

Набор точных решений ColESo для верификации программных кодов для расчёта задач аэроакустики

14 июня 2022 г.

Приводится вывод точных решений, реализованных в библиотеке ColESo. В некоторых случаях, когда это решение представляется в виде интеграла и его численное вычисление представляет трудность, описывается способ его вычисления.

Содержание

1	Решаемые уравнения	3
1.1	Нелинейные уравнения	3
1.2	Линеаризованные уравнения	3
2	О постановках задач в программах расчёта задач газовой динамики	5
2.1	Некоторые замечания об использовании точных решений	5
2.2	Проблема конечности расчётной области.	7
2.3	Анализ амплитудной и фазовой ошибок разностной схемы	7
3	Простейшие решения, сохраняющие форму начальных данных	8
3.1	Одномерный полиномиальный профиль (s_Polynom)	8
3.2	Одномерное негладкое возмущение (s_4peak)	8
3.3	Плоская акустическая волна (s_PlanarSinus, s_PlanarGauss)	8
3.4	Энтропийное и вихревое возмущение (s_EntropyVortex)	9
4	Линейные одномерные задачи	9
4.1	Одномерная задача с источником (s_Source1D)	9
4.2	Прохождение акустической волны через фронт ударной (s_PlanarAcousticShock)	10
5	Линейные осесимметрические двумерные задачи	12
5.1	Распространение волны от гауссового импульса (s_Gaussian2D)	12
5.2	Распространение волны от финитного импульса с произвольным профилем (s_IVP2D)	13
5.3	Распространение волны от источника (s_Source2D)	16

6	Линейные трёхмерные задачи	18
6.1	Задача с начальными данными в форме гауссиана (s_Gaussian3D)	18
6.2	Распространение волны от источника (s_Source3D)	19
6.3	Движущийся точечный источник (s_PointSource)	21
6.4	Вращающийся точечный диполь (s_RotatingDipole)	24
6.5	Волна между коаксиальными цилиндрами (s_Coaxial)	24
7	Задачи дифракции	25
7.1	Дифракция волны от начального импульса на углу $2\pi/n$ (s_Corner) . . .	25
7.2	Дифракция плоской волны на углу $2\pi/n$ (s_CornerPlanar)	27
7.3	Рассеяние акустической волны на цилиндре (s_Cylinder)	28
8	Линейные возмущения с вязкостью	31
8.1	Простая волна в свободном пространстве (s_SinusVisc)	31
8.2	Вихревые возмущения в цилиндре (s_VortexInCylinder)	33
8.3	Акустическая волна при наличии вязкости и теплопроводности (s_WaveInChannel)	33
9	Плоские вихри	37
9.1	Финитный вихрь (s_FiniteVortex)	37
9.2	Вихрь с профилем $u = r/(1 + r^2)$ (s_Vortex_BG)	38
9.3	Вихрь с гауссовым профилем циркуляции (s_GaussianVortex)	38
9.4	Вихрь Рэнкина (s_RankineVortex)	39
10	Одномерные решения уравнений Эйлера	39
10.1	Задача Римана о распаде разрыва (s_Riemann)	39
10.2	Ударная волна, задаваемая числом Маха (s_Shock)	39
10.3	Отражение ударной волны от стенки (s_ShockRefl)	40
10.4	Простая волна (s_SimpleWave)	40
11	Низкорейнольдсовы течения	43
11.1	Структура ударной волны (s_ViscShock)	43
11.2	Течение между параллельными плоскостями (s_Couette)	47
11.3	Течение между концентрическими цилиндрами (s_ConcCyl)	51
12	Течения несжимаемой жидкости	52
12.1	Безвихревое обтекание цилиндра (s_CurlFreeCylinder)	52
12.2	Безвихревое обтекание сферы (s_PotentialSphere)	52
12.3	Низкорейнольдсовое обтекание сферы (s_ViscSphere)	53
12.4	Задача Блазиуса (s_Blasius)	53

1 Решаемые уравнения

1.1 Нелинейные уравнения

Системы уравнений, для которых в настоящей работе приводятся точные решения, можно представить в иерархическом виде. В качестве наиболее общих уравнений выберем уравнения Навье – Стокса для вязкого сжимаемого газа. Они могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) + \mathbf{S}(t, \mathbf{r}, \mathbf{Q}), \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau \cdot \mathbf{u} - \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Здесь $E = \rho \mathbf{u}^2/2 + \rho \varepsilon$ – полная энергия, а ε – внутренняя энергия газа. Если не указано обратное, предполагается выполнение уравнения состояния идеального газа: $\varepsilon = p/((\gamma - 1)\rho)$. $\mathbf{S}(t, \mathbf{r}, \mathbf{Q})$ – некоторый источниковый член, равный нулю, если не сказано обратное. Компоненты тензора вязких напряжений определяются формулой $\tau_{ij} = \mu(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - (2/3)\delta_{ij}\nabla_k u_k)$, где μ – коэффициент динамической вязкости. Вектор теплового потока записывается в виде $\sigma = -\gamma\mu\nabla\varepsilon/\text{Pr}$, где Pr – число Прандтля. Коэффициент динамической вязкости μ может непрерывно зависеть от плотности или температуры; конкретный вид этой зависимости обговаривается дополнительно.

Уравнения Эйлера получаются из уравнений Навье – Стокса формальным занулением коэффициента вязкости. Если требуется рассматривать разрывные решения, то вместо дифференциальных уравнений рассматривается система интегральных уравнений

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{Q} dV + \int_{\partial V} \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{S}(t, \mathbf{r}, \mathbf{Q}) dV, \quad (1.3)$$

где объём V произвольный, дополненный условием неубывания энтропии.

Несколько приведённых ниже решений выводятся в предположении несжимаемости среды. Если положить $\rho \equiv 1$ вместо уравнения состояния идеального газа, а μ считать постоянной, то (1.2) сводится к

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mu \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

1.2 Линеаризованные уравнения

Подавляющее большинство рассматриваемых ниже решений являются точными решениями линеаризованных уравнений. Понятие линеаризованных уравнений предполагает, что задано некоторое “фоновое” поле $\mathbf{Q}(t, \mathbf{r})$, являющееся точным решением (1.1)–(1.2). Линеаризованные уравнения Навье – Стокса получаются подстановкой в (1.1)–(1.2) выражения $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \epsilon \mathbf{Q}'$ и пренебрежения членами порядка ϵ^2 . Далее черта над именем переменной означает “фоновое значение”, а штрих после переменной – пульсацию относительно фонового значения. Фоновая скорость звука равна $\bar{c} = \sqrt{\gamma \bar{p}/\bar{\rho}}$.

Для произвольного фонового поля линейаризованные уравнения Навье – Стокса достаточно громоздки. В простейшем случае $\bar{\mathbf{Q}}$ не зависит от t и \mathbf{r} , то есть является просто однородным потоком. Если выбрать масштаб плотности и скорости так, чтобы $\bar{\rho} = 1$, $\bar{p} = 1/\gamma$, то уравнения Навье – Стокса, линейаризованные на однородном фоновом поле, несложными преобразованиями можно привести к виду

$$\begin{aligned}\frac{d\rho'}{dt} + \nabla_j u'_j &= S'_\rho(t, \mathbf{r}), \\ \frac{du'_i}{dt} + \nabla_i p' &= \mu \left(\Delta u'_i + \frac{1}{3} \nabla_i (\nabla_j u'_j) \right) + S'_{u_i}(t, \mathbf{r}), \\ \frac{d(p' - \rho')}{dt} &= \frac{\mu}{\text{Pr}} \Delta (\gamma p' - \rho') + (S'_p(t, \mathbf{r}) - S'_\rho(t, \mathbf{r})),\end{aligned}\tag{1.5}$$

где через d/dt обозначена субстанциональная производная: $d/dt = \partial/\partial t + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)$.

Поле скоростей может быть представлено в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющей. Предположим, что источниковые члены в уравнении для импульса равны нулю: $\mathbf{S}'_{\mathbf{u}} \equiv 0$. Подставляя во второе уравнение (1.5) выражение $\mathbf{u}' = \nabla W + \text{rot } \Psi$, получаем

$$\nabla \left[\frac{dW}{dt} + p' - \frac{4}{3} \mu \Delta W \right] + \text{rot} \left[\frac{d\Psi}{dt} - \mu \Delta \Psi \right] = 0.\tag{1.6}$$

Ниже будут рассматриваться решения, для которых выражения под знаками градиента и ротора в (1.6) равны нулю. В этом случае уравнения Навье – Стокса (1.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\rho'}{dt} + \Delta W &= S'_\rho(t, \mathbf{r}), \\ \frac{dW}{dt} + p' &= \frac{4}{3} \mu \Delta W, \\ \frac{d(p' - \rho')}{dt} &= \frac{\mu}{\text{Pr}} \Delta (\gamma p' - \rho') + (S'_p(t, \mathbf{r}) - S'_\rho(t, \mathbf{r})), \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \mu \Delta \Psi,\end{aligned}\tag{1.7}$$

причём скорость определяется по формуле $\mathbf{u}' = \nabla W + \text{rot } \Psi$.

Уравнения Эйлера допускают линейаризацию на разрывном фоновом поле. В этом случае для получения линейаризованных уравнений требуется аккуратная работа с (1.3), включающаяся в себя учёт бесконечно малых колебаний положения разрыва под действием возмущений. Если же фоновое поле является непрерывным, линейаризованные уравнения Эйлера получаются из линейаризованных уравнений Навье – Стокса занулением коэффициента вязкости. В частности, если фоновое поле постоянное,

$$\frac{dp'}{dt} + \bar{\rho} \bar{c}^2 \text{div } \mathbf{u}' = S'_p(t, \mathbf{r}), \quad \frac{d\mathbf{u}'}{dt} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' = S'_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p'}{\bar{c}^2} - \rho' \right) = \frac{S'_p(t, \mathbf{r})}{\bar{c}^2} - S'_\rho(t, \mathbf{r}).\tag{1.8}$$

При $\mathbf{S}'_{\mathbf{u}} \equiv 0$ и $\bar{\rho} = \bar{c} = 1$ по аналогии с (1.7) можно записать

$$\frac{dp'}{dt} + \Delta W = S'_p(t, \mathbf{r}), \quad \frac{dW}{dt} + p' = 0, \quad \frac{d(p' - \rho')}{dt} = S'_p(t, \mathbf{r}) - S'_\rho(t, \mathbf{r}),\tag{1.9}$$

причём скорость определяется по формуле $\mathbf{u}' = \nabla W + \text{rot } \Psi$.

Общее решение (1.9) в \mathbb{R}^3 представляется в виде суммы трёх компонент. При $p' \equiv \mathbf{u}' \equiv S'_p \equiv 0$ решение содержит только пульсацию плотности, подчиняющуюся уравнению переноса со скоростью фоновых потока. Это возмущение называется энтропийным. При $p' \equiv \rho' \equiv \text{div} \mathbf{u}' \equiv S'_p \equiv S'_\rho \equiv 0$ решение содержит только соленоидальное поле скоростей, также подчиняющееся уравнению переноса со скоростью фоновых потока. Это возмущение называется вихревым. Наконец, при $p' \equiv \rho', S'_p \equiv S'_\rho := s(t, \mathbf{r})$ и потенциальном поле скоростей $\mathbf{u}' = \nabla W$ из (1.9) следует равенство $d^2W/dt^2 - \Delta W = -s(t, \mathbf{r})$, превращающееся в системе отсчёта, в которой фоновое поле скоростей равно нулю, в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W = -s(t, \mathbf{r}). \quad (1.10)$$

Поля давления и скоростей выражаются через волновой потенциал формулами

$$\mathbf{u}' = \nabla W, \quad p' = -\frac{dW}{dt}. \quad (1.11)$$

При решении задач в свободном пространстве и отсутствии источников в правой части решение линеаризованных уравнений Эйлера (1.8) на любом стационарном однородном фоновом поле сводится к решению уравнений при $\bar{\rho} = 1, \bar{p} = 1/\gamma, \bar{\mathbf{u}} = 0$ посредством перехода в систему отсчёта, связанную с потоком, и масштабирования полей физических пульсаций.

В неодносвязных областях возможно безвихревое поле, не имеющее потенциала, а в поверхностно неодносвязных областях – бездивергентное поле, не представляющееся в виде ротора функции. В приведённом ниже наборе точных решений такие поля скоростей не встречаются.

2 О постановках задач в программах расчёта задач газовой динамики

2.1 Некоторые замечания об использовании точных решений

Набор точных решений, собранный в настоящей работе, предназначен для верификации программных кодов для расчёта задач газовой динамики и, в частности, аэроакустики. Можно предположить для простоты, что такой код предназначен для решения сжимаемых уравнений Навье – Стокса в трёхмерных областях. Однако формулы, приводимые в настоящей работе, могут быть точными решениями линеаризованных уравнений в 1- или 2-мерном пространстве. Поэтому имеет смысл рассмотреть вопросы, связанные с использованием точных решений в газодинамических кодах.

Невязкие решения.

Решения уравнений Эйлера могут использоваться для верификации кодов для решения уравнений Навье – Стокса путём полагания коэффициента вязкости равным нулю. Однако при этом могут возникать проблемы с заданием условий непротекания ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) на границе, используемых в уравнениях Эйлера.

Решения линеаризованных уравнений.

Точные решения линеаризованных уравнений могут быть использованы, если положить решение полных уравнений равным $\mathbf{Q}(t, \mathbf{r}) = \bar{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r}) + \epsilon \mathbf{Q}'(t, \mathbf{r})$. Величина ϵ не должна быть слишком большой, чтобы нелинейные члены (порядка ϵ^2) не вносили большую погрешность в решение. С другой стороны, ϵ не должна быть слишком малой, чтобы решение не портилось из-за ошибок округления. Важно, чтобы $\bar{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})$ было точным решением полных уравнений не только на дифференциальном, а на разностном уровне. Отметим, что код NOISEtte позволяет решать линеаризованные уравнения напрямую, что снимает необходимость подбора параметра ϵ .

Решения волнового уравнения.

Каждому решению волнового уравнения (1.10) соответствует решение линеаризованных уравнений Эйлера (1.8), посчитанное по формулам (1.11). Ниже во всех решениях формулы для пульсаций скоростей и давления приводятся вместе с формулами для волнового потенциала.

Решения несжимаемых уравнений.

При малой скорости потока стационарные решения задач внешнего обтекания в рамках уравнений Эйлера или Навье – Стокса для сжимаемого газа близки к решению уравнений несжимаемой жидкости. Однако нужно иметь в виду, что численные методы для расчёта сжимаемых течений для таких задач могут давать большую погрешность (см., например, [1]).

Задачи пониженной размерности.

Одномерные и двумерные задачи являются частным случаем трёхмерных, когда решение фактически зависит только от одной или двух переменных. Удобнее всего по недостающим направлениям ставить периодические граничные условия.

Комплекснозначные решения.

Для линеаризованных уравнений могут быть приведены комплекснозначные решения. Поскольку в самих уравнениях все коэффициенты действительнoзначные, то если уравнения однородные, то им удовлетворяет в отдельности как действительная, так и мнимая часть комплекснозначного решения. Для системы уравнений с источником $\mathbf{S}'(\dots)$, действительная часть решения является решением системы уравнений с источником $\text{Re } \mathbf{S}'(\dots)$, а мнимая часть – решением системы уравнений с источником $\text{Im } \mathbf{S}'(\dots)$. В библиотеке ColESo могут быть реализованы как комплекснозначные решения целиком, так и их действительная часть.

Решение в неограниченной области по времени.

Чаще всего точные решения получаются путём решения уравнений при $t > 0$ и заданных начальных данных на момент $t = 0$. Если же решение получено при $t \in \mathbb{R}$,

то в качестве начальных условий всегда можно взять точное решение (а для волнового уравнения – и его производную) на момент времени $t = 0$.

2.2 Проблема конечности расчётной области.

Для верификации программных кодов обычно хорошо подходят только такие решения, градиент которых с машинной точностью равен нулю вне некоторой ограниченной области G на некотором интервале времени $(0, t_{\max})$. Тогда эту области G можно выбрать в качестве расчётной области. Если определить таким образом расчётную область не удаётся (либо она оказывается слишком большой), можно воспользоваться конечной скоростью распространения возмущений и проводить сравнение с точным решением только в подобласти, которой за время счёта не достигли возмущения от границы. Такой подход может использоваться, но приводит к техническим сложностям и неудобствам. В частности, распространение возмущений в разностных схемах для уравнений Эйлера обычно происходит с большей скоростью, чем в физической задаче.

Для многих линейных задач есть способ уменьшить размер расчётной области путём задания периодических условий. Если решение для некоторой величины задавалось формулой $f(t, x, \dots)$, то при постановке периодических условий по оси x оно принимает вид

$$\tilde{f}(t, x, \dots) = \sum_j f(t, x + jL, \dots), \quad (2.1)$$

где j пробегает множество целых чисел, а L – размер расчётной области по оси x . Если решение финитное, то число ненулевых слагаемых в этой сумме конечно. Аналогичным образом меняется начальное условие. Периодические условия могут задаваться по декартовым осям и/или по угловой переменной, если это не противоречит граничным условиям.

Для некоторых задач в библиотеке ColESo реализовано вычисление конечных сумм вида (2.1). При этом пределы интегрирования по j задаются пользователем.

2.3 Анализ амплитудной и фазовой ошибок разностной схемы

Моделирование переноса плоской энтропийной волны позволяет измерить амплитудную и фазовую ошибку разностной схемы на заданной частоте. Этот метод пригоден, в том числе, и на неравномерных и неструктурированных сетках, где простой Фурье-анализ разностных схем не работает.

Предположим, что разностная схема линейна. Тогда за один расчёт можно получить характеристики схемы сразу на всех частотах, присутствующих в решении. Рассмотрим волну с профилем в форме гауссиана, причём ширину гауссиана выберем достаточно малой, чтобы в его спектре присутствовали высокие частоты. Тогда точное решение уравнение переноса имеет вид $\rho'_{exact}(x, t) = \exp(-\ln(2)(x - x_0 - \bar{u}t)^2/b^2)$, где x_0 – положение центра гауссиана при $t = 0$, b – полуширина гауссиана, $\bar{u} > 0$ – скорость переноса.

Приведём алгоритм анализа амплитудной и фазовой ошибки разностной схемы при использовании акустической волны с профилем гауссиана. Выберем точку $X > x_0$ и рассмотрим пульсацию плотности $\rho'(X, t)$ в этой точке. Преобразование Фурье от этого сигнала даёт $F[\rho'_{exact}](\omega) = \exp(-\alpha\omega^2) \exp(-i\omega\phi_0)$, где $\alpha = b^2/(4 \ln 2 \bar{u}^2)$, $\phi_0 = (X - x_0)/\bar{u}$.

Пусть теперь $\rho'(X, t)$ – численное решение по разностной схеме, взятое в точке X . Тогда имеем

$$\frac{F[\rho'_{numerical}](\omega)}{F[\rho'_{exact}](\omega)} = \exp(\alpha\omega^2) \exp(i\omega\phi_0) F[\rho'_{numerical}](\omega) := a(\omega) \exp(i\varphi(\omega)).$$

Величину $(a(\omega))^{1/(X-x_0)}$ можно интерпретировать как коэффициент пропускания волны при прохождении единицы пространства, а $\varphi(\omega)/(X - x_0)$ – как набегание фазовой ошибки при прохождении единицы пространства.

3 Простейшие решения, сохраняющие форму начальных данных

3.1 Одномерный полиномиальный профиль (s_Polynom)

Рассматривается решение в виде энтропийной волны для одномерных линеаризованных уравнений Эйлера в отсутствии источников члена:

$$\rho'(t, x) = T_n(x - \bar{u}t), \quad u' \equiv 0, \quad p' \equiv 0,$$

где T_n – полином Чебышева порядка $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Это решение используется для проверки равенства нулю аппроксимационной ошибки на многочленах соответствующего порядка.

