمناه آنفاً .

نرمز للعدد المركب بالحرف z أي $z = a + b\,i$ ، كذلك نعرف العدد المركب ونقول ان a هو الجزء الحقيقي ، و b هو الجزء الخيالي للعدد المركب Z ، نعرف العدد المرافق للعدد المركب z ونرمز له بالحرف $\bar{z}$ بالصيغة $\bar{z} = a - bi$.

لاحظ أن $z\ \bar{z} = a^2 + b^2$. و إذا كان $z \neq 0$ فإن العدد العكسي من z الذي نرمز له بالحرف z^{-1} والقسمة على z تتخذ الشكل الآتي:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}\, i \qquad \text{و} \qquad \frac{w}{z} = w\ z^{-1}$$

ونعرف هنا أيضاً سالب العدد z بالآتي $-z = -1 \,.\, z$

كما نعرف عملية الطرح بين عددين مركبين z و w بالآتي: $w - z = w + (-z)$

ومثلما نمثل الأعداد الحقيقية بنقاط على الخط المستقيم فإننا نمثل الأعداد المركبة بنقاط على المستوي . على وجه التحديد نجعل النقطة $(a\ ,\ b)$ في المستوى تمثل العدد المركب $Z = a + bi$ أي العدد المركب الذي جزؤه الحقيقي هو a وجزؤه الخيالي هو b .

أيضاً القيمة المطلقة للعدد المركب z أو طوله تكون كالتالي:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وهي تعني طول المتجه $(\ a\ ,\ b\ )$ وتكافئ الصيغة $|z| = \sqrt{z\ \bar{z}}$

تدريب (20)

إذا كان $z = 2 + 3i$ و $w = 12 - 5i$

فأوجد $|z|$ ، $|w|$

بعد ذلك ننظر إلى مرتبات عددها n من أعداد مركبة ونرمز لها بالحرف C^n ونسميها الفضاء النوني للمركب . ومثل ما فعلنا في حالة الأعداد الحقيقية بتكوين R^n ، فإننا ننظر إلى عناصر C^n على أنها نقاط أو متجهات بينما تسمى عناصر C قياسيات.

نعرف الجمع الاتجاهي والضرب القياسي في C^n كالتالي:

$$(z_1, z_2, \ldots\ldots z_n) + (w_1, w_2, \ldots\ldots w_n) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots\ldots z_n + w_n)$$

$$z(z_1, z_2, \ldots\ldots z_n) = (z\ z_1, z\ z_2, \ldots\ldots, z\ z_n)$$

حيث $z\ , z_i \in C$. لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

مثال:

$$(2+3i, 4-i, 3) + (3-2i, 5i, 4-6i) = (5+i, 4+4i, 7-6i)$$

$$2i(2+3i, 4-i, 3) = (-6+4i, 2+8i, 6i)$$

الآن ليكن $u = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ و $v = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

أيّ متجهات في C^n . نعرف مضروب النقطة أو المضروب الداخلي أو أيضاً المضروب القياسي للمتجهين u و v كالتالي:

$$u\ .\ v = z_1\ \overline{w}_1 + z_2\ \overline{w}_2 + \ldots\ldots + z_n\ \overline{w}_n$$

لاحظ إن هذا التعريف يتقلص إلى التعريف السابق في حالة R^n إذا كان u و v متجهات حقيقية لأن في هذه الحالة يكون $w_i = \overline{w}_i$ أما قياس u فيعرف كالتالي:

$$\|u\| = \sqrt{u\ .\ u} = \sqrt{z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + \ldots\ldots + z_n\overline{z}_n}$$

$$= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots\ldots + |z_n|^2}$$

لاحظ أن $u \,.\, u$ وبالتالي $\| u\|$ أعداد حقيقية وموجبة عندما يكون $u \neq 0$
و 0 في حالة $u = 0$.

مثال :

ليكن:

$$v = (3-2i, 5, 4-6i) \quad \text{و} \quad u = (2+3i, 4-i, 2i)$$

في هذه الحالة يصح

$$u \,.\, v = (2+3i)\ (\overline{3-2i}) + (4-i)\ (\overline{5}) + 2i(\overline{4-6i})$$

$$= (2+3i)\ (3+2i) + (4-i)\ (5) + 2i(4+6i)$$

$$= 13i + 20 - 5i + 8i - 12 = 8 + 16i$$

$$u \,.\, u = (2+3i)\ (\overline{2+3i}) + (4-i)\ (\overline{4-i}) + (2i)(\overline{2i})$$

$$= (2+3i)\ (2-3i) + (4-i)\ (4+i) + (2i)(-2i)$$

$$= 4+9+16+1+4 = 34$$

$$\| u\| = \sqrt{u \,.\, u} = \sqrt{34}$$

الفضاء C^n مع العمليات المُعرَّفة أعلاه للجمع والضرب القياسي وضرب النقطة يسمى الفضاء الأقليدي النوني المركب .

الفضاء الأقليدي النوني : هو مجموعة كل المرتبات $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ ذات الطول n حيث $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \in C$ أي أن :

$$C^n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \in C\}$$

وتمثل العنصر $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ متجهاً أو نقطة في C^n ، وكما تسمى الأعداد $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ مركبات أو إحداثيات ذلك المتجه ، أو تلك النقطة.

المتجـه $(1 , \frac{2}{\sqrt{3}})$ هـو متجـه ذو إحـداثين إذاً هـو عنصـر فـي C^2 ، أمـا المتجـه $(1 , \sqrt{5} , 7 , -6)$ فهو عنصر في C^4 وذلك لوجود أربعة إحداثيات فيه.

تكون المرتبات متساوية أي

$$x = (x_1, x_2, \ldots\ldots , x_n) \quad , \quad y = (y_1, y_2, \ldots\ldots , y_m)$$

إذا و فقط إذا كانت $n = m$ وكانت $x_i = y_i \quad \forall i \quad = 1,2,\ldots\ldots , n \quad = m$

مثال

أوجد قيم x , y , z التي تجعل المتجهين :

$$u = (x + y \;,\; y + z \;,\; z + x)$$
$$v = (0 \;,\; 4 \;,\; 6)$$

متساويين

الحل

من التعريف السابق للتساوي يكون

$$x + y = 0 \;,\; y + z = 4 \;,\; z + x = 6$$

وبعد حل هذه المعادلات نجد أن :

$x = 1, y = -1 , z = 5$

تدريب (21)

احسب كلاً من $u+v$, $5u - v$, $u+q$

إذا كان $u = (3 , 2, -1)$, $v = (2 ,4 ,9)$, $q = (5 ,7,1,-8)$

تدريب (22)

إذا كان :

$$y(2,1,9) + x(1,-1,0) + z(6,-2,-9) = (7,5,36)$$

فأوجد قيم x , y, z التي تحقق المعادلة السابقة (إن كان ذلك ممكناً)

ملاحظ

إذا كنا قد عرفنا $u . v$ بالصيغة

$u \, . \, v = z_1 \, w_1 + z_2 \, w_2 + ...+ z_n \, w_n$ فإنه سيكون من

الممكن أن تكون $u . u = 0$ حتى في حالة $u \neq 0$

مثلاً: إذا كان $u = (1, i, 0)$ فإن $u \, . \, u = 1 - 1 = 0$. أيضاً في

الواقع $u \, . \, u$ قد لا يكون عدداً حقيقياً .

أسئلة التقويم الذاتي (9)

؟

(أ) إذا كان

u = (3,4,5) , v = (-4,6,-7) , w = (5,8,1,9)

فأوجد :

1) 4u+v

2) u-v

3) -5v

4) 2u-v-w

(ب) أوجد قيم x , y , z التي تحقق المعادلة

$x(1,1,0) + y\,(1,0,1) + z\,(0,1,1) = (10,9,17)$

الخلاصة

في القسم الأول من هذه الوحدة عرفنا المتجه أنه كمية لها مقدار واتجاه وعرفنا تمثيلها هندسياً على شكل أسهم في مستوى تُعْطي الاتجاهات ويُعْطي طولها مقدار المتجه وعرفنا كذلك أن لكل متجه نقطة بداية ونقطة نهاية.

وفي جبر وقوانين المتجهات عرفنا متى تكون المتجهات متساوية وكيف تحصل على جمع متجهين والذين يعرف "بقانون متوازي الأضلاع" وعرفنا المتجه الصفري الذي يقوم بدور مهم مع المتجهات مشابه الدور الذي يقوم به الصفر مع الاعداد ، وعرفنا كذلك أن للمتجه a نظير له نفس المقدار ولكنه في الاتجاه المعاكس ويرمز له بالرمز a – وكذلك عرفنا قانوني التفريع:

$$(p+q)a = pa + qa$$

$$p(a+b) = pa + pb$$

حيث p , q قياسيان، b , a متجهان

وعالجنا كل هذه القوانين والخصائص بالتمثيل الهندسي.

بعد هذا العرض الهندسي للمتجهات قمنا بتمثيلها في مستوى وذلك بإدخالها في نظام إحداثيات مستطيلة له نقطة.

وفي القسم الثانى عرفنا مضروب النقطة لمتجهين الذي ينشأ في مسائل هندسية عندما يراد إيجاد مكون متجه في اتجاه متجه آخر أو مسائل فيزيائية عندما يراد مقدار العمل الذي تقوم به قوة لا تعمل في اتجاه حركة الجسم الذي تعمل عليه. وعالجنا كذلك في هذا القسم إسقاط متجه على آخر، والعمل لحاصل ضرب نقطة.

في القسم الثالث ، المتجهات في الفضاء حيث قمنا بتوسيع مفهوم المتجه ليكون في الفضاء ذي ثلاثة أبعاد بدلاً من المستوى ذي البعدين مما أَلزمنا إدخال نظام إحداثيات ثلاثية يمكن بوساطته وصف حركه أى جسم بإعطاء مسافاته في كل لحظة من ثلاثة محاور متعامدة، وعالجنا حاصل الضرب القياسي:

$a.b=|a||b|\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين a,b ، $0\leq\ \theta\ \ \leq\ \pi$ وأيضا $a.b=0$ إذا كان وفقط إذا كان a عمودي على b (ويعتبر المتجه الصفري عمودياً على كل متجه). وعرفنا كذلك زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه.

قسم المتجهات في الفضاء R^n برهنا الصفات الأساسية للمتجهات في الفضاء R^n تحت عمليات الجمع الاتجاهي والضرب القياسي، وعرفنا كذلك أن المتجهان يكونان متعامدان إذا كان مضروب النقطة بالنسبة لها يساوى صفراً.

القسم الخامس عالجنا المتجهات في الفضاء المركب C^n من حيث المساواة والجمع والضرب ويسمى النظام الجبري حقلاً ويشبه نظام الأعداد الحقيقية في صفات الضرب والجمع وغيرها. واخيراً عرفنا أن الفضاء C^n مع عمليات الجمع والضرب والقياسي وضرب النقطة يسمى الفضاء الاقليدى النوني المركّب.

لمحة مسبقة عن الوحدة التالية

انتهيتَ عزيزي الدَّارس من الوحدة الأولى التى عالجت موضوع المتجهات ، وسوف نتعرف بعون الله في الوحدة التالية من هذا المقرر على موضوع نظم دراسة المعادلات الخطية والتى ستتابع فيها الطرق المنتظمة لحل هذه الانظمة، وسوف نتعرف على النظام الخطي المتجانس وغير المتجانس والعلاقة الأساسية بين النظامين، وفي طرق حل نظام المعادلات الخطية سنتعرف على طريقة جاوس التخفيضية، وسنتعرف ايضاً في الوحدة التالية على الحل الصفري والحل غيرالصفري.

إجابات التدريبات

تدريب (1)

الطرف الأيمن = $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \overrightarrow{ab} + (\overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca})$

$\overrightarrow{ba} + (-\overrightarrow{ba}) = 0$

تدريب (2)

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} = 3i + 6j - 2k$$

$$\left|\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}\right| = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} \text{ (وحدة المتجه) } = \frac{\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}}{\left|\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}\right|} = \frac{3i + 6j - 2k}{7} = \frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j - \frac{2}{7}k$$

تدريب (3)

$$\left|\frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j - \frac{2}{7}k\right| = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$$

تدريب (4)

$$\overrightarrow{r_1} = 2i + 4j + 3k$$

$$\overrightarrow{r_2} = i - 5j + 2k$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} = 3i - j + 5k$$

تدريب (5)

باستعمال القواعد (8) − (10) نجد:

$$\boldsymbol{a} + 3\,\boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{c} = (3,2) + 3(2,5) \;\; -2\,(-3,1)$$

$$= (3+6+6 \text{ ، } 2+15-2)$$

$$= (15 \text{ ، } 15)$$

أو

$$\boldsymbol{a} + 3\,\boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{c} = 15i + 15\,j$$

وبالتالي فإن المقدار سيكون:

$$|15i + 15j| = \sqrt{15^2 + 15^2} = \sqrt{225 + 225} = \sqrt{450}$$

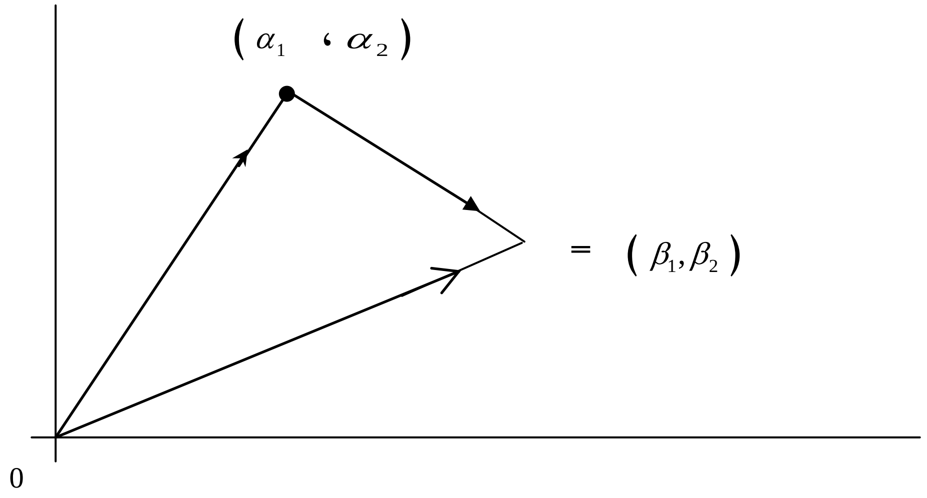
$$= 15\sqrt{2}$$

تدريب(6)

إذا رسمنا المتجهات الموضعية للنقاط B , A أي المتجهين الذين يصلان 0 بالنقاط B , A ، فإننا نجد أن:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

كما في الرسم



لذلك سيكون

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \;=\; (\beta_1, \beta_2) - (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2)$$

أو

$$\overrightarrow{AB} \;=\; (\beta_1 - \alpha_1)i + (\beta_2 - \alpha_2)\,j$$

مثلاً إذا كان $A = (-2, 3)$, $B = (4, -1)$، فإن:

$$\overrightarrow{AB} = (4-(-2),-1-3) = (6,-4) = 6i - 4j$$

تدريب (7)

(2a+3b)**.** (5b+2c) = 2a .(5b+2c) + 3b .(5b + 2c)
= 10ab + 4ac + 15bb +6bc =
10(3×1+1×-3+-2×4)+4(3×2+1×3+-2×5)
15(1^2+3^2+4^2)+6(1×2-3×3+4×5) =
10×-8+4×-1+15×26+6×13 = 384

تدريب (8)

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \,.\, (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} \,.\, (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{b} \,.\, (\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$$

$$= \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{d}$$

$$|a+b|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \,.\, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a.a+a.b+b.a+b.b}$$

$$= |a|^2 + 2a.b + |b|^2$$

هنا تعني $2\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b}$ التعبير $2(\boldsymbol{a.b})$ وعموماً $p\,\boldsymbol{a}\,.\boldsymbol{b} = p\,(\boldsymbol{a}\,.\,\boldsymbol{b})$ بالنسبة للمتجهات الوحدوية $\boldsymbol{i} = (1,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1)$ يعني ذلك .

$i.i = 1(1) + 0(0) = 1$ و $i.j = 1(0) + 0(1) = 0$ و $j.j = 0(0) + 1(1) = 1$

أي باختصار $i.i = 1$ و $i.j = j.i = 0$ و $j.j = 1$

باستعمال هذه الصيغ ، إذا كان $a = \alpha_1 i + \alpha_2 j$:

نجد أن :

$$a.i = (\alpha_1 i + \alpha_2 j).i = \alpha_1 i.i + \alpha_2 j.i = \alpha_1$$

وكذلك:

$$a.j = (\alpha_1 i + \alpha_2 j).j = \alpha_1 i.j + \alpha_2 j.j = \alpha_2$$

تدريب (9)

المتغيران ***b* , *a*** سيكونان متوازيين أو في استقامة واحدة إذا كان $\boldsymbol{a} = p\,\boldsymbol{b}$ لأي قياسي p $\neq 0$. ذلك يعني:

$$3i + j = p\,(-2i + t\,j)$$

وبمساواة المكونات نجد:

$$-2\,p = 3 \qquad , \qquad p\,t = 1$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على القيم $p = -\frac{3}{2}$ و $t = \frac{1}{p} = -\frac{2}{3}$.

