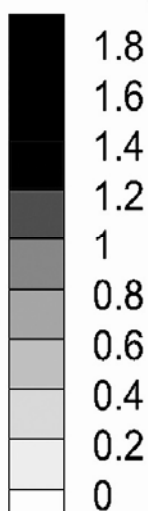


# COLESO

Collection of **Exact Solutions**  
for verification of numerical algorithms  
for simulation of compressible flows

$\rho'$



- lots of solutions of the linearized Euler equations in free space
- diffraction by corner and cylinder
- acoustical boundary layers in a square or cylindrical channel
- 1D Riemann problem
- shock wave profile
- Couette flow with different  $\mu(T)$
- etc.

***Бахвалов П.А.***

**ColESo: библиотека точных решений для верификации методов моделирования сжимаемых течений**

Приводится описание библиотеки ColESo, содержащей более 30 аналитических решений для верификации численных алгоритмов, предназначенных для численного моделирования течений идеального газа. Основу библиотеки составляют решения линеаризованных уравнений Эйлера и Навье – Стокса. Также в неё включены некоторые нелинейные решения, в том числе решение задачи Римана о распаде разрыва.

***Ключевые слова:*** верификация, точное решение, аналитическое решение

***Pavel Alexeevich Bakhvalov***

**ColESo: collection of exact solutions for verification of numerical algorithms for simulation of compressible flows**

The collection of exact solutions (ColESo library) is described. It consists of more than 30 analytical solutions for verification of numerical methods for the simulation of ideal-gas flows. The core of the collection is a set of solutions of linearized Euler and Navier – Stokes equations. Besides, ColESo contains several nonlinear solutions, including the solution of Riemann problem.

***Key words:*** verification, exact solution, analytical solution

## Введение

Чтобы результаты численных расчётов претендовали на достоверность, программа, по которой они получены, должна пройти валидацию, то есть на некотором семействе задач необходимо показать хорошее совпадение своих результатов с достоверными данными, полученными из других источников (например, из натурального эксперимента). Валидационные расчёты, как правило, требуют большого объёма вычислительных ресурсов. Кроме того, валидация, будучи проверкой не только программного кода, но и расчётной методики в целом, может не выявить ошибок в отдельных её фрагментах, например, в аппроксимации тепловых потоков, влияние которых мало при умеренных числах Маха. Поэтому, прежде чем начинать процесс валидации, проводится верификация численного метода и программного кода. Подробнее о верификации и валидации см. в [1].

Верификация имеет две основных цели. Во-первых, это проверка требуемых условий корректности реализации алгоритма. Таковыми, например, могут быть выполнение законов сохранения или условия точности на многочленах заданного порядка. Во-вторых, это оценка точности на модельных задачах. Мерой точности является отличие между получаемым решением и некоторым эталонным решением, близким к точному решению поставленной задачи (предполагается, что оно единственно).

Эталонное решение можно вычислять, используя надёжный численный алгоритм и достаточно мелкую расчётную сетку, но уже в двумерном случае требуемый для этого объём вычислений может стать чрезвычайно большим. Поэтому важную роль играют задачи с решениями, выражающимися формулами в конечном виде. В этом случае точность эталонного решения ограничена только используемой моделью арифметики (обычно используется арифметика двойной точности). Даже если аналитическое решение выражается сходящимся рядом или интегралом, его вычисление с требуемой точностью обычно значительно быстрее, чем получение эталонного решения непосредственным расчётом эволюционных уравнений. Дополнительно отметим, что точное решение может заменять численное при отладке некоторых модулей кода. Таковыми могут быть, например, модуль ввода-вывода или модуль интегрирования по контрольной поверхности для предсказания акустического шума в дальнем поле.

Альтернативой точным решениям заданной системы уравнений является метод искусственных решений (Method of Manufactured Solutions), см., например, [2]. При этом автором произвольно выбирается некоторая гладкая функция пространства и времени, а в уравнение дописывается источниковый член, зависящий от пространства и времени таким образом, чтобы выписанное решение удовлетворяло уравнению. Однако наличие источникового члена может существенно влиять на свойства численного метода, в частности, превышения порядка точности над порядком

аппроксимации и специфики поведения решения в длительном счёте (long-time simulation accuracy). Объяснение этих свойств и небольшой обзор по этому вопросу см. в [3]. Кроме того, искусственные точные решения являются менее наглядными. Всё это делает «классические» точные решения предпочтительными перед искусственными.