3.2 Одномерное негладкое возмущение (s_4peak)

Рассматривается решение в виде энтропийной волны для одномерных линеаризованных уравнений Эйлера в отсутствии источников члена:

$$\rho'(t, x) = \rho'(0, x - \bar{u}t), \quad u' \equiv 0, \quad p' \equiv 0.$$

Начальные данные на отрезке $[-1, 1]$ полагаются равными

$$\rho'(0, x) = \begin{cases} \frac{1}{6}F_1(x + 0.7 - \delta) + \frac{1}{6}F_1(x + 0.7 + \delta) + \frac{2}{3}F_1(x + 0.7), & -0.8 < x < -0.6; \\ 1, & -0.4 < x < -0.2; \\ 1 - |10(x - 0.1)|, & 0 < x < 0.2; \\ \frac{1}{6}F_2(x - 0.5 - \delta) + \frac{1}{6}F_2(x - 0.5 + \delta) + \frac{2}{3}F_2(x - 0.5), & 0.4 < x < 0.6 \end{cases}$$

где $F_1(z) = \exp(-(\ln 2)z^2/(6\delta)^2)$, $F_2(z) = \sqrt{\max\{1 - 100z^2, 0\}}$, $\delta = 0.005$, и продолжают-ся на $x \in \mathbb{R}$ периодическим образом с периодом 2.

3.3 Плоская акустическая волна (s_PlanarSinus, s_PlanarGauss)

Рассматриваются одномерные линеаризованные уравнения Эйлера в отсутствии источников члена. Их частным решением является акустическая волна, распространяющаяся со скоростью $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \bar{c}$ в направлении \mathbf{n} :

$$\begin{pmatrix} \rho'(t, \mathbf{r}) \\ \mathbf{u}'(t, \mathbf{r}) \\ p'(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} = f((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - t\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} - \bar{c}t) \begin{pmatrix} 1/\bar{c}^2 \\ 1/(\bar{\rho}\bar{c}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В случае `s_PlanarSinus` профиль волны задаётся в виде $f(x) = A \sin(2\pi\nu x)$ или $f(x) = A \sin(2\pi\nu x)\Theta(x)$, где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда. В случае `s_PlanarGauss` профиль волны задаётся в виде импульса $f(x) = A \exp(-(\ln 2)(x/b)^2)$ или периодической последовательности таких импульсов.

3.4 Энтропийное и вихревое возмущение (`s_EntropyVortex`)

Рассмотрим двумерные линеаризованные уравнения Эйлера (1.9) в отсутствии источников членов. Его частными решениями являются вихревые и энтропийные возмущения, переносимые с потоком. Положим $\Psi(0, \mathbf{r}) = (0, 0, \Psi_z(0, \mathbf{r}))^T$, где

$$\Psi_z(0, \mathbf{r}) = A_1 \exp\left(-\ln 2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{b^2}\right).$$

Ввиду отсутствия вязкости $\Psi_z(t, \mathbf{r}) = \Psi_z(0, \mathbf{r} - \bar{\mathbf{u}}t)$. Отсюда

$$\mathbf{u}'(t, \mathbf{r}) = A_2 \frac{2 \ln 2}{b^2} \begin{pmatrix} -\tilde{r}_y \\ \tilde{r}_x \end{pmatrix} \exp\left(-\ln 2 \frac{\tilde{\mathbf{r}}^2}{b^2}\right)$$

где $\tilde{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \bar{\mathbf{u}}t$. К вихревому возмущению добавляется энтропийное возмущение в виде гауссиана:

$$\rho'(t, \mathbf{r}) = A_2 \exp\left(-\ln 2 \frac{\mathbf{r}^2}{b^2}\right).$$

4 Линейные одномерные задачи

4.1 Одномерная задача с источником (`s_Source1D`)

Рассмотрим одномерное волновое уравнение (1.10) при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ с нулевыми начальными условиями и источником $-s(t, x) = -f(x)g(t)$, где $f(x)$ – некоторая финитная функция.

Решение этой задачи выражается формулой Даламбера:

$$W(t, x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(t - |y - x|)dy, \quad G(t') = \int_{-\infty}^{t'} g(\tau)d\tau.$$

Выражение для физических пульсаций получается по формулам (1.11):

$$p'(t, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t - |y - x|)dy,$$

$$u'(t, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t - |y - x|) \text{sign}(x - y)dy.$$

При вычислении интегралов область интегрирования разбивается на два: $(-\infty, x)$ и (x, ∞) , каждый из которых пересекается с носителем источника. Для интегрирования по получившимся конечным интервалам применяются квадратурные формулы Гаусса.

4.2 Прохождение акустической волны через фронт ударной (s_PlanarAcousticShock)

Рассмотрим задачу о прохождении линейного возмущения через фронт ударной волны. В области перед фронтом ударной волны в направлении фронта идут три, а за фронтом – одна характеристика. Задаются значения пульсаций перед фронтом. Из трёх линейаризованных соотношений Гюгонио определяются значения на двух характеристиках, уходящих с фронта, и пульсация скорости ударной волны. Более чёткая постановка задачи приведена ниже, после необходимых пояснений.

4.2.1 Одномерные линейаризованные уравнения Эйлера

В одномерном случае уравнения Эйлера, линейаризованные на однородном стационарном фоновом поле, распадаются на уравнения переноса для трёх инвариантов, соответствующих энтропийной и двум акустическим волнам.

Введём обозначения для пульсаций физических и консервативных переменных: $\mathbf{U}' = (\rho', u', p')^T$, $\mathbf{Q}' = (\rho', (\rho u)', E')^T$. Очевидно, что $\mathbf{Q}' = C\mathbf{U}'$, где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{u}^2 & \bar{\rho}\bar{u} & (\gamma - 1)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Систему (1.8) в отсутствии источников членов можно представить в виде $\partial\mathbf{U}'/\partial t + A_{phys}\partial\mathbf{U}'/\partial x = 0$ или $\partial\mathbf{Q}'/\partial t + A\partial\mathbf{Q}'/\partial x = 0$, где

$$A_{prim} = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{u} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho}\bar{c}^2 & \bar{u} \end{bmatrix},$$

$$A = CA_{prim}C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}\bar{u}^2 & (3-\gamma)\bar{u} & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-2}{2}\bar{u}^3 - \frac{1}{\gamma-1}\bar{c}^2\bar{u} & \frac{3-2\gamma}{2}\bar{u}^2 + \frac{1}{\gamma-1}\bar{c}^2 & \gamma\bar{u} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Обозначим через S_{prim} и S матрицы левых собственных векторов для A_{prim} и A соответственно. Обратные к ним матрицы являются матрицами правых собственных векторов. Пусть в матрицах S 1-я строка соответствует левой акустической, 2-я – правой акустической и 3-я – энтропийной волне. Тогда

$$S_{prim}A_{prim}S_{prim}^{-1} = SAS^{-1} = \Lambda = \text{diag}(\bar{u} - \bar{c}, \bar{u} + \bar{c}, \bar{u}). \quad (4.2)$$

$$S_{prim} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\rho}\bar{c}/2 & 1/2 \\ 0 & \bar{\rho}\bar{c}/2 & 1/2 \\ \bar{c}^2 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S_{prim}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{c}^{-2} & \bar{c}^{-2} & \bar{c}^{-2} \\ -1/(\bar{\rho}\bar{c}) & 1/(\bar{\rho}\bar{c}) & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Исходя из равенств (4.2) и $A = CA_{prim}C^{-1}$ легко получить $S = S_{prim}C^{-1}$, откуда

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\bar{u}\bar{c} + \frac{\gamma-1}{4}\bar{u}^2 & -\frac{1}{2}\bar{c} - \frac{\gamma-1}{2}\bar{u} & \frac{\gamma-1}{2} \\ -\frac{1}{2}\bar{u}\bar{c} + \frac{\gamma-1}{4}\bar{u}^2 & \frac{1}{2}\bar{c} - \frac{\gamma-1}{2}\bar{u} & \frac{\gamma-1}{2} \\ \bar{c}^2 - \frac{\gamma-1}{2}\bar{u}^2 & (\gamma-1)\bar{u} & -(\gamma-1) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

4.2.2 Линеаризованные условия Гюгонио на разрыве

Перейдём в инерциальную систему координат, движущуюся вместе с фронтом волны, и поместим начало координат на фронт волны. Тогда фоновое поле можно представить в виде $\bar{\mathbf{Q}}(t, x) = \bar{\mathbf{Q}}_L$ при $x < 0$ и $\bar{\mathbf{Q}}(t, x) = \bar{\mathbf{Q}}_R$ при $x > 0$. Символами A_L и A_R будем обозначать матрицы системы уравнений для консервативных переменных вида (4.1) по каждую из сторон разрыва.

Наложение малых возмущений на фоновое приводит к решению следующего вида: $\mathbf{Q}(t, x)$ имеет разрыв на линии $x = X(t)$, причём

$$\mathbf{Q}(t, x) = \begin{cases} \bar{\mathbf{Q}}_L + \epsilon \mathbf{Q}'(t, x), & x < X(t); \\ \bar{\mathbf{Q}}_R + \epsilon \mathbf{Q}'(t, x), & x > X(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

Через $D(t) = dX(t)/dt$ будем обозначать пульсацию скорости фронта ударной волны.

Зададимся некоторыми значениями t_1 и t_2 , определим отрезок V с концами $X(t_1)$ и $X(t_2)$ и проинтегрируем уравнение (1.3), записанное для этого отрезка, по времени от t_1 до t_2 :

$$\int_{X(t_1)}^{X(t_2)} \mathbf{Q}(t_2, x) dx - \int_{X(t_1)}^{X(t_2)} \mathbf{Q}(t_1, x) dx + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{Q}(X(t_2), t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{Q}(X(t_1), t)) dt = 0. \quad (4.5)$$

Подставим в эту формулу представление решения (4.4) и разложим по степеням ϵ , пренебрегая членами порядка ϵ^2 и выше. Отметим, что $X(t)$ является величиной порядка $O(\epsilon)$. Члены при ϵ^0 взаимно уничтожатся в силу того, что фоновое поле удовлетворяет уравнениям Эйлера. Члены порядка ϵ после деления ϵ дают

$$(X(t_2) - X(t_1))(\bar{\mathbf{Q}}_L - \bar{\mathbf{Q}}_R) + (t_2 - t_1)(A_R \mathbf{Q}'_R - A_L \mathbf{Q}'_L) = 0$$

Поделив на $t_2 - t_1$ и перейдя к пределу при $t_2, t_1 \rightarrow t$, получаем равенство, которое можно рассматривать как линеаризованное условие Гюгонио:

$$D(t)(\bar{\mathbf{Q}}_L - \bar{\mathbf{Q}}_R) + (A_R \mathbf{Q}'_R - A_L \mathbf{Q}'_L) = 0. \quad (4.6)$$

4.2.3 Постановка задачи и решение

Будем считать, что индексом L обозначена сверхзвуковая область (область перед фронтом), а символом R – дозвуковая области (область за фронтом). В сверхзвуковой области все 3 характеристики идут на фронт. В дозвуковой области “левая” акустическая волна идёт на фронт, правая акустическая и энтропийная волна идут с фронта.

Задаются инварианты на всех 4 характеристиках, приходящих на фронт, то есть \mathbf{Q}'_L и $b = s_R \mathbf{Q}'_R$. Здесь s_R есть левый собственный вектор матрицы A_R , соответствующий левой акустической волне, то есть первая строка матрицы (4.3).

Уравнение (4.6) можно разрешить относительно \mathbf{Q}'_R :

$$\mathbf{Q}'_R(t) = A_R^{-1}(A_L \mathbf{Q}'_L(t) + (\bar{\mathbf{Q}}_R - \bar{\mathbf{Q}}_L)D(t)). \quad (4.7)$$

Далее, из условия $s_R \mathbf{Q}'_R = b$ можно выразить пульсацию скорости фронта ударной волны:

$$D(t) = \frac{s_R A_R^{-1} A_L \mathbf{Q}'_L(t) - b}{s_R A_R^{-1} (\bar{\mathbf{Q}}_L - \bar{\mathbf{Q}}_R)} = \frac{s_R A_L \mathbf{Q}'_L(t) - (u_R - c_R)b}{s_R (\bar{\mathbf{Q}}_L - \bar{\mathbf{Q}}_R)}. \quad (4.8)$$

Последнее равенство в (4.8) записано с учётом того, что s_R есть левый собственный вектор A_R , а, значит, и A_R^{-1} . Формулы (4.8) и (4.7), таким образом, дают решение поставленной задачи. Отметим, для слабых ударных волн при задании входящих возмущений на поглощаемых ударной волной характеристиках величина пульсации скорости фронта может оказаться большой.

5 Линейные осесимметрические двумерные задачи

5.1 Распространение волны от гауссового импульса (s_Gaussian2D)

Рассматривается двумерное волновое уравнение (1.10) в области $t > 0$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ с осесимметричными начальными условиями

$$W|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = -p_0(r) = -\exp\left(-\ln 2 \frac{r^2}{b^2}\right).$$

Очевидно, что решение этой задачи осесимметричное. Методом разделения переменных легко установить, что осесимметричное решение волнового уравнения, такое что $W(0, r) = 0$, записывается в общем виде

$$W(t, r) = \int_0^\infty C(\omega) J_0(r\omega) \sin(\omega t) d\omega, \quad (5.1)$$

где J_0 – функция Бесселя 1-го рода индекса 0.

Подставляя $t = 0$, получаем равенство

$$\int_0^\infty \omega C(\omega) J_0(r\omega) d\omega = -p_0(r).$$

Таким образом, $-p_0(r)$ есть образ $C(\omega)$ при преобразовании Ганкеля. Применение обратного преобразования даёт

$$C(\omega) = -\int_0^\infty r p_0(r) J_0(r\omega) dr = -\omega \exp\left(-\frac{\omega^2 b^2}{4 \ln 2}\right) \frac{b^2}{2 \ln 2}.$$

Таким образом,

$$W(t, r) = -\frac{b^2}{2 \ln 2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\omega^2 b^2}{4 \ln 2}\right) J_0(r\omega) \sin(\omega t) d\omega.$$

Отсюда по формулам (1.11) находим

$$\begin{aligned} p'(t, r) &= \frac{b^2}{2 \ln 2} \int_0^\infty \omega \exp\left(-\frac{\omega^2 b^2}{4 \ln 2}\right) J_0(r\omega) \cos(\omega t) d\omega, \\ u'_r(t, r) &= -\frac{b^2}{2 \ln 2} \int_0^\infty \omega \exp\left(-\frac{\omega^2 b^2}{4 \ln 2}\right) J_1(r\omega) \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Хотя интегральные формулы (5.2) дают точное решение рассматриваемой задачи, вычисление по ним всегда удобно. Фактически используемый способ вычисления решения см. в [2].

5.2 Распространение волны от финитного импульса с произвольным профилем (s_IVP2D)

Рассматривается двумерное волновое уравнение (1.10) в области $t > 0$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ с осесимметричными начальными условиями

$$W|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = -f(|\mathbf{r}|).$$

Будем считать, что $f(y)$ является липшицевой функцией, бесконечно гладкой на $y \in [0, L]$ (на границах производные понимаются как односторонние) и продолженной нулём при $y \geq L$. Если $f(y)$ является гауссианом, то рассматриваемая постановка совпадает с рассмотренной в параграфе 5.1.

Начальная задача для (1.10) эквивалентна уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) W = -\delta(t)f(|\mathbf{r}|). \quad (5.3)$$

в $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ с условием равенства нулю решения при $t < 0$.

Функция Грина для двумерного волнового оператора в свободном пространстве имеет вид

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} (t^2 - |\mathbf{r}|^2)_+^{-1/2}, \quad (5.4)$$

где знак “+” означает, что при отрицательности выражения в скобках результат возведения в степень считается равным 0.

Запишем решение задачи (5.3) путём свёртки функции Грина с профилем источника:

$$W(t, \mathbf{x}) = - \iint_{|\mathbf{r}| < t} \frac{f(|\mathbf{r} + \mathbf{x}|)}{2\pi \sqrt{t^2 - |\mathbf{r}|^2}} d\mathbf{r}. \quad (5.5)$$

Здесь \mathbf{x} есть радиус-вектор точки, в которой измеряется сигнал, а \mathbf{r} есть вектор, выпущенный из неё в точку на источнике.

Перейдём к повторному интегралу в полярных координатах с центром в $\mathbf{r} = 0$. Угол ϕ будем отсчитывать от направления на центр источника. Тогда выражение примет вид

$$W(t, \mathbf{x}) = - \int_0^t \frac{r}{2\pi\sqrt{t^2 - r^2}} \int_{-\pi}^{\pi} f((r^2 + x^2 - 2rx \cos \phi)^{1/2}) d\phi dr, \quad (5.6)$$

где $x = |\mathbf{x}|$. Выполним замену переменной $r = t - tz^2$, $z \geq 0$, и воспользуемся симметрией по ϕ относительно $\phi = 0$. Тогда имеем

$$W(t, \mathbf{x}) = - \frac{2t}{\pi} \iint \frac{1 - z^2}{\sqrt{2 - z^2}} f((r^2 + x^2 - 2rx \cos \phi)^{1/2}) \Big|_{r=t(1-z^2)} d\phi dz, \quad (5.7)$$

где интеграл берётся по прямоугольнику $z \in (0, 1)$, $\phi \in (0, \pi)$.

Требуется вычислить не волновой потенциал, а физические переменные, являющиеся его производными. Ввиду липшицевости f имеем

$$p'(t, \mathbf{x}) = - \frac{W(t, \mathbf{x})}{t} + \frac{2t}{\pi} \iint \frac{(1 - z^2)^2}{\sqrt{2 - z^2}} f'((r^2 + x^2 - 2rx \cos \phi)^{1/2} \Big|_{r=t(1-z^2)}) 2(t(1 - z^2) - x \cos \phi) d\phi dz.$$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = - \frac{\mathbf{x}}{x} \frac{2t}{\pi} \iint \frac{1 - z^2}{\sqrt{2 - z^2}} f'((r^2 + x^2 - 2rx \cos \phi)^{1/2} \Big|_{r=t(1-z^2)}) 2(x - t(1 - z^2) \cos \phi) d\phi dz.$$

Для вычисления вторых производных аналогичным образом нужна липшицевость производной от f , иначе возникнут дополнительные граничные слагаемые.

Таким образом, задача свелась к вычислению интеграла по прямоугольнику $[0, 1] \times [0, \pi]$ от функций, не имеющих особенностей. Тем не менее, подынтегральная функция является, вообще говоря, только ограниченной, с разрывами на границе носителя f , и это не позволяет напрямую записать квадратурные формулы высокого порядка для вычисления этого интеграла. Чтобы устранить этот недостаток, нужно ограничить область интегрирования таким образом, чтобы аргумент функции f не выходил за пределы его носителя.

В координатах ϕ, z сечение носителя функции f прямой $z = \sqrt{1 - r/t}$ имеет вид $\phi \in [-\phi_{\max}, \phi_{\max}]$, где ϕ_{\max} легко находится по теореме косинусов:

$$\phi_{\max}(x, r) = \arccos \left(\frac{r^2 + x^2 - L^2}{2rx} \right), \quad (5.8)$$

причём \arccos полагается равным 0, если аргумент больше 1, и π , если аргумент меньше -1 . Таким образом, требуется вычислять интегралы по фигуре в плоскости (z, ϕ) , ограниченной неравенствами

$$0 < z < 1, \quad 0 < \phi < \phi_{\max}(x, t(1 - z^2)).$$

Рассмотрим два случая: $x > L$ (точка, в которой вычисляется сигнал, лежит вне носителя начальных данных) и $x \leq L$ (точка, в которой вычисляется сигнал, лежит на носителе начальных данных).