أما بالنسبة للتعامد فإن ***b* , *a*** يتعامدان إذا كان $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} = 0$

أي

$$(3i + j).(-2i + tj) = -6 + t = 0$$

أي

$$t = 6$$

تدريب (10)

هنا تجد

$$a.b = 1(2) - 1(1) = 1, \qquad |a| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|b| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

لذلك

$$Cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

والذي يعني

$$\theta = arcCos\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71.6^{\circ}$$

تدريب (11)

$$|a| = \sqrt{1^2 \quad 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$|b| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$= \cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \therefore \theta = 60^{\circ}$$

تدريب (12)

$$a.b = 3(5) - 2(-1) = 13, \qquad |b| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

لذلك

$$comp_b a = \frac{a.b}{|b|} = \frac{13}{\sqrt{26}}$$

و

$$Proj_b\, \boldsymbol{a} = (Comp_b\, \boldsymbol{a})\, \mathbf{u}_b = \frac{13}{\sqrt{26}}\left(\frac{5i - j}{\sqrt{26}}\right)$$

$$= \frac{5}{2} i - \frac{1}{2} j$$

وأيضاً

$$\boldsymbol{a} - Proj_b\, \boldsymbol{a} = (3i + 2j) - \left(\frac{5}{2} i - \frac{1}{2} j\right)$$

$$= \frac{1}{2} i + \frac{5}{2} j$$

وهذا المتجه الأخير معامد للمتجه $\boldsymbol{b}$. لذلك فإن $\boldsymbol{a}$ يساوي

$$a = (\frac{5}{2} i - \frac{1}{2} j) + (\frac{1}{2} i + \frac{5}{2} j) = 3i + 2j \qquad \#$$

تدريب (13)

$$\left|15i-12j+16k\right|=\sqrt{15^2+(-6)^2+16^2}=\sqrt{625}=25$$

لذلك $u=\dfrac{15i-12j+16k}{\left|15i-12j+16k\right|}=\dfrac{3}{5}\ i-\dfrac{12}{25}\ \ j+\dfrac{16}{25}\ k$

تدريب (14)

أولاً نجد $a.b=1(-4)+(-2)(1)+4(-2)=-14$

و $|b|=\sqrt{(-4)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$

$$|a|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}$$

لذلك $Cos\theta=\dfrac{a.b}{|a||b|}=\dfrac{-14}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=-\dfrac{2}{3}$

$$\therefore\ \theta\approx131.8^\circ$$

تدريب (15)

$\because$ **a .b =** $3\times5+0\times5=15$, $|a|=3$, $|b|=5\sqrt{2}$

$$Cos\theta=\frac{a.b}{|a|.|b|}=\frac{15}{3\times5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ \theta=45^o$

تدريب (16)

أولاً نجد $a.b=2(1)+(-3)(2)+1(-2)=-6$

$$|b|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

فإن $comp_b a=\dfrac{a.b}{|b|}=\dfrac{-6}{3}=-2$

$$proj_b a=\frac{(a.b)b}{|b|^2}=\frac{-6(i+2j-2k)}{9}$$

$$=-\frac{2}{3}i-\frac{4}{3}j+\frac{4}{3}k$$

المتجه $proj_b a$ موازي للمتجه ***b*** والمتجه

$$\boldsymbol{a} - Proj_b\, \boldsymbol{a} = (2i+3j+k)-(-\frac{2}{3}i-\frac{4}{3}j+\frac{4}{3}k)$$

$$=\frac{8}{3}i-\frac{5}{3}j-\frac{1}{3}k$$

معامد للمتجه ***b*** . لذلك تمثيل ***a*** كمجموع متجه موازي ل ***b*** ومتجه عمودي على ***b*** سيكون

$$a=(-\frac{2}{3}i-\frac{4}{3}j+\frac{4}{3}k)+(\frac{8}{3}i-\frac{5}{3}j-\frac{1}{3}k)$$

تدريب (17)

بما إن: $Cos\theta_3=\frac{1}{2},\quad Cos\theta_2=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad Cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

فإن: $Cos^2\theta_1+Cos^2\theta_2+Cos^2\theta_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq 1$

$\therefore$ الجواب لا

تدريب (18)

$u+v$ =(2+1, -4+3 , 3+5 , 1-2)= (3, -1, 8 , -1)

$3u$ =(2, -4 , 3 , 1) = (3.2 , 3.(-4) , 3.3 , 3.1)

= (6 , -12 , 9 , 3)

$4u$-$3v$ =(8, -16 , 12 , 4) + (-3, -9, -15 , 6)

=(5 , -25 , -3 , 10)

تدريب (19)

بما إن $\quad u \,.\, v = 1.5 + (-2).(-4) + 3.(5) + (-4).7$

$= 5 + 8 + 15 - 28 = 0$

فإن u و v متجهان متعامدان .

تدريب (20)

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|w| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

تدريب (22)

الطرف الأيسر يساوي:

(3y ,y,9y)+(x,-x,0)+(6z,-2z,-9z) = (2y +x+6z , y-x-2z , 9y -9z)

وبمساواة الطرف الأيسر بالطرف الأيمن نحصل على المعادلات:

2y + x + 6z = 7……….(1)

y – x - 3z = 5……......(2)

9y - 9z = 36………(3)

بجمع (1) و (2) ينتج

y + z = 4

وهذا يناقض (3) والتي تكون معادلتها بعد القسمة على 9 :

y – z = 4

تدريب (21)

حتى نحسب كلاً من u + v نجمع إحداثيات u للإحداثي المناظر في v

u + v = (3,2,-1) + (2,4,9) = (5,6,8)

وكذلك عند حساب 5u – v نضرب كلاً من إحداثيات u بالعدد 5 ونجمع هذا الناتج مع الإحداثيات المناظرة لـ v –

5u – v = 5(3,2,-1) + (-1)(2,4,9) = (15,6,-5) + (-2,-4,-9) = (13,2,-14)

أما u + q فهو غير معرف لأن

$v \in C^3 \;,\; q \in C^4$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة التقويم الذاتي (1)

(أ) ليس متجه   (ب) ليس متجه

(ج) متجه   (د) متجه

(هـ) ليس متجه   (و)متجه

(ز) ليس متجه   (ح)متجه

(ط)متجه

أسئلة التقويم الذاتي (2)

(أ)

1- $\vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} = (\vec{ab} + \vec{bc}) + \vec{cd}$

$\vec{ac} + \vec{cd} = \vec{ad}$

2- $\left\langle \vec{ab} + \vec{bc} + \vec{cd} + \vec{da} \right\rangle + \vec{da} = \vec{ad} + \vec{da} = 0$

(ب)

$\because \quad \vec{ac} = \vec{ab} + \vec{bc} \ldots\ldots\ldots(1)$

$\because \quad \vec{bd} = \vec{ba} + \vec{ad} \ldots\ldots\ldots(2)$

بالجمع ينتج :

$\vec{ac} + \vec{bd} = \vec{ab} + \vec{ba} + \vec{bc} + \vec{ad}$

$\Rightarrow \vec{ac} + \vec{bd} = 0 + 2\vec{ad} + \vec{ad}$ **لان** $\vec{bc} = 2\vec{ad}$

$\Rightarrow \vec{ac} + \vec{bd} = 3\vec{ad}$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

(أ)

مقدار $12i + 5j$

$$|12i+5j| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

لذلك

$$\boldsymbol{u} = \frac{12i+5j}{|12i+5j|} = \frac{12}{13}i + \frac{5}{13}j$$

(ب)

1) $\boldsymbol{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) \;=\; \therefore |a| = \sqrt{\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle^2 + \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

$\therefore$ $\boldsymbol{a}$ متجه وحدة.

2) $\boldsymbol{b} = (3,4)$

$\therefore |b| \;=\; \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ $\boldsymbol{b}$ لا يمثل متجه وحدة ، نُوجد متجه الوحدة للمتجه $\boldsymbol{b}$

$$\therefore\ \boldsymbol{b} \;=\; \frac{\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{1}{5}\times(3,4) - \Rightarrow - b = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$$

3) $\boldsymbol{c} = (0,2)$

$\therefore |c| \;=\; \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore$ $\boldsymbol{c}$ لا يمثل متجه وحدة ، نوجد متجه الوحدة للمتجه $\boldsymbol{c}$

$$\therefore\ \boldsymbol{c} = \frac{\overrightarrow{c}}{\left|\overrightarrow{c}\right|} = \frac{1}{2}\times(0,2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{c} = (0,1)$$

4) $\boldsymbol{d} = (1,0)$

$\therefore \boldsymbol{d} \;=\; \sqrt{1^2+0} = \sqrt{1} = 1$

$\therefore$ $\boldsymbol{d}$ متجه وحدة .

أسئلة التقويم الذاتي (4)

(أ)

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2(4) + 5\,(-1) = 8 - 5 = 3$

(ب)

(1) $\boldsymbol{a.b} = 3 \times 2 + (-2) \times 4 + 1 \times (-3) = -5$

$\therefore$ الزاوية بين $\boldsymbol{a.b}$ منفرجة.

(2) $\boldsymbol{a.c} = 3 \times 3 + (-2) \times 6 + 1 \times 3 = 0$

$\therefore$ الزاوية بين $\boldsymbol{a.c}$ قائمة أي أن $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{c}$ متعامدان .

(3) $\boldsymbol{b.c} = 2 \times 3 + 4 \times 6 + (-3) \times 3 = 21$

$\therefore$ الزاوية بين $\boldsymbol{b.c}$ حادة.

أسئلة التقويم الذاتي (5)

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 4(2) + (-3)(5) + 6\,(-1) = 8 - 15 - 6 = -13$

أسئلة تقويم ذاتي (6)

$$\alpha_1 = 4 \;,\alpha_2 = -8 \;,\alpha_3 = 1$$

$$\left|\; a \;\right| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = 9$$

لذلك $Cos\theta_1 = \frac{4}{9}$ و $Cos\theta_2 = -\frac{8}{9}$ و $Cos\theta_3 = \frac{1}{9}$

والزوايا المقابلة لها هي: $\theta_3 \approx 83.6^\circ, \quad \theta_2 = 152.7^\circ, \quad \theta_1 \approx 63.6^\circ$

أسئلة تقويم ذاتي(7)

$$u \,.\, v = 2.3 + 1.4 + (-3).(-2) + 4.1$$
$$= 6 + 4 + 6 + 4 = 20$$
$$u \,.\, w = 2.5 + 1.(-2) + (-3).3 + 4.7$$
$$= 10 - 2 - 9 + 28 = 27$$

أسئلة تقويم ذاتي (8)

$$z + w = (2+3i) + (5-2i) = 2 + 5 + 3i - 2i = 7 + i$$

$$z \quad w = (2+3i) \quad (5 \quad 2i) = 10 + 15i \quad 4i \quad 6i^{2} = 16 + 11i$$

$$\bar{z} = \overline{2+3i} = 2 - 3i \qquad , \qquad \overline{w} = \overline{5-2i} = 5 + 2i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{5-2i}{2+3i} = \frac{(5-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{4-19i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$$

أسئلة التقويم الذاتي (9)

(أ) x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(o,1,1) = (10,9,17)

(-4,6,-7) = (8,22,13)

1) 4u + v = 4(3,4,5) + (-4,6,-7) = (12,16,20)+

2) u – v = (3,4,5) - (-4,6,-7) = (-7,-2,-2)

3) -5v = -5(-4,6,-7) = (20,-30,35)

4) غير معرف

(ب) x = 1 , y = 9 , z = 8

مسرد المصطلحات

❊ المتجه Vector

هو كمية لها مقدار واتجاه مثل السرعة، والتسارع، القوة، العزم، المجال الكهربائى، المجال المغناطيسى والإزاحة.

❊ المتجه القياسي

هو المتجه الذي بدايته نقطة الأصل ونهايته أي نقطة في الفضاء.

❊ حاصل الضرب الداخلي لمتجهين

إذا كان **a,b** متجهين وكانت الزاوية بينهما ، فإن حاصل الضرب الداخلي للمتجهين **a,b** يعرف بـ:

$$\mathbf{a.b} = |a| \quad |b| \cos\theta$$

❊ الاستقلال الخطي:

إذا كانت C فراغاً خطياً (متجهاً) وكانت

$c_1 \ , \ c_2 \ ,....., c_n \in \ C$ يقال أن:

المتجهات $c_1 \ , \ c_2 \ ,....., c_n$ مستقلة خطياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كان $a_1 \ , \ a_2 \ ,....., a_n \in \ R$ بحيث أن:

$$a_1c_1 \ + \ a_2c_2 \ +.....+a_nc_n = 0$$

فإن

$$a_1 \ = \ a_2 = \ ..... = a_n = 0$$

❊ الفضاء الأقليدي R^n (ذو البعد n) R (n-dimensional)Euclidean Space

مجموعة كل المرتبات $(x_1,....., x_n)$ ذات الطول n حيث $(x_1,....., x_n \in \ R)$أي أن :

$R^n = \{(x_1,....., x_n): x_1,....., x_n \in -R\}$

ويسمى العنصر $(x_1,....., x_n)$ = x متجهاً أو نقطة في R^nكما تسمى الأعداد $x_1,....., x_n$ مركبات أو إحدثيات ذلك المتجه أو تلك النقطة.

المراجع

– خالد قاسم سمور ، **الرياضيات والهندسة التحليلية ط1**: دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع ، عمان ، 1999م.

– عباس السيد إبراهيم ، **أسس الرياضيات** : منشورات جامعة صنعاء ، صنعاء ، 1993م.

– موفق حجة ، محمد هيلات ، محمد خنفر ، **الجبر الخطي ط2** : منشورات جامعة القدس المفتوحة ، عمان ، 2003م.


الوحدة الثانية
نظم المعادلات الخطية

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**83**
تمهيد	83
أهداف الوحدة	83
1. المعادلة الخطية	**84**
2.نظم المعادلات الخطية	**87**
1.2 نظام المعادلات	89
3. حل نظام المعادلات الخطية	**92**
4. حلول نظم المعادلات المتجانسة	**101**
الخلاصة	**106**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**107**
إجابات التدريبات	**108**
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	**112**
مسرد المصطلحات	**115**
المراجع	**116**

المقدمة

تمهيد

مرحباً بك عزيزى الدارس في الوحدة الثانية من مقرر الجبر الخطي والتى سنتعرف من خلالها على أنظمة المعادلات الخطية والطرق المنتظمة لحل هذه الأنظمة. نتعرف في القسم الاول من الوحدة إلى معنى المعادلة الخطية وكيف نمايز بين ثلاث حالات لحل هذه المعادلة. القسم الثاني يتناول نظم المعادلات الخطية فيه نتعرف على النظام الخطي المتجانس وغير المتجانس والعلاقة الأساسية بين النظامين. القسم الثالث نتعرف على طرق حل نظام المعادلات الخطية وفيه سنتعرف على طريقة غاوس التخفيضية (الحذف المتتالي) وتنتقل بك الوحدة إلى قسمها الرابع حلول نظم المعادلات المتجانسة وفيه نتعرف على الحل الصفري والحل غير الصفري.

تجد في متن هذه الوحدة تدريبات وأسئلة تقويم ذاتي وأمثلة مع حلولها ، أرجو أن تفيد منها وأن تساهم معنا في نقدها .

أهداف الوحدة

✓

يتوقع منك عزيزي الدارس بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

- **تعرف** المعادلة الخطية.
- **تجد** حلول الأنظمة المتجانسة وغير المتجانسة من المعادلات الخطية
- **تقارن** بين النظام المتجانس وغير المتجانس
- **تجد** حلول الأنظمة المتجانسة باستعمال طريقة غاوس التخفيضية
- **تشرح** بالأمثلة هل يملك النظام المتجانس حلولاً صفرية وغير صفرية.

1. المعادلة الخطية

المعادلة الخطية في n من المتغيرات $x_1,x_2\dots,x_n$ هي المعادلة التي تكتب على الصورة:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots\dots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

حيث أن $a_i,\ b \in R$ و x_i هي المجاهيل أو المتغيرات وذلك لكل i في الفترة $1 \le i \le n$. و n أي عدد طبيعي .تسمى هنا القياسيات $\boldsymbol{a_i}$. المعاملات للمتغيرات x_i (كل $\boldsymbol{a_i}$ يرد مضروباً في x_i ويعطي عددية المتغيرات x_i الواردة في المعادلة حيث i تأخذ القيم بين 1 , n). ويسمى القياسي b الحد الثابت أو ببساطة الثابت للمعادلة .

مثال

أي من المعادلات التالية خطية:

1) $8x + 7y = -7$

2) $3x - 6y^3 = 8$

3) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{x_3} = 0$

4) $\frac{6}{x} + 9y + z = 8$

5) $y = \frac{1}{8}x + 2z + 3$

الحل:

المعادلة الخطية وهي على الصورة العامة للمعادلة الخطية ، المعادلة الثانية ليست خطية لوجود y^3 ،وكذلك المعادلة الثالثة ليست خطية وذلك لوجود $\sqrt{x_3}$ ، وتعتبر المعادلة الرابعة كذلك ليست خطية نسبة لوجود $\frac{6}{x}$ ، أما المعادلة الخامسة فتعتبر خطية ويمكن كتابتها على الصورة العامة كما يلي:

$$\frac{1}{8}x - y + 2z = -3$$

نعتبر أي مجموعة قيم للمجاهيل مثل:

$$x_1 = k_1 \quad , x_2 = k_2 \quad , \dots\dots , \; x_n = k_n$$

حيث $k_1, \; k_2 \;, k_n$ *أعداد* ثابتة ، حلاً للمعادلة إذا حققت المعادلة:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \dots\dots + a_nk_n = b$$

(حيث أحللنا كل من قيمة k_i محل متغيرها x_i) في هذه الحالة نقول أن فئة الأعداد $k_1, \; k_2, \dots, k_n$. تحقق المعادلة ونرمز لهذا الحل بالمرتب:

$$\boldsymbol{u} = (k_1, \; k_2, \dots\dots, k_n)$$

مثال

إذا كانت المعادلة هي $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3$ ، فإن المرتب الرباعي $\boldsymbol{u} = (1,2,4,2)$ هو الحل للمعادلة لأن

$$1.1 + 2.2 - 3.4 + 5.2 = 15 - 12 = 3$$

ولكن المرتب الرباعي $\boldsymbol{v} = (2,-1,0,5)$ ليست حلاً لأن :

$$1.2 + 2(-1) - 3.0 + 5.5 = 25 \neq 3$$

عزيزي الدارس ، لإ يجاد حل للمعادلة (1) وهي الصورة العامة للمعادلة الخطية نميز بين ثلاث حالات .

(أ) إذا كان أحد المعاملات مخالف للصفر ولنقل أن $a_1 \neq 0$ فإننا نعيد كتابة المعادلة بالشكل الآتي

$$a_1x_1 = b - a_2x_2 - \dots\dots - a_nx_n$$

أو

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \dots\dots - \frac{a_n}{a_1}x_n$$

ونحصل على قيمة x_1 بافتراض أي قيم للمتغيرات $x_2, x_3, \dots, x_n$. هنا يمثل المرتب $x_1, x_2, \dots, x_n$ حلاً للمعادلة ويوجد عدد لا نهائي من الحلول من هذا النوع (حل لكل افتراض للقيم $x_2, x_3, \dots, x_n$).

(ب) إذا كانت المعاملات a_i . كلها مساوية للصفر ولكن $b \neq 0$.

أي

$$0.x_1 + 0.x_2 + \dots\dots + 0.x_n = b$$

فأن المعادلة لا تملك حلاً لأن النظام غير متناسق أو هو متناقض حيث أن الشرط $b \neq 0$. لا يمكن تحقيقه بأي اختيار للمتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$.

(ج) إذا كانت كل المعاملات a_i تساوى صفراً و $b=0$ فإن المعادلة تصير

$$0.x_1 + 0.x_2 + ... + 0.x_n = 0$$

فإن أي مرتب $x_1, x_2, ..., x_n$ يعتبر حلاً لأن $0.x_1 + 0.x_2 + ... + 0.x_n = 0$ مهما كانت قيم $x_1, x_2, ..., x_n$

تدريب (1)

أوجد قيم المرتب الثلاثي (x , y , z) للمعادلة $3x - 6y + z = 9$.
حيث أن $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

أسئلة التقويم الذاتي (1)

أي من المعادلات التالية معادلة خطية:

1) $5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7$

2) $5^{x_1} + 4x_2 = 19$

3) $\frac{x_1}{x_2 - x_1} + x_2 + x_3 = 0$

2.نظم المعادلات الخطية

عزيزي الدارس ، ننقل الآن الأفكار التي وردت في القسم الأول من الوحدة للنظام الآتـي المكون من m معادلة خطية و n متغير كما يلى

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

حيث $a_{ij}\,,\ \ b_i \in R$ **لكل** i, j.