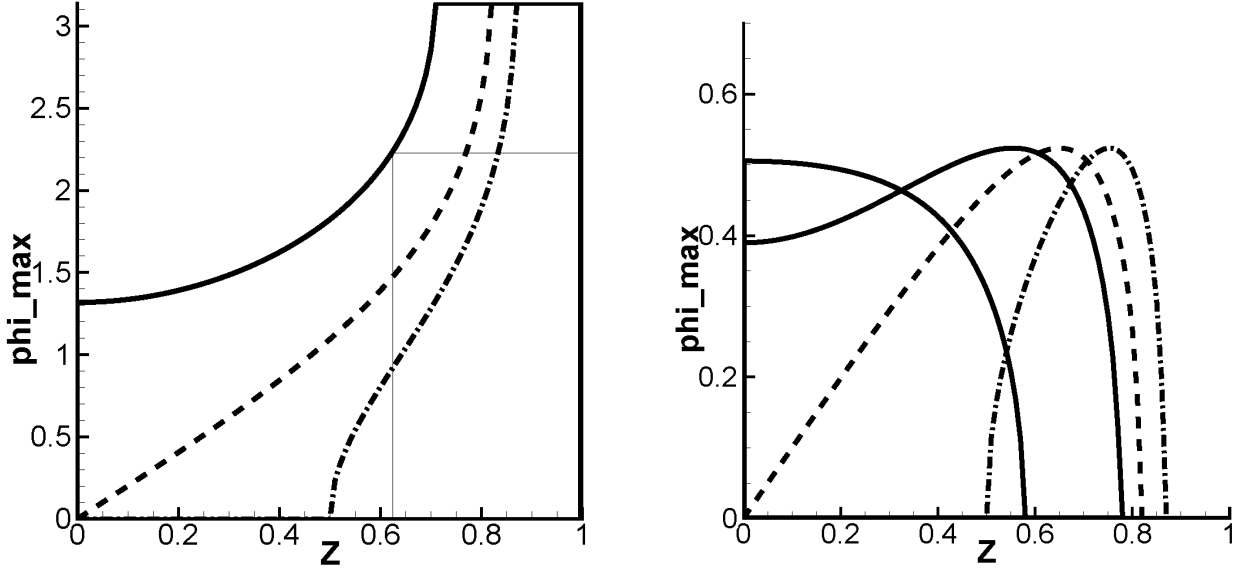


Рис. 1: Граница области интегрирования. Левый рисунок: $x < L$ (область интегрирования находится справа от границы). Сплошная линия: $L - x < t < L + x$ (случай 1.2), штриховая линия: $t = L + x$ (случай 1.3), штрихпунктирная линия: $t > L + x$ (случай 1.4). Тонкие линии: разбиение области интегрирования в случае $t < L + x$. Правый рисунок: $x > L$ (область интегрирования находится под границей). Сплошные линии: случаи 2.2.а и 2.2.б, штриховая линия: случай 2.3, штрихпунктирная линия: случай 2.4.

Рассмотрим вначале **Случай 1**: $x < L$. Тогда аргумент \arccos строго возрастает с ростом r (его производная по r строго больше r/x). Следовательно, $\phi_{\max}(x, r)$ убывает с ростом r и, следовательно, возрастает с ростом z . При $r < L - x$ аргумент \arccos меньше -1 , так что $\phi_{\max}(x, r) = \pi$. При $L - x < r < L + x$ аргумент лежит в промежутке от -1 до 1 и при $r > L + x$ он становится больше 1 .

Здесь возможны три конфигурации. **Случай 1.1**: $t \leq L - x$. При этом выполняется $\phi_{\max}(x, t(1 - z^2)) = \pi$ для всех $z \in (0, 1)$. **Случай 1.2**: $t > L + x$. Тогда то носитель подынтегрального выражения отделён от $z = 0$, в результате производная аргумента \arccos по z положительна и отделена от нуля. **Случай 1.3** – пограничный случай, при котором $t = L + x$ и граница области интегрирования втыкается в точку $z = 0$, $\phi = 0$ с конечным ненулевым наклоном. **Случай 1.4**: $L - x < t < L + x$. Тогда при $\phi_0 = \arccos((t^2 + x^2 - L^2)/(2tx))$ граница области интегрирования под прямым углом втыкается в линию $z = 0$, см. рис. 1. При фиксированном ϕ правый предел интегрирования всегда равен $z = 1$, так как он соответствует $r = 0 < L - x$, и в этой точке $\phi_{\max}(x, r) = \pi$.

В случае 1.1 область интегрирования является квадратом, и порядок взятия интегралов не важен.

В случаях 1.2 и 1.3 можно проводить интегрирование вначале по z в интервале от $z_{\min}(\phi)$ до 1 , а затем по ϕ от 0 и π .

В случае 1.4 удобно разделить область на две части по ϕ . Положим $\phi_{\text{crit}} = (\phi_0 + \pi)/2$. Подобласть $\phi > \phi_{\text{crit}}$ будем интегрировать вначале по z , а потом по ϕ ; подобласть $\phi < \phi_{\text{crit}}$, наоборот, вначале по ϕ , потом по z , с разбиением интервала в точке z_0 , где

нарушается гладкость.

Теперь рассмотрим **Случай 2:** $x > L$. При этом аргумент \arccos всегда положительный и, следовательно, $\phi_{\max}(x, r) < \pi$ для всех r . Более того, $\phi_{\max}(x, r) \neq 0$ только при $x - L < r < x + L$ или, что то же самое, $\phi_{\max}(x, t(1 - z^2)) \neq 0$ только при $1 - (x + L)/t < z^2 < 1 - (x - L)/t$. Точка $z = 1$ ($r = 0$), очевидно, не принадлежит этому интервалу. Точка $z = 0$ ($r = t$) может как принадлежать, так и не принадлежать этому интервалу. Таким образом, возможны четыре конфигурации, см. рис. 1.

Случай 2.1: $t \leq x - L$. Тогда пересечение интервала, определяемого условием $\phi_{\max}(x, t(1 - z^2)) > 0$, с интервалом $(0, 1)$ пустое, и интеграл равен нулю. Этот случай соответствует тому, что волна от источника ещё не достигла точки наблюдения.

Случай 2.2: $x + L > t > x - L$. Тогда пересечение с отрезком $[0, 1]$ содержит точку $z = 0$. При этом граница области интегрирования втыкается в линию $z = 0$ под прямым углом. Область интегрирования может быть как выпуклой (2.2.a), так и невыпуклой (2.2.b).

Случай 2.3: $t = x + L$. При этом граница области интегрирования втыкается в точку $z = 0$, $\phi = 0$ с ненулевым конечным наклоном, если $t = x + L$.

Случай 2.4: $t > x + L$. Тогда пересечение с отрезком $[0, 1]$ целиком лежит внутри этого отрезка.

Определим точки z_- и z_+ , $z_- \leq z_+$, как решения уравнения $\phi_{\max}(x, t(1 - z^2)) = \beta \max_r \phi_{\max}(x, r)$, где $0 < \beta < 1$ – некоторый параметр, который можно принять равным 0.75. Максимум по r нужно брать только $r < t$: в случае, если $t^2 + L^2 \geq x^2$, он совпадает с глобальным максимумом и равен $\arcsin(L/x)$, иначе нужно брать значение ϕ_{\max} при $z = 0$, определяемое (5.8) с подстановкой $r = t$. Очевидно, $z_+ < 1$. В случаях 2.2 и 2.3 разобьём область интегрирования на две подобласти линией $z = z_+$, а в случае 2.4 – на три подобласти линиями $z = z_-$ и $z = z_+$. На левом интервале в случаях 2.2 и 2.3, а в случае 2.4 – на центральном интервале будем интегрировать вначале по ϕ , а затем по z . На правом интервале в случаях 2.2 и 2.3 и на левом и правом интервалах в случае 2.4 будем интегрировать вначале по z , а затем по ϕ .

5.3 Распространение волны от источника (s_Source2D)

Получим осесимметричное решение уравнения (1.10) в области $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ с источником $-s(t, \mathbf{r}) = i \exp(i\omega t) f(r)$, ограниченное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию излучения при $r \rightarrow \infty$. Здесь и далее $r = |\mathbf{r}|$. Функция $f(r)$ предполагается финитной или быстро убывающей при $r \rightarrow \infty$. Будем искать его в виде $W(t, r) = i \exp(i\omega t) u(\omega r)$. Тогда уравнение на функцию u имеет вид

$$\Lambda u = -\frac{1}{\omega^2} f\left(\frac{x}{\omega}\right), \quad \Lambda = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1. \quad (5.9)$$

Рассмотрим отклик на источник в форме кольца с радиусом r_0 , для чего положим $f(r) = \delta(r - r_0)$. Обозначим $x_0 = \omega r_0$. Тогда правая часть уравнения будет равна

$$-\frac{1}{\omega^2} f\left(\frac{x}{\omega}\right) = -\frac{1}{\omega^2} \delta\left(\frac{x - x_0}{\omega}\right) = -\frac{1}{\omega} \delta(x - x_0). \quad (5.10)$$

В области $x < x_0$ в силу ограниченности в $x = 0$ решение с точностью до константы совпадает с функцией Бесселя 1-го рода $J_0(x)$. В области $x > x_0$ в силу усло-

вия Зоммерфельда решение с точностью до константы совпадает с функцией Ганкеля $H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iN_0(x)$ (см. [3]). Решение является непрерывным, иначе применение оператора Λ дало бы в правой части слагаемое, пропорциональное $\delta'(x)$. Таким образом, решение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= C \begin{cases} (J_0(x_0) - iN_0(x_0))J_0(x), & x < x_0 \\ (J_0(x) - iN_0(x))J_0(x_0), & x > x_0 \end{cases} = \\ &= C [(J_0(x_0) - iN_0(x_0))J_0(x) + i\Theta(x - x_0)(J_0(x)N_0(x_0) - J_0(x_0)N_0(x))], \end{aligned}$$

и остаётся найти константу C .

Рассмотрим действие оператора Λ на функцию u вида $u(x) = f(x) + \Theta(x - x_0)g(x)$, такую что $g(x_0) = 0$. Имеем

$$u'(x) = f'(x) + \Theta(x - x_0)g'(x) + \delta(x - x_0)g(x) = f'(x) + \Theta(x - x_0)g'(x),$$

$$u''(x) = f''(x) + \Theta(x - x_0)g''(x) + \delta(x - x_0)g'(x),$$

$$(\Lambda u)(x) = (\Lambda f)(x) + \Theta(x - x_0)(\Lambda g)(x) + \delta(x - x_0)g'(x).$$

В нашем случае $f(x) = C(J_0(x_0) - iN_0(x_0))J_0(x)$ и $g(x) = iC(J_0(x)N_0(x_0) - J_0(x_0)N_0(x))$. По определению функций Бесселя имеем $\Lambda f = \Lambda g = 0$ и, таким образом, получаем равенство $\delta(x - x_0)g'(x) = -\delta(x - x_0)/\omega$, откуда находим

$$C = \frac{i}{\omega} (J_0'(x_0)N_0(x_0) - J_0(x_0)N_0'(x_0))^{-1} = -\frac{i}{\omega} (J_1(x_0)N_0(x_0) - J_0(x_0)N_1(x_0))^{-1}.$$

Таким образом, решение задачи для источника в форме бесконечно тонкого кольца имеет вид

$$W(r, t) = \frac{1}{\omega} e^{i\omega t} (J_1(x_0)N_0(x_0) - J_0(x_0)N_1(x_0))^{-1} \begin{cases} (J_0(x_0) - iN_0(x_0))J_0(x), & x < x_0 \\ (J_0(x) - iN_0(x))J_0(x_0), & x > x_0 \end{cases}$$

с подстановкой $x = \omega r$ и $x_0 = \omega r_0$.

Решение задачи для произвольной функции $f(r)$ получается интегрированием предыдущего решения по r_0 с весом $f(r_0)$:

$$\begin{aligned} W(r, t) &= \frac{1}{\omega} e^{i\omega t} \left[\int_0^r f(r_0) \frac{(J_0(\omega r) - iN_0(\omega r))J_0(\omega r_0)}{J_1(\omega r_0)N_0(\omega r_0) - J_0(\omega r_0)N_1(\omega r_0)} dr_0 + \right. \\ &\quad \left. + \int_r^\infty f(r_0) \frac{(J_0(\omega r_0) - iN_0(\omega r_0))J_0(\omega r)}{J_1(\omega r_0)N_0(\omega r_0) - J_0(\omega r_0)N_1(\omega r_0)} dr_0 \right]. \end{aligned}$$

Пульсации физических переменных вычисляются по формулам (1.11). Вычисление $u'_r = \partial W / \partial r$ проводится путём взятия интеграла от продифференцированных подынтегральных функций, поскольку дополнительные члены от переменных пределов интегрирования аннигилируют друг друга.

6 Линейные трёхмерные задачи

6.1 Задача с начальными данными в форме гауссиана (s_Gaussian3D)

Рассмотрим задачу для трёхмерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W = 0, \quad t \in (0, \infty), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,$$

со сферически симметричными начальными условиями

$$W|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = -\exp(-\alpha r^2), \quad \alpha = \frac{\ln 2}{b^2}.$$

Решение этой задачи выражается формулой Пуассона-Кирхгоффа:

$$W(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{x}-\xi|=t} \exp(-\alpha|\xi|^2) dS_\xi. \quad (6.1)$$

Перейдём в сферическую систему координат с центром в точке измерения \mathbf{x} и направим одну из осей на центр источника. Обозначим через θ угол между $\mathbf{x} - \xi$ и этой осью. Тогда

$$|\xi|^2 = (t \cos \theta - x)^2 + (t \sin \theta)^2 = t^2 + x^2 - 2tx \cos \theta. \quad (6.2)$$

Интеграл по сфере $|\mathbf{x}-\xi| = t$ с учётом того, что решение на поверхности зависит только от θ , сводится к интегралу по θ с якобианом $2\pi t^2 \sin \theta$. Таким образом,

$$\begin{aligned} W(t, \mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{x}-\xi|=t} \exp(-\alpha|\xi|^2) dS_\xi = \\ &= \frac{1}{4\pi t} 2\pi \int_0^\pi \exp(-\alpha(t^2 + x^2 - 2tx \cos \theta)) t^2 \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Проводя замену $\cos \theta = y$,

$$W(t, \mathbf{x}) = -\frac{t}{2} \exp(-\alpha(t^2 + x^2)) \int_{-1}^1 \exp(2\alpha t x y) dy = \exp(-\alpha(t^2 + x^2)) \frac{1}{2\alpha x} \operatorname{sh}(2\alpha t x).$$

Для получения пульсации давления продифференцируем волновой потенциал по времени:

$$p(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial W}{\partial t} = \exp(-\alpha(t^2 + x^2)) \left(\operatorname{ch}(2\alpha t x) - \frac{t}{x} \operatorname{sh}(2\alpha t x) \right). \quad (6.3)$$

Данная формула не годится для вычислений, так как при больших x и t содержит отношение двух экспоненциально больших величин. Поэтому перепишем её в следующем виде:

$$p(t, \mathbf{x}) = -\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \exp(-\alpha(t-x)^2) \left(1 - \frac{t}{x} \right) + \frac{1}{2} \exp(-\alpha(t+x)^2) \left(1 + \frac{t}{x} \right).$$

При x , близких к 0, выражение нужно регуляризовать; для этого можно ограничиться одним членом разложения выражения (6.3):

$$p(t, 0) = \exp(-\alpha t^2)(1 - 2\alpha t^2).$$

Для получения пульсации радиальной скорости продифференцируем волновой потенциал по радиусу:

$$u_r(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial W}{\partial r} = -\exp(-\alpha(t^2 + x^2)) \frac{1}{2\alpha x} (-2\alpha x \operatorname{sh}(2\alpha t x) + 2\alpha t \operatorname{ch}(2\alpha t x) - \frac{1}{x} \operatorname{sh}(2\alpha t x))$$

Регуляризация вблизи центра начального возмущения даёт

$$u_r(t, x) \approx -\exp(-\alpha t^2) \left(-2\alpha t^2 + \frac{4}{3}\alpha^2 t^3 \right) x. \quad (6.4)$$

А выражение, удобное для вычислений при больших t и x , имеет вид

$$u_r(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \exp(-\alpha(t-x)^2) \left(1 - \frac{t}{x} + \frac{1}{2\alpha x^2} \right) - \frac{1}{2} \exp(-\alpha(t+x)^2) \left(1 + \frac{t}{x} + \frac{1}{2\alpha x^2} \right).$$

При больших t и x решение имеет асимптотику

$$p(t, \mathbf{x}) \approx u_r(t, \mathbf{x}) \approx \frac{1}{2} \exp(-\alpha(x-t)^2) \left(1 - \frac{t}{x} \right).$$

6.2 Распространение волны от источника (s_Source3D)

Рассмотрим волновое уравнение (1.10) с источником $-s(t, \mathbf{r}) = -f(|\mathbf{r}|)g(t)$ в области $t \in (0, \infty)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ с нулевыми начальными условиями. Предполагается, что f чётная с конечным носителем, бесконечно гладкая на его внутренности и обладает ограниченными вторыми производными; g непрерывная и кусочно-гладкая, причём $g(0) = 0$.

Перепишем оператор Даламбера с учётом сферической симметрии решения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W = -f(r)g(t), \quad r > 0, \quad t > 0,$$

дополнив условием ограниченности при $r = 0$. Сделаем замену переменных $W(t, r) = v(t, r)/r$. Тогда граничное условие при $r = 0$ переписывается в виде $v(0) = 0$. Уравнение для новой функции v примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = -r f(r) g(t).$$

Чтобы избавиться от граничного условия при $r = 0$, доопределим правую часть уравнения на полупрямой $r < 0$ антисимметричным образом. Для этого введём функцию $\tilde{f}(r)$ формулой

$$\tilde{f}(r) = \begin{cases} -r f(r), & r \geq 0; \\ -r f(-r), & r < 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача сведена к одномерному волновому уравнению. Решение этой задачи выражается формулой Даламбера:

$$v(t, r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t-|r-x|} \tilde{f}(x) g(\tau) d\tau dx. \quad (6.5)$$

Обозначим за $G(t)$ первообразную от g :

$$G(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau.$$

Тогда получим для волнового потенциала выражение

$$W(t, r) = \frac{1}{2r} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) G(t - |r - x|) dx = -\frac{1}{2r} \int_0^{\infty} x f(x) (G(t - |r - x|) - G(t - (r + x))) dx.$$

Выражение для физических пульсаций получается по формулам (1.11):

$$p'(t, r) = \frac{1}{2r} \int_0^{\infty} x f(x) (g(t - |r - x|) - g(t - (r + x))) dx,$$

$$u'_r(t, r) = -\frac{W(t, r)}{r} + \frac{1}{2r} \int_0^{\infty} x f(x) (g(t - |r - x|) \operatorname{sign}(r - x) - g(t - (r + x))) dx.$$

При вычислении интегралов область интегрирования разбивается на части, на которых подынтегральная функция гладкая; эти интервалы обрезаются с учётом конечности носителя источника. Для интегрирования по получившимся интервалам применяются составные квадратурные формулы Гаусса.

При малых значениях r вычисление по приведённым формулам приводит к большой погрешности. Поэтому преобразуем выражения. Введём обозначение для разделённой разности $\Delta(f(\cdot), x, r) = (f(x + r) - f(x - r))/(2r)$. Тогда

$$\begin{aligned} -W(t, r) &= \frac{1}{2r} \int_0^{2r} x f(x) G(t - |r - x|) dx + \frac{1}{2r} \int_{2r}^{\infty} x f(x) G(t - x + r) dx - \frac{1}{2r} \int_0^{\infty} x f(x) G(t - x - r) dx = \\ &= \frac{r}{2} \int_0^2 \xi f(r\xi) G(t - r|1 - \xi|) d\xi + \int_r^{\infty} \Delta(\xi f(\xi), x, r) G(t - x) dx. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получаем

$$p'(t, r) = \frac{r}{2} \int_0^2 \xi f(r\xi) g(t - r|1 - \xi|) d\xi + \int_r^{\infty} \Delta(\xi f(\xi), x, r) g(t - x) dx.$$

Вычисление первого интеграла не представляет сложности, так как подынтегральная функция кусочно-гладкая. Вычисление же $\Delta(\dots)$ напрямую исходя из определения проблематично при малых r . Поэтому для больших r будем использовать определение, а для малых r положим

$$\Delta(f(\cdot), x, r) = \frac{1}{2r} \int_{-r}^r f'(x + \xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(x + r\xi) d\xi.$$

Поскольку r мало, а подынтегральная функция кусочно-гладкая, этот интеграл легко вычисляется. Таким образом, при малых r вычисление одного значения подынтегральной функции требует вычисления интеграла.

Теперь получим выражение для пульсации радиальной скорости. Имеем

$$\begin{aligned} u'_r(t, r) = & -\frac{1}{2} \int_0^2 \xi f(r\xi) G(t - r|1 - \xi|) d\xi - \frac{r}{2} \int_0^2 \xi^2 f'(r\xi) G(t - r|1 - \xi|) d\xi + \\ & + \frac{r}{2} \int_0^2 \xi |1 - \xi| f(r\xi) g(t - r|1 - \xi|) d\xi + f(2r) G(t - r) - \int_r^\infty \frac{\partial \Delta(\xi f(\xi), x, r)}{\partial r} G(t - x) dx. \end{aligned}$$

Величина $\partial \Delta / \partial r$ при больших r вычисляется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta(f(\cdot), x, r) = -\frac{\Delta(f(\cdot), x, r)}{r} + \frac{f'(x + r) + f'(x - r)}{2r},$$

а при малых r – по формуле

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta(f(\cdot), x, r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi f''(x + r\xi) d\xi.$$

Полученные выражения для пульсаций давления и скорости не содержат делений на r , что позволяет избежать неограниченного роста численной ошибки при малых r .