حيث $i = 1,2,\ldots..,m$ **و** $j = 1,2,\ldots..,n$

وننبـه إلـى ان المعـاملات a_{ij} **مرقَّمـة بحيث يشـير الحـرف السـفلي الأول (i) إلـى رقـم المعادلة والثاني (j) إلى رقم المتغير.**

يسمى النظام (2) أعلاه متجانسا إذا كانت الثوابت $b_m, \ldots., b_2, b_1$ كلها تساوى صفراً وغير متجانس في الحالات الأخرى. كذلك يسمى أي مرتب منn قيمة $\boldsymbol{u} = (k_1,\ k_2, \ldots\ldots, k_n)$ حلاً للمعادلة (أو حلاً خاصاً) إذا كان يحقق كل معادلة في النظام أعلاه. كما تسمى فئة كل الحلول من هذا النوع فئة الحل أو الحل العام.

مثال

النظام

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 6x_2 - x_3 &= 2 \\
8x_1 + x_2 &= 0 \\
7x_1 + x_2 + 9x_3 &= 19 \\
x_3 - x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

هو نظام خطي غير متجانس مكون من 3 متغيرات x_1, x_2, x_3 و 4 معادلات.

تدريب (2)

هل النظام التالي نظام خطي متجانس ؟ ولماذا؟

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_4 - 2 &= 0 \\ x_4 - x_3 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

نسمي متتالية الأعداد $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ حلاً للمعادلة الخطية $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ إذا تحققت المعادلة عند إجراء التعويض $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ ، أي أنه إذا كان $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ ، تسمي مجموعة كل الحلول الممكنة للمعادلة الخطية السابقة مجموعة الحل لهذه المعادلة.

كما أن متتالية الأعداد $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$ تكون حلاً للنظام الخطي إذا كانت حلاً لكل معادلة من معادلات النظام الخطي ، كما تسمى مجموعة كل الحلول الممكنة للنظام الخطي مجموعة الحل لهذا النظام.

مثال

هل تشكل المتتالية 3،1 ،2− حلاً للنظام الخطي

$$\begin{aligned} 9x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 19 \end{aligned}$$

الحل

نعوض في النظام $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$ لنحصل على

$$\begin{aligned} 9(-2) - 2(1) + 8(3) &= 4 \\ 2(-2) + 2(1) + 7(3) &= 19 \end{aligned}$$

أي أن متتالية الأعداد هذه تحقق المعادلتين معاً وعليه فهي حل للنظام الخطي.

تدريب (3)

هل تشكل المتتالية 3،9،5 حلاً للنظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 28 \end{aligned}$$

1.2 نظام المعادلات

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= 0 \qquad (3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

يسمى النظام المتجانس الملازم لنظام المعادلات (2). هذا النظام (3) يملك حلاً في كل الأحوال إذ أن المرتب(0،....،0،0) = 0 حل يحقق المعادلة ويسمى الحل الصفري أو الحل التافه أي حل آخر ، إذا وجد ، يسمى حلاً غير صفري أو غير تافه.

والعلاقة الأساسية بين النظامين (2) و(3) تتضمنها النظرية الآتية:-

نظرية1:

لنفرض أن u حل خاص لنظام المعادلات غير المتجانس (2) وان W هو الحل العام (مجموع الحلول) بنظام المعادلات المتجانس الملازم (3). في هذه الحالة فإن.

$$u + W = \{u + w : w \in W\}$$

هو الحل العام لنظام المعادلات غير المتجانس.

هذه النظرية لا تمكن فوائد عملية ولا تساعد في إيجاد حلول محددة للنظام (2) لكن لدينا طريقة مفيدة لذلك هي طريقة غاوس في الحل بالحذف المتكرر. التي سنتعرض لها في الفقرة القادمة ولكن لأهمية هذه النظرية من الناحية العلمية واستعمالها الدائم في حل نظم

المعادلات الاشتقاقية الخطية، فإننا نورد برهانها في الملحق في نهاية هذا الفصل لمن يرغب في ذلك ولا تتطلب معرفة البرهان من الدارس.

عزيزي الدارس، لنعد الآن للنظام الخطي:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&\bullet \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

المكون من m من المعادلات في n من المتغيرات ، من هذا النظام نستطيع تكوين مصفوفتين :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

تسمى المصفوفة A مصفوفة المعاملات لأنها تحتوي معاملات المتغيرات في النظام الخطي وتسمى $\overline{A}$ المصفوفة الممتدة للنظام الخطي.

عزيزي الدارس ، يمكن كتابة المتغيرات $x_1 \;, x_2 \;, \ldots \;, x_n$ في مصفوفة X حجمها $n \times 1$ على الشكل:

$$X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \bullet \\ x_n \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \bullet \\ b_m \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة النظام الخطي السابق على الشكل

$$Ax = B$$

حيث أن A هي مصفوفة المعاملات ، x مصفوفة المتغيرات ، B مصفوفة عناصر الطرف الأيمن (الثوابت) للنظام الخطي.

وإذا كان النظام الخطي متجانساً فيمكن كتابته على الصورة $Ax = 0$.

مثال ( )

جد مصفوفة المعاملات والمصفوفة الممتدة للنظام الخطي:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 6 \\ 2x_2 + 8x_4 &= 5 \end{aligned}$$

ثم اكتب هذا النظام على الشكل $Ax = B$

الحل

مصفوفة المعاملات A هي :

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الممتدة $\overline{A}$ هي

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة هذا النظام على الشكل $Ax = B$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

تدريب (4)

أوجد مصفوفة المعاملات والمصفوفة الممتدة للنظام الخطي التالي

$$\begin{aligned} 5x_1 - \mathrm{x}_2 + 3x_3 &= 9 \\ -\mathrm{x}_1 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ثم أكتب النظام على الشكل Ax =B

3. حل نظام المعادلات الخطية

سنقوم الآن عزيزي الدارس ، بحل نظام المعادلات الخطية بتخفيضه لنظام أبسط إن المبدأ الذي يرتكز عليه طريقة التخفيض في حل أي نظام خطي من المعادلات هو استبدال هذا النظام بنظام آخر أبسط وله نفس مجموعة الحل ويتم ذلك باتباع الخطوات آلاتية:

1- نبدل ترتيب المعادلات إذا لزم بحيث تصير x_1 في المعادلة الأولى ذات معامل غير صفري أي $a_{11} \neq 0$.

2- لكل $i > 1$ نحول المعادلة L_i لتصير

$$L_i \rightarrow -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$$

أي نستبدل المعادلة رقم i بمعادلة نحصل عليها بضرب المعادلة الأولى L_1 بالمعامل $-a_{i1}$ والمعادلة رقم i.، L_i بالمعامل رقم a_{11} و نجمعهما. بهذا نحصل على نظام مكافئ للنظام (2)أي له نفس الحل مثل (2). ولكننا لا نطلبه من الدارس. هذا النظام المخفض يتخذ الشكل الآتي:

$$a^1{}_{11}x_1 + a^1{}_{12}x_2 + \ldots\ldots + a^1{}_{1n}x_n = b^1{}_1$$
$$a^1{}_{2j_2}x_{j2} + \ldots\ldots + a^1{}_{2n}x_n = b^1{}_2 \qquad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^1_{mj_m}x_{jm} + \ldots\ldots + a^1{}_{mn}x_n = b^1{}_m$$

حيث $a^1_{11} \neq 0$. هنا يرمز x_{j_2} للمجهول الأول ذي المعامل غير الصفري في معادلة غير الأولى. ومن الخطوة الثانية نرى أن $x_{j_2} \neq x_1$ هذه العملية التي تحذف مجهولاً من المعادلة التالية تسمى طريقة غاوس بالحذف المتتالي.

لاحظ عزيزي الدارس أن النظام الثاني الناتج من استبدل النظام الأول يكون مكافئاً له ، فإذا كان لدينا نظاماً خطياً من المعادلات وقمنا بإبدال معادلتين أو ضربنا إحدى المعادلات بعدد حقيقي أو ضربنا المعادلات بعدد حقيقي وأضفنا الناتج إلى معادلة أخرى في النظام فإن مجموعة الحل للنظام الجديد الناتج من أي من العمليات الثلاثة السابقة هي نفس مجموعة الحل للنظام الأول.

مثال

أوجد حلول النظام التالي باستعمال طريقة غاوس التخفيضية

$$x - y + z = 2$$
$$2x + 3y - z = 5$$
$$x + y + z = 6$$

الحل

المصفوفة الممتدة لهذا النظام :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

ضرب المعادلة الأولى بالعدد 2− وأضف الناتج للمعادلة الثانية لتحصل على النظام الخطي المكافئ:

$$\begin{array}{l} x \quad -y+z=2 \\ +5y-3z=1 \\ x+y+z=6 \end{array} \quad , \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

المصفوفة الممتدة للنظام الجديد مكافئة للنظام الأصلي .

- ضرب المعادلة الأولى بالعدد -1 وأضف الناتج للمعادلة الثالثة لتحصل على النظام الخطي المكافئ:

$$\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ 5y-3z=1 \\ 2y=4 \end{array} \quad , \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

- ضرب المعادلة الثانية $\frac{1}{5}$

$$\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ y-\frac{3z}{5}=\frac{1}{5} \\ 2y=4 \end{array} \quad , \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

- ضرب المعادلة الثانية -2 وأضف الناتج للمعادلة لتحصل على النظام الخطي المكافئ:

$$\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ y-\frac{3z}{5}=\frac{1}{5} \\ \frac{6}{5}z=\frac{18}{5} \end{array} \quad , \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 6/5 & 18/5 \end{array}\right]$$

- اضرب المعادلة الثالثة بالعدد $\frac{5}{6}$ ، ثم اضرب بعد ذلك نفس المعادلة الثالثة بالعدد $\frac{3}{5}$ واجمع الناتج للمعادلة الثانية ، ثم اضرب المعادلة الثالثة بالعدد -1 واجمع الناتج للمعادلة الأولى لتحصل على النظام الخطي المكافئ:

$$\begin{array}{l} x-y=-1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array} \quad , \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

وأخيراً اجمع المعادلة الأولى مع المعادلة الثانية لتحصل على الشكل الصفي المميز لمصفوفة المعاملات :

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right.$$

النظام الخطي المرتبط بالمصفوفة الممتدة هو:

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

لحل المعادلات الخطية ذات الثلاثة مجاهيل باستخدام طريقة جاوس التخفيضية نتبع الأسس التالية:

- نكتب مصفوفة المعاملات والثوابت بدون رسم قوسي المصفوفة ونفصل بين العمودين الثالث والرابع بخط مستقيم.

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$

- إذا كانت المدخلة الكائنة في الصف الأول تساوي صفراً فإننا نعيد ترتيب المعادلات بحيث لا تكون المدخلة الأولى صفراً.
- إذا كانت المدخلة لا تساوي واحد نحولها إلى واحد وذلك بضرب جميع مدخلات الصف الأول في النظير الضربي للمدخلة ذاتها.

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} & \frac{d_1}{a_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$

- نحول جميع المدخلات الكائنة ضمن المنحنى المغلق صفر.

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} & \frac{d_1}{a_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$

➢ نجد قيم x , y , z

مثال

أوجد حلول النظام التالي باستعمال طريقة غاوس التخفيضية

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 5 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ 5x - 3y - z &= 16 \end{aligned}$$

<u>**الحل :**</u>

إذا ضربنا المعادلة الأولى في -3 والثانية في 2 وجمعنا، فإن معامل x . في المعادلة الثانية سيصير صفراً: $-3(2x) + 2(3x) = 0$ ويصير باقي النظام كالتالى:

$$L_2 \rightarrow -3L_1 + 2L_2 \quad \text{و} \quad L_3 \rightarrow -5L_1 + 2L_3$$

في الحالة اليسرى تكون هذه المعادلات كالتالي:

$$-3L_1 : -6x - 3y + 9z = -15$$

$$\underline{2L_2 : 6x - 4y + 4z = 10}$$

$$-3L_1 + 2L_2 : -7y + 13z = -5$$

$$-5L_1 : -10x - 5y + 15z = -25$$

$$\underline{2L_3 : 10x - 6y - 2z = 32}$$

$$-5L_1 + 2L_3 : -11y + 13z = 7$$

بذلك يكون لدينا النظام المخفض المكافئ التالي

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 5 \\ -7y + 13z &= -5 \\ -11y + 13z &= 7 \end{aligned}$$

ونعيد العملية الآن على المعادلتين الثانية والثالثة. فيمكننا أن نضرب المعادلة الثانية في $+11$ والثالثة في -7 فيصير لدينا الآتي:

$$+11\ L_2: \qquad -77y + 143z = -55$$

$$\begin{array}{lr} -7\ L_3: & +77y\ -91z = -49 \\ \hline & +52\ z = -104 \end{array}$$

وبذلك نصل إلى التخفيض النهائي للنظام وهو

$$\begin{aligned} 2x + y -3z &= 5 \\ -7y +13z &= -5 \\ +52\ z &= -104 \end{aligned}$$

وهذا النظام المخفض له نفس حل النظام الأول (للبرهان انظر ملحق 1) ونستطيع أن نرى من المعادلة التالية أن:

$$Z = \frac{-104}{52} = -2$$

ومن المعادلة الثانية نحصل على قيمة y.

$$y = -\frac{1}{7}(-13.(-2) - 5) = -\frac{21}{7} = -3$$

ثم أخيراً نجد من المعادلة الأولى قيمة x.

$$x = \frac{1}{2}(-(-3) + 3.(-2) + 5) = \frac{2}{2} = 1$$

وبهذا يكون حل النظام هو المرتب (−2،−3،1). ونجد بسهولة أن هذا هو حل النظام الأول غير المخفض:

$$\begin{aligned} 2(1) + (-3) -3(-2) &= 5 \\ 3(1) -2(-3) +2(-2) &= 5 \\ 5(1) -3\ (-3) - (-2) &= 16 \end{aligned}$$

ونلاحظ أن المعادلات الثانية والثالثة تشكل نظاماً جزئياً أقل و مجاهيل أقل من النظام الأول:

أيضاً نلاحظ:

أ) إذا وجدت في النظام المخفض معادلة من النوع $0.x_1 + 0.x_2 + ... + 0.x_n = b$ حيث $b \neq 0$ فإن النظام غير متوائم ولا يملك حلاً.

ب) إذا وجدت معادلة من النوع $0.x_1 + 0.x_2 + ... + 0.x_n = 0$ فان هذه المعادلة يمكن أن تحذف بدون أن تؤثر على الحل.

تتلخص طريقة غاوس في تخفيض النظام إلى نظام مثلثي بجمع مضاعفات المعادلات إلى بعضها فنحصل كما أسلفنا على نظام من النوع الآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2j_2+1}x_{j_2+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$...$$
$$a_{rj_r}x_{j_r} + a_{rj_r+1}x_{j_r+1} + ... + a_{rn}x_n = b_r$$

حيث $1 < j_2 < ..... < j_r$ وحيث المعاملات في أول كل معادلة مخالفة للصفر أي

$$a_{11} \neq 0,\ \ a_{2j_2} \neq 0,\ \ a_{rj_r} \neq 0$$

هذا النظام يكون في شكل نظام مدرج ويسمى (نظام إيشيلون) كما تسمى المجاهيل x_i التي لا تظهر في بداية أي معادلة أي:

$i \neq 1, j_2, ... j_r$ المتغيرات الحرة. وتصح هنا النظرية الآتية:

نظرية 2 : حل النظام المخفض يكون كالآتي:

أ- إذا كانت $r = n$ ، أي عدد المعادلات يساوى عدد المتغيرات فإن النظام المخفض يملك حلاً واحداً فريداًً وهو أيضاً حل النظام غير المخفض الذي انطلقنا منه.

ب- إذا كانت $r < n$ ،أي عدد المعادلات(r) أقل من عدد المتغيرات(n) . فإننا نستطيع أن نعطي المتغيرات الحرة وعددها $n - r$ أي قيم اختبارية ونحصل من ذلك على قيم بقية المتغيرات ويكون لدينا حل للنظام المخفض وبالتالي لغير المخفض.

تدريب (5)

حل النظام التالي باستخدام طريقة جاوس التخفيضية:

$$x + y + z = 3$$
$$2x - y + 3z = 4$$
$$x + 2y - z = 2$$

مثال

هل يملك نظام المعادلات الآتي حلاً أم لا:

$$
\begin{aligned}
x+5y+4z-13w&=3\\
3x-y+2z+5w&=2\\
2x+2y+3z-4w&=1
\end{aligned}
$$

الحل:

نخفض النظام إلى شكل مدرج كالتالي:

$$
\begin{array}{l}
x+5y+4z-13w=3\\
3x-y+2z+5w=2\\
2x+2y+3z-4w=1
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{l}
x+5y+4z-13w=3\\
-16y-10z+44w=-7\\
-8y-5z+22w=-5
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{l}
x+5y+4z-13w=3\\
-16y-10z+44w=-7\\
0\quad 0\quad 0\quad =-3
\end{array}
$$

هذا النظام المخفض غير متوائم ولا يملك حلاً لان المعادلة$-3 = 0$ لا يمكن أن تتحقق. لذلك لا يملك النظام المخفض وبالتالي غير المخفض حلاً.

تدريب (6)

أوجد حلول النظام الآتي إن وجدت

$$
\begin{aligned}
x+2y+2z&=2\\
3x-2y-z&=5\\
2x-5y+3z&=-4\\
x+4y+6z&=0
\end{aligned}
$$

أسئلة التقويم الذاتي(2)

1) أوجد حلول نظام المعالات الآتية:

$$x+2y-z+3w=3$$
$$2x+4y+4z+3w=9$$
$$3x+6y-z+8w=10$$

2) أوجد حلول نظام المعادلات الآتي:

$$2x+y-2z+3w=1$$
$$3x+2y-z+2w=4$$
$$3x+3y+3z-3w=5$$

3) حدد ما إذا كان النظام الآتي يملك حلاً أم لا:−

$$x+2y-3z=4$$
$$x+3y+z=11$$
$$2x+5y-4z=13$$
$$2x+6y+2z=23$$

4. حلول نظم المعادلات المتجانسة

إذا خفضنا نظام المعادلات متجانس بطريقة غاوس، فإن النظام المخفض سيملك على الأقل الحل الصفري (0،0،....،0) = 0 . وهو لذلك متوائم ويمكن دائما تخفيضه لنظام مدرج مكافئ كما يلي:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+......+a_{1n}x_n=0$$
$$a_{2j_2}x_{j_2}+a_{2j_2+1}\ x_{j_2+1}+......=0$$
$$..$$
$$a_{rj_r}x_{j_r}+a_{rj_r+1}x_{j_r+1}+......=0$$

لذلك يكون هنالك احتمالان للحل:

أ) إذا كانت $r = n$ أي عدد المعادلات r يساوى عدد المجاهيل n في النظام المدرج فإن النظام يملك فقط الحل الصفري.

ب) إذا كانت $r < n$ أي عدد المعادلات r أقل من عدد المجاهيل n في النظام المدرج . فإن النظام يملك حلاً غير صفري.

مثال 1:

قرر ما إذا كان النظام المتجانس الآتي يملك حلاً غير صفري أم لا:

$$\begin{aligned} x+3y-2z &= 0 \\ 2x-3y+z &= 0 \\ 3x-2y+2z &= 0 \end{aligned}$$

الحل:

بالتخفيض نحصل على التالي:

$$\begin{aligned} x+3y-2z &= 0 \\ 2x-3y+z &= 0 \\ 3x-2y+2z &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x+3y-2z &= 0 \\ -9y+5z &= 0 \\ -11y+8z &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} x+3y-2z &= 0 \\ -9y+5z &= 0 \\ -17z &= 0 \end{aligned}$$

في النظام المخفض أعلاه يتساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل لذلك لا يملك النظام أي حل سوى الحل التافه أو الحل الصفري (0،0،0) = 0 .

إذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل أي $r < n$ كما أسلفنا فيمكن صياغة القاعدة في شكل نظرية:

نظرية3:

أي نظام معادلات خطية متجانس يكون فيه عدد المتغيرات (أو المجاهيل)أكبر من عدد المعادلات يملك حلاً غير صفري.

البرهان:

يحذف وهو مثل النظرية 2 ولكننا نعطي أمثلة كافية لذلك.

مثال 2:

قرر ما إذا كان النظام المتجانس الآتي يملك حلا غير صفري أم لا:

$$x+2y-3z+w=0$$
$$x-3y+z-2w=0$$
$$2x+y-3z+5w=0$$

الحل :

النظام يتكون من ثلاثة معادلات في أربعة متغيرات لذلك فعدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات. لذلك حسب النظرية 3 يملك النظام حلولاً غير صفرية ويمكن الحصول عليها بالتخفيض إلى النظام المدرج.

أما إذا كان عدد المعادلات مساوٍ لعدد المتغيرات فكلا الاحتمالين وارد ويحدد ذلك النظام المدرج فإن كانت معادلاته أقل من متغيراته فإنه يوجد حل غير صفري ونرى ذلك في الأمثلة التالية.

تدريب (7)

حدد ما إذا كان النظام المتجانس الآتي يملك حلا غير صفري أم لا:

$$x+y-z=0$$
$$2x-3y+z=0$$
$$x-4y+2z=0$$

مثال

قرر ما إذا كان النظام المتجانس الآتي يملك حلولاً غير صفرية أم لا:

$$x+y-z=0$$
$$2x-4y-z=0$$
$$3x+2y+2z=0$$

الحل:

لا نستطيع أن نستفيد من النظرية 3 لذلك لابد من التخفيض إلى نظام مدرج كما يلي:

$$\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ 2x-4y-z&=0 \\ 3x+2y+2z&=0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x+y-z&=0 \\ -6y+z&=0 \\ -y+5z&=0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x+y-z&=0 \\ -6y+z&=0 \\ -29z&=0 \end{aligned}$$

ونظراً لأن النظام المخفض المدرج يملك ثلاث معادلات في ثلاث متغيرات، فإن النظام لا يملك سوى الحل الصفري (0،0،0).

تدريب (8)

قرر ما إذا كان النظام التي يملك حلاً غير تافه أم لا.

$$\begin{aligned} x-2y+2z&=0 \\ 2x+y-2z&=0 \\ 3x+4y-6z&=0 \\ 3x-11y+12z&=0 \end{aligned}$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

؟

[1] بالتخفيض إلى نظام أبسط حدد ما إذا كان النظام الآتي متناسقا أم لا. ومن ثم أوجد الحل إن كان هنالك حلاً.

$$x+2y-3z=4$$
$$x+3y+z=11$$
$$2x+5y-4z=13$$
$$2x+6y+2z=22$$

[2] في نظام المعادلات الآتي أوجد المتغيرات الحرة. و من ثم أوجد الحلول العامة للنظام الآتي و أوجد حلاً خاصاً محدداً للنظام.

$$x+2y-3z+w=0$$
$$x-3y+z-2w=0$$
$$2x+y-3z+5w=0$$

[3] بيِّن ما إذا كان النظام الآتي يملك حلولاً أم لا

$$x+2y-3z=-1$$
$$3x-y+2z=7$$
$$5x+3y-4z=2$$

[4] أوجد حل نظام المعادلات الآتي:

$$2x+y-2z=10$$
$$3x+2y+2z=1$$
$$5x+4y+3z=4$$

[5] حل نظام المعادلات الآتي

$$x+2y-3z=6$$
$$2x-y+4z=2$$
$$4x+3y-2z=14$$

تابع أسئلة التقويم الذاتي (3)

[6] أوجد قيم a التي تحقق لنظام المعادلات الخطية الآتي الخواص المذكورة أدناه

أ- لا توجد حلول ب- يوجد أكثر من حل ج- يوجد حل واحد

$$x+y-z=1$$
$$2x+3y+a\ z=3$$
$$x+a\ y+3z=2$$

[7] ما هي الشروط التي يجب أن تخضع لها $c\ ,\ b\ ,\ a$ حتى يكون للنظام الآتي حل.

$$x+2y-3z=a$$
$$3x-y+2\ z=b$$
$$x-5\ y+8z=c$$

[8] هل يملك النظام المتجانس الآتي حلولاً غير صفرية؟ إن كان الأمر كذلك أوجد هذه الحلول

$$x+2y-3z+w=0$$
$$x-3y+z-2w=0$$
$$2x+y-3z+5w=0$$

[9] برهن أن النظام الآتي يملك حلولاً غير صفرية و أوجدها

$$x+y-z=0$$
$$2x-3y+z=0$$
$$x-4y+2z=0$$

[10] برهن أن النظام المتجانس الآتي لا يملك حلولاً غير صفرية

$$x+y-z=0$$
$$2x+4y-z=0$$
$$3x+2y+2z=0$$

الخلاصة

عزيزي الدارس عرضنا في هذه الوحدة الموضوعات الأساسية التالية في الجبر الخطي:

- المعادلة الخطية:حيث قمنا بتعريف المعادلة على حقل R كتبنا صيغتها العامة وهى كالتالي:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + .a_nx_n = b$ وهنا ميزنا ثلاث حالات لحل هذه المعادلة:

1- إذا كان أحد المعاملات a_i مخالف للصفر

2- إذا كانت المعاملات a_i كلها مساوية للصفر ولكن $b \neq 0$

3- إذا كانت كل المعاملات a_i تساوي صفر و $b = 0$

حيث أن $x_i, a_i, b \in R$ هي المجاهيل أو المتغيرات وذلك لكل i في الفترة $1 \leq i \leq n$ أي عدد طبيعي.

- حل نظام المعادلات الخطية:

وذلك بتخفيضه إلى نظام أبسط بالخطوات الآتية:

1- نبدل ترتيب المعادلات إذا لزم بحيث تصير x_1 في المعادلة الأولى ذات معامل غير صفري أي $a_{11} \neq 0$

2- لكل i >1 نحول المعادلة L_i لتصير

$L_i \rightarrow -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$

* حلول نظم المعادلات المتجانسة: عرفنا إذا كان النظام يملك حل صفري أم لا وذلك بتخفيض النظام المتجانس بطريقة جاوس وعرفنا أن هنالك احتمالان للحل:

إذا كانت r = n أي عدد المعادلات r يساوى عدد المجاهيل n في النظام المدرج فإن النظام يملك فقط الحل الصفرى.

إذا كانت r < n أي عدد المعادلات r أقل من عدد المجاهيل n في النظام المدرج فإن النظام يملك حل غير صفرى.

لمحة مسبقة على الوحدة التالية

لقد أنهينا، عزيزي الدارس دراسة الوحدة الثانية التي عالجت موضوع نظم المعادلات الخطية، وسنتعرف، إنشاء الله، في الوحدة الثالثة من مقرر الجبر الخطي على موضوع المصفوفات التي سنتناول فيها العمليات على المصفوفات، وخصائص جمع وضرب المصفوفات وهى القوانين الثمانية الأساسية في جبر المصفوفات ، وسنتعرف أيضاً في هذه الوحدة على الشرط اللازم لضرب مصفوفتين، وسنعالج العلاقة بين المصفوفات ونظم المعادلات الخطية، وسوف نتعرف على المصفوفات المربعة وأنواعها المختلفة.

اجابات التدريبات

تدريب (1)

نكتب المعادلة بالشكل

$$3x=9+6y-z$$

أو

$$x=3+2y-z/3$$

وهنا نجد أن أي قيم نفترضها للمتغيرين z , y ستعطينا قيمة للمتغير x ويكون المتغيرات الثلاثة حلاً للمعادلة ، مثلاً:

لتكن $z= 3 , y = 2$ إذاً سيكون

$$x=3+2.2-\frac{3}{3}=6$$

بكلمات أخرى فإن المرتب الثلاثي $u=(6,2,3)$ يمثل حلاً للمعادلة لأننا بإحلال $z= 3$, $y = 2$ في المعادلة نجد أن

$$3.6-6.2+3 = 9$$

وهى جملة صحيحة

تدريب (2)

يمكن كتابة هذا النظام على الصورة العامة للنظام الخطي وذلك بنقل العدد $2-$ في المعادلة الثانية للطرف الأيمن لنحصل على نظام خطي غير متجانس وذلك لأن الطرف الأيمن للنظام الجديد المكافئ يحتوي على 2.

تدريب (3)

نعوض في النظام

$$x_1=3, x_2=9, x_3=5$$

فنحصل على :

$$3+3(9)-2(5)=20\neq 6$$

هذه القيم لا تحقق المعادلة الأولى وعليه فهي لا تشكل حلاً للنظام وعليه لا حاجة للتأكد من أنها تحقق المعادلة الثانية أم لا.

تدريب(4)

مصفوفة المعاملات هي

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الممتدة هي

$$A \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة هذا النظام على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تدريب (5)

المصفوفة الممتدة لهذا النظام هي:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$-2L_1 + L_2 \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{matrix}$$

$$-L_1 + L_3 \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{matrix}$$

إبدال المعادلتين الثانية والثالثة :

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}\right|$$

$$3L_2 + L_3 \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{matrix}$$

$$-\frac{1}{5}L_3 \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$2\,L_3 + L_2 \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$-L_3 + L_1 \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$-L_2 + L_1 \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

وهذا النظام الأخير هو أبسط نظام خطي مكافئ للنظام المطلوب حله ، وبذلك يكون الحل المطلوب هو:

x = 1 , y = 1 , z = 1

تدريب (6)

نخفض النظام كالتالي

$$\begin{aligned} x+2y+2z&=2\\ 3x-2y-z&=5\\ 2x-5y+3z&=-4\\ x+4y+6z&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x+2y+2z&=2\\ -8y-7z&=-1\\ -9y-z&=-8\\ 2y+4z&=-2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x+2y+2z&=2\\ y+2z&=-1\\ 9z&=-9\\ 17z&=-17 \end{aligned}$$

في الخطوة الأخيرة قسمنا المعادلة الرابعة على 2 وحولنها لتكون الثانية وبعد ضرب هذه في 8 أضفناها إلى الثالثة (التي كانت الثانية) فاختفى المتغير y وحصلنا على المعادلة 9z=-9. كذلك بعد ضرب المعادلة الثانية في 9 أضفناها للثالثة فحصلنا على المعادلة

$17z=-17$. المعادلتان الأخيرتان تعطيان قيمة: $z=-1$ ومن الثانية نجد قيمة : $y = 1$
وأخيراً من الأولى نحسب قيمة x : $x = 2 - 2.1 -2(-1) = 2$
فيكون حل النظام هو المرتب الثلاثي(-1، 1، 2).

تدريب (7)

لا نستطيع استعمال النظرية 3 لنساوى المتغيرات مع المعادلات ولذلك لا بد من التخفيض إلى نظام مدرج كما يلي:

$$\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ 2x-3y+z&=0 \\ x-4y+2z&=0 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x+y-z&=0 \\ -5y+3z&=0 \\ -5y+3z&=0 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x+y-z&=0 \\ -5y+3z&=0 \end{aligned}$$

النظام المخفض يملك معادلتين وثلاث متغيرات لذلك حسب النظرية 3 يملك النظام حلولاً غير صفرية وهذا ينطبق على النظام غير المخفض.

تدريب (8)

نجرى تخفيضاً بطريقة غاوس:

$$\begin{aligned} x-2y+2z&=0 \\ 2x+y-2z&=0 \\ 3x+4y-6z&=0 \\ 3x-11y+12z&=0 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x-2y+2z&=0 \\ 5y-6z&=0 \\ 10y-12z&=0 \\ -5y+6z&=0 \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} x-2y+2z&=0 \\ 5y-6z&=0 \\ 0+0&=0 \\ 0+0&=0 \end{aligned}$$

النظام المخفض هو

$$\begin{aligned} x-2y+2z&=0 \\ 5y-6z&=0 \end{aligned}$$

حيث عدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات ونلاحظ أن المتغير z لا يظهر في بداية أي معادلة فهو متغير حر فإذا أعطيناه أي قيمة أمكن استخراج قيم x , y وإيجاد حل غير صفري ليكن $z = a$ لذلك يكون:

$y=\frac{6}{5}a$ و $x=\frac{12}{5}a-2a=\frac{2}{5}a$ ويمكن أن يكتب في شكل مرتب ثلاثي كالتالي:

$.\left(\frac{2}{5}a \ , \ \frac{6}{5}a \ , \ a\right)$

مثلاً إذا كانت $a = 5$ فسيكون الحل (5، 6، 2) أو $x=2$, $y=6$, $z=5$

وهو حل غير صفري.

حل أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة تقويم ذاتي(1)

1) معادلة خطية وهى على الصورة العامة.

2) ليست خطية لوجود 5^{x_1}

3) ليست خطية وذلك لوجود الحد $\frac{x_1}{x_2 - x_1}$ والذي يجعلها على صورة لا يمكن تحويلها إلى صورة المعادلة الخطية العامة.

أسئلة التقويم ذاتي (2)

1) باستعمال طريقة غاوس نجري التخفيض الآتي

$$\begin{aligned} x+2y-z+3w&=3 \\ 2z-w&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y-z+3w&=3 \\ 6z-3w&=3 \Longrightarrow \\ 2z-w&=1 \end{aligned}$$

ونرى فوراً أن المتغيرين y و w لا يظهران في بداية أي معادلة ولذلك فهما متغيران حران. فإذا أعطيناهما أي قيم اختيارية مثل $y = a$ و $w = b$ حيث a و b يمكن أن يكونا من أي عددين ، صار بالمكان حساب قيم x و z كالآتي:

من المعادلة الثانية ينتج $z=\frac{1}{2}(1+b)$ ومن الأولى نستخرج قيمة x :

$$x=3-3b+\frac{1}{2}(1+b)-2a=\frac{7}{2}-2a-\frac{5}{2}b$$

وبالتالي يكون الحل هو

$$w=b \quad , \quad z=\frac{1}{2}+\frac{b}{2} \quad , \quad y=a \quad , \quad x=\frac{7}{2}-2a-\frac{5}{2}b$$

ويمكن كتابة الجواب في شكل مرتب رباعي: $(\frac{7}{2}-2a-\frac{5}{2}b, \ a \ , \ \frac{1}{2}+\frac{b}{2} \ , \ b)$

وهذه الحلول عددها لا نهائي حيث أن لكل قيمة من b , a نفترضها يوجد حل. مثلا إذا كانت $b=3, \ a=2$ فإن الحل هو المرتب الرباعي (3، 2 ، 2 ، 8−) ويمكن أيضاً أن نكتبه $w = 3 , z=2 , y=2 , x=-8$

2) بالتخفيض بطريقة غاوس نحصل على الآتي:

$$\begin{array}{l} 2x+y-2z+3w=1 \\ 3x+2y-z+2w=4 \\ 3x+3y+3z-3w=5 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 2x+y-2z+3w=1 \\ y+4z-5w=5 \\ 3y+12z-15w=7 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 2x+y-2z+3w=1 \\ y+4z-5w=5 \\ 0 \qquad =-8 \end{array}$$

في استخراج النظام المخفض أعلاه استعملنا العمليات الآتية: في الانتقال من الخطوة الأولى للثانية ضربنا المعدلة الأولى في 3− والثانية في 2 وجمعنا المعادلتين فنتجت المعادلة الثانية الجديدة. كذلك ضربنا المعادلة الثالثة في 2 والأولى في 3− وجمعنا المعادلتين فحصلنا على المعادلة الثالثة الجديدة .أخيراً حصرنا الاهتمام على المعادلتين الثانية والثالثة الجديدتين فضربنا الثانية في 3− وأضفناها للثالثة فأعطتنا المعادلة الثالثة الجديدة فكانت 8− = 0.

والآن بالنظر للنظام المخفض نجد أنه غير متوائم مع بعضه حيث أن المعادلة 8− = 0. تتناقض مع المعادلات الأخرى وغير قابلة للتحقيق. ولذلك لا توجد حلول للنظام.

3) مثل السابق نستعمل طريقة غاوس لنحصل على نظام مخفض كالتالي:

$$\begin{array}{c} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 2x+6y+2z=23 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ y+2z=5 \\ 2y+8z=15 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} x+2y-3z=4 \\ y+4z=7 \\ y+2z=5 \\ 2y+8z=15 \end{array}$$

هذا النظام المخفض غير متوائم لأن المعادلة . غير قابلة للتحقيق. لذلك النظام أعلاه لا يملك حلاً.

أسئلة التقويم الذاتي (3)

1) الحل $x=1$, $y=3$, $z=1$ أو (1 ، 3 ، 1)

2) (المتغيرات الحرة y , w). الحل(b , $1+2b$, a , $4-2a+b$) حل خاص(2،3،1−،9)

3) الحل: النظام غير متناسق. لذلك لا يملك حلاً

4) الحل: $x=1$, $y=2$, $z=-3$ ويمكن كتابة الحل بشكل مرتب (3− ، 2 ، 1)

5) النظام يملك عدداً لانهائياً من الحلول: $x=2-a$, $y=2+2a$, $z=a$ حيث a أيّ عدد فإذا وضعنا $a=1$ كان الحل:

$x=1$, $y=4$, $z=1$ أو المرتب (1 ، 4 ، 1).