6.3 Движущийся точечный источник (s_PointSource)

Рассмотрим волновое уравнение (1.10) в области $t > t_0$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ с точечным источником,двигающимся по закону $\mathbf{x}(t)$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W = -s(t, \mathbf{r}) = 4\pi f(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)). \quad (6.6)$$

Скорость источника полагается дозвуковой: $\sup_t |\dot{\mathbf{x}}(t)| < 1$ (здесь и далее точкой над переменной обозначается её производная по времени), $f(t) \in C^1[t_0, +\infty)$, $f(t_0) = f'(t_0) = 0$. Начальные условия при $t = t_0$ для (6.6) полагаются нулевыми. Задача об источнике, находящемся в начале координат, при наличии фонового потока $\bar{\mathbf{u}}$, сводится к (6.6), если перейти в систему координат, связанную с фоновым потоком, и положить $\mathbf{x}(t) = -\bar{\mathbf{u}}t$.

Отметим, что решение этой задачи имеет особенность в точке, где находится действующий источник. Однако если $f(t)$ равна нулю при $t > t_{\max}$ то при $t > t_{\max}$ решение становится гладким. Удобным может быть случай $t_0 < t_{\max} \leq 0$, при котором решение гладкое при $t > 0$.

6.3.1 Решение для волнового потенциала

Решение уравнения (6.6) задаётся интегралом Кирхгоффа:

$$W(t, \mathbf{r}) = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} f(t') \delta^3(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{x}(t')) \frac{\delta(t - t' - |\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|)}{|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|} d^3\tilde{\mathbf{r}} dt' = \int_{t_0}^t f(t') \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} dt'.$$

Введём время эмиссии $t^*(\mathbf{r}, t)$ как значение t' , при котором аргумент δ -функции обращается в ноль, то есть как решение уравнения

$$t - t^* - |\mathbf{r} - \mathbf{x}(t^*)| = 0. \quad (6.7)$$

Время эмиссии является моментом, в который источник должен излучить сигнал, чтобы в момент времени t его принял наблюдатель в точке \mathbf{r} . Поскольку $|\dot{\mathbf{x}}(t)| < 1$, время эмиссии определяется однозначно. Производная от аргумента δ -функции по переменной интегрирования даёт

$$\frac{d}{dt'} (t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|) = -1 - \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)|} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} - \mathbf{x}(t))^2 = -1 + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)|}.$$

Отсюда, пользуясь тождеством $\delta(g(t)) = \delta(t - t^*)/|g'(t^*)|$, где t^* – единственный ноль функции g , получаем

$$W(t, \mathbf{r}) = \frac{f(t^*(t, \mathbf{r}))}{\mathcal{D}(t, \mathbf{r})},$$

где

$$\mathcal{D}(t, \mathbf{r}) = |\mathbf{R}_e(t, \mathbf{r})| - \dot{\mathbf{x}}(t^*(t, \mathbf{r})) \cdot \mathbf{R}_e(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{R}_e(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{x}(t^*(t, \mathbf{r})). \quad (6.8)$$

Для произвольной зависимости $\mathbf{x}(t)$ уравнение (6.7) решается численно. В случае, если источник движется с постоянной скоростью, то есть при $\mathbf{x}(t) = -\bar{\mathbf{u}}t$, получим явное решение. В этом случае уравнение (6.7) принимает вид

$$t - t^* - |\mathbf{r} + \bar{\mathbf{u}}t^*| = 0.$$

Сделаем замену переменных $t^*(t, \mathbf{r}) = t + \tau(t, \mathbf{r})$ (очевидно, $\tau < 0$):

$$-\tau(t, \mathbf{r}) - |\mathbf{r} + \bar{\mathbf{u}}t + \bar{\mathbf{u}}\tau(t, \mathbf{r})| = 0.$$

Видно, что $\tau(t, \mathbf{r})$ зависит только от $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \bar{\mathbf{u}}t$, но не от t и \mathbf{r} по отдельности. Таким образом, для τ как функции \mathbf{R} получаем уравнение

$$\tau(\mathbf{R}) = -|\mathbf{R} + \bar{\mathbf{u}}\tau(\mathbf{R})|.$$

Возводя в квадрат и перенося все слагаемые в левую часть уравнения, получаем $\tau^2(1 - \bar{\mathbf{u}}^2) - 2\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{u}}\tau - R^2 = 0$. Это квадратное уравнение относительно τ имеет единственное отрицательное решение:

$$\tau(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \sqrt{(\mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{u}})^2 + R^2(1 - \bar{\mathbf{u}}^2)}}{1 - \bar{\mathbf{u}}^2} \quad (6.9)$$

Таким образом, $t^*(\mathbf{r}, t) = t + \tau(\mathbf{r} + \bar{\mathbf{u}}t)$, где $\tau(\cdot)$ выражается формулой (6.9).

В частном случае, когда \mathbf{R} сонаправлен с направлением потока, $\tau(\mathbf{R}) = -|\mathbf{R}|/(1 + |\bar{\mathbf{u}}|)$, а когда \mathbf{R} направлен противоположно направлению потока, $\tau(\mathbf{R}) = -|\mathbf{R}|/(1 - |\bar{\mathbf{u}}|)$.

6.3.2 Решение для физических переменных

Для возврата к физическим переменным нужно продифференцировать W . Проведём эту операцию для произвольного дозвукового движения источника. Величина $t^*(\mathbf{r}, t)$ задаётся неявным образом уравнением (6.7). Возведём его в квадрат, перенеся модуль в правую часть:

$$(t - t^*)^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{x}(t^*))^2.$$

Дифференцируя его t и \mathbf{r} , получаем

$$\frac{\partial t^*}{\partial t}(t, \mathbf{r}) = \frac{t - t^*}{(t - t^*) - (\mathbf{r} - \mathbf{x}(t^*)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t^*)} = \frac{|\mathbf{R}_e|}{\mathcal{D}};$$

$$\nabla t^*(t, \mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{x}(t^*)}{(t - t^*) - (\mathbf{r} - \mathbf{x}(t^*)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t^*)} = -\frac{\mathbf{R}_e}{\mathcal{D}}.$$

Аргументы (t, \mathbf{r}) у функций в правой части равенств здесь и далее опускаются. Производные остальных выражений вычисляются напрямую. Для величин $\mathbf{R}_e(t, \mathbf{r})$ и $\mathcal{D}(t, \mathbf{r})$, определённых (6.8), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{R}_e}{\partial t}(t, \mathbf{r}) = -\dot{\mathbf{x}}(t^*) \frac{\partial t^*}{\partial t} = -\dot{\mathbf{x}}(t^*) \frac{|\mathbf{R}_e|}{\mathcal{D}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{R}_e \cdot \dot{\mathbf{x}}(t^*)}{\mathcal{D}} + (\dot{\mathbf{x}}(t^*))^2 \frac{|\mathbf{R}_e|}{\mathcal{D}} - \ddot{\mathbf{x}}(t^*) \cdot \mathbf{R}_e \frac{|\mathbf{R}_e|}{\mathcal{D}},$$

и, наконец, для $W(t, \mathbf{r}) = f(t^*(t, \mathbf{r}))/\mathcal{D}(t, \mathbf{r})$ получаем

$$p(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial W}{\partial t}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\dot{f}(t^*)}{\mathcal{D}} \frac{\partial t^*}{\partial t} + \frac{f(t^*)}{\mathcal{D}^2} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\dot{f}(t^*)|\mathbf{R}_e|}{\mathcal{D}^2} + \frac{f(t^*)}{\mathcal{D}^3} [-\mathbf{R}_e \cdot \dot{\mathbf{x}}(t^*) + (\dot{\mathbf{x}}(t^*))^2 |\mathbf{R}_e| - \ddot{\mathbf{x}}(t^*) \cdot \mathbf{R}_e |\mathbf{R}_e|].$$

Аналогично считаем пространственные производные:

$$\nabla(|\mathbf{R}_e(t, \mathbf{r})|) = \nabla(t - t^*(t, \mathbf{r})) = \frac{\mathbf{R}_e}{\mathcal{D}};$$

$$\nabla(\dot{\mathbf{x}}(t^*(t, \mathbf{r})) \cdot \mathbf{R}_e(t, \mathbf{r})) = \sum_j (\mathbf{R}_e)_j \nabla(\dot{\mathbf{x}}(t^*))_j + \sum_j (\dot{\mathbf{x}}(t^*))_j \nabla(\mathbf{R}_e)_j =$$

$$= (\mathbf{R}_e \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t^*)) \nabla t^* + \dot{\mathbf{x}}(t^*) + \frac{1}{\mathcal{D}} (\dot{\mathbf{x}}(t^*))^2 \mathbf{R}_e;$$

$$\nabla \mathcal{D}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{R}_e}{\mathcal{D}} - \dot{\mathbf{x}}(t^*) - (\dot{\mathbf{x}}(t^*))^2 \frac{\mathbf{R}_e}{\mathcal{D}} + (\ddot{\mathbf{x}}(t^*) \cdot \mathbf{R}_e) \frac{\mathbf{R}_e}{\mathcal{D}}.$$

Наконец,

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \nabla W(t, \mathbf{r}) = \frac{\dot{f}(t^*)}{\mathcal{D}} \nabla t^* - \frac{f(t^*)}{\mathcal{D}^2} \nabla \mathcal{D} =$$

$$= -\frac{\dot{f}(t^*) \mathbf{R}_e}{\mathcal{D}^2} - \frac{f(t^*)}{\mathcal{D}^2} \left[\frac{\mathbf{R}_e}{\mathcal{D}} (1 - (\dot{\mathbf{x}}(t^*))^2) - \dot{\mathbf{x}}(t^*) + (\ddot{\mathbf{x}}(t^*) \cdot \mathbf{R}_e) \frac{\mathbf{R}_e}{\mathcal{D}} \right].$$

6.4 Вращающийся точечный диполь (s_RotatingDipole)

Рассматривается волновое уравнение (1.10) в \mathbb{R}^3 с источником $-s(t, \mathbf{r}) = 4\pi \nabla \delta(\mathbf{r}) \cdot \Omega_{\omega t} \mathbf{e}$, где Ω_{ϕ} – оператор поворота вокруг оси $\phi/|\phi|$ на угол $|\phi|$.

Заметим, что

$$\Omega_{\omega t} \mathbf{e} = \cos(\omega t) \mathbf{e} + \sin(\omega t) \mathbf{e}' = \operatorname{Re} \exp(i\omega t) (\mathbf{e} - i\mathbf{e}'),$$

где $\mathbf{e}' = [\omega \times \mathbf{e}]/\omega$, $\omega = |\omega|$. Решением волнового уравнения с источником $s(t, \mathbf{r}) = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$, удовлетворяющим условию излучения, является функция $W(t, \mathbf{r}) = \exp(i\omega(t - |\mathbf{r}|))/|\mathbf{r}|$, откуда

$$\begin{aligned} W(t, \mathbf{r}) &= \operatorname{Re} \left[\nabla \left(\frac{e^{i\omega(t-|\mathbf{r}|)}}{|\mathbf{r}|} \right) \cdot (\mathbf{e} - i\mathbf{e}') \right] = -\operatorname{Re} \left[e^{i\omega(t-|\mathbf{r}|)} (1 + i\omega|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{e} - i\mathbf{e}')}{|\mathbf{r}|^3} \right] = \\ &= -\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \cos \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \sin \varphi] - \frac{\omega}{|\mathbf{r}|^2} [-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \sin \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \cos \varphi], \end{aligned}$$

где $\varphi = \omega(t - |\mathbf{r}|)$. Давление вычисляется по формуле $p'(t, \mathbf{r}) = -\partial W / \partial t$, откуда

$$p'(t, \mathbf{r}) = \frac{\omega}{|\mathbf{r}|^3} [-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \sin \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \cos \varphi] - \frac{\omega^2}{|\mathbf{r}|^2} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \cos \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \sin \varphi].$$

Для скоростей получаем выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(t, \mathbf{r}) &= \frac{3\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^5} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \cos \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \sin \varphi] + \frac{2\omega\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^4} [-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \sin \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \cos \varphi] + \\ &+ \frac{\omega\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^4} [-(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \sin \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \cos \varphi] - \frac{\omega^2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \cos \varphi + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}') \sin \varphi] - \\ &- \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} [\mathbf{e} \cos \varphi + \mathbf{e}' \sin \varphi] - \frac{\omega}{|\mathbf{r}|^2} [-\mathbf{e} \sin \varphi + \mathbf{e}' \cos \varphi]. \end{aligned}$$

Первая строка получилась в результате дифференцирования знаменателя, вторая – в результате дифференцирования тригонометрических функций, третья – в результате дифференцирования скалярных произведений.

Это решение имеет особенность в начале координат и поэтому не может напрямую применяться для верификации численных методов. Тем не менее, оно может быть полезно для верификации модели шума в дальнем поле.

6.5 Волна между коаксиальными цилиндрами (s_Coaxial)

Рассматривается трёхмерное волновое уравнение (1.10) в области $r_{\min} < r < r_{\max}$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ с условиями непротекания при $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$. Ищется решение в виде простой волны:

$$W(t, z, r, \phi) = i\omega^{-1} e^{i\omega t - ik_z z - i\nu\phi} (\alpha J_\nu(k_r r) + \beta Y_\nu(k_r r)), \quad \omega = \sqrt{k_z^2 + k_r^2}.$$

Тогда решение представляется в виде

$$p' = e^{i\omega t - ik_z z - i\nu\phi} (\alpha J_\nu(k_r r) + \beta Y_\nu(k_r r));$$

$$\begin{aligned} \rho' &= p'; & u'_z &= k_z \omega^{-1} p'; & u'_\phi &= \nu p' / (\omega r); \\ u'_r &= i k_r \omega^{-1} e^{i\omega t - i k_z z - i\nu\phi} (\alpha J'_\nu(k_r r) + \beta Y'_\nu(k_r r)). \end{aligned}$$

Остаётся найти величину k_r . Из граничных условий получаем равенства

$$\alpha J'_\nu(k_r r_{\min}) + \beta Y'_\nu(k_r r_{\min}) = 0;$$

$$\alpha J'_\nu(k_r r_{\max}) + \beta Y'_\nu(k_r r_{\max}) = 0.$$

Чтобы эта система на нахождение α и β имела нетривиальное решение, должно выполняться равенство $f(k_r) = 0$, где

$$f(k_r) = J'_\nu(k_r r_{\min}) Y'_\nu(k_r r_{\max}) - J'_\nu(k_r r_{\max}) Y'_\nu(k_r r_{\min}).$$

Это уравнение может быть решено методом Ньютона при наличии начального приближения, достаточно близкого к корню. Вычислим производную от $f(k_r)$.

$$\begin{aligned} \frac{df(k_r)}{dk_r} &= r_{\min} (J''_\nu(k_r r_{\min}) Y'_\nu(k_r r_{\max}) - J'_\nu(k_r r_{\max}) Y''_\nu(k_r r_{\min})) + \\ &+ r_{\max} (J'_\nu(k_r r_{\min}) Y''_\nu(k_r r_{\max}) - J''_\nu(k_r r_{\max}) Y'_\nu(k_r r_{\min})). \end{aligned}$$

Пользуясь уравнением Бесселя

$$J''_\nu(\alpha k_r) + \frac{1}{\alpha k_r} J'_\nu(\alpha k_r) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 k_r^2}\right) J_\nu(\alpha k_r) = 0$$

для $\alpha = r_{\min}$ и $\alpha = r_{\max}$ и аналогичным уравнением для $Y_\nu(\dots)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{df(k_r)}{dk_r} &= -\frac{f(k_r)}{k_r} - \left(1 - \frac{\nu^2}{k_r^2 r_{\min}^2}\right) r_{\min} (J_\nu(k_r r_{\min}) Y'_\nu(k_r r_{\max}) - J'_\nu(k_r r_{\max}) Y_\nu(k_r r_{\min})) - \\ &- \left(1 - \frac{\nu^2}{k_r^2 r_{\max}^2}\right) r_{\max} (J'_\nu(k_r r_{\min}) Y_\nu(k_r r_{\max}) - J_\nu(k_r r_{\max}) Y'_\nu(k_r r_{\min})). \end{aligned}$$

7 Задачи дифракции

7.1 Дифракция волны от начального импульса на углу $2\pi/n$ (s_Corner)

Рассматривается двумерное волновое уравнение (1.10) с нулевой правой частью в секторе $G \subset \mathbb{R}^2$, определяемом как

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}, \quad r > 0, \quad 0 < \phi < \frac{2\pi}{n} \right\},$$

где $n \in \mathbb{N}$ – параметр задачи. В частности, если $n = 1$, то областью определения уравнения является плоскость с разрезом в форме полупрямой: $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x > 0\}$. На границе ставится условие непротекания: $\nabla W \cdot \mathbf{n} = 0$. Начальные данные задаются в

виде $W(0, \mathbf{r}) = 0$, $\partial W / \partial t(0, \mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$, где $f(\mathbf{r})$ – бесконечно гладкая функция на \bar{G} , финитная с выпуклым носителем, лежащим строго внутри ∂G . Фактически используется $f(\mathbf{r}) = \exp(-\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2)$, $\alpha = \ln 2/b^2$, причём центр начального импульса находится достаточно далеко от границ, так чтобы при $\mathbf{r} \in \partial G$ с машинной точностью выполнялось $f(\mathbf{r}) = 0$.

При $n = 1$ в случае точечных начальных данных эта задача является задачей Зоммерфельда о дифракции на полупрямой; её решение приведено в [4]. Решение при $n > 1$ получается из решения задачи Зоммерфельда методом отражений. При чётных n решение существенно упрощается и может быть получено методом отражений из функции Грина для волнового уравнения в свободном пространстве.

Отметим специфику этого решения. При $n > 1$ все пульсации физических переменных являются непрерывными на \bar{G} . При $n = 1$ волновой потенциал и пульсации давления также являются непрерывными (в т. ч. на полупрямой имеет место односторонняя непрерывность с каждой стороны), но пульсации скоростей не являются ограниченными при $x = y = 0$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$H(t, r, \psi, a) = \frac{1}{2\pi} (t^2 - (r \cos \psi - a)^2 - (r \sin \psi)^2)_+^{-1/2} \times$$

$$\times \begin{cases} 1/2, & t > r + a; \\ 1, & t < r + a, \quad -\pi < \psi < \pi \bmod 4\pi; \\ 0, & t < r + a, \quad -3\pi < \psi < -\pi \bmod 4\pi. \end{cases} \quad (7.1)$$

Нижний индекс плюс означает, что выражение принимается равным нулю, если аргумент степенной функции отрицательный. Легко заметить, что эта функция является 4π -периодической функцией, причём при $t < a$ она совпадает с функцией Грина волнового уравнения в свободном пространстве, продолженной нулём на $\pi < |\psi| < 2\pi \pmod{4\pi}$. Можно показать (см. [4]), что $H(t, r, \psi, a)$ является обобщённым решением волнового уравнения в полярных координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) H(t, r, \phi, a) = 0. \quad (7.2)$$

Решение задачи в секторе с точечными начальными данными $W|_{t=0}, \partial W / \partial t|_{t=0} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ выражается через функцию $H(t, r, \psi, a)$ методом отражений. Пусть $\mathbf{r}_0 = (r_0 \cos \phi_0, r_0 \sin \phi_0)$, где $0 < \phi_0 < 2\pi/n$ (если ϕ_0 лежит вне этого диапазона, то правая часть, а, следовательно, и решение задачи тождественно равны нулю). Определим для $k = 0, \dots, n-1$ функции $\phi_{2k}(\phi_0) = \phi_0 + 4\pi k/n$, $\phi_{2k+1}(\phi_0) = -\phi_{2k}(\phi_0)$. Они задают расположение отражённых импульсов, см. рис. 2. Тогда решением задачи с точечными начальными данными будет функция

$$W(t, r, \phi, \mathbf{r}_0) = \sum_{j=0}^{2n-1} H(t, r, \phi - \phi_j(\phi_0), r_0). \quad (7.3)$$

Решение для задачи с начальными данными $-f(\mathbf{r})$ получается их свёрткой с реше-

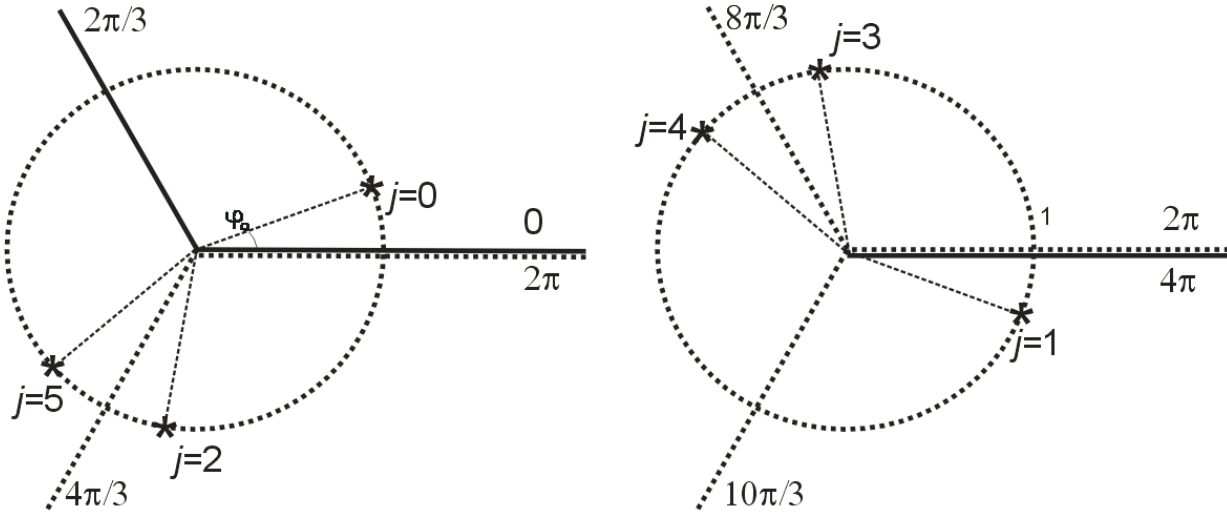


Рис. 2: Расположение отражённых импульсов

нием (7.3) для случая точечных начальных данных:

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} W_j(t, r, \phi), \quad (7.4)$$

$$W_j(t, r, \phi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi/n} f \left(\begin{array}{c} r_0 \cos \phi_0 \\ r_0 \sin \phi_0 \end{array} \right) H(t, r, \phi - \phi_j(\phi_0), r_0) r_0 d\phi_0 dr_0. \quad (7.5)$$

Способ вычисления производных от этого выражения (которые задают искомые физические пульсации) описан в [5].

7.2 Дифракция плоской волны на углу $2\pi/n$ (s_CornerPlanar)

Рассматривается двумерное волновое уравнение (1.10) в секторе $G \subset \mathbb{R}^2$, определяемом как

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}, \quad r > 0, \quad 0 < \phi < \frac{2\pi}{n} \right\},$$

где $n \in \mathbb{N}$ – параметр задачи. В частности, если $n = 1$, то областью определения уравнения является плоскость с разрезом в форме полупрямой: $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x > 0\}$. На границе ставится условие непротекания: $\nabla W \cdot \mathbf{n} = 0$.

При чётных n (то есть для углов π/\tilde{n} , $\tilde{n} \in \mathbb{N}$) рассматриваются решения, получаемые из плоской волны методом отражения, вида

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{n-1} F(t - d - r \cos(\phi - \phi_j)), \quad (7.6)$$

где F – первообразная от профиля волны, $d \in \mathbb{R}$, ϕ_0 задаётся, а остальные значения определяются формулами $\phi_{2k} = \phi_0 + 4\pi k/n$, $\phi_{2k+1} = -\phi_{2k}$.

Далее будем предполагать, что $f(x) = dF/dx = 0$ вне отрезка $-H < x < H$, $H > 0$, и будем рассматривать решение с начальными данными (7.6) при $t = 0$ при $d > H$. Для построения решения вначале выполним предельный переход в решении задачи о рассеянии волны от локализованного начального импульса (см. раздел 7.1) путём удаления его центра на бесконечность. Затем сверткой входящей волне может быть придан любой наперёд заданный профиль.

Преимущество этого решения по сравнению с задачей с локализованным начальным импульсом является более простой вид решения; недостатком является его нелокальность в начальный момент времени.

В общем случае решение задачи о рассеянии на углу имеет вид

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{H}(t, r, \phi - \phi_j(\phi_0), r_0), \quad (7.7)$$

где $\phi_j(\phi_0)$ определены выше, а

$$\tilde{H}(t, r, \psi) = g(\psi)F(t + r \cos \psi) + \frac{1 - 2g(\psi)}{2} \int_{-\infty}^{t-r} f(\tau) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \xi(t - \tau, r, \psi) \right] d\tau. \quad (7.8)$$

Легко убедиться, что при $t < d - H$ оно совпадает с (7.6).

Вывод этого решения и описание процедуры вычисления производных от этого выражения (которые задают искомые физические пульсации) приведены в [2].

7.3 Рассеяние акустической волны на цилиндре (s_Cylinder)

Рассматривается двумерное волновое уравнение (1.10) в области $t > 0$, $|\mathbf{r}| > r_c$ с начальными условиями

$$W|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = -p_0(\mathbf{r}) = -\exp \left(-\ln 2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{b^2} \right).$$

При $|\mathbf{r}| = r_c$ задаётся условие непротекания $\nabla W \cdot \mathbf{n} = 0$.

7.3.1 Решение

Будем пользоваться цилиндрической системой координат с началом в центре круга, и будем отсчитывать угол от направления на центр начального возмущения.

Применим для получения решения метод разделения переменных. Собственные функции оператора Лапласа с заданными начальными условиями имеют вид $\phi_{\nu,k}(r) \exp(i\nu\phi)$, где

$$\phi_{\nu,k}(r) = (\alpha_\nu(k)J_\nu(kr) + \beta_\nu(k)N_\nu(kr)),$$

где $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k > 0$, $J_\nu(r)$ и $N_\nu(r)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно, а коэффициенты α и β связываются граничными условиями 2-го рода при $r = r_c$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (\alpha_\nu(k)J_\nu(kr) + \beta_\nu(k)N_\nu(kr)) \right|_{r=r_c} = 0 \quad (7.9)$$

Для удобства выберем нормировку $(\alpha_\nu(k))^2 + (\beta_\nu(k))^2 = 1$, тогда

$$\phi_{\nu,k}(r) = \frac{-N'_\nu(kr_c)J_\nu(kr) + J'_\nu(kr_c)N_\nu(kr)}{\sqrt{J_\nu^2(kr_c) + N_\nu^2(kr_c)}}. \quad (7.10)$$

Функции J_ν и N_ν на действительной оси общих локальных экстремумов не имеют, поэтому знаменатель в (7.10) отличен от нуля.

Будем искать решение в виде разложения по собственным функциям:

$$W(t, r, \phi) = \int_0^\infty \sin(kt) \sum_{\nu=0}^\infty \cos(\nu\phi) \phi_{\nu,k}(r) A_\nu(k) dk. \quad (7.11)$$

При написании косинусов использованы соображения чётности по углу и начальное условие $W(0, \mathbf{r}) = 0$. Коэффициенты $A_\nu(k)$ находятся из второго начального условия:

$$-p_0(r, \phi) = \sum_{\nu=0}^\infty \cos(\nu\phi) \int_0^\infty k \phi_{\nu,k}(r) A_\nu(k) dk.$$

Для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда Фурье домножим на $\cos(m\phi)$ и проинтегрируем от 0 до π :

$$\int_0^\infty k \phi_{\nu,k}(r) A_\nu(k) dk = \Phi_\nu(r), \quad \Phi_\nu(r) = - \begin{cases} 1/\pi, & \nu = 0 \\ 2/\pi, & \nu \neq 0 \end{cases} \int_0^\pi \cos(\nu\phi) p_0(r, \phi) d\phi. \quad (7.12)$$

Обратное преобразование Бесселя – Фурье даёт значения коэффициентов

$$A_\nu(k) = \int_{r_c}^\infty r \Phi_\nu(r) \phi_{\nu,k}(r) dr. \quad (7.13)$$

Пульсации физических величин находятся дифференцированием выражения (7.11) для волнового потенциала (см. (1.11)):

$$\begin{aligned} p'(t, r, \phi) &= - \int_0^\infty k \cos(kt) \sum_{\nu=0}^\infty \cos(\nu\phi) \phi_{\nu,k}(r) A_\nu(k) dk; \\ u'_\phi(t, r, \phi) &= -\frac{1}{r} \int_0^\infty \sin(kt) \sum_{\nu=0}^\infty \nu \sin(\nu\phi) \phi_{\nu,k}(r) A_\nu(k) dk; \\ u'_r(t, r, \phi) &= \int_0^\infty \sin(kt) \sum_{\nu=0}^\infty \cos(\nu\phi) \frac{d\phi_{\nu,k}(r)}{dr} A_\nu(k) dk. \end{aligned}$$

В этих формулах $A_\nu(k)$ задаются (7.13).

7.3.2 Численное вычисление решения

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части в (7.12):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(\nu\phi) p_0(r, \phi) d\phi &= \int_0^\pi \cos(\nu\phi) \exp\left(-\frac{\ln 2}{b^2} (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi)\right) d\phi = \\ &= \exp\left(-\frac{\ln 2}{b^2} (r^2 + r_0^2)\right) \int_0^\pi \cos(\nu\phi) \exp\left(\frac{2(\ln 2)rr_0}{b^2} \cos \phi\right) d\phi = \\ &= \pi \exp\left(-\frac{\ln 2}{b^2} (r^2 + r_0^2)\right) I_\nu\left(2 \ln 2 \frac{rr_0}{b^2}\right). \end{aligned}$$

Обоснование последнего равенства см. в [6]. Таким образом, имеем

$$\Phi_\nu(r) = -\exp\left(-\frac{\ln 2}{b^2}(r - r_0)^2\right) \exp\left(-2 \ln 2 \frac{rr_0}{b^2}\right) I_\nu\left(2 \ln 2 \frac{rr_0}{b^2}\right) \times \begin{cases} 1, & \nu = 0; \\ 2, & \nu \neq 0. \end{cases}$$

где $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя 1-го рода. Экспоненциальный множитель разделён на две части с целью использования функции вычисления $e^{-x}I_\nu(x)$ вместо $I_\nu(x)$.

Теперь рассмотрим вопрос о вычислении функций $\phi_{\nu,k}(r)$ и её производной. Для вычисления производных от функций Бесселя используются соотношения

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x); \quad \frac{d}{dx} N_n(x) = -N_{n+1}(x) + \frac{n}{x} N_n(x). \quad (7.14)$$

Однако непосредственное использование выражения (7.10) при больших ν невозможно, поскольку значение функции Бесселя 2-го рода может не быть представимо в стандартной машинной арифметике. Поэтому преобразуем формулу (7.10) следующим образом:

$$\phi_{\nu,k}(r) = \left(-J_\nu(kr) + J'_\nu(kr_c) \frac{N_\nu(kr)}{N_\nu(kr_c)} \frac{N_\nu(kr_c)}{N'_\nu(kr_c)}\right) \left(1 + \frac{J_\nu^2(kr_c)}{N_\nu^2(kr_c)}\right)^{-1/2}, \quad (7.15)$$

а формулу для её производной, необходимая для вычисления $u'_r(t, r, \phi)$, аналогично,

$$\frac{d\phi_{\nu,k}}{dr}(r) = k \left(-J'_\nu(kr) + J'_\nu(kr_c) \frac{N'_\nu(kr)}{N'_\nu(kr_c)}\right) \left(1 + \frac{J_\nu^2(kr_c)}{N_\nu^2(kr_c)}\right)^{-1/2}. \quad (7.16)$$

Для тех значений ν , при которых, например, $|N_\nu(kr_c)| < 10^{100}$, значения функций Бесселя корректно вычисляются стандартными программами. При этом используются эти программы, а производные функций Бесселя вычисляются формулами (7.14). В противном случае kr_c заведомо лежит в области монотонности функции $N_\nu(x)$, а последний множитель в правой части (7.15) и (7.16) с машинной точностью равен 1.

Покажем, как вычислять функции $A_{\nu+1}(x) = N_{\nu+1}(x)/N_\nu(x)$, когда x лежит в области монотонности $N_\nu(x)$, и $B_\nu(x, y) = N_\nu(x)/N_\nu(y)$ при $x > y$, когда y лежит в области монотонности N_ν (x не обязан лежать в области монотонности).

Начнём с функции $A_{n+1}(x)$. Из рекуррентного соотношения

$$N_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}N_n(x) - N_{n-1}(x)$$

получаем

$$A_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} - \frac{1}{A_n(x)}. \quad (7.17)$$

Эту рекурсию нельзя стартовать с $n = 0$, поскольку для некоторого n возможно $A_n(x) = 0$. Поэтому для некоторого n , для которого x лежит в области монотонности $N_n(x)$, значение $A_n(x)$ вычисляется как $A_n(x) = N_n(x)/N_{n-1}(x)$, а далее используется рекуррентное соотношение (7.17).

Далее, имеем

$$B_{n+1}(x, y) = \frac{A_{n+1}(x)}{A_{n+1}(y)}B_n(x, y).$$

Таким образом, если $N_\nu(kr_c)$ не может быть вычислены напрямую, то функция $\phi_{\nu,k}(x)$ и её производная считаются следующим образом. Вначале для некоторого n , такого что $10^{17} < |N_n(kr_c)| < 10^{100}$, вычисляются значения $N_n(kr_c)$ и $N_n(kr)$. Затем по рекуррентным формулам, стартуя с этого значения n , вычисляются величины $A(kr_c)$ и $B(kr, kr_c)$. Наконец, $\phi_{\nu,k}(x)$ и её производная считаются по формулам

$$\begin{aligned} \phi_{\nu,k}(r) &= -J_\nu(kr) + J'_\nu(kr_c)B(kr, kr_c) \left(\frac{\nu}{kr_c} - A_{\nu+1}(kr_c) \right), \\ \frac{d\phi_{\nu,k}}{dr}(r) &= k \left(-J'_\nu(kr) + J'_\nu(kr_c) \frac{r_c}{r} B(kr, kr_c) \frac{\nu - kr A_{\nu+1}(kr)}{\nu - kr_c A_{\nu+1}(kr_c)} \right). \end{aligned}$$

8 Линейные возмущения с вязкостью

8.1 Простая волна в свободном пространстве (s_SinusVisc)

Рассматриваются линеаризованные уравнения Навье – Стокса (1.7) в \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3 при отсутствии теплопроводности ($\text{Pr} = \infty$); допускается случай отсутствия вязкости ($\mu = 0$). Источниковые члены отсутствуют ($\mathbf{S}' \equiv 0$). Фоновый поток для простоты полагается равным нулю.

Общее решение уравнений представляется в виде суммы решений трёх типов. Ввиду отсутствия теплопроводности энтропийное поле задаётся равенствами $p' \equiv \mathbf{u}' = 0$; ρ' произвольное, не зависящее от времени. Эта компонента не представляет интереса и игнорируется. Вихревое поле задаётся уравнением

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mu \Delta \Psi, \quad W \equiv \rho' \equiv p' \equiv 0.$$

Ему удовлетворяют решения вида $\Psi(t, \mathbf{r}) = -\mathbf{c} \exp(-\mu \mathbf{k}^2 t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, которые дают

$$\mathbf{u}'(t, \mathbf{r}) = \exp(-\mu \mathbf{k}^2 t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) [\mathbf{c} \times \mathbf{k}], \quad \rho' = p' = 0,$$

где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ – произвольный вектор. Для двумерного случая, чтобы решение не зависело от z , нужно положить $k_z = 0$, а, чтобы поле скоростей не имело компоненты вдоль z , нужно положить $c_x = c_y = 0$.

Решение с потенциальным полем скоростей будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} \rho'(t, \mathbf{r}) \\ u'(t, \mathbf{r}) \\ v'(t, \mathbf{r}) \\ w'(t, \mathbf{r}) \\ p'(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} = \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \begin{pmatrix} \varkappa \\ k_x \\ k_y \\ k_z \\ \varkappa \end{pmatrix}.$$

Из (1.7) имеем

$$\begin{aligned} i\omega\varkappa + i\mathbf{k}^2 &= 0, \\ i\omega\mathbf{k} + i\mathbf{k}\varkappa &= \frac{4}{3}\mu(-\mathbf{k}^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

При $\mathbf{k} = 0$ решение является константой и не представляет интереса; при $\mathbf{k} \neq 0$ второе уравнение можно сократить на \mathbf{k} . Из первого уравнения получаем $\varkappa = -\mathbf{k}^2/\omega$. Подставляя во второе уравнение, получаем квадратное уравнение

$$\omega^2 - \frac{4}{3}i\omega\mu\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}^2 = 0.$$

Его решением являются частоты

$$\omega_{\pm} = \frac{2}{3}i\mu\mathbf{k}^2 \pm \left(-\left(\frac{2}{3}\mu\mathbf{k}^2\right)^2 + \mathbf{k}^2 \right)^{1/2}.$$

При $(2/3)\mu|\mathbf{k}| \leq 1$ имеем два комплексно сопряжённых решения

$$\text{Re}\omega_{\pm} = \pm|\mathbf{k}| \left(1 - \left(\frac{2}{3}\mu\mathbf{k}\right)^2 \right)^{1/2}, \quad \text{Im}\omega_{\pm} = \frac{2}{3}\mu\mathbf{k}^2.$$

В частности, в невязком случае имеем $\omega_{\pm} = \pm|\mathbf{k}|$. При большой вязкости ($\mu > 3/(2|\mathbf{k}|)$) имеют место два решения с чисто мнимыми значениями ω :

$$\text{Re}\omega_{\pm} = 0, \quad \text{Im}\omega_{\pm} = \frac{2}{3}\mu\mathbf{k}^2 \pm |\mathbf{k}| \left(\left(\frac{2}{3}\mu\mathbf{k}\right)^2 - 1 \right)^{1/2}.$$

В библиотеке ColESo выбрана мода с частотой ω_+ для случая малой (в т. ч. нулевой) вязкости и мода с частотой ω_- для случая большой вязкости.

Суммарное решение представляется в виде суммы решений с вихревым и потенциальными полями скоростей.

8.2 Вихревые возмущения в цилиндре (s_VortexInCylinder)

Рассматриваются двумерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса (1.7) при отсутствии теплопроводности в области $t > 0$, $|\mathbf{r}| < R$. На границе круга задаются условия прилипания ($\mathbf{u} = 0$). Начальные условия полагаются равными $\rho'(0, \mathbf{r}) = u'_r(0, \mathbf{r}) = p'(0, \mathbf{r}) = 0$, $u'_\phi(0, \mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|/R)$, где $f(0) = f(1) = 0$. В библиотеке ColESo реализована функция $f(x) = x \sin(\pi x)$.

Решение этой задачи ищется в виде $\rho' \equiv p' \equiv 0$, $\mathbf{u}'(t, \mathbf{r}) = \text{rot } \Psi(t, \mathbf{r})$. Поскольку радиальная и осевая компоненты скорости отсутствуют, Ψ имеет только осевую компоненту $\Psi_z(t, r)$, и $u'_r = u'_z \equiv 0$, $u'_\phi = -\partial \Psi_z / \partial r$. Ψ_z подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \Psi_z}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} \right).$$

Его частные решения имеют вид $\Psi_z(t, r) = J_0(\omega r) \exp(-\mu \omega^2 t)$, откуда получаем $u'_\phi(t, r) = -\partial \Psi_z / \partial r = \omega J_1(\omega r) \exp(-\mu \omega^2 t)$. Налагая граничные условия, получаем решения вида

$$u'_\phi(t, r) = \omega J_1 \left(\frac{\nu_k}{R} r \right) \exp \left(-\mu \frac{\nu_k^2}{R^2} t \right), \quad (8.1)$$

где ν_k – k -й нуль функции $J_1(x)$. Отметим, что равенства $\rho' \equiv p' \equiv u'_r \equiv u'_z \equiv 0$ и (8.1) являются простейшим случаем решения задачи, рассмотренной в разделе 8.3.