6) الجواب: (أ) $a=-3$ ، (ب) $a=2$ ، (ج) $a\neq -3$, $a\neq 2$

7) الجواب: $2a-b+c=0$

8) الجـواب: نعـم لأن عـدد المتغيـرات (4) أكبـر مـن عـدد المعـادلات، الحلـول هــي

$$w=a \quad و \quad z=-\frac{25}{3}a \quad و \quad y=\frac{109}{15}a \quad و \quad x=\frac{208}{15}a$$

9) الجواب: النظام المنخفض يتكون من معادلتين وثلاث متغيرات لذلك يملك النظام حلولاً غير صفرية وهى:

$$z=a \quad و \quad y=\frac{3}{5}a \quad و \quad x=\frac{2}{5}a$$

10) الجواب: النظام المخفض يتكون من ثلاث معادلات في ثلاث متغيرات. لذلك لا يملك النظام حلاً غير صفري.

مسرد المصطلحات

⁕ المعادلة الخطية(Linear Equation)

في n من المتغيرات $x_1, x_2, ..., x_n$ هي المعادلة التي تكتب على الصورة:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + .a_nx_n = b$$

حيث أن $a_1, ... a_n, b$ أعداد حقيقية

⁕ النظام الاتجاهي (الخطي) Linear System

هي مجموعة من المعادلات الخطية مكتوبة على الصورة :

$$\begin{array}{l} a_{11}\chi_1 + a_{12}\chi_2 + ...+ a_{1n}\chi_n = \sigma_1 \\ a_{21}\chi_1 + a_{22}\chi_2 + ...+ a_{2n}\chi_n = \sigma_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m_1}\chi_1 + a_{m_2}\chi_2 + ...+ a_{m_n}\chi_n = \sigma_n \end{array}$$

ويكون النظام متجانساً إذا كان $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$

المراجع

خالد قاسم سمور ، **الرياضيات والهندسة التحليلية ط[1]** : دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع ، عمان ، 1999م.

عباس السيد إبراهيم ، **أسس الرياضيات** : منشورات جامعة صنعاء ، صنعاء ، 1993م.

موفق حجه ، محمد هيلات ، محمد خنفر ، **الجبر الخطي ط[2]** : منشورات جامعة القدس المفتوحة ، عمان ، 2003م.


الوحدة الثالثة
المصفوفات

محتويات الوحدة

الموضوع	الصفحة
المقدمة	**119**
تمهيد	119
الأهداف	120
1 . المصفوفات والعمليات الجبرية عليها	**124**
1.1 العمليات على المصفوفات	133
2. خصائص جمع وضرب المصفوفات	**139**
3 . ضرب المصفوفات	**144**
4 . منقول (مدورة)المصفوفة	**154**
5 . العلاقة بين المصفوفات ونظم المعادلات الخطية	**158**
6. المصفوفات المدرجة	**162**
6 .1 التكافؤ الصفي والعمليات الصفية الأولية	164
6. 2 طريقة تخفيض مصفوفة بعمليات صفية إلى مصفوفة مدرجة	165
7. المصفوفة المربعة	**167**
1.7 جبر المصفوفات المربعة	**169**
8. المصفوفات القابلة للعكس	**171**
1.8 كيفية استخراج المصفوفة العكسية	**173**
الخلاصة	**179**
لمحة مسبقة عن الوحدة التالية	**181**
إجابات التدريبات	**182**
إجابات أسئلة التقويم الذاتي	**187**
مسرد المصطلحات	**189**
المراجع	**191**

المقدمة

تمهيد

أهلاً بك أيها الدارس فى الوحدة الثالثة من مقرر الجبر الخطي وهي بعنوان المصفوفات تتكون هذه الوحدة من تسع أقسام رئيسه فى القسم الأول المصفوفات والعمليات الجبرية عليها فيه تعريف المصفوفه وتحديد سعتها من حيث ما تملكه من صفوف وأعمدة، ثم ننتقل بك إلى العمليات على المصفوفات وهي مساواة المصفوفات وجمع المصفوفات وضربها بعدد ، ونختم القسم بسالب المصفوفة.

ويزودك القسم الثاني بخصائص جمع وضرب المصفوفات بعدد وهي ثمانيه قوانين أساسيه فى جبر المصفوفات وهي مأخوذه من قوانين الأعداد الحقيقية ، القسم الثالث ضرب المصفوفات سنتعرف على قاعدة الضّرب يقال: أن المصفوفتين قابلتان للضرب إذا وفقط إذا كان عدد الأعمدة فى المصفوفه الأولى يساوى عدد الصفوف في المصفوفه الثانيه وما دون ذلك غير قابلتان للضرب . وسنتعرف على كيفية إيجاد مدخلات المصفوفه الناتجه عن عملية الضرب .

فى القسم الرابع نقوم بتحويل صفوف المصفوفه إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف لنحصل على منقول المصفوفه وسنتعرف على الصفات التى تحققها هذه العملية ، ويتناول الخامس العلاقه بين المصفوفات ونظم المعادلات الخطية .وفي القسم السادس المصفوفات المدرجة سنقوم بتوضيح خطوات تخفيض مصفوفه بعمليات صفيه إلى مصفوفة مدرجة.القسم السابع المصفوفات المربعه سنتعرف على أنواع المصفوفات المربعه النونية وهي مثلثيه عُلْوِية ومثلثيه سفليِّة وقطرية وسنعالج في هذا القسم جبر المصفوفات المربعه حيث يكون بالامكان إجراء عمليات الجمع والضرب على أى مصفوفه مربعه نونيه وتكون النتيجه دائما مصفوفه مربعه نونيه .القسم الثامن يتناول المصفوفات القابله للعكس وطرق استخراج المصفوفه العكسيه عن طريق حساب A^{-1} بالطرق الجبرية البسيطة أو بحساب A^{-1} من العمليات الصفيه الأوليه .

وتحتوي الوحدة على عدد من النظريات تدعم الأفكار الأساسيه لهذه الوحدة .

كما تجد عزيزى الدارس فى ثنايا الوحده بعض التدريبات التى يساعدك تنفيذها على فهم محتوى المادة هذا بالاضافة إلى أسئله التقويم الذاتى التى تهدف إلى ترسيخ الفهم وتعزيزه لديك و تعميقه .

أهداف الوحدة

✓

يتوفع منك عزيزي الدارس بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

_ **تعرف** المصفوفة.

_ **تعدد** بعض أنواع المصفوفات.

- **تجري** العمليات الصفية على مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت.
- **تجري** العمليات الجبرية على المصفوفات.
- **تعرف** الخواص الأساسية للعمليات الجبرية على المصفوفات.
- **تبين** العلاقة بين المصفوفات ونظم المعادلات الخطية.
- **تعرف** المصفوفة المدرجة.
- **تشرح** بالأمثلة التكافؤ الصفي والعمليات الصفية الأولية.
- **تشرح** طريقة تخفيض مصفوفة بعمليات صفية إلى مصفوفة مدرجة.
- **تبين** كيفيه استخراج المصفوفة العكسية.

توطئة:

إذا كان لدينا نظام معادلات خطية مثل الآتي:

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 3z &= 8 \\ 5x + 3y - 4z &= 4 \\ 6x - 4y - 5z &= 12 \end{aligned} \qquad (1)$$

فإننا نستطيع تخفيض هذا النظام إلى نظام أبسط بالعمليات الصفية التي درسناها في الفصل السابق فنحصل على نظام المعادلات المدرج الآتي:

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 3z &= 8 \\ -22y + z &= 24 \\ z &= 2 \end{aligned} \qquad (2)$$

ونلاحظ أن المتغير x غائب عن المعادلة الثانية والمتغيرين x,y غائبين عن المعادلة الثالثة. لكننا نستطيع أن نكتب $0.x$ في المعادلة الثانية و $0.y + 0.x$ في المعادلة الثالثة فيصير النظام المخفض كالتالي :

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 3z &= 8 \\ 0.x - 22y + 1.z &= 24 \\ 0.x - 0.y + 1.z &= 2 \end{aligned} \qquad (3)$$

بهذا الشكل يصير النظام محتوياً على كل المتغيرات الثلاثة وكل واحد منهم له معامل في كل موضع من المواضع الثلاثة التي يرد فيها حتى وإن كان هذا المعامل صفراً. هذه الإضافات الشكلية تفيدنا فيما يلي حيث نريد أن نتحول من المعاملات المفردة للمتغيرات إلى مجموعة المعاملات الكاملة للنظام.

حصلنا على هذا النظام المخفض (3) بإجراء سلسلة من العمليات على معادلات النظام (1)كل عملية تعطينا نظاماً مكافئاً للسابق له إلي أن وصلنا للنظام المدرج (3) ومنه نجد الحل. فمن المعادلة الثالثة نرى فوراً أن $z = 2$ ومن الثانية نحسب بعد وضع $z = 2$ أن:

$$-22\,y + 2 = 24$$

الذي يعطينا القيمة $y = -1$. أخيراً بوضع القيم $z = 2$ و $y = -1$ في المعادلة الأولى نجد أن:

$$4.x - 2.(-1) - 3.(2) = 8$$

والذي يعطينا قيمة x : $x = \frac{1}{4}(-2+6+8) = \frac{1}{4}\ .\ 12 = 3$ وبالتالي يكون حل النظام المخفض هو $z = 2$ ، $y = -1$, $x = 3$ ويمكن أن نكتبه في شكل مرتب (2، −1 ، 3) وبوضع هذه القيم في النظام (1) نجد إنها أيضا حل له ، وهذا يعنى أن النظام المخفض مكافئ للنظام غير المخفض أي له نفس الحل، مما يبرر اعتمادنا على هذه الطريقة (طريقة غاوس التخفيضية) لحل نظم المعادلات الخطية.

نلاحظ أن العمليات التي أجريناها على النظام قد أحدثت تغييرات فقط في المعاملات على اليسار والثوابت على اليمين ولم تؤثر على المجاهيل أو المتغيرات z , y , x . لذلك فإننا نستطيع أن نجري العمليات الصفية فقط على هذه الأعداد (المعاملات والثوابت) ويمكن أن نسقط كتابة المتغيرات z , y , x إلى أن نفرغ من التخفيض لذلك ، ولتبسيط العمليات الحســابية، فإننــا

نســتحدث رمــوزاً لكتابـة المعـاملات

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

والثوابت كما يلي :

ونسميها مصفوفات، اليسرى مصفوفة المعاملات والثانية مصفوفة الثوابت ويمكن أيضاً أن نكتب مصفوفة للمتغيرات :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

كل نظـام معـادلات تقابلـه مصـفوفة معـاملات ومصـفوفة ثوابـت ومصـفوفة متغيـرات مـثلاً النظام المخفض يملك المصفوفات الآتية.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & -22 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي من اليسار إلى اليمين: مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت ومصفوفة المتغيرات.

هدفنا الآن هو أن نجرى العمليات الصفية على مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت لنستخلص منها المصفوفات المخفضة، ومنها نكتب نظام المعادلات المخفض الذي يقودنا إلي الحل. هذا البرنامج يتطلب تطوير مفهوم المصفوفة وتعريف العمليات التي تجرى عليها وهذا ما نفعله في الفقرة التالية.

1. المصفوفات والعمليات الجبرية عليها

*** تعريف المصفوفة:**

المصفوفة هي منظومة أعداد مكتوبة في شكل صفوف فوق بعضها، كل عنصر منها مرقم بترتيبه في الصف وترتيبه في العمود الذين يقع فيهما . مكتوبة بين [ ] ويرمز إلى المصفوفة بأحد الحروف الانجليزية الكبيرة ... A,B,C .

*** مدخلة المصفوفة:**

تسمى الأعداد التي تتألف منها صفوف وأعمدة المصفوفة بمدخلات المصفوفة أو عناصرها ، فمثلاً مدخلة المصفوفة a_{ij} هي المدخلة الكائنة في الصف i و العمود j .

والمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

هـي مصـفوفة لهـا m مـن الصـفوف و n مـن الأعمـدة وكـل الرمـوز a_{ij} تعنـى أعـداداً حقيقية.

*** بعض أنواع المصفوفات:**

عزيزي الدارس سنذكر فيما يلي بعض بعض الأنواع من المصفوفات:

(أ) المصفوفة المربعة:

أن المصفوفة مربعة إذا وفقط إذا كان عدد صفوفها مساوياً لعدد أعمدتها.

فمثلاً المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ لها ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

عناصر الصف الأول: $a_{13}=-3,\ a_{12}=-2\ ,a_{11}=4$

عناصر الصف الثاني : $a_{23}=-4,\ a_{22}=3\ ,a_{21}=5$

عناصر الصف الثالث : $a_{33}=-5,\ a_{32}=-4\ ,a_{31}=6$

يمكن كتابتها في شكل مرتبات كالآتي:

(6 ، −4 ، −5) ، (5 ، 3 ،−4) ، (4،−2،−3)

وأيضاً المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & -22 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة

عناصر الصف الأول: $b_{13} = -3, \ b_{12} = -2 \ , b_{11} = 4$

عناصر الصف الثاني : $b_{23} = 1, \ b_{22} = -22 \ , a_{21} = 0$

عناصر الصف الثالث : $b_{33} = 1, \ \ b_{32} = 0 \ \ , b_{31} = 0$

يمكن كتابتها في شكل مرتبات كالآتي:

(4،−2،−3) ، (1، 22− ، 0) ، (1، 0، 0)

(ب) المصفوفة العمودية:

هي المصفوفة التي تتألف من عمود واحد فقط .

فمثلاً المصفوفة $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ تتكون من ثلاثة صفوف و عمود واحد

الصف الأول : $a_{11} = 8$

الصف الثاني : $a_{21} = 4$

الصف الثالث : $a_{31} = 12$

أي (8) ، (4) ، (12)

(ج) المصفوفة الصفية:

هي المصفوفة التي تتألف من صف واحد فقط.

فمثلاً المصفوفة $D = [1\ \ 3\ \ -3\ \ 6]$ تتكون من صف واحد فقط وأربعة أعمدة

وعناصرها هي :

$a_{11}=1$, $a_{12}=3$, $a_{13}=-3$, $a_{14}=6$

(د) المصفوفة الصفرية:

هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها تساوي صفراً

فمثلاً $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(هـ) المصفوفة المثلثية العلوية:

وهي مصفوفة مربعة بحيث أن:

$$a_{ij} = 0$$

لجميع قيم $i > j$

أي أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وعليه فإن :

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية علوية.

(و) المصفوفة المثلثية السفلية:

وهي مصفوفة مربعة بحيث أن:

$$a_{ij} = 0$$

لجميع قيم $i < j$

أي أن :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وعليه فإن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مثلثية سفلية.

(ز) المصفوفة القطرية:

تسمى المصفوفة $A = \left[\ a_{ij}\ \right]$

مصفوفة قطرية إذا كانت مصفوفة مثلثية علوية وسفلية في آن واحد.

أي أن:

$$a_{ij} = 0$$

عندما : $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$

و $a_{ij} \neq 0$

عندما : $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$

وعليه فإن المصفوفة القطرية تأخذ الشكل العام التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فمثلاً المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

هي مصفوفة قطرية.

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة B مصفوفة قطرية قياسية لأن عناصر قطرها الرئسي يساوي مقدار ثابت يساوي 9 .

(ح) المصفوفة المحايدة:

إذا كانت $A = \left[\, a_{ij} \,\right]$ مصفوفة قطرية بحيث أن:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots = a_{nn} = 1$$

نسمي المصفوفة في هذه الحالة مصفوفة محايدة فمثلاً المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة محايدة.

تدريب (1)

أوجد قيم a_{12} , a_{32} , a_{23} في المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

*** سعة المصفوفة:**

عدد الصفوف وعدد الأعمدة في أي مصفوفة يحدد ما نسميه سعة المصفوفة. فإذا كانت المصفوفة تملك m صفاً و n عموداً فإننا نقول أن سعة هذه المصفوفة هي $m \times n$ ونقول أنها مصفوفة $m \times n$.

في المصفوفة الآتية

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots. a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots. a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots. a_{mn} \end{pmatrix}$$

يمكننا أن نرمز للصفوف بالمرتبات الأفقية الآتية.

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n}) \text{، } (a_{21}, a_{22}, \ldots\ldots, a_{2n}) \text{، } (a_{m1}, a_{m2}, \ldots\ldots, a_{mn})$$

وهي تعادل متجهات صفية.

وللأعمدة بالمرتبات العمودية الآتية

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots. \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots. \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots. \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

وهي تعادل متجهات عمودية

وتعرف المصفوفة 1x1 بأنها مجرد عدد واحد مثلاً (a) أو فقط a.

تدريب (2)

أوجد حجوم المصفوفات التالية :

$$[5],\begin{bmatrix}1 & 9 & 7\\ 4 & 6 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 9\end{bmatrix}$$

مثال

المصفوفة التالية $\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 5 & 0 & -2\end{pmatrix}$ هي مصفوفة 3 x 2 أي مصفوفة ذا صفين وثلاث أعمدة

الصفوف هي (1,-4,3)،(5 ، 0 ، −2) و الأعمدة هي $\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

؟

1/(أ) أوجد سعة المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(ب) أوجد قيم a_{23} , a_{32} , a_{12} في المصفوفة التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

2/ حدد فيما إذا كانت المصفوفات التالية مثلثية علوية ، ومثلثية سفلية، قطرية ، صفرية :

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1 العمليات على المصفوفات

أ- مساواة المصفوفات:

نقول أن المصفوفتين A و B متساويتين إذا كانا من نفس السعة وإذا كان كل عنصر في A يساوى مثيله في الصف و العمود في B ونكتب A=B. لذلك فمساواة مصفوفتين بسعة m x n تعادلان $m\,n$ معادلة

مثال

الجملة $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ تكافئ المعادلات

$$\begin{aligned} 2y + x &= 5 \\ y - x &= 4 \\ w + z &= 3 \\ w - z &= 1 \end{aligned}$$

وحل هذه المعادلات هو x=-1 ، y =3 ، z=1 ، w =2

وبوضع هذه القيم محل x, y, z, w نجد أن المصفوفتين متساويتان

تدريب (3)

أوجد المجهول فيما يلي بحيث تكون A = B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & Z \\ -2 & 2 & 9 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & y^2 \\ 3 & x^2 - 2x & 0 \end{bmatrix}$$

ب– جمع المصفوفات :

إذا كان لدينا مصفوفتين ذواتي سعة m x n ، مثلاً

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \; a_{12} \; \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \; \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \; b_{12} \; \ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} \; b_{22} \; \ldots\ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1} \; b_{m2} \; \ldots b_{mn} \end{pmatrix}$$

فإننا نعرف مجموع A , B ونكتبه A+B كالتالي:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\ldots\ldots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\ldots\ldots a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\ldots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

تعريف:.

يقال أن المصفوفتين قابلتان للجمع إذا وفقط إذا من نفس الدرجة وما دون ذلك غير قابلتين للجمع ، مع ملاحظة أن جمع مصفوفتين من نفس الدرجة يعطي مصفوفة ثالثة من نفس الدرجة وعملية الجمع تتم بجمع المدخلات المتناظرة.

تدريب(4)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

فأوجد A+B إن أمكن

وبصورة عامة إذا كانت $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ مصفوفتين لهما نفس الحجم فإن A+B = C حيث أن $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

ج- ضرب مصفوفة في عدد:

مضروب عدد k في مصفوفة A يعرف بأنه المصفوفة المكونة بضرب كل عنصر من Aفي k :

$$k\ A = \begin{pmatrix} ka_{11}\ ka_{12}\ \ldots\ldots ka_{1n} \\ ka_{21}\ ka_{22}\ \ldots\ldots ka_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ka_{m1}\ ka_{m2}\ \ldots ka_{mn} \end{pmatrix}$$

لاحظ أن A+B ، و k A هما مصفوفتان بسعة m x n .

مثال

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ فإن:

$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ و $(-1)A \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

تدريب (5)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

$(-2)A\ ,\ 5A$

د- سالب المصفوفة:

ونعرف سالب المصفوفة A أي A- كالتالي : - A = -1 . A

وبالتالي نكون قد عرفنا تلقائياً عملية الطرح كما يلي: A – B = A + (-B)

إما إذا كانت المصفوفات من سعات مختلفة، فلا يعرف لهما جمع .

مثال

إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ ، فإن :

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+4 & 1+0 & 3+3 \\ 4-5 & -1+1 & 6+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$4\ A=\begin{pmatrix} 4.2 & 4.1 & 4.3 \\ 4.4 & 4.(-1) & 4.6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 16 & -4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$3\ A-4\ B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 12 & -3 & 18 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 16 & 0 & 12 \\ -20 & 4 & 32 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 3 & -3 \\ 32 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

من المناسب هنا أن نعرف المصفوفة الصفرية من سعة $m\ \text{x}\ n$ وهى التي تكون كل عناصرها أصفاراً كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \end{pmatrix}$$

حيث عدد الصفوف m وعدد الأعمدة n ونرمز لهذه المصفوفة بالرمز O ، وهى تعمل مثل الصفر مع الأعداد. فإذا كانت لدينا مصفوفة $\text{A} = a_{i\,j}$ بسعة m x n فإن

$$\text{A} + \text{O} = (\ a_{\text{i j}} + \text{O}) = (a_{\text{i j}}) = \text{A}$$

تدريب(6)

أوجد B-C ، B-A (إذا وجدت)

حيث أن : $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 10 \\ -3 & 4 & 13 \end{bmatrix}-, B=\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}-, C\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$

تدريب (7)

إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -9 & 3\end{bmatrix}$$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

(أ)إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

جد A+B

(ب) إذا كانت

$$C=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 9\\ 4 & 0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

جد C+D

(ج) ليكن $A=\begin{bmatrix}7/3 & 8/3 & 2/3\\ 5/3 & 11/3 & -7/3\end{bmatrix}$ ، K = 6 جد KA

(د) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & -7\\ 2 & 0 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$

جد A-B

2. خصائص جمع وضرب المصفوفات

نظرية 1 :

لتكن V هي مجموعة المصفوفات من $m \times n$ فإذا كانت $A, B, C \in V$ وكانت $k_1, k_2 \in R$ (أي أعداد حقيقية، فتصح القوانين الثمانية الآتية):

أ. $(A+B)+C = A+(B+C)$

ب. $A+O = A$

جـ. $A+(-A) = O$

د. $A+B = B+A$

هـ. $k_1(A+B) = k_1A + k_1B$

و. $(k_1+k_2)\ A = k_1\ A + k_2A$

ز. $(k_1k_2)A = k_1(k_2\ A)$

ح. $1.A = A\ ,\quad O.A = O$

هذه قوانين أساسية في جبر المصفوفات، وكلها مأخوذة من قوانين الأعداد الحقيقية. فيما يلي سنعلق عليها ونبرهن بعضها ونعطي فكرة البرهان بالنسبة للبعض الآخر.

أ- هذا القانون يسمى قانون التجميع (Associative Law) ومعناه باختصار أننا في جمع ثلاث مصفوفات نستطيع أن نجمع الأول والثاني أولاً ثم نضيف حاصل جمعهما إلى الثالث أو أن نجمع الأول إلى مجموع الثاني والثالث، وتكون النتيجة واحدة في الحالين. بكلمات أخرى نستطيع أن نضع الأقواس على الاثنين الآخيرين وتكون النتيجة واحدة .

برهان (أ):

إذا كتبنا $A = a_{ij}$ و $B = b_{ij}$ و $C = c_{ij}$ ، فإن :

$$(A+B) + C = \left((a_{ij}) + (b_{ij})\right) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij})$$

هـذه العناصـر a_{ij} و b_{ij} و c_{ij} لا تعـدو أن تكـون أعـداداً حقيقيـة ، ومعلوم أن الأعداد الحقيقية تحقق قانون التجميع ، لذلك نستطيع أن نكتب:

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

وهذا يصح لكل j , i حيث $i = 1, 2 , ….., m$ و $j = 1, 2 , ….., n$ هذا يعنى أن $(A + B) + C = (A) + (B + C)$

ويمكـن تعمـيم هـذا القـانون لأي عـدد مـن المصـفوفات فـإذا كـان لـدينا المصـفوفات $A_4,\ A_3,\ A_2,\ A_1$ فإن:

$$(A_1 + A_2) + (A_3 + A_4) = A_1 + [(A_2 + A_3) + A_4] = A_1 + [A_2 + (A_3 + A_4)]$$

لذلك يمكننا أن نسقط الأقواس بالكامل

ب- القـانون $A + 0 = A$ يصـف خاصـية المصـفوفة الصـفرية التـي تعمـل مثـل الصفر مع أي الأعداد وقد أشرنا إلى ذلك في الفقرة السابقة ويجب أن ننبه إلى أن O (حرف O الكبير) تعني مصفوفة بسعة $m \times n$ كل عناصرها أصفار عددية، ونكتبها بالرمز O.

ج- القـانون A+(-A) يعبر عن خاصـية كـل مصـفوفة بـأن لهـا مصـفوفة سـالبة إذا أضيفت إليها تعطي المصفوفة الصفرية.

د- القانون A+B=B+A هو قانون التبديل (Commutative Law) والذي يمكن من عكس ترتيب المصفوفات. برهانه مثل قانون التجميع يتأتى من أن قانون التبديل يسري على الأعداد الحقيقية.

هـ- القـانون $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$ يعنـي ضـرب عـدد فـي مجمـوع مصـفوفتين يساوي ضرب نفس العدد في كل مصفوفة وجمعها.

برهان (هـ):

$$k_1(A + B) = k_1(a_{ij} + b_{ij}) = (k_1a_{ij} + k_1a_{ij}) = (k_1a_{ij}) + (k_1b_{ij})$$

$$= k_1(a_{ij}) + k_1(b_{ij}) = k_1\mathrm{A} + k_1\mathrm{B}$$

و- قانون $(k_1 + k_2)\ \mathrm{A} = k_1\ \mathrm{A} + k_2\mathrm{A}$ يعني مجموع عددين مضروباً في مصفوفة يساوي ضرب كل عدد في المصفوفة وجمعهما.

ز- القانون $(k_1.k_2)\ \mathrm{A} = k_1\ (k_2\mathrm{A})$ يعني: حاصل ضرب عددين إذا ضرب في مصفوفة فإنه يساوى ضرب أحد العددين في المصفوفة ثم ضرب الثاني في المصفوفة الناتجة.

ح- القانون $1.\mathrm{A} = \mathrm{A}$ و القانون $\mathrm{O}.\mathrm{A} = \mathrm{O}$ هما تعبيران عن خواص العدد 1 والعدد 0 إذا ضُربا في مصفوفة . ففي الحالة الأولى تظل المصفوفة كما هي وفي الحالة الثانية تنتج عنها المصفوفة الصفرية.

ملحوظة

إذا عبرنا عن متجهات $u, v \in \mathrm{R}^n$ بشكل متجهات صفية أو متجهات عمودية، مثلاً:

$u = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ و $v = (b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)$

أو $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ و $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

فإننا نستطيع أن ننظر إليها كمصفوفات ونطبق عليها قواعد الجمع والضرب في عدد كالآتي:

$u+v=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots\ldots, a_n+b_n)$ و $k\ u=(k\ b_1, k\ b_2, \ldots\ldots, k\ b_n)$

أو $k\ u = \begin{pmatrix} k\ a_1 \\ k\ a_2 \\ \vdots \\ k\ a_n \end{pmatrix}$ و $u+v = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

وهو نفس التعريف الذي قدمناه في الفصل الأول للمتجهات في R^n لذلك فالمتجهات هي نوع من المصفوفات وتعميم لها .

من القوانين (أ) – (ب) نرى أن:

$$\mathrm{A}+\mathrm{A}=1.\mathrm{A}+1.\mathrm{A}=(1+1)\mathrm{A}=2\mathrm{A}$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{A}+\mathrm{A}=2.\mathrm{A}+1.\mathrm{A}=(2+1)\mathrm{A}=3\mathrm{A}, \ldots\ldots$$

أسئلة التقويم الذاتي(3)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}, B\begin{bmatrix}0 & -3\\ 4 & 5\\ -3 & 4\end{bmatrix}$

أوجد 2A + 3B

3. ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات عملية معقدة ويعجز كثير من الدارسين في أن يعرف الطريقة التي وصل بها الرياضيون لهذا التعريف. لذلك يلزم أن نعطي مقدمة عن هذه الطريقة:

أ) نبدأ بأبسط أنواع المصفوفات هي المتجهات في الفضاء R^n التي يمكن أن نكتبها في شكل متجهات صفية $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ أو متجهات عمودية $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$. وقد درسنا هذه في الفصل الأول . أيضاً تعلمنا أن تكون حاصل الضرب القياسي أو ضرب النقطة (Dot Product) لأي متجهين $u=(a_1,\ldots\ldots, a_n)$ و $v=(b_1,\ldots\ldots, b_n)$ كالتالي:

$$u\ .\ v = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)$$

وقد رأينا في تعريفنا للمصفوفات أن المصفوفة ذات الصف الواحد والأعمدة n :

$(a_1, a_2, ..., a_n)$ أو العمود الواحد و الصفوف n $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ يمكن أن تعتبر

متجهات صفية في الحالة الأولى وعمودية في الحالة الثانية. لذلك يمكننا كتابة ضرب

النقطة كالآتي.

$$u.v = (a_1, a_2, ..., a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

وتكون القاعدة هي ضرب a_i في b_i وجمع كل المضروبات المكونة بهذه الطريقة.

والآن نصيغ هذه القاعدة بلغة المصفوفات كالتالي:

ضرب مصفوفتين $n \times 1$ و $1 \times n$ (أي مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية)

يكون كالآتي :

$$(a_1, a_2, ..., a_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

ب) الآن نعمم هذه العملية لحالة ضرب مصفوفة $m \text{ x } n$ في مصفوفة عمودية $n \text{ x } 1$ أي

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ ....a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ ....a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \ a_{m2} \ ....a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ونأخذ على سبيل المثال نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 &= y_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 &= y_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

ونستطيع أن نحول هذا النظام إلى معادلة مصفوفات كالآتي :

$$\begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

المصفوفة اليسرى من صفين وعمود واحد وكذلك المصفوفة اليمنى. المصفوفة اليسرى

عبارة ضرب من نوع ما للمصفوفتين:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ومساواتها بالمصفوفة . $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

ويمكن كتابتها كالتالي :

$$\mathrm{B\,X} = \mathrm{Y} \qquad (2)$$

وإذا كان لدينا نظام آخر يربط بين y_2 , y_1 و z_2 , z_1 :

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= z_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= z_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

وهذه يمكن كتابتها مثل السابقة

$$\mathrm{A\,Y} = \mathrm{Z} \qquad (4)$$

حيث

$$\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ و } \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ و } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

وإذا أدخلنا المعادلة (2) في المعادلة (4) صار لدينا:

$$\mathrm{A(BX)} = \mathrm{Z} \qquad (5)$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= z_1 \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= z_3
\end{aligned}
$$

في الجانب الآخر نستطيع أن ندخل المعادلة (1) في المعادلة (3) كالآتي

$$
\begin{aligned}
a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{12}(a_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) = z_1 \\
a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{22}(a_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) = z_1
\end{aligned}
$$

وبإعادة تجميع التعابير نحصل على النظام التالي

$$
\begin{aligned}
(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23})x_3 = z_1 \\
(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23})x_3 = z_1
\end{aligned}
$$

وهذا النظام يمكن كتابته بنفس الطريقة السابقة في شكل مصفوفات

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\
a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}
$$

أي مثل السابق

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\
a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}
\end{pmatrix}
\mathrm{X} = \mathrm{Z}
$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (5)

$$A(BX) = Z$$

يصير لدينا

$$A\,B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

أي يكون ضرب المصفوفات كالتالي

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

وهذه هي قاعدة الضرب:

مفـردات الصــف الأول فــي A مضــروبة فــي مفـردات العمــود الأول فــي B :

$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ لتعطينا القيمة الأولى في المصفوفة الناتجة.

مفـردات الصـف الأول فــي A مضــروبة فــي مفـردات العمـود الثــاني فــي B:

$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ لتعطينا القيمة الثانية في الصف الأول في المصفوفة الناتجة.

وهكذا تستمر العملية بضرب الصف الأول في العمود الثالث لنحصل على النقطة الثالثة في الصف الأول في المصفوفة الناتجة.

بعد ذلك نأخذ الصف الثاني في A ونضربه بنفس الطريقة في العمود الأول ثم الثاني ثم الثالث من B ونحصل على نقاط الصف الثاني في المصفوفة الناتجة.

فإذا رمزنا للصف الأول من A بـ A_1 والصف الثاني بـ A_2 وللعمود الأول من B بـ B_1 والعمود الثاني B_2 والعمود الثالث B_3 أمكن كتابة حاصل الضرب كالآتي:

$$A.B = \begin{pmatrix} A_1 . B^1 & A_1 . B^2 & A_1 . B^3 \\ A_2 . B^1 & A_2 . B^2 & A_2 . B^3 \end{pmatrix}$$

ويجب ملاحظة أن هذه العملية كلها لا تتحقق إلا إذا كان عدد المتغيرات في نظام المعادلة (1) مساو لعدد المتغيرات y_i في نظام المعادلات (1) مساوٍ لعدد المتغيرات y_i في نظام المعادلات (2).

هذا يعنى أن يكون عدد أعمدة A مساوية لعدد صفوف B الآن نعرف عملية ضرب المصفوفات :

تعريف: لنفرض أن $A = (a_{ij})$ وأن $B = (b_{ij})$ مصفوفتان وأن عدد أعمدة A يساوى عدد صفوف B ، لنقل مثلاً أن A مصفوفة m x p و أن B مصفوفة p x n . في هذه الحالة يكون مضروب A و B أي AB هو المصفوفة ذات المرتبة m x n حيث يكون مدخلها رقم $i\,j$ ناتجاً عن ضرب الصف A_i من A بالعمود B_j من B أي:

$$A.B = \begin{pmatrix} A_1 . B^1 & A_1 . B^2 \ldots\ldots\ldots A_1 . B^n \\ A_2 . B^1 & A_2 . B^2 \ldots\ldots\ldots A_2 . B^n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m . B^1 & A_m . B^2 \ldots\ldots\ldots A_m . B^n \end{pmatrix}$$

وهذا يعنى الآتي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2p} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2}\ldots\ldots a_{ip} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots\ldots b_{1j}\ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{p1} & b_{p2}\ldots b_{pj}\ldots\ldots b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots c_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \boxed{c_{ij}}\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1} & \ldots\ldots\ldots\ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال

إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ أوجد

(أ) حاصل الضرب AB إن وجد (ب) حاصل الضرب BA إن وجد

الجواب: عدد أعمدة A (2) وعدد صفوف B (2) متساويان. لذلك يمكن تكوين AB

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+4.5 & 1.(-2)+4.1 & 1.3+4.6 \\ 2.1+0.5 & 2.(-2)+0.1 & 2.3+0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+20 & -2+4 & 3+24 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 2 & 27 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(ب) B مصفوفة 3 x 2 و A مصفوفة 2 x 2 : لذلك عدد أعمدة B (3) مختلف عن عدد صفوف A (2) لذلك لا يمكن تكوين BA

نلاحظ في المثال أن $AB \neq BA$.أي حاصل الضرب لا يحقق خاصية التبديل.

تدريب (8)

إذا كان $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. أوجد

(أ) AB   (ب) BA

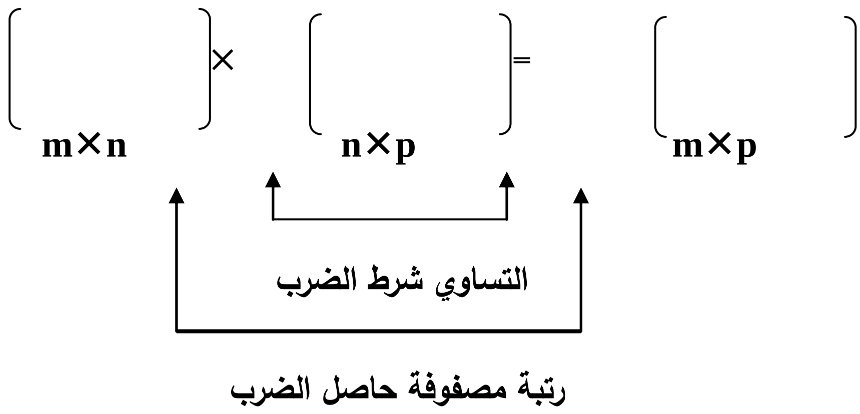
تدريب (9)

إذا كان $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

أوجد   (أ) BA   (ب) AB

عزيزي الدارس ، مما سبق يمكن أن نلاحظ أن حاصل ضرب مصفوفة $n \times m$ مع مصفوفة $n \times \mathrm{p}$ ينتج عنه مصفوفة $m \times \mathrm{p}$

وبذلك يمكن وضع الشرط اللازم لتحقيق عملية الضرب على الصورة:



يخضع ضرب المصفوفات للقواعد الآتية

نظرية 2:

إذا كانت C,B,A مصفوفات وكانت عمليات الجمع والضرب الواردة معرفة، فإنه يصح الآتي:

أ) $A(BC) = (AB)C$ (قانون التجميع).

ب) $A(B+C) = AB+AC$ (قانون التوزيع الأيسر)

ج) $(B+C)A = BA+CA$ (قانون التوزيع الأيمن)

د) $k(AB) =(kA)B=A(kB)$ حيث k أي قياسي

البرهان :

نبرهن (أ) و نترك البقية كتمارين.