Для решения задачи, поставленной в настоящем разделе, остаётся разложить начальные данные по функциям $u'_\phi(0, r)$, определённым (8.1). Таким образом, получаем общее решение

$$u'_\phi(t, r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_1 \left(\frac{\nu_k}{R} r \right) \exp \left(-\mu \frac{\nu_k^2}{R^2} t \right),$$

$$A_k = \frac{2}{(J_0(\nu_k))^2} \int_0^1 x f(x) J_1(\nu_k x) dx.$$

8.3 Акустическая волна при наличии вязкости и теплопроводности (s_WaveInChannel)

8.3.1 Волна в плоском канале

Рассматриваются двумерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса (1.7) в области $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, h)$ с нулевым источниковым членом. Здесь h – полуширина канала. При $y = h$ задаются условия прилипания ($\mathbf{u} = 0$) и изотермической стенки ($\gamma p' - \rho' = 0$); при $y = 0$ задаётся условие симметрии. Ищутся решения вида

$$\begin{pmatrix} \rho'(t, x, y) \\ u'(t, x, y) \\ v'(t, x, y) \\ p'(t, x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}(y) \\ \tilde{u}(y) \\ \tilde{v}(y) \\ \tilde{p}(y) \end{pmatrix} \exp(i\omega t - ikx).$$

Волновые числа $k \in \mathbb{R}$ (продольное) и $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (поперечное) являются параметрами; частота $\omega \in \mathbb{C}$ определяется по ним.

В силу двумерности $\Psi(t, x, y) = (0, 0, \Psi(t, x, y))$. Функции W и Ψ можно искать в виде $W(t, x, y) = \tilde{W}(y) \exp(i\omega t - ikx)$, $\Psi(t, x, y) = \tilde{\Psi}(y) \exp(i\omega t - ikx)$. Удобно ввести пульсацию внутренней энергии, умноженной на $\gamma(\gamma - 1)$: положим $\tilde{\epsilon} = \gamma\tilde{p} - \tilde{p}$. Тогда уравнения (1.7) переписутся в виде

$$i\omega(\gamma\tilde{p}(y) - \tilde{\epsilon}(y)) - k^2\tilde{W}(y) + \tilde{W}''(y) = 0, \quad (8.2)$$

$$i\omega\tilde{W}(y) + \tilde{p}(y) = \frac{4}{3}\mu \left(-k^2\tilde{W}(y) + \tilde{W}''(y) \right), \quad (8.3)$$

$$(1 - \gamma)i\omega\tilde{p}(y) + i\omega\tilde{\epsilon} = -\frac{\mu}{\text{Pr}}k^2\tilde{\epsilon}(y) + \frac{\mu}{\text{Pr}}\tilde{\epsilon}''(y), \quad (8.4)$$

$$i\omega\tilde{\Psi}(y) = -\mu k^2\tilde{\Psi}(y) + \mu\tilde{\Psi}''(y). \quad (8.5)$$

Из первых двух уравнений, исключая $\tilde{W}''(y)$, получаем

$$\frac{4}{3}i\omega\mu(\gamma\tilde{p}(y) - \tilde{\epsilon}(y)) + i\omega\tilde{W}(y) + \tilde{p}(y) = 0,$$

откуда

$$\tilde{p}(y) = i\omega \frac{\frac{4}{3}\mu\tilde{\epsilon}(y) - \tilde{W}(y)}{1 + \frac{4}{3}i\omega\mu\gamma}.$$

Подставляя это выражение в (8.3) и (8.4), получаем систему

$$\frac{d^2}{dy^2} \begin{pmatrix} \tilde{W} \\ \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} + (A - k^2 I) \begin{pmatrix} \tilde{W} \\ \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega^2\gamma}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}, & b &= -\frac{i\omega}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}, \\ c &= \frac{\text{Pr}}{\mu} \frac{\omega^2(\gamma - 1)}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma}, & d &= -i\omega \frac{\text{Pr}}{\mu} \left(\frac{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma} \right). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Детерминант этой матрицы равен $\det A = ad - bc = -i\omega^3\text{Pr}/(\mu(1 + 4i\mu\omega\gamma/3))$. Для решения уравнения (8.6) нужно найти собственные значения и собственные вектора матрицы A . Собственные значения равны

$$\lambda_{\pm} = \frac{a + d}{2} \pm \left(\left(\frac{a - d}{2} \right)^2 + bc \right)^{1/2}, \quad (8.8)$$

а матрицы собственных векторов S и S^{-1} (такие что $A = S^{-1} \text{diag}\{\lambda_+, \lambda_-\} S$) записываются в виде

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_+ - d & b \\ c & \lambda_- - a \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} \lambda_- - a & -b \\ -c & \lambda_+ - d \end{pmatrix}.$$

Мы не будем подставлять значения коэффициентов a , b , c и d ввиду громоздкости получающихся выражений. Домножая (8.6) на матрицу S , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} ((\lambda_+ - d)\tilde{\Phi} + b\tilde{\epsilon}) + (\lambda_+ - k^2)((\lambda_+ - d)\tilde{\Phi} + b\tilde{\epsilon}) &= 0, \\ \frac{d^2}{dy^2} (c\tilde{\Phi} + (\lambda_- - a)\tilde{\epsilon}) + (\lambda_- - k^2)(c\tilde{\Phi} + (\lambda_- - a)\tilde{\epsilon}) &= 0. \end{aligned}$$

Из условия симметрии имеем $d\tilde{\Phi}/dy(0) = d\tilde{\epsilon}/dy(0) = 0$. Отсюда находим решение

$$(\lambda_+ - d)\tilde{\Phi} + b\tilde{\epsilon} = \hat{A}_+ \frac{\cos(y\kappa_+)}{\cos(h\kappa_+)},$$

$$c\tilde{\Phi} + (\lambda_- - a)\tilde{\epsilon} = \hat{A}_- \frac{\cos(y\kappa_-)}{\cos(h\kappa_-)},$$

где $\kappa_{\pm} = \sqrt{\lambda_{\pm} - k^2}$, а \hat{A}_{\pm} – произвольные. Домножая на S^{-1} и вводя $A_{\pm} = \hat{A}_{\pm}/\det S$, получаем

$$\tilde{\Phi}(y) = (\lambda_- - a)A_+ \frac{\cos(y\kappa_+)}{\cos(h\kappa_+)} - bA_- \frac{\cos(y\kappa_-)}{\cos(h\kappa_-)};$$

$$\tilde{\epsilon}(y) = -cA_+ \frac{\cos(y\kappa_+)}{\cos(h\kappa_+)} + (\lambda_+ - d)A_- \frac{\cos(y\kappa_-)}{\cos(h\kappa_-)}.$$

Из условия $\tilde{\epsilon}(h) = 0$ получаем $-cA_+ + (\lambda_+ - d)A_- = 0$, то есть $A_+ = (\lambda_+ - d)A_-/c$. Таким образом,

$$\tilde{\Phi}(y) = A_- \left[\frac{(\lambda_- - a)(\lambda_+ - d)}{c} \frac{\cos(y\kappa_+)}{\cos(h\kappa_+)} - b \frac{\cos(y\kappa_-)}{\cos(h\kappa_-)} \right];$$

$$\tilde{\epsilon}(y) = (\lambda_+ - d)A_- \left[\frac{\cos(y\kappa_-)}{\cos(h\kappa_-)} - \frac{\cos(y\kappa_+)}{\cos(h\kappa_+)} \right].$$

Уравнение (8.5) для вихревой составляющей решается аналогично, но условие симметрии даёт $\tilde{\Psi}(0) = 0$. Таким образом,

$$\tilde{\Psi}(y) = A_s \sin(y\kappa_s),$$

где $\lambda_s = -i\omega/\mu$, $\kappa_s = \sqrt{\lambda_s - k^2}$.

Получим выражение для скоростей.

$$\tilde{u}(y) = -ik\tilde{\Phi}(y) + \tilde{\Psi}'(y) = -ikA_- \left[\frac{(\lambda_- - a)(\lambda_+ - d)}{c} - b \right] + A_s \kappa_s \cos(y\kappa_s),$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(y) &= \tilde{\Phi}'(y) + ik\tilde{\Psi}(y) = \\ &= -A_- \left[\frac{(\lambda_- - a)(\lambda_+ - d)}{c} \kappa_+ \frac{\sin(y\kappa_+)}{\cos(h\kappa_+)} - b\kappa_- \frac{\sin(y\kappa_-)}{\cos(h\kappa_-)} \right] + ikA_s \sin(y\kappa_s). \end{aligned}$$

В силу граничных условий правые части обоих выражений должны быть равны нулю. Выражая A_s из первого равенства, получаем уравнение на нахождение частоты:

$$\frac{\lambda_- - a}{c} \kappa_+ \operatorname{tg}(h\kappa_+) - \frac{b}{\lambda_+ - d} \kappa_- \operatorname{tg}(h\kappa_-) + k^2 \left[\frac{\lambda_- - a}{c} - \frac{b}{\lambda_+ - d} \right] \frac{1}{\kappa_s} \operatorname{tg}(h\kappa_s) = 0.$$

Уравнение было поделено на $(\lambda_+ - d)$, чтобы оно имело конечный предел при $\operatorname{Pr} \rightarrow \infty$.

Это уравнение решается численно, методом Ньютона относительно ω . В качестве начального приближения используются частоты для случая отсутствия вязкости и теплопроводности: при этом решения имеют вид $W = \exp(i\omega t - ikx) \cos(y\pi m/h)$, откуда $\omega_m = (k^2 + (\pi m/h)^2)^{1/2}$.

8.3.2 Волна в цилиндрическом канале

Рассматриваются трёхмерные линейаризованные уравнения Навье – Стокса (1.7) в области $t \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 < R^2$, $z \in \mathbb{R}$. Здесь R – радиус цилиндра. Источниковый член полагается равным нулю. При $x^2 + y^2 = R^2$ задаются условия прилипания ($\mathbf{u} = 0$) и изотермической стенки ($\gamma p' - \rho' = 0$). Ищутся решения, такие что пульсации плотности, давления, и цилиндрических компонент скоростей (радиальной, азимутальной и осевой) зависят от t, z, ϕ как $\exp(i\omega t + ikz + i\phi\nu)$. Волновые числа: $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (азимутальное), $k \in \mathbb{R}$ (осевое) и $m \in \mathbb{N}$ (радиальное) являются параметрами; частота $\omega \in \mathbb{C}$ определяется по ним.

Решение этой задачи впервые было получено Кирхгоффом [7], правда, только для случая поршневой моды ($\nu = 0$). Пригодная для численной реализации форма решения получается аналогично случаю плоского канала (см. раздел 8.3.1) и приведена в [8]. Ввиду громоздкости вывода здесь приведём только конечные выражения.

$$\begin{aligned}
\rho(t, z, r, \phi) &= \gamma p(t, z, r, \phi) - \tilde{\epsilon}(r) e^{i\omega t + ikz + i\phi\nu}, \\
u_z(t, z, r, \phi) &= \left[ik \tilde{\Phi}(r) - i\alpha \kappa_s \kappa_s(r) \right] e^{i\omega t + ikz + i\phi\nu}, \\
u_r(t, z, r, \phi) &= \left[\tilde{u}_r^\Pi(r) - \alpha \kappa_s(r) k(\kappa_s r)^{-1} (\nu - Y_\nu(\kappa_s r)) - i\beta \kappa_s(r) \nu r^{-1} \right] e^{i\omega t + ikz + i\phi\nu}, \\
u_\phi(t, z, r, \phi) &= \left[i\nu r^{-1} \Phi(r) + \alpha \kappa_s(r) ik(\kappa_s r)^{-1} (\nu - Y_\nu(\kappa_s r)) + \beta \kappa_s(r) r^{-1} Y_\nu(\kappa_s r) \right] e^{i\omega t + ikz + i\phi\nu}, \\
p(t, z, r, \phi) &= \frac{i\omega}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega\gamma} \left(-\tilde{\Phi}(r) + \frac{4}{3}\mu\tilde{\epsilon}(r) \right) e^{i\omega t + ikz + i\phi\nu}, \\
\tilde{u}_r^\Pi(r) &= \frac{\gamma - 1}{r} \left(-\frac{\lambda_- - a}{c} Y_\nu(\kappa_+ r) \frac{J_\nu(\kappa_+ r)}{J_\nu(\kappa_+ R)} + \frac{b}{\lambda_+ - d} Y_\nu(\kappa_- r) \frac{J_\nu(\kappa_- r)}{J_\nu(\kappa_- R)} \right), \\
\tilde{\Phi}(r) &= (\gamma - 1) \left(-\frac{\lambda_- - a}{c} \frac{J_\nu(\kappa_+ r)}{J_\nu(\kappa_+ R)} + \frac{b}{\lambda_+ - d} \frac{J_\nu(\kappa_- r)}{J_\nu(\kappa_- R)} \right), \\
\tilde{\epsilon}(r) &= (\gamma - 1) \left(\frac{J_\nu(\kappa_+ r)}{J_\nu(\kappa_+ R)} - \frac{J_\nu(\kappa_- r)}{J_\nu(\kappa_- R)} \right), \\
\kappa(r) &= \frac{J_\nu(\kappa r)}{J_\nu(\kappa R)}, \quad \kappa_s(r) = \frac{J_\nu(\kappa_s r)}{J_\nu(\kappa_s R)}, \\
\kappa &= \left(\frac{\omega^2}{1 + \frac{4}{3}i\mu\omega} - k^2 \right)^{1/2}, \quad \kappa_s = \pm \left(-k^2 - \frac{i\omega}{\mu} \right)^{1/2}, \\
\alpha &= -\frac{k}{\kappa_s} (\gamma - 1) \left(\frac{\lambda_- - a}{c} - \frac{b}{\lambda_+ - d} \right), \\
\beta &= \frac{i(\gamma - 1)}{Y_\nu(\kappa_s R) + \nu} \left(\frac{\lambda_- - a}{c} (Y_\nu(\kappa_+ R) + \nu) - \frac{b}{\lambda_+ - d} (Y_\nu(\kappa_- R) + \nu) \right).
\end{aligned}$$

В этих формулах $J_\nu(z)$ – функция Бесселя 1-го рода и $Y_\nu(z) = zJ'_\nu(z)/J_\nu(z)$. Коэффициенты a, b, c, d, λ_\pm находятся по формулам (8.7) и (8.8).

Частота ω находится численно из решения уравнения

$$\left(\frac{\lambda_- - a}{c} - \frac{b}{\lambda_+ - d}\right) \left(\frac{k^2}{\kappa_s^2} (Y_\nu^2(\kappa_s R) - \nu^2) - \nu^2\right) + \\ + Y_\nu(\kappa_s R) \left(\frac{\lambda_- - a}{c} Y_\nu(\kappa_+ R) - \frac{b}{\lambda_+ - d} Y_\nu(\kappa_- R)\right) = 0.$$

9 Плоские вихри

Рассмотрим уравнения Эйлера (т. е. уравнения (1.1)–(1.2) при $\mathcal{F}_v \equiv 0$) с нулевой правой частью. Будем рассматривать стационарные плоские вихри, то есть решения, в которых поле скоростей имеет только азимутальную компоненту u_ϕ , причём ρ , u_ϕ и p зависят только от r и не зависят от ϕ , t и z . Тогда уравнение для радиальной компоненты импульса сводится к

$$\frac{\partial p(r)}{\partial r} = \frac{\rho(r) u_\phi^2(r)}{r}, \quad (9.1)$$

а остальные уравнения удовлетворяются автоматически. Это уравнение имеет решение для произвольной интегрируемой функции $u_\phi(r)$ и при различных зависимостях между p и ρ .

Ниже мы будем рассматривать только изэнтропические вихри, то есть такие, для которых $\ln p - \gamma \ln \rho$ не зависит от r . Тогда при заданной зависимости $u_\phi(r)$ решением уравнения (9.1) являются функции

$$p(r) = \frac{c_\infty^2}{\gamma \rho_\infty^\gamma} \left(1 - (\gamma - 1) \frac{\rho_\infty^\gamma}{c_\infty^2} J(r)\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho(r) = \rho_\infty \left(1 - (\gamma - 1) \frac{\rho_\infty^\gamma}{c_\infty^2} J(r)\right)^{1/(\gamma-1)},$$

где ρ_∞ и c_∞ – плотность и скорость звука на бесконечности, а

$$J(r) = \int_r^\infty \frac{u_\phi^2(\tilde{r})}{\tilde{r}} d\tilde{r},$$

если этот интеграл сходится и давление оказывается положительным. Ниже всюду предполагается $\rho_\infty = c_\infty = 1$.

Для постановки задачи о переносе вихря можно положить поле скоростей равным

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{u}_\infty + u_\phi(|\mathbf{r} - \mathbf{u}_\infty t|) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{u}_\infty t)^\perp}{|\mathbf{r} - \mathbf{u}_\infty t|},$$

где \mathbf{u}_∞ – скорость переноса.

9.1 Финитный вихрь (s_FiniteVortex)

Для избежания возможных проблем с постановкой граничных условий предлагается вихрь с ограниченным в пространстве полем скоростей: $u_\phi(r) = 0$ при $r > r_{\max}$. Гладкость решения всюду, кроме центра вихря, обеспечивается гладкостью функции

$u_\phi(r)$ на $r \in (0, r_{\max}]$. Для обеспечения гладкости в центре вихря можно либо положить $u_\phi(r) = rf(r^2)$, где f – аналитическая в нуле, либо $u_\phi(r) = O(r^n)$, где n – требуемый показатель гладкости.

Реализованы два типа профилей:

$$u_\phi^{(1)}(r) = M \left(\frac{r}{a} \left(2 - \frac{r}{a} \right) \right)^n, \quad u_\phi^{(2)}(r) = M \frac{r(3a - r)^2}{4a^3}.$$

Отметим, что второй профиль не обеспечивает достаточной гладкости в центре вихря. Допускается периодическая решётка финитных вихрей.

9.2 Вихрь с профилем $u = r/(1 + r^2)$ (s_Vortex_BG)

Рассмотрим вихрь с профилем скорости

$$u_\phi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r^2 + R^2}.$$

Здесь Γ – циркуляция по окружности бесконечного радиуса. Тогда

$$J(r) = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2} \int_r^\infty \frac{2r}{(r^2 + R^2)^2} dr = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2} \frac{-1}{r^2 + R^2} \Big|_r^\infty = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2 + R^2}.$$

9.3 Вихрь с гауссовым профилем циркуляции (s_GaussianVortex)

Рассмотрим вихрь с профилем скорости

$$u_\phi(r) = \frac{A_0 M R}{r} \left(1 - \exp(-\alpha_0 r^2 / R^2) \right),$$

где R – радиус, на котором достигается максимальная скорость вихря, M – отношение максимальной скорости к скорости звука на бесконечности, а A_0 и α_0 – константы, обеспечивающие эти условия. α_0 является положительным решением уравнения $e^x = 1 + 2x$; $A_0 = (1 - e^{-\alpha_0})^{-1}$.

$$\alpha_0 \approx 1.2564312086261696770, \quad A_0 \approx 1.3979525473159165448.$$

Далее для краткости положим $\alpha = \alpha_0 / R^2$, $A = A_0 M$. Имеем

$$J(r) = \int_r^\infty \frac{u_\phi^2}{r} dr = A^2 \int_r^\infty \frac{(1 - \exp(-\alpha r^2))^2}{r^3} dr.$$

Можно показать, что

$$J(r) = A^2 \left[\frac{(1 - \exp(-\alpha r^2))^2}{2r^2} - \alpha (\text{Ei}_1(2\alpha r^2) - \text{Ei}_1(\alpha r^2)) \right],$$

где Ei_1 – экспоненциальный интеграл, определяемый равенством

$$\text{Ei}_1(t) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{x} dx.$$

9.4 Вихрь Рэнкина (s_RankineVortex)

Вихрь Рэнкина задаётся профилем скорости

$$u_\phi(r) = \begin{cases} Mr, & r < 1; \\ M/r, & r \geq 1. \end{cases}$$

Здесь M – отношение максимальной скорости к скорости звука на бесконечности. При этом

$$\rho(r) = \begin{cases} \left(\frac{(K-1)r^2 + 2}{2K} \right)^{1/(\gamma-1)}, & r < 1, \\ \left(1 - \frac{K-1}{2Kr^2} \right)^{1/(\gamma-1)}, & r \geq 1, \end{cases}$$

где $K = (1 - (\gamma - 1)M^2)^{-1}$. Давление выражается формулой $p(r) = (\rho(r))^\gamma / \gamma$.