(1) لتكن $A= (a_{ij})$ و $B= (b_{jk})$ $C= (c_{kl})$

و ليكن أيضاً $AB = S = (s_{ik})$ و $BC = T = (t_{jl})$

وسيصح التالي :

$$s_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots\dots\dots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$t_{jl} = b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + ... + b_{jn}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl}$$

والآن إذا ضربنا S بالمصفوفة C أي (AB) فيCفإن العنصر في الصف i والعمود l سيكون :

$$s_{i1}c_{1l} + s_{i2}c_{2l} + ...+ s_{in}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}b_{jk})\ c_{kl}$$

وفي الجانب الآخر إذا ضربنا A في T أي A في BC ، فإن العنصر في الصف i والعمود l من المصفوفة A(BC) سيكون:

$$a_{i1}t_{1l} + a_{i2}t_{2l} + ... + a_{im}t_{ml} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_{jl}$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}\ \ c_{kl})$$

ونظراً لأن المجاميع الاثنين متساويان فقد برهننا أن (AB)C =A(BC)وهو المطلوب.

4. منقـول (مدورة)المصـفوفة (TRANSPOSE Of Matrix)

منقول المصفوفة A ويكتب A^t هو المصفوفة التي نحصل عليها بتحويل الصفوف لتكون أعمدة والأعمدة لتكون صفوفاً كالتالي:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{m2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

إذا كان A مصفوفة سعة $m \times n$ فإن A^t ستكون مصفوفة سعة $n \times m$

مثال

جد A^T للمصفوفة التالية: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

تدريب (10)

أوجد A^T للمصفوفة الصفية :

$$A = [6 \quad 5 \quad 2 \quad 9]$$

وتحقق عملية النقل الصفات الآتية :

نظرية 3 :

(أ) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(ب) $(\mathrm{A}^{t})^{t} = \mathrm{A}$

(ج) $(k\mathrm{A})^{t} = k\mathrm{A}^{t}$

(د) $(\mathrm{AB})^{t} = \mathrm{B}^{t}\mathrm{A}^{t}$

البرهان: نبرهن الجزء (د) ونترك الأجزاء الأخرى كتمارين للدارس.

إذا كان $\mathrm{A} = (a_{ij})$ و $\mathrm{B} = (b_{jk})$ ، فإن عنصر AB في الصف i و العمود j

هو:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots.. + a_{im}b_{mj} \qquad (1)$$

لذلك فإن هذا العنصر هو الذي سيظهر في الصف j والعمود i في $(\mathrm{AB})^{t}$

في الجانب الآخر فإن الصف j في B^{t} يتكون من العناصر في العمود j في B :

$$(b_{1j}, b_{2j}, \ldots\ldots.., b_{mj}) \qquad (2)$$

كذلك فإن العمود j من A^{t} يتكون من عناصر الصف j من A أى :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

لذلك فإن العنصر الذي يظهر في الصف j والعمود i من $\mathrm{B}^t\mathrm{A}^t$ هو حاصل ضرب (2) و (3) أى :

$$(b_{1j}, b_{2j}, \ldots\ldots\ldots, b_{mj}) \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots\ldots + a_{im}b_{mj}$$

وهو العنصر في (1) لذلك $(\mathrm{AB})^t = \mathrm{B}^t\mathrm{A}^t$

ملحوظة

(أ)إذا كانت المصفوفة A مساوية لمدورها A^t فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة تماثلية.

(ب)إذا كان مدور B مساوياً لسالب المصفوفة B فإن المصفوفة B تسمى مصفوفة تماثلية تخالفياً.

مثال

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

جد $A^T \; , \; \left(A^T\right)^T, \; (A+B)^T$

الحل:

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 3 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix} \quad , \quad \left(A^T\right)^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$A+B\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -3 & 0 & 6\\ 4 & 5 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -4 & 3 & 10\\ 5 & 7 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

$$\left(A+B\right)^T=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -4 & 7\\ 3 & 6\\ 10 & 5\end{bmatrix}$$

تدريب (11)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}$

أوجد $A^T \; , \; \left(A^T\right)^T \; , \; 3A^T$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

إذا كانت $A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 6\\ -3 & 2 & 7\\ 6 & 7 & 9\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -5 & 3\\ 5 & 0 & -7\\ -3 & 7 & 0\end{bmatrix}$

أوجد A^t, B^t وماذا تلاحظ

5. العلاقة بين المصفوفات ونظم المعادلات الخطية

إذا كان لدينا نظام المعادلات الخطية التالي :

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 \ + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 \ + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 \ + a_{m2}x_2 \ + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned} \qquad (1)
$$

فإننا نستطيع باستعمال تعريف ضرب المصفوفات أن نكتب هذا النظام بالشكل التالي :

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)
$$

أو باختصار AX = B إذا كانت :

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

وذلك يعنى أن كل حل للنظام (1) هو حل لمعادلة المصفوفات (2) والعكس. لاحظ أن النظام المتجانس يكافئ معادلة المصفوفات AX = O.

المصفوفة A أعلاه تسمى مصفوفة المعاملات في النظام (1) لذلك نسمى المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ldots\ldots a_{1n} b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ldots\ldots a_{2n} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ldots a_{mn} b_m \end{pmatrix}$$

والتي تنتج بإضافة العمود B إلى مصفوفة المعاملات . المصفوفة الموسعة لمصفوفة المعاملات. ونلاحظ أن نظام المعادلات (1) يمكن أن يحدد بالكامل بواسطة المصفوفة الموسعة .

مثال

أوجد مصفوفة المعاملات ومصفوفة المعاملات الموسعة في النظام الآتي:

$$2x+3y-4z=7$$
$$x-2y-5z=3$$

معادلة المصفوفات المكافئة:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

الحل :

مصفوفة المعاملات هي $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

مصفوفة المعاملات الموسعة $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

في دارسة نظم المعاملات الخطية سنجد أن لغة ونظريات المصفوفات توفر طريقة أبسط وأسرع. وسنعتمد في حل هذه النظم على النظريات الآتية:

نظرية 4:

لنفرض أن $u_1, u_2, ..., u_n$ حلول لنظام المعادلات الخطية المتجانسة AX = O.

في هذه الحال ستكون كل تركيبة خطية من الحلول u_i :

$k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_nu_n$ أيضاً حل للنظام المتجانس AX = O.

وعلى وجه الخصوص فإن كل مضاعف من أي حل u أي $k\,u$ للمعادلة AX = O

سيكون أيضاً حلاً للمعادلة AX = O .

البرهان :

بما أن $u_1, u_2, ..., u_n$ حلول للنظام AX = O ،

فإن $A\ u_1 = 0, A\ u_2 = 0, ..., A\ u_n = 0$ لذلك:

$$A(k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_3u_n) = k_1Au_1 + k_2Au_2 + ... + k_nAu_n$$

$$= k_1.O + k_2.O + ... + k_n.O = O$$

لذلك فإن $k_1u_1 + k_2u_2 + ... + k_nu_n$ حل للمعادلة المتجانسة AX = O.

نظرية 3-4

إذا كان AX = B نظام معادلات خطية، فإن هذا النظام سيكون له حل واحد فريد أو عدد لانهائي من الحلول أو لا يوجد له حل على الإطلاق .

البرهان:

نبرهن أولاً:

إذا كان AX = B له أكثر من حل واحد فإنه يملك عدداً لانهائياً من الحلول:

لنفرض أن v , u حلول للمعادلة AX = B أي $Au = B$ و $Av = B$ لذلك لكل عدد $k \in R$ سيكون :

$$A\left(u + k(u - v)\right) = A\,u + k(Au - Av)$$

$$= B + k(B - B) = B$$

بكلمات أخرى : لكل $k \in \mathrm{R}$ إذا كان u , v حلان للمعادلة فإن $u+k(u-v)$ أيضاً حل للمعادلة $\mathrm{AX = B}$. وبما أن كل هذه الحلول مختلفة عن الآخر فإن $\mathrm{AX = B}$ تملك عدداً لانهائياً من الحلول.

فإذا لم يكن هنالك أكثر من حل واحد فإما أن يكون الحل واحداً فريداً أو لا يكون هنالك حل مطلقاً

6. المصفوفات المدرجة (Echelon matrices)

يقال على المصفوفة $\mathrm{A} = (a_{ij})$ بأنها مصفوفة مدرجة أو أنها في شكل مدرج إذا كان عدد الأصفار التي تسبق أول عدد غير صفري في كل صف تتزايد بين الصف والصف الذي يليه حتى لا يبقى في النهاية إلا صفوف صفرية وتسمى الأعداد الأولى التي تعقب الأصفار العناصر المميزة .

مثال

المصفوفات الآتية مصفوفات مدرجة.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وتسمى على وجه الخصوص المصفوفة مصفوفة مدرجة مخفضة صفياً إذا كانت العناصر المميزة

أ) هي العناصر غير الصفرية الوحيدة في عمودها .

ب) كل منها يساوي 1.

والمصفوفة الثالثة على اليمين هي مثال على المصفوفة المدرجة المخفضة صفياً بينما الاثنان الأولى والثانية مصفوفتان مدرجتان غير مخفضتان صفياً لاحظ أن المصفوفة الصفرية بأي عدد من الصفوف والأعمدة هي مصفوفة مخفضة صفياً.

مما سبق نلاحظ عزيزي الدارس ، أن أحد أشكال المصفوفات ذات الفائدة في حل الأنظمة الخطية هو المصفوفة المدرجة (وهو الشكل الصفي المميز) ، نعرفه بما يلي:

تكون أيه مصفوفة مدرجة (على الشكل الصفي المميز) إذا حققت الشروط التالية:

❶ إذا لم يكن الصف مكوناً بكامله من أصفار فيكون 1 هو العنصر الأول غير الصفري في هذا الصف ، (ويسمى العنصر المتقدم أو الواحد المتقدم).

❷ كل الصفوف المكونة بكاملها من أصفار (الصفوف الصفرية) تتواجد في أسفل المصفوفة.

❸ في أي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار يكون 1 المتقدم في الصف الأسفل على يمين 1 المتقدم في الصف الأعلى.

❹ تكون جميع عناصر العمود المحتوي على 1 متقدم أصفاراً في كل مكان عدا هذا العنصر

مثال

هل المصفوفات التالية مدرجة (على الشكل الصفي المميز) ؟ ولماذا؟

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} C=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&1&3&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

الحل:

المصفوفات A , B , C جميعها مدرجة (على الشكل الصفي المميز) وذلك لأنها تحقق الشروط الأربعة الواردة في تعريف المصفوفة المدرجة (على الشكل الصفي المميز) ، بينما المصفوفة D ليست على الشكل الصفي المميز لأن العدد 2 موجود فوق العدد 1 المتقدم في الصف الثاني.

تدريب (12)

هل المصفوفات التالية مدرجة (على الشكل الصفي المميز) ؟ ولماذا؟

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&7\\0&0&1&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1&4&3&7\\0&1&6&2\\0&0&1&5\end{bmatrix}$$

1.6 التكافؤ الصفي والعمليات الصفية الأولية

(Row Equivalence and Elementary Row Operation)

نقول عن المصفوفة A أنها مكافئة للمصفوفة B إذا كان بالإمكان الحصول على B من A بواسطة سلسلة منتهية من العمليات الآتية، التي نسميها العمليات الصفية الأولية:

E_1: نستبدل الصف رقم i والصف رقم j أي $R_i \leftrightarrow R_j$.

E_2: نضرب الصف رقم i بعدد k يختلف عن الصفر أي $R_i \to kR_i , k \neq 0$

E_3: نستبدل رقم i بالصف رقم j مضروباً في العدد k+ومضافاً إليه الصف رقم i: أي :

$R_i \to +kR_j + R_i , k \neq 0$.

هذه هي العمليات الأساسية ولكننا عملياً نستعمل E_3,E_2 في خطوة واحدة ولذلك فإننا نستبدل E_3,E_2 بالعملية E التالية :

E: نستبدل الصف رقم i بالصف j مضروباً في k' مضافاً إليه الصف رقم i مضروباً في k : $R_i \to +k' R_j + R_i , k \neq 0$.

طبعاً ، يلاحظ الدارس الشبه الشديد بين هذه العمليات وتلك التي طبقناها على نظام المعادلات الخطية لكي نتمكن من حلها في الفصل السابق. في الواقع فإن أي نظاماً لمعادلات تكون مصفوفتاهما الواسعتان متكافئتان يملكان نفس الحل.

وتستعمل طريقة الحل (الغوريزم) التالية المشابهة للطريقة التي استعملناها لحل نظام المعادلات الخطية:

2.6 طريقة تخفيض مصفوفة بعمليات صفية إلى مصفوفة مدرجة

الخطوة الأولى: نفرض أن العمود j_1 هو أول عمود به مدخل صفري نجرى عمليات صفية تجعل هذا المدخل يظهر في الصف الأول أي يكون $a_{1j_1} \neq 0$

الخطوة الثانية: لكل رقم $i > 1$ نجرب العملية

$$R_i \to -a_{ij_1} R_j + a_{1j_1} R_i$$

(نضرب الصف i بالمدخل a_{1j_1} ونطرح منه الصف الأول مضروباً في المدخل a_{ij_1}).

نكرر هذه العمليات مع المصفوفة الناتجة بعد إجراء الخطوتين على كل صف ماعدا الأول باستمرار إلى أن نحصل على مصفوفة في شكل مدرج .

مثال

خفض المصفوفة A إلى مصفوفة مدرجة باستعمال العمليات :

$$R_3 \to -3R_1 + R_3 \ ، \ R_2 \to -2R_1 + R_2$$

ثم العملية $R_3 \to -5R_2 + 4R_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -3R_1 + R_3]{R_2 \to -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -5R_2 + 4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

وإذا كانت المصفوفة $A = (a_{ij})$ مصفوفة مدرجة لها عناصر مميزة $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots\ldots, a_{rj_r}$ فإننا نستطيع أن نجرى العمليات :

$$R_i \to -a_{kj_i} R_i + a_{ij_i} R_k \qquad \text{لكل} \qquad k = 1,2,\ldots,i\text{-}1$$

وسنجد أننا حصلنا على مصفوفة مدرجة تكون العناصر المميزة هي المدخلات الوحيدة غير الصفرية في كل عمود.

فإذا ضربنا كل R_i بالعدد $\frac{1}{a_{ij}}$ حيث $i \le r$ ، فإن العناصر المميزة ستكون 1 . بكلمات أخرى ستتحول المصفوفة المدرجة إلى مصفوفة مدرجة مخفضة صفياً.

هذه الملاحظات توضح أن كل مصفوفة A مكافئة على الأقل لمصفوفة مدرجة مخفضة صفياً ويمكن البرهان على أن A مكافئة لمصفوفة مدرجة واحدة فقط.

تدريب (13)

حول المصفوفة إلى مصفوفة مدرجة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. المصفوفة المربعة Square Matrix

تسمى المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع الأعمدة مصفوفة مربعة . فإذا كانت المصفوفة المربعة تملك n صفاً و n عموداً ، فإنها تسمى مصفوفة من الدرجة n أو مصفوفة مربعة نونية .

فإذا كانت $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة نونية فإن قطرها يتكون من العناصر

$$a_{nn},\ldots.., a_{22}, a_{11}$$

مثال

المصفوفة الآتية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة من الدرجة 3.

وتسمى المصفوفة المربعة النونية مصفوفة مثلثية عليا إذا كانت مدخلاتها كالآتي

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

كما تسمى مصفوفة مثلثية سفلى إذا كانت مدخلاتها كالآتي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \quad \ldots\ldots 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \quad 0\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots\ldots & \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

وتسمى قطرية إذا كانت بالشكل:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \quad \ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \quad 0\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots a_n \end{pmatrix}$$

على وجه الخصوص إذا كانت المصفوفة القطرية تتكون من آحاد على القطر وأصفار ماعدا ذلك فإنها تسمى المصفوفة مصفوفة الوحدة ونرمز لها ب I_n مثلاً:

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة تشبه العدد 1 حيث تفي مع أي مصفوفة من نفس المرتبة بالخاصية:

$$A\,I = I\,A = A$$

وتسمى المصفوفة $k\,\mathrm{I}$ مصفوفة عددية وهي التي تكون في كل مدخلة في القطر العدد k

1.7 جبر المصفوفات المربعة

كما أسلفنا فإن أي مصفوفتين لا يجب بالضرورة أن يكون بالإمكان جمعهما أو ضربهما. لكن إذا أخذنا في الاعتبار فقط المصفوفات المربعة من المرتبة n، فإن هذا التضييق ينتهي ويكون بالإمكان إجراء عمليات الجمع والضرب و الضرب بعدد ، والنقل على أي مصفوفات مرتبة n x n وتكون النتيجة دائما مصفوفة من مرتبة n x n .

على وجه الخصوص إذا كانت A مصفوفة مربعة نونية، فإننا نستطيع أن نُكَوّن قوى من A كما يلي:

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A\,A} \quad , \quad \mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2\,\mathrm{A} \quad , \; ...., \quad \mathrm{A}^0 = \mathrm{I}$$

ويمكن أيضاً تكوين كثيرات حدود من المصفوفات فإذا كانت :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

فإننا نعرف :

$$f(A) = a_0\mathrm{I} + a_1\mathrm{A} + a_2\mathrm{A}^2 + ... + a_n\mathrm{A}^n$$

وفي حالة ما إذا كانت $f(x)$ هي المصفوفة الصفرية، فإن A يسمى صفر أو جذر كثيرة الحدود $f(x)$.

مثال

لـــتكن $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ أوجـــد A^2 . إذا كانـــت $f(x)=2x^2-3a+5$ و $g(x)=x^2+3x-10$. أوجـــد $f(A)$ و $g(A)$ و أوجـــد جـــذور هـــذه المعادلات إن وجدت .

الحل :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{pmatrix}$$

$$f(A)=2\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -18\\ -27 & 61\end{pmatrix}$$

$$g(A)=\begin{pmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

وبذلك فإن A هو صفر أو جذر لكثيرة الحدود $g(x)$.

8.المصفوفات القابلة للعكس

تسمى المصفوفة المربعة A قابلة للعكس إذا وجدت B بحيث يصح:

$$AB=BA=I$$

حيث I هي المصفوفة الآحادية . مثل هذه المصفوفة B فريدة . ويمكن برهان ذلك بسهولة ، فإذا كانت هنالك مصفوفتان B_2,B_1 تحققان الشرط أعلاه ، فإننا نرى أن :

$$A\,B_1 = B_1\,A = I \quad \text{و} \quad A\,B_2 = B_2\,A = I$$

ومنها يتبع أن

$$B_1 = B_1\,I = B_1\,(A\,B_2) = (B_1\,A)B_2 = I\,B_2 = B_2$$

مثل هذه المصفوفة B تسمى المصفوفة العكسية لـ A ونشير إليها بالرمز A^{-1} . هذه العلاقة متناظرة بمعنى إذا كانت B هي عكسية A ، فإن A هي عكسية B.