10 Одномерные решения уравнений Эйлера

10.1 Задача Римана о распаде разрыва (s_Riemann)

Рассматриваются одномерные уравнения Эйлера (1.3) при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ с нулевой правой частью и начальными данными $\rho(0, x) = \rho_L$, $u(0, x) = u_L$, $p(0, x) = p_L$ при $x < x_0$ и $\rho(0, x) = \rho_R$, $u(0, x) = u_R$, $p(0, x) = p_R$ при $x > x_0$. Ищется решение, удовлетворяющее энтропийному условию.

Ввиду сложности точного решения задачи о распаде разрыва мы не будем приводить его здесь; читатель может найти его в монографии [9].

10.2 Ударная волна, задаваемая числом Маха (s_Shock)

Поясним лишь процедуру задания начальных данных в виде ударной волны её числом Маха. Всюду далее γ – показатель адиабаты. Будем считать, что даны значения перед фронтом ударной волны ρ_R , p_R и u_R , а также число Маха ударной волны M , определяемое как скорость ударной волны в системе координат, движущейся с потоком перед фронтом, к скорости звука перед фронтом. Обозначим $c_R = \sqrt{\gamma p_R / \rho_R}$.

Пусть D – скорость ударной волны в основной системе координат. Тогда $M = (D - u_R) / c_R$. Значит, $D = u_R + M c_R$ также известно. Далее для краткости будем обозначать $\rho = \rho_L$, $u = u_L - D < 0$, $p = p_L$. Запишем систему законов сохранения (соотношения Рэнкина–Гюгонио):

$$\rho u = -\rho_R M c_R;$$

$$\rho u^2 + p = \rho_R (M c_R)^2 + p_R;$$

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p + \frac{\rho u^2}{2} \right) u = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p - R + \frac{\rho_R (M c_R)^2}{2} \right) (-M c_R).$$

Выражая ρ из первого уравнения и подставляя в остальные, получаем

$$u(-\rho_R M c_R) + p = \rho_R M^2 c_R^2 + p_R;$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}pu - \rho_R M c_R \frac{u^2}{2} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p - R + \frac{\rho_R (M c_R)^2}{2} \right) (-M c_R).$$

Далее, выражая p из первого уравнения, получаем квадратное уравнение

$$u^2(\rho_R M c_R) \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{2} \right) + u \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) (\rho_R M^2 c_R^2 + p_R) + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_R M c_R + \frac{\rho_R}{2} (M c_R)^3 = 0.$$

У этого уравнения два решения. Одно из них $u = u_L - D = u_R - D = -M c_R$ соответствует константному полю. Нас интересует второе, нетривиальное решение. С использованием теоремы Виета можно записать

$$\begin{aligned} u &= - \left((\rho_R M c_R) \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{2} \right) \right)^{-1} \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) (\rho_R M^2 c_R^2 + p_R) \right) + M c_R = \\ &= M c_R \left[\frac{1-\gamma}{1+\gamma} - \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M^2} \right]. \end{aligned}$$

После вычисления u параметры потока перед фронтом находятся из приведённых выше соотношений.

10.3 Отражение ударной волны от стенки (s_ShockRef)

Рассматриваются одномерные уравнения Эйлера (1.3) при $t > 0$, $x < x_w$ с нулевой правой частью. Начальные данные задаются в виде $\rho(0, x) = \rho_L$, $u(0, x) = u_L$, $p(0, x) = p_L$ при $x < x_0$ и $\rho(0, x) = \rho_R$, $u(0, x) = u_R$, $p(0, x) = p_R$ при $x > x_0$, причём $x_0 < x_w$ и таким образом, чтобы решение представляло собой распространяющуюся вправо ударную волну. При $x = x_w$ задаётся условие непротекания $u(t, x_w) = 0$.

Решение этой задачи приведено в [10].

10.4 Простая волна (s_SimpleWave)

Рассматриваются одномерные уравнения Эйлера (1.1)–(1.2). Ищется решение в виде простой волны, то есть положим $\mathbf{Q}(t, x) = \mathbf{Q}(\theta(t, x))$, где θ – скалярная величина. Кратко приведём описание этого класса решений; более подробное описание см. в [11].

Подставляя равенство $\mathbf{Q}(t, x) = \mathbf{Q}(\theta(t, x))$ в (1.1), получаем

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) + A_c(\mathbf{Q}(\dots)) \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x) \right) \frac{d\mathbf{Q}}{d\theta}(\dots) = 0.$$

Здесь $A_c(\mathbf{Q}) = d\mathcal{F}_c/d\mathbf{Q}$. Чтобы это уравнение имело нетривиальное решение, нужно положить

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) + \lambda(\mathbf{Q}(\theta(\dots))) \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x) = 0, \quad (10.1)$$

где $\lambda(\mathbf{Q})$ – одно из собственных значений матрицы $A_c(\mathbf{Q})$. При этом $d\mathbf{Q}/d\theta$ будет собственным вектором, соответствующим этому собственному значению. Решение (10.1) определяется начальными условиями при $t = 0$ и сносится по прямолинейным характеристикам, задаваемым равенством $dx/dt = \lambda(\mathbf{Q}(\theta(\dots)))$. Нахождение решения сводится

к решению алгебраического уравнения по нахождению точки, из которой выпущена характеристика.

Для уравнений Эйлера удобно искать простую волну, переписав уравнения в физических переменных:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0,$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c^2 = \gamma p / \rho$. Собственным вектором матрицы B , соответствующим левой акустической волне, является вектор $r(\mathbf{U}) = (1/c^2, -1/(\rho c), 1)$. Тогда с точностью до введения новой переменной для θ получаем систему

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c/\rho \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad c = (\gamma p / \rho)^{1/2}.$$

Отсюда имеем $\rho = \theta$; для давления получаем уравнение $dp/d\rho = \gamma p / \rho$, что эквивалентно $p = c_0^2 \rho^\gamma / \gamma$, где c_0 – некоторый множитель; для скорости получаем

$$\frac{du}{d\rho} = -\frac{c}{\rho} = -\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho^3}} = -c_0 \rho^{(\gamma-3)/2},$$

откуда

$$u(t, x) = u_0 - \frac{2c_0}{\gamma - 1} (\rho(t, x)^{(\gamma-1)/2} - 1). \quad (10.2)$$

Таким образом, решение в виде простой волны записывается в виде $\rho(t, x) = \rho_0(\theta(t, x))$, $p(t, x) = c_0^2(\rho(t, x))^\gamma / \gamma$ и (10.2), где $\theta(t, x)$ подчиняется уравнению (10.1). Это решение справедливо до того момента, пока оно остаётся непрерывным. Заметим, что

$$u(t, x) = \left(u_0 + \frac{2c_0}{\gamma - 1} \right) - \frac{2c_0}{\gamma - 1} \rho(t, x)^{(\gamma-1)/2}, \quad c(t, x) = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = c_0 (\rho(t, x))^{(\gamma-1)/2},$$

$$\lambda(t, x) = u(t, x) - c(t, x) = \left(u_0 + \frac{2c_0}{\gamma - 1} \right) - c_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (\rho(t, x))^{(\gamma-1)/2}.$$

Выберем начальные условия следующим образом:

$$\rho = \begin{cases} [1 + a \exp(-2x^2/(l^2 - x^2))]^{2/(\gamma-1)}, & |x| < l; \\ 1, & |x| \geq l; \end{cases}$$

константы c_0 , u_0 , l , a , а также показатель адиабаты γ задаются.

Полезно определить момент времени, при котором формируется скачок. Он определяется равенством

$$t_* = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{-\partial \lambda / \partial x},$$

где λ – собственное значение, соответствующее рассматриваемой волне. В нашем случае оно равно $u - c$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -c_0 \rho^{(\gamma-3)/2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{2c_0}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} (\rho^{(\gamma-1)/2}),$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = c_0 \frac{\partial}{\partial x} \rho^{(\gamma-1)/2}$$

откуда

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -c_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} \rho^{(\gamma-1)/2}.$$

Инфинум в выражении для t_* достигается в точке, в которой $\partial^2 \lambda / \partial x^2 = 0$ и при этом $\partial \lambda / \partial x < 0$, то есть $\partial \rho / \partial x > 0$, то есть $x < 0$. Запишем условие на точку перегиба у λ .

$$\frac{d^2}{dx^2} [1 + a \exp(-2x^2/(l^2 - x^2))] = 0.$$

Обозначим $y = -2x^2/(l^2 - x^2) = 2 - 2l^2/(l^2 - x^2)$. Тогда $y' = -4xl^2/(l^2 - x^2)^2$ и

$$0 = (e^y)'' = (e^y y')' = e^y ((y')^2 + y'').$$

Сокращая на экспоненту и вычисля производные,

$$\left(\frac{4xl^2}{(l^2 - x^2)^2} \right)^2 - \frac{4l^2}{(l^2 - x^2)^2} - \frac{16x^2 l^2}{(l^2 - x^2)^3} = 0.$$

Домножая на знаменатель, обозначая $z = x/l$ и сокращая на l^6 , получаем

$$16z^2 - 4(1 - 2z^2 + z^4) - 16z^2(1 - z^2) = 0.$$

Приводя подобные слагаемые,

$$3z^4 + 2z^2 - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения $z^2 = -1$ и $z^2 = 1/3$. Первый не подходит. И с учётом $x < 0$ имеем $x = -l/\sqrt{3}$. При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -ac_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} (\exp(-2x^2/(l^2 - x^2))) = \\ &= -ac_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\exp(-2x^2/(l^2 - x^2))) \left(\frac{-4xl^2}{(l^2 - x^2)^2} \right) = -\frac{ac_0}{l} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{3\sqrt{3}}{e}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$t^* = \frac{l}{ac_0} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{e}{3\sqrt{3}}.$$

11 Низкорейнольдсовы течения

11.1 Структура ударной волны (s_ViscShock)

Рассматриваются одномерные стационарные уравнения Навье – Стокса (1.1)–(1.2) при $x \in \mathbb{R}$ (переходом в движущуюся систему отсчёта можно получить решение, зависящее от $x - u_{shock}t$, где $u_{shock} \in \mathbb{R}$ – заданная скорость). Ищутся решения такого вида, что при конечных t при $x \rightarrow -\infty$ выполняется $\rho(x) \rightarrow \rho_L$, $u(x) \rightarrow u_L + u_{shock}$, $p(x) \rightarrow p_L$, а при $x \rightarrow +\infty$ выполняется $\rho(x) \rightarrow \rho_R$, $u(x) \rightarrow u_R + u_{shock}$, $p(x) \rightarrow p_R$. Значения (ρ_L, u_L, p_L) и (ρ_R, u_R, p_R) должны удовлетворять условиям Гюгонио для стационарной волны, иначе решения в указанном виде не существует.

Будем для определённости предполагать, что поток движется слева направо ($u > 0$). Рассматриваются три постановки.

1. Постоянный коэффициент кинематической вязкости ($\nu = const$, $\mu(x) = \nu\rho(x)$), теплопроводность отсутствует ($Pr = \infty$).
2. Постоянный коэффициент кинематической вязкости, $Pr = 3/4$.
3. Постоянный коэффициент динамической вязкости ($\mu = const$), $Pr = 3/4$, при условии, когда коэффициент сжатия на ударной волне равен 2 ($\rho_L = 2\rho_R$).
то есть коэффициент динамической вязкости определяется формулой $\mu(x) = \nu\rho(x)$. Рассматриваются два случая: при отсутствии теплопроводности ($Pr = \infty$) и при $Pr = 3/4$.

Решение задачи 1 приведено в [12] с использованием лагранжевых координат; ниже приведён вывод в эйлеровых координатах. Решение задачи 2 получено в [13]. Решение задачи 3 получено в [14] (там же приведены решения для некоторых других значений коэффициента сжатия, а также для теплопроводного невязкого случая $Pr \rightarrow 0$).

Из системы (1.1)–(1.2) путём зануления производных по времени получаем

$$\rho u = A, \quad (11.1)$$

$$\rho u^2 + p - \frac{4}{3}\rho\nu \frac{du}{dx} = AB, \quad (11.2)$$

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{\rho u^2}{2} - \frac{4}{3}\rho\nu \frac{du}{dx} \right) u - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho\nu}{Pr} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} \right) = AC, \quad (11.3)$$

где A, B, C – некоторые положительные константы (их положительность можно установить по значениям на бесконечности, где производная du/dx равна 0).

11.1.1 Случай отсутствия теплопроводности, $\nu = const$

Выразим из (11.1) и (11.2) ρ и p через u и du/dx :

$$\rho = \frac{A}{u},$$

$$p = A \left(B + \frac{4\nu}{3u} \frac{du}{dx} - u \right).$$

Подставив их в третье уравнение при $\text{Pr} = \infty$, получаем

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(Bu + \frac{4}{3} \nu \frac{du}{dx} - u^2 \right) + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \nu \frac{du}{dx} = C.$$

Приводя подобные слагаемые, получим

$$\frac{4}{3} \frac{\nu}{\gamma-1} \frac{du}{dx} - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} Bu - C = 0 \quad (11.4)$$

Или, иначе,

$$\frac{du}{u^2 - \frac{2\gamma}{\gamma+1} Bu + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} C} = dx \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{4}{3} \nu \right)^{-1} \quad (11.5)$$

Непосредственным вычислением можно показать, что детерминант знаменателя всегда неотрицателен и равен 0 в случае отсутствия скачка:

$$D = \left(\frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{\gamma p}{\rho u^2} \right) \right)^2.$$

Таким образом, левая часть уравнения раскладывается:

$$du \frac{1}{u_L - u_R} \left(\frac{1}{u - u_L} - \frac{1}{u - u_R} \right) = dx \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{4}{3} \nu \right)^{-1},$$

где u_L и u_R – корни квадратного трёхчлена. Легко понять, что эти корни есть предельные значения скорости при $x = \pm\infty$, когда производная скорости по координате должна зануляться. После интегрирования получаем

$$\ln \left| \frac{u - u_L}{u - u_R} \right| = x \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{4}{3} \nu \right)^{-1} (u_L - u_R) + \text{const.}$$

Введём обозначение

$$a = \frac{\gamma+1}{2} \left(\frac{4}{3} \nu \right)^{-1} (u_L - u_R) \quad (11.6)$$

Тогда имеем

$$\frac{u - u_L}{u - u_R} = -\exp(a(x - x_0)).$$

Знак минус выбран исходя из того, чтобы u лежала между u_L и u_R . Выражая из предыдущего равенства u ,

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_L + u_R \exp(a(x - x_0))}{1 + \exp(ax)} = \frac{u_L \exp(-ax/2) + u_R \exp(a(x - x_0)/2)}{\exp(a(x - x_0)/2) + \exp(-a(x - x_0)/2)} = \\ &= \frac{u_L \exp(-a(x - x_0)) + u_R}{\exp(-a(x - x_0)) + 1} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Центральное выражение имеет симметричный вид; выражения по краям удобны в численном счёте, так как не приводят к частному двух стремящихся к бесконечности чисел.

Для вычисления плотности можно использовать формулу $\rho(x) = \rho_L u_L / u(x)$. Далее, для получения давления найдём производную du/dx :

$$\frac{du}{dx} = -a \frac{u_L - u_R}{(\exp(a(x - x_0)/2) + \exp(-a(x - x_0)/2))^2},$$

откуда

$$p = p_L + \rho_L u_L (u_L - u) - \rho \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{u_L - u_R}{\exp(a(x - x_0)/2) + \exp(-a(x - x_0)/2)} \right)^2.$$

11.1.2 Случай $\text{Pr} = 3/4$, $\nu = \text{const}$

При $\text{Pr} = 3/4$ уравнение (11.3) с учётом (11.1) принимает вид

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) A - \frac{4}{3} \rho \nu \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) = AC. \quad (11.8)$$

Решение этого уравнения ограничено при $x \rightarrow \pm\infty$ только если либо $A = 0$ (этот случай не представляет интереса), либо

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = C. \quad (11.9)$$

Подставляя это равенство в (11.2), получаем

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} C + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} u^2 - \frac{4}{3} \nu \frac{du}{dx} = uB.$$

Полностью повторяя вывод из предыдущего примера, получаем профиль скорости (11.7), где

$$a = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{4}{3} \nu \right)^{-1} (u_L - u_R). \quad (11.10)$$

После нахождения скорости плотность выражается формулой $\rho(x) = \rho_L u_L / u(x)$, а давление находится из (11.9).

11.1.3 Случай $\text{Pr} = 3/4$, $\mu = \text{const}$

Параметры скачка выберем так, чтобы $u_R = 2u_L$. Уравнения (11.8) и (11.9) остаются справедливыми. Выражая давление из (11.9) и подставляя в (11.2), получаем

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} C + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} u^2 - \frac{4}{3} \frac{1}{A} \mu u \frac{du}{dx} = uB.$$

Или, иначе,

$$\frac{u du}{u^2 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} Bu + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} C} = dx \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{4}{3} \frac{\mu}{A} \right)^{-1}.$$

Вводя $u = Uu_L$ и $\varkappa = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{4}{3}\frac{\mu}{A}\right)^{-1}$, а также пользуясь тем, что корнями трёхчлена в знаменателе являются u_L и u_R , получаем

$$\varkappa dx = \frac{UdU}{(U-1)(U-2)} = d \ln \frac{(U-2)^2}{U-1}.$$

Интегрируя, получаем квадратное уравнение

$$(U-2)^2 - e^{\varkappa(x-x_0)}(U-2) - e^{\varkappa(x-x_0)} = 0,$$

ограниченное решение которого есть

$$\begin{aligned} u(x) &= u_L \left[2 + \frac{1}{2}e^{\varkappa(x-x_0)} - \frac{1}{2}\sqrt{e^{2\varkappa(x-x_0)} + 4e^{\varkappa(x-x_0)}} \right] = \\ &= u_L \left[2 - 2\frac{e^{\varkappa(x-x_0)}}{e^{\varkappa(x-x_0)} + \sqrt{e^{2\varkappa(x-x_0)} + 4e^{\varkappa(x-x_0)}}} \right] = \\ &= 2u_L \left[\frac{\sqrt{e^{2\varkappa(x-x_0)} + 4e^{\varkappa(x-x_0)}}}{e^{\varkappa(x-x_0)} + \sqrt{e^{2\varkappa(x-x_0)} + 4e^{\varkappa(x-x_0)}}} \right] = 2u_L \left[\frac{\sqrt{1 + 4e^{-\varkappa(x-x_0)}}}{1 + \sqrt{1 + 4e^{-\varkappa(x-x_0)}}} \right]. \end{aligned}$$

Первое выражение удобно при $x < x_0$, последнее – при $x > x_0$.

11.1.4 Случай $\text{Pr} = 3/4$ или $\text{Pr} = \infty$, $\mu = \text{const}$

Рассмотрим систему (11.1)–(11.9) при $\nu \equiv \mu/\rho$, где $\mu = \text{const}$. В общем случае решение этой системы не выписываются в замкнутом виде, но можно свести задачу к решению одного алгебраического уравнения.

Заметим, что в (11.1)–(11.9) коэффициент ν и оператор d/dx входят только вместе. Поэтому сделаем замену переменных $x(\xi)$, определяемую равенствами

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\mu}{\rho}, \quad x(0) = 0. \quad (11.11)$$

После этой замены в (11.1)–(11.9) оператор $\nu d/dx$ заменится на $d/d\xi$. Следовательно, решение полученной системы будет соответствовать случаю постоянного (и равного единице) коэффициента кинематической вязкости ($\nu = 1$).

Таким образом, задача нахождения решения при фиксированном x сводится к нахождению $\xi(x)$, являющейся обратной функцией к решению (11.11). Вначале решим (11.11). И в случае $\text{Pr} = 3/4$, и в случае $\text{Pr} = \infty$ имеем $\rho = A/u$, а $u(\xi)$ задаётся (11.7). Профиль (11.7) определён с точностью до сдвига на x_0 , положим его равным нулю. Тогда

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\mu}{A}u(\xi) = \frac{\mu}{A} \left(u_L + (u_R - u_L) \frac{1}{\exp(-a\xi) + 1} \right).$$

Интегрируя,

$$x(\xi) = \frac{\mu}{A}u_L\xi + \frac{\mu}{A}(u_R - u_L) \int_0^\xi \frac{1}{\exp(-az) + 1} dz.$$

Делая замену переменных $\eta = \exp(-az)$, $d\eta = -a\eta dz$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{1}{\exp(-az) + 1} dz &= -\frac{1}{a} \int_0^{\exp(-a\xi)} \frac{1}{\eta(\eta + 1)} d\eta = -\frac{1}{a} \int_0^{\exp(-a\xi)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta + 1} \right) d\eta = \\ &= -\frac{1}{a} (-a\xi - \ln(1 + \exp(-a\xi)) + \ln 2) = \xi + \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1 + \exp(-a\xi)}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x(\xi) = \frac{\mu}{A} u_R \xi - \frac{\mu}{A} \frac{u_L - u_R}{a} \ln \left(\frac{1 + \exp(-a\xi)}{2} \right).$$

Заметим, что $(u_L - u_R)/a$ равно $3(\gamma + 1)/8$ при $\text{Pr} = \infty$ и $3(\gamma + 1)/(8\gamma)$ при $\text{Pr} = 3/4$.