مثال

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ برهن أن B,A عكسيتان لبعضهما البعض

الحل

$$A\,B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+10 & 15-15 \\ -6+6 & 10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\,A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+10 & -15+15 \\ 6-6 & 10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لكن لا يلزم أن نثبت كلا المعادلتين $A\,B = I$ و $BA = I$ لكي نبرهن أن المصفوفتين عكسيتين لبعضهما البعض فيكفي أن تصح واحدة فقط من المعادلتين ويمكن برهان ذلك بسهولة ونكتفي بمثال على ذلك .

مثال

إذا كـان $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$. أثبـت أن A و B عكسـيتان

لبعضهما.

الحل

$$A\,B=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11+0+12&2+0-2&2+0-2\\-22+4+18&4+0-3&4-1-3\\-44-4+48&8+0-8&8+1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

لذلك فإن B,A عكسيتان لبعضهما . ويمكن التأكد من ذلك بتكوين حاصل الضرب BA

وسنجد أن BA=I .

1.8 كيفية استخراج المصفوفة العكسية

إذا كانت لدينا مصفوفة مربعة A فإن استخراج A^{-1} يحتاج لطرق متقدمة سنتعرض

ليعضها هنا وللبعض الآخر فيما يلي نشرح بعض هذه الطرق:

أ- **حساب A^{-1} بالطرق الجبرية البسيطة:**

في الحالات البسيطة ، مثلاً المصفوفات سعة 2 x 2 نستطيع استخراج المصفوفة العكسية

بالتحويل إلى معادلات آنية وحلها . مثلاً إذا كانت لدينا مصفوفة :

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

فإننا نستطيع استخراج A^{-1} من الشرط $A A^{-1} = I$. فإذا افترضنا أن $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

حيث x, y, z, w مجاهيل ، فإن الشرط أعلاه يعطينا المعادلة المصفوفية:

$$A A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهذا يقود إلى المعادلة

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبمساواة العناصر المتقابلة في الجانبين نخلص إلى نظام المعادلات :

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases}$$

وهذه معادلات بسيطة يمكن حلها فإذا افترضنا أن $ad-bc \neq 0$ ، فإن النظام الأيسر

يعطينا الحل:

$$x = \frac{d}{ad-bc} \quad \text{و} \quad z = \frac{-c}{ad-bc}$$

و الأيمن يعطينا

$$y = \frac{-b}{ad-bc} \quad \text{و} \quad w = \frac{a}{ad-bc}$$

الشرط $ac - bd \neq 0$ ضروري للحل ، فإذا كانت $ad - bc = 0$ ، فإن التعابير السالفة للمجاهيل w , z , y , x لن يكون لها معنى لأننا نقسم في كل حال على صفر، وهذا غير معرّف . لهذا السبب فإن التعبير $ad - bc$ يسمى المحدد لنظم المعادلات و أيضاً للمصفوفة A ونعطيه الرمز $|A| = ad - bc$ ، وسنتعرض له بالتفصيل فيما بعد لذلك سيكون A^{-1} كالآتي:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{|A|} & \dfrac{-b}{|A|} \\ \\ \dfrac{-c}{|A|} & \dfrac{a}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

بكلمات أخرى أن المصفوفة A تملك عكسية A^{-1} إذا كان وفقط إذا كان المحدد مختلفاً عن الصفر أي $|A| \neq 0$.

ب- حساب A^{-1} من العمليات الصفية الأولية:

أي مصفوفة تنبثق من المصفوفة الآحادية باستعمال عملية صفية أولية تسمى مصفوفة أولية.

مثال

أوجد المصفوفات الأولية من المرتبة الثالثة التي تكافئ العمليات $R_1 \leftrightarrow R_2$ (استبدال الصف الأول والصف الثاني) و $R_3 \to -7\,R_3$ (ضرب الصف الثالث بالعدد −7) و $R_2 \to -3\,R_1 + R_2$ (استبدال الصف الثاني بالصف الأول مضروباً في−3 ومضافاً إلى ذلك الصف الثاني).

الحل:

نعمل العمليات أعلاه على المصفوفة الوحدوية $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

فنحصل على المصفوفات الأولية الآتية:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نظرية 1:

و إذا كانت e هي عملية أولية و E هي المصفوفة الأولية المكافئة لها من مرتبة m أي $E = e\,(I_m)$ فإن أي مصفوفة A من سعة m x n تحقق $e\,(A) = E\,A$ أي أن نتيجة إعمال e على A وهى $e(A)$ يمكن الحصول عليها بضرب A بالمصفوفة الأولية المكافئة E.

البرهان : يحذف .

من النظرية السابقة نحصل على الظرية التالية:

نظرية 2:

المصفوفة A تكون مكافئة للمصفوفة B إذا كان وفقط إذا كان توجد مصفوفات أولية

$E_S,\ldots,E_2,E_1$ بحيث يصح : $E_S\ldots E_2E_1A = B$

هذه النظرية هي ترجمة لتعريف التكافؤ بين مصفوفتين أي توجد عمليات أولية

$e_S,\ldots,e_2,e_1$ بحيث يصح $e_S\left(\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right) = B$. ولكن من

النظرية 1 تصح هذه الحقيقة إذا وفقط إذا كانت $E_S\ldots E_2E_1A = B$ حيث E_i.

هي المصفوفة الأولية المكافئة للعملية e_i .

نظرية3:

المصفوفات الأولية قابلة للإقلاب ومصفوفاتها العكسية هي أيضاً مصفوفات أولية.

البرهان: يحذف.

نظرية4:

المقولات الآتية متكافئة

أ) المصفوفة A قابلة للإقلاب .

ب) المصفوفة A مكافئة للمصفوفة الذاتية I .

ج) المصفوفة Aهي حاصل ضرب مصفوفات أولية

النظريات 1–4 تعطينا طريقة لحساب A^{-1} . فإذا كانت E_i هي المصفوفة الأولية المكافئة للعملية e_i ، فإننا من النظرية 2 أعلاه نجد أن $E_n \dots E_2 E_1 A = I$.

ذلك يعني أن $(E_n \dots E_2 E_1 I)\, A = I$ ولذلك فإن $A^{-1} = E_n \dots E_2 E_1 I$. بكلمات أخرى A^{-1} يمكن الحصول عليها من I بإعمال العمليات الصفية الأولية $e_1, \dots, e_n$ لتطبيق ذلك نُكوّن المصفوفة المزدوجة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} \dots\dots\dots a_{2n} \\ a_{m1} \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وتخفض هذه المصفوفة بإعمال العمليات الصفية الأولية فتنخفض المصفوفة $\begin{pmatrix} a_{11} \dots\dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots\dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$ إلى المصفوفة الآحادية لكن في نفس الوقت تتحول المصفوفة الآحادية إلى A^{-1} .

تدريب (14)

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ أوجد A^{-1} بطريقة التخفيض المستمر بعمليات صفية أولية .

الخلاصة

فى القسم الأول من هذه الوحدة قمنا بتعريف المصفوفات بأنها منظومة مكتوبة في شكل صفوف فوق بعضها ،كل عدد فيها مرقم بترتيبه فى الصف وترتيبه فى العمود الذين يقع فيهما ، وعرفنا كيف نحدد سعة المصفوفة بحساب عدد الصفوف والأعمدة فيها.

فى القسم الثانى تناولنا العمليات على المصفوفات وفيه عرفنا مساواة المصفوفات وتعرفنا على عملية الجمع والضرب بعدد ثابت ،وكذلك سالب المصفوفة.

فى القسم الثالث تعرفنا على خصائص جمع وضرب المصفوفات وعالجنا القوانين الثمانية الأساسية فى جبر المصفوفات وهي مأخوذة من قوانين الأعداد الحقيقية.

فى القسم الرابع تناولنا عملية ضرب المصفوفات وهنا تعرفنا على الشرط اللازم لضرب مصفوفتين وهو أن يكون عدد الأعمدة فى المصفوفة الأولى (المضروب) مساوياً لعدد الصفوف فى المصفوفة الثانية (المضروب فيه).

أي إذا كانت المصفوفة [A] من الرتبة ($M\times N$) المصفوفة[B] من الرتبة ($N\times L$) فإن حاصل الضرب يعطي المصفوفة[C] من الرتبة ($M \times L$) وكذلك عرفنا القواعد الأساسية التي يجب مراعاتها عند ضرب المصفوفات.

فى القسم الخامس منقول المصفوفة وهنا قد تعرفنا على أهم خصائص عملية منقول المصفوفه وهي :

$$(A^t)^t = A$$
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$
$$(k\,A)^t = k\,A^t$$
$$(AB)^t = B^t A^t$$

فى القسم السادس : عالجنا العلاقة بين المصفوفات ونظم المعادلات الخطية

وهنا قمنا بتحويل نظام معادلات خطية إلى نظام آخر عن طريق ضرب المصفوفات وهو

الذي يكتب باختصار : فى الشكل $A\,X = B$

فى القسم السابع : سمينا المصفوفة $A = (a_{ij})$

مصفوفة مدرجة إذا كان عدد الأصفار التي تسبق أول عدد غير صفري فى كل صف تتزايد بين الصف والصف الذى يليه حتى لايبقى فى النهايه إلا صفوف صفرية.

وتعرفنا فى هذا القسم كذلك على تكافؤ الصف والعمليات الصفية وطريقة تخفيض مصفوفة بعمليات صفية إلى مصفوفة مدرجة .

فى القسم الثامن : تعرفنا على المصفوفات المربعة وأنواعها المختلفة وعالجنا في هذا القسم جبر المصفوفات المربعة حيث أنه يمكن إجراء عمليات الجمع و الضرب بعدد والنقل إلى أي مصفوفة برتبة $n \times n$ وتكون النتيجة دائماً مصفوفة برتبة $n\times n$.

فى القسم التاسع : تعرفنا على المصفوفات القابلة للعكس حيث عرفنا أن المصفوفة A المربعة تكون قابلة للعكس إذا وجدت B بحيث $AB = BA = I$, I هي المصفوفة الأحادية.

وعرفنا طرق استخراج المصفوفة العكسية عن طريق حساب A^{-1} بالطرق الجبرية البسيطة أو بحساب A^{-1} من العمليات الصفية الأولية.

لمحه مسبقة عن الوحدة التالية

لقد أنهينا عزيزي الدارس ، دراسة الوحده الثالثة وهي المصفوفات وسنتعرف إن شاء الله فى الوحدة الرابعة على مفهوم الفضاءات الاتجاهية والفضاءات الجزئية الاتجاهية وسوف نتناول فيها المنطلقات التي يجب أن تتحقق على الفضاء الخطي على أي مجال ، كما سنقوم بالبحث فى الفضاءات الجزئية التي هي جزء من فضاء معطى تعيش كمجموعة جزئية من ذلك الفضاء المعطى وسوف نتعرض فى هذه الوحدة إلى مفهوم الاعتماد والاستقلال الخطي.

اجابات التدريبات

تدريب (1)

$a_{12} = 3 \ , \ a_{32} = 2 \ , a_{23} = 8$

تدريب (2)

جم المصفوفات هي:

2×2 ، 3×2 ، 1×1 على الترتيب.

تدريب (3)

المصفوفتان متساويتان ضمناً ومن نفس الدرجة إذاً المدخلات المتناظرة متساوية

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 2x = 3 \\
& \Rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0 \\
& \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \\
& \Rightarrow x = -1, x = 3 \\
& y^2 = 9 \\
& \Rightarrow y = \pm 3 \\
& z = 3
\end{aligned}
$$

تدريب (4)

المصفوفتان من نفس الدرجة إذاً قابلتان للجمع

$$
A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}
$$

تدريب(5)

$$5A=\begin{bmatrix}5 & 10 & 15 & 20\\ -5 & 15 & 25 & 5\end{bmatrix}$$

$$(\text{-2A})=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -6 & -8\\ 2 & -6 & -10 & -2\end{bmatrix}$$

تدريب(6)

$$A\text{-C}= \quad A+(\text{-C})= \quad \begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}$$

بينما المصفوفة A-B غير معرفة وذلك لأن حجم A لا يساوي حجم B.

تدريب(7)

$$\text{B-C = B+(-C) = }\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 9 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 13 & 3\end{bmatrix}$$

بينما المصفوفة B-A غير معرفة وذلك لأن حجم B لا يساوي حجم A.

تدريب (8)

أ) (

$$\text{A B}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.1+7.5 & 3.4+7.(-2)\\ -1.(1)+(0).5 & -1.4+0.(-2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+35 & 12-14\\ -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38 & -2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

(ب) $$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3+4.(-1) & 1.7+4.0 \\ 5.3+(-2).(-1) & 5.7+(-2).0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 17 & 35 \end{pmatrix}$$

تدريب (9)

(أ) $$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+(-1).3 & 2.(-2)+(-1).4 & 2.(-5)+(-1).0 \\ 1.1+0.3 & 1.(-2)+0.4 & 1.(-5)+0.0 \\ (-3).1+4.3 & (-3).(-2)+4.4 & (-3).(-5)+4.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

(ب) $$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2+(-2).1+(-5).(-3) & 1.(-1)+(-2).0+(-5).4 \\ 3.2+4.1+0.(-3) & 3.(-1)+4.0+0.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

تدريب (10)

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$ مصفوفة عمودية

تدريب (11)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left(A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$$

تدريب (12)

نلاحظ أن المصفوفتين A , B هما على الشكل الصفي المميز وذلك لأن كل منهما تحقق الشروط الأربعة ، حيث أننا نلاحظ في جميع الصفوف أن العدد 1 هو أول عدد غير صفري يظهر في هذه الصفوف ، كما أن 1 الموجود في الصف الأسفل هو على يمين 1 الموجود في الصف الذي هو أعلى منه ، كما أن جميع عناصر الأعمدة التي يظهر فيها 1 متقدم أصفاراً عدا هذا العنصر.

أما المصفوفة D فليست على الشكل الصفي المميز، فمثلاً العمود الثاني يحتوي على العدد 4 فوق العدد 1 المتقدم وهذا يناقض الخاصية الرابعة من شروط المصفوفة التي على الشكل الصفي المميز.

تدريب (13)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

باستعمال العمليات:

$$R_2 \rightarrow -5R_3 + 2R_2 \ ، \ R_1 \rightarrow R_3 + R_1 \ ، \ R_1 \rightarrow -4R_2 + 3R_1$$

ثم ضرب R_1 في $\frac{1}{6}$ و R_2 في $\frac{1}{6}$ و R_3 في $\frac{1}{2}$.

تدريب (14)

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to -4R_1+R_3]{R_2\to -2R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to -R_3+R_2]{R_1\to 2R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&-1&0&4&0&-1\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to -1R_3]{R_2\to -1R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)$$

ولذلك

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

ونستطيع أن نتأكد بسرعة بأن هذا صحيح بحساب $A\,A^{-1}$ فنجد أن :

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11+12&2-2&2-2\\-22+4+18&4-3&4-1-3\\-44-4+48&8-8&8+1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

إجابات أسئلة التقويم الذاتي

أسئلة تقويم ذاتي (1)

1/ (أ)هي مصفوفة 2 X 4 صفوفها هي (1,3)،(−1، 4)، (4,5)، (2,3)، وأعمدتها

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ب) $a_{12} = -2, a_{32} = 4, a_{23} = 5$

2/ المصفوفة A ليسا قطرية أو مثلثيه علوية أو مثلثيه سفلية أو صفرية لأنه لا ينطبق عليها أي من تعاريف المصفوفات السابقة .

المصفوفة B مثلثيه علوية.

المصفوفة D حتى نطبق عليها تعريف المصفوفة العلوية أو السفلية أو القطرية يفترض أن تكون المصفوفة مربعة ، والمصفوفة D ليست مربعة فبالتالي هي ليست علوية أو سفلية أو قطرية.

المصفوفة C مصفوفة صفرية لأن جميع عناصرها أصفاراً.

المصفوفة F مثلثيه سفلية.

أسئلة تقويم ذاتي(2)

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(ب) المصفوفتان ليستا من نفس الدرجة إذاً غير قابلتان للجمع.

(ج)

$$KA = 6\begin{bmatrix} 7/3 & 8/3 & 2/3 \\ 5/3 & 11/3 & -7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 4 \\ 10 & 22 & -14 \end{bmatrix}$$

(د)

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -9 \\ 0 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

أسئلة تقويم ذاتي(3)

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}, 3B \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 12 & 15 \\ -9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 2A+3B = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 10 & 17 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$$

أسئلة تقويم ذاتي(4)

$$A^t = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 7 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

أي أن : $A = A^t$

$\therefore$ المصفوفة A تماثلية.

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

أي أن $B = -B^t$

$\therefore$ المصفوفة B متماثلة تخالفياً.

مسرد المصطلحات

✻ المصفوفه : Matrice

مجموعة من الأرقام أو الرموز مرتبة على شكل صفوف وأعمدة مكتوبه بين [ ] ويرمز للصفوف بأحد الحروف الانكليزيه الكبيره .... A,B,C,D

✻ منقول المصفوفه Transpose Matrix

هى المصفوفه الناتجة من المصفوفة المعطاة بعد إبدال الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف.

✻ مصفوفة المعاملات Coetaicient Matric

هي المصفوفة التي تتكون عناصرها من معاملات المجاهيل فى النظام الخطي.

✻ المصفوفة المربعة Square Matrix

هي المصفوفة التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

✻ مصفوفة الوحدة : Identity Matrix

هي المصفوفة القطرية التي جميع عناصر قطرها الرئيس 1−.

✻ المصفوفة القابلة للعكس (معكوس المصفوفة) Inverseoaa matrix

النظير الضربى للمصفوفة المربعة A هو المصفوفة B بحيث أن :

$$AB = BA = I$$

وأن I هى مصفوفة الوحدة.

✻ متجه الصف

هي مصفوفة تحتوى على صف واحد وعدد من الأعمدة (m) وهى الرتبة (M× 1) ويكون شكلا كما يلى :

$$\begin{bmatrix}25 & 30 & 27 & 40\end{bmatrix}_{1\times 4} \qquad \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots a_{1m}\end{bmatrix}$$

*** متجه العمود :**

هي مصفوفة تحتوى على عدد من الصفوف (n) وعلى عمود واحد فهي من الرتبه (n ×1) ويكون شكلها كما يلى :

$$\underset{4\ x_1}{\begin{bmatrix}9\\15\\19\\9\end{bmatrix}} \quad , \quad \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\\a_{n1}\end{bmatrix}$$

المراجع

خالد قاسم سمور ، **الرياضيات والهندسة التحليلية ط**[1]: دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع، عمان ، 1999م.

عباس السيد إبراهيم ، **أسس الرياضيات** : نشورات جامعة صنعاء ، صنعاء ، 1993م.

موفق حجه ، محمد هيلات ، محمد خنفر ، **الجبر الخطي ط**[2] : منشورات جامعة القدس المفتوحة ، عمان ، 2003م.