Нам осталось рассмотреть последнее равенство как уравнение относительно ξ при данном x . Его решение можно найти дихотомическим поиском. Поскольку $dx/d\xi \in [\mu/\rho_{\max}, \mu/\rho_{\min}]$, неравенства

$$\frac{\rho_{\min}}{\mu} x \leq \xi \leq \frac{\rho_{\max}}{\mu} x$$

(для $x > 0$) или в обратную сторону (для $x < 0$) задают начальные пределы для дихотомического поиска.

Для верификации эти точные решения можно использовать двумя способами. Можно задать начальные данные по точному решению и провести численный расчёт до некоторого конечного момента времени. Иначе, можно задать произвольные начальные данные и, выдерживая граничные условия при $x \rightarrow \pm\infty$ проводить расчёт до достижения стационара. В последнем случае точное решение стационарной задачи определяется с точностью до произвольного сдвига x_0 вдоль оси x , поэтому прежде, чем вычислять разницу между численным и точным решением, нужно подобрать значение x_0 , при котором эта разница будет близкой к наименьшей.

11.2 Течение между параллельными плоскостями (s_Couette)

Рассмотрим систему уравнений Навье – Стокса (1.1)–(1.2) с коэффициентом вязкости $\mu = \mu(T)$, где T – температура, определяемая как $T = p/\rho$. Будем искать стационарные решения, зависящие только от x , причём такие, что скорость во всех точках направлена вдоль оси y . Тогда тензор вязких напряжений имеет компоненты $\tau_{xx} = \tau_{yy} = 0$, $\tau_{xy} = \mu dv/dx$; уравнение неразрывности выполняется автоматически; уравнение импульса сводится к системе

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv}{dx} \right) = 0, \quad (11.12)$$

а уравнение энергии принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left[\mu v \frac{dv}{dx} + \frac{\gamma \mu}{\text{Pr}} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right) \right] = 0. \quad (11.13)$$

Зададим на стенках граничные условия прилипания: $v(x_L) = v_L$, $v(x_R) = v_R$ и либо изотермические ($T = T_L$), либо адиабатические ($dT/dx = 0$) условия на температуру. Тип граничных условий на каждой из стенок можно выбирать независимо, однако при $v_L \neq v_R$ задача с двумя адиабатическими стенками не имеет стационарного решения.

Далее штрихом будем обозначать производную по x . Интегрируя (11.12) и (11.13), получаем

$$\mu v' = c_1 / (x_R - x_L), \quad (11.14)$$

$$\mu v v' + \frac{\gamma \mu}{\text{Pr}(\gamma - 1)} T' = \tilde{c}_2 c_1 / (x_R - x_L). \quad (11.15)$$

При $v_L = v_R$ эти уравнения дают $v = \text{const}$ и линейный профиль температуры. Иначе с очевидностью $c_1 \neq 0$. Разделим (11.15) на μ и воспользуемся (11.14). Имеем

$$v v' + \frac{1}{\kappa} T' = \tilde{c}_2 v', \quad \kappa = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \text{Pr}.$$

Интегрируя это уравнение и переобозначая $c_2 = \kappa \tilde{c}_2$, получаем

$$T = -\kappa \frac{v^2}{2} + c_2 v + c_3. \quad (11.16)$$

Если на обеих границах заданы изотермические условия, то константы c_2 и c_3 находятся из системы

$$-\kappa \frac{v_L^2}{2} + c_2 v_L + c_3 = T_L, \quad -\kappa \frac{v_R^2}{2} + c_2 v_R + c_3 = T_R.$$

Если при $x = x_L$ заданы адиабатические условия, то имеем

$$0 = \frac{dT}{dx}(x_L) = (-\kappa v_L + c_2) \frac{dv}{dx}(x_L).$$

Поскольку в силу (11.14) при $v_L \neq v_R$ выполняется $dv/dx \neq 0$, имеем $c_2 = \kappa v_L$. Аналогично, если адиабатическое условие задано при $x = x_R$, то $c_2 = \kappa v_R$. При этом c_3 находится из изотермического условия на второй границе.

Заметим, что минимум температуры на отрезке $[x_L, x_R]$ равен температуре на изотермической стенке, если таковая одна, и $\min\{T_L, T_R\}$, если обе стенки изотермические. В первом случае максимум находится на адиабатической стенке (и производная в этой точке нулевая), а во втором он может находиться как внутри, так и на границе отрезка. В любом случае корни многочлена $T(v)$ лежат вне отрезка с концами v_L и v_R .

Остаётся применить к правой части этого выражения функцию $\mu(T)$ и подставить в (11.14). Если $v_L < v_R$, имеем

$$\int_{v_L}^v \mu \left(-\kappa \frac{v^2}{2} + c_2 v + c_3 \right) dv = c_1 \frac{x - x_L}{x_R - x_L}. \quad (11.17)$$

Константа c_1 равна интегралу в левой части с подстановкой $v = v_R$.

Отметим, что решение не зависит от домножения коэффициента вязкости на постоянный множитель, поскольку в моделируемом процессе отсутствует конвективный перенос. Давление и плотность не могут быть определены однозначно. Если решение вычислять методом установления, то они будут зависеть от начальных условий.

11.2.1 Случай $\mu = \text{const}$

В силу (11.12) скорость является линейной функцией, определяемой из граничного условия:

$$v(x) = \frac{x - x_L}{x_R - x_L} v_R + \frac{x_R - x}{x_R - x_L} v_L.$$

11.2.2 Случай $\mu = \mu_0 T$

Этот случай рассмотрен в [15]. Будем предполагать, что $v_L \neq v_R$. При $v_L = v_R$ приводимые ниже рассуждения неприменимы, а температура линейно зависит от x .

Интеграл в (11.17) берётся, что приводит к алгебраическому уравнению

$$-\frac{\varkappa}{6} v^3 + \frac{c_2}{2} v^2 + c_3 v = \frac{c_1}{\mu_0} x + c_4. \quad (11.18)$$

Константы c_1 и c_4 находятся из условий на скорости при $x = x_L$ и $x = x_R$. Эта система невырождена, поскольку $x_L \neq x_R$. После этого $v(x)$ находится из решения алгебраического уравнения (11.18).

11.2.3 Случай $\mu = \mu_0 / \sqrt{T}$

В предыдущем случае мы исключали из системы уравнений температуру; здесь же, наоборот, удобно исключить скорость. Из (11.14) имеем $(\mu v v')' = c_1 v' = c_1^2 / \mu$. Домножая (11.13) на $\varkappa \mu$, получаем

$$\varkappa c_1^2 + \mu (\mu T')' = 0.$$

Введём новую функцию $\tau(x) = \sqrt{T(x)} = 1/\mu(x)$. Тогда $\mu(\mu \tau \tau')' = -c_1^2 \varkappa / 2$ или, что то же самое, $\tau''(x) + c^2 \tau(x) = 0$, где $c = c_1 \varkappa^{1/2} 2^{-1/2}$. Отсюда получаем решение, которое удобно представить в виде

$$\tau(x) = \tilde{A} \cos(cx) + \tilde{B} \sin(cx), \quad T(x) = (\tau(x))^2,$$

где \tilde{A} , \tilde{B} , c – константы, которые должны быть определены исходя из перепада скоростей между границами и условий на температуру.

Константа c_1 была введена равенством $c_1 = \mu v'$. Отсюда

$$v_R - v_L = \int_{x_L}^{x_R} v'(x) dx = c_1 \int_{x_L}^{x_R} \tau(x) dx = -\frac{c_1}{c^2} \int_{x_L}^{x_R} \tau''(x) dx = \frac{c_1}{c^2} (\tau'(x_L) - \tau'(x_R)).$$

Рассмотрим случай изотермического условия с температурой $T = T_L$ при $x = x_L$ и адиабатического условия $\tau'(x_R) = 0$ при $x = x_R$. Из условий на температуру имеем

$$\tau(x) = \sqrt{T_L} \frac{\cos(c(x_R - x))}{\cos(c(x_R - x_L))}. \quad (11.19)$$

Из условия на перепад скоростей получаем

$$v_R - v_L = \left(\frac{\text{Pr}(\gamma - 1)}{2\gamma} \right)^{-1/2} \sqrt{T_L} \text{tg}(c(x_R - x_L)),$$

откуда

$$c = \frac{1}{(x_R - x_L)} \operatorname{arctg} \left(\frac{v_R - v_L}{\sqrt{T_L}} \left(\frac{\operatorname{Pr}(\gamma - 1)}{2\gamma} \right)^{1/2} \right).$$

Таким образом, решение для температуры выражается формулой $T(x) = \tau^2(x)$, где $\tau(x)$ определено (11.19), а решение для скорости вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} v(x) &= v_R - \int_x^{x_R} v'(x) dx = v_R + \frac{\tilde{c}}{c^2} \int_x^{x_R} \tau''(x) dx = v_R - \frac{\tilde{c}}{c^2} \tau'(x) = \\ &= v_R - \left(\frac{\operatorname{Pr}(\gamma - 1)}{2\gamma} \right)^{-1/2} \sqrt{T_L} \frac{\sin(c(x_R - x))}{\cos(c(x_R - x_L))}. \end{aligned}$$

11.2.4 Случай $\mu = \mu_0 \sqrt{T}$

Нам будет удобно использовать представление $T = c^2(1 - u^2)$, где $u = (v - v_0)/V$. Здесь $v_0 = c_2/\varkappa$ – точка максимума параболы, $V = (v_0^2 + 2c_3/\varkappa)^{1/2}$ – половина расстояния между её нулями, $c = V\sqrt{\varkappa/2}$.

Нам нужно вычислить интеграл

$$I = \int c \left(1 - \left(\frac{v - v_0}{V} \right)^2 \right)^{1/2} dv.$$

Используем замену переменных $v = v_0 + Vu$.

$$I = cV \int (1 - u^2)^{1/2} du = cV \frac{1}{2} \left[\arcsin u + u\sqrt{1 - u^2} \right], \quad u = \frac{v - v_0}{V}.$$

Множитель перед квадратными скобками может быть опущен.

11.2.5 Случай закона Сазерленда

Рассмотрим случай $\mu(T) = \tilde{\mu} T^{3/2}/(T + C)$. Нам нужно вычислить интеграл

$$I = \frac{(T(v))^{3/2}}{T(v) + C} dv = \int (T(v))^{1/2} dV - C \int \frac{(T(v))^{1/2}}{T(v) + C} dV = I_1 - CI_2.$$

Интеграл от первого слагаемого приведён в предыдущем пункте. Рассмотрим интеграл от второго. После замены переменных $v = v_0 + Vu$ получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{c} \int \frac{(1 - u^2)^{1/2}}{(1 - u^2) + C/c^2} V du = \\ &= \frac{V}{c} \left[\arcsin u - \alpha \operatorname{arctg} \left(\alpha \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right], \quad \alpha = \sqrt{\frac{C}{C + c^2}}. \end{aligned}$$

11.3 Течение между концентрическими цилиндрами (s_ConcCyl)

Рассмотрим двумерные уравнения Навье – Стокса (1.1)–(1.2) в кольце $R_{\min} < r < R_{\max}$. При $r = R_{\min}$ зададим условия $u_\phi = \omega_L R_{\min}$ и $\partial T / \partial r = 0$, а при $r = R_{\max}$ – условие $u_\phi = \omega_R R_{\max}$ и $T = T_R$.

Будем искать стационарные решения уравнения Навье – Стокса (1.1)–(1.2), в которых поле скоростей имеет только азимутальную компоненту u_ϕ , причём ρ , u_ϕ и p зависят только от r и не зависят от ϕ , t и z . Коэффициент динамической вязкости μ будем считать постоянным. Тогда уравнение неразрывности выполняется автоматически. Уравнение для радиальной компоненты импульса сводится к

$$\frac{dp(r)}{dr} = \frac{\rho(r)u_\phi^2(r)}{r}. \quad (11.20)$$

Уравнение для азимутальной компоненты импульса имеет вид $\partial(r\tau_{r\phi})/\partial r + \tau_{r\phi} = 0$, где $\tau_{r\phi} = \mu(\nabla_r u_\phi - u_\phi/r)$, что даёт

$$\frac{d^2 u_\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\phi}{dr} - \frac{1}{r^2} u_\phi = 0.$$

Общим решением последнего уравнения является функция $u_\phi(r) = Ar + B/r$. Константы A и B находятся из граничных условий:

$$A = \frac{R_{\max}^2 \omega_R - R_{\min}^2 \omega_L}{R_{\max}^2 - R_{\min}^2}, \quad B = R_{\max}^2 R_{\min}^2 \frac{\omega_R - \omega_L}{R_{\max}^2 - R_{\min}^2}.$$

Уравнение энергии сводится к виду

$$\frac{d}{dr} \left(r\mu \left[u_\phi \frac{du_\phi}{dr} - \frac{u_\phi^2}{r} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)\text{Pr}} \frac{dT}{dr} \right] \right) = 0,$$

где $T = p/\rho$. Имеем

$$\left(u_\phi \frac{du_\phi}{dr} - \frac{u_\phi^2}{r} \right) = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \left(A - \frac{B}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \left(Ar + \frac{B}{r} \right)^2 = -2\frac{AB}{r} - 2\frac{B^2}{r^2}.$$

Таким образом, уравнение энергии сводится к

$$\frac{\gamma}{(\gamma - 1)\text{Pr}} \frac{dT}{dr} = 2\frac{B^2}{r^3} + \frac{C}{r}.$$

Решая это уравнение, получаем общее решение

$$\frac{\gamma}{(\gamma - 1)\text{Pr}} T(r) = -\frac{B^2}{r^2} + C \ln r + D,$$

где константа B известна из граничных условий для скоростей, а константы C и D находятся из граничных условий для температуры.

В частности, если задать адиабатические условия при $r = R_{\min}$ и температуру T_R при $r = R_{\max}$, решение для температуры получается равным

$$T(r) = T_R + B^2 \left(\frac{\gamma}{(\gamma - 1)\text{Pr}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{R_{\max}^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_{\min}^2} \ln \frac{r}{R_{\max}} \right).$$

Плотность и давление в отдельности однозначно не могут быть найдены из решения стационарных уравнений.

12 Течения несжимаемой жидкости

12.1 Безвихревое обтекание цилиндра (s_CurlFreeCylinder)

Рассматриваются стационарные двумерные уравнения динамики несжимаемой жидкости (1.4) во внешности круга $|\mathbf{r}| > r_0$ при отсутствии вязкости:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

На границе круга задаётся условие непротекания: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. На бесконечности задаётся условие однородности потока: $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{u}_\infty$ при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. Будем считать, что поток направлен в положительном направлении вдоль оси x .

Решение этой задачи, удовлетворяющее условию $\text{rot} \mathbf{u} = 0$, ищется методом комплексных потенциалов (см. [16], §50). Комплексный потенциал для течения с циркуляцией Γ задаётся формулой

$$\xi(z) = |\mathbf{u}_\infty| \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Тогда

$$\frac{d\xi}{dz}(z) = |\mathbf{u}_\infty| \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z},$$

и компоненты скорости определяются формулами

$$u_x(x, y) = \text{Re} \left(\frac{d\xi}{dz} \Big|_{z=x+iy} \right), \quad u_y(x, y) = -\text{Im} \left(\frac{d\xi}{dz} \Big|_{z=x+iy} \right).$$

Давление находится при помощи интеграла Бернулли:

$$p(\mathbf{r}) = p_\infty + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_\infty^2 - \mathbf{u}^2(\mathbf{r})). \quad (12.1)$$

Поскольку поля физических величин, определённые приведёнными формулами, являются решением системы (1.4) при любом значении $\Gamma \in \mathbb{R}$, в общем случае заранее невозможно предсказать, течение с какой величиной циркуляции будет приближать стационарное численное решение, получаемое при расчёте до сходимости. Проведение расчёта в области $x^2 + y^2 > r_0^2$, $y > 0$ с граничными условиями непротекания при $y = 0$ может решить эту проблему.

12.2 Безвихревое обтекание сферы (s_PotentialSphere)

Рассматриваются стационарные решения трёхмерных уравнений динамики несжимаемой жидкости (1.4) во внешности сферы $|\mathbf{r}| > r_0$ при отсутствии вязкости. Таким образом, уравнения принимают вид

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

На границе сферы задаётся условие непротекания: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. На бесконечности задаётся условие однородности потока: $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{u}_\infty$ при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. Будем считать, что поток направлен в положительном направлении вдоль оси x .

Решение этой задачи приведено в [16], §73, и [17]. Оно имеет вид

$$u_x(x, y, z) = \frac{3}{2}|\mathbf{u}_\infty| \left(1 - r_0^3 \frac{x^2}{r^5}\right),$$

$$u_y(x, y, z) = -\frac{3}{2}|\mathbf{u}_\infty| r_0^3 \frac{xy}{r^5},$$

$$u_z(x, y, z) = -\frac{3}{2}|\mathbf{u}_\infty| r_0^3 \frac{xz}{r^5},$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Давление находится при помощи интеграла Бернулли (12.1).

12.3 Низкорейнольдсовое обтекание сферы (s_ViscSphere)

Рассматриваются трёхмерные уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости (1.4) во внешности шара ($|\mathbf{r}| > R$). На поверхности шара задаётся условие $\mathbf{u} = 0$; при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ задаётся условие $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_\infty$.

Решение этой задачи приведено в [18], §20 и [17]. Оно имеет вид

$$u_r = |\mathbf{u}_\infty| \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right),$$

$$u_\theta = -|\mathbf{u}_\infty| \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right),$$

где угол θ отсчитывается от направления, сонаправленного с фоновым потоком. Давление вычисляется по формуле

$$p = p_0 - \frac{3}{2}\mu \frac{\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} R.$$

12.4 Задача Блазиуса (s_Blasius)

Рассматриваются уравнения Прандтля

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в области $x > 0, y > 0$. При $y = 0$ задаётся $u = v = 0$, при $x = 0$ задаётся $u = 1, v = 0$.

Из первого уравнения для некоторой функции ψ имеем

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Подставляя во второе уравнение, получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что это уравнение допускает решения вида

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu x} f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu x}}\right),$$

где f – решение уравнения $2f''' + f''f = 0$. Из граничных условий получаем $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(+\infty) = 1$, отсюда f находится однозначно.

Список литературы

1. Guillard H., Viozat C. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit // *Computers and Fluids*. 1999. Vol. 28. P. 63–86.
2. Бахвалов П. А. Численное вычисление решений задач о распаде гауссового импульса и дифракции на углу $2\pi/n$ // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2020. № 3. С. 1–36. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-3>.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. с. 736.
4. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М: Наука, 1966. с. 455.
5. Бахвалов П. А. Интегральное представление решения задачи о дифракции акустического импульса в секторе с углом $2\pi/n$ и его численная аппроксимация // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2020. № 15. С. 1–23. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-15>.
6. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge university press, 1922. p. 804.
7. Kirchhoff G. Über der Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // *Annalen der Physik und Chemie*. 1868. Vol. 134, no. 6. P. 177–193.
8. Бахвалов П. А. Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2017. № 135. С. 1–32. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-135>.
9. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. [и др.]. М: Наука, 1976. с. 400.
10. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М: Наука, 1971. с. 856.
11. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Физматлит, 2001. с. 424.
12. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. с. 592.

13. Becker R. Stosselle und Detonation // Z. Physik. 1922. Vol. 8. P. 321–362.
14. Johnson B. M. Closed-form shock solutions // J. Fluid. Mech. 2014. Vol. 745. p. R1.
15. Illingworth C. R. Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1950. Vol. 46. P. 469–478.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М: Дрофа, 2003. с. 840.
17. Matasuka K. I do like CFD. Vol. 1. 1966. с. 304. URL: <http://www.cfdbooks.com/cfdbooks.html>.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. М.: Физматлит, 2015. с. 728.