Некоторые точные решения, которые стоило бы использовать для верификации численных алгоритмов, являются достаточно громоздкими. Они могут содержать интегралы с особенностями, и их вычисление требует определённой аккуратности. В этом случае специалисту, желающему верифицировать свой численный метод, желательно иметь готовую программу, вычисляющую значения точного решения в заданной точке в заданный момент времени. Но таких программ, как правило, нет в открытом доступе, исключая решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва для идеального газа.

Предлагаемая библиотека ColESo представляет собой набор точных или приближённых решений уравнений Эйлера или Навье – Стокса, использовавшихся автором для верификации комплекса программ NOISEtte и сравнения разных численных методов по точности и вычислительной стоимости. Основой библиотеки являются решения линеаризованных уравнений Эйлера на однородном фоновом поле. Решения могут быть как простыми, вроде плоской акустической волны, так и достаточно сложными, как, например, акустическая волна в прямом круговом цилиндре при наличии вязкости и теплопроводности. Помимо этого, в библиотеку включены и существенно нелинейные решения, в основном, описанные в [2]. Вычисление всех решений программно реализовано на языке C++; имеется интерфейс для подключения библиотеки к программам на языке FORTRAN. Исходный код библиотеки ColESo является открытым и доступен на сервисе Github [4].

Ниже в настоящем препринте собраны постановки задачи и иллюстрации к решениям, реализованным в библиотеке ColESo. В первом разделе приводятся уравнения, к которым эти решения относятся. Основная часть препринта состоит из «картотеки» включенных в библиотеку решений. В каждой «карточке» указывается имя класса, отвечающего за это решение, постановка задачи и некоторые свойства решения, такие как гладкость, поведение на бесконечности<sup>1</sup> и сложность вычисления. Большинство решений снабжено иллюстрациями; генерирующая их программа включена в код библиотеки. В последнем разделе приводятся некоторые особенности программной реализации, общей для всех решений. Математическое описание библиотеки, включающее в себя вывод точных решений, прилагается в виде отдельного документа.

---

<sup>1</sup> Под поведением на бесконечности понимается поведение решения при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  при фиксированном времени

## Решаемые уравнения

В настоящей работе в качестве наиболее общей математической модели рассматриваются уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) + \mathbf{S}(t, \mathbf{r}, \mathbf{Q}), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau \cdot \mathbf{u} - \sigma \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $E = \rho \mathbf{u}^2 / 2 + \rho \varepsilon$  – полная энергия, а  $\varepsilon$  – внутренняя энергия газа, которая для идеального газа определяется как  $\varepsilon = p / ((\gamma - 1)\rho)$ . Источниковый член  $\mathbf{S}(t, \mathbf{r}, \mathbf{Q})$  равен нулю, если не оговорено иное. Тензор вязких напряжений определяется как  $\tau_{ij} = \mu (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - (2/3) \delta_{ij} \nabla_k u_k)$ , где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости. Вектор теплового потока записывается в виде  $\sigma = -\gamma \mu \nabla \varepsilon / \text{Pr}$ , где  $\text{Pr}$  – число Прандтля. Зависимость  $\mu$  от плотности или температуры обговаривается дополнительно.

Уравнения Эйлера получаются из уравнений Навье – Стокса формальным занулением коэффициента вязкости. Если требуется рассматривать разрывные решения, то вместо дифференциального уравнения рассматривается система интегральных уравнений

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{Q} dV + \int_{\partial V} \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{S}(t, \mathbf{r}, \mathbf{Q}) dV, \quad (3)$$

дополненная условием неубывания энтропии. Под  $V$  понимается произвольный объём.

Несколько приведённых ниже решений выводятся в предположении несжимаемости среды. Если положить  $\rho \equiv 1$  вместо уравнения состояния идеального газа, то (2) сводится к

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}.\end{aligned}\quad (4)$$

Подавляющее большинство рассматриваемых ниже решений являются точными решениями линеаризованных уравнений. Понятие линеаризованных уравнений предполагает, что задано некоторое «фоновое» поле  $\bar{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{r})$ , являющееся точным решением (1)–(2). Линеаризованные уравнения Навье – Стокса получаются подстановкой в (1)–(2) выражения  $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \epsilon \mathbf{Q}'$  и пренебрежения членами порядка  $\epsilon^2$ . Для произвольного фонового поля они достаточно громоздки. В простейшем случае  $\bar{\mathbf{Q}}$  не зависит от  $t$  и  $\mathbf{r}$ , то есть является просто стационарным однородным потоком. Если выбрать масштаб плотности и скорости так, чтобы  $\bar{\rho} = 1$ ,  $\bar{p} = 1/\gamma$ , то уравнения Навье – Стокса, линеаризованные на однородном фоновом поле, несложными преобразованиями можно привести к виду

$$\begin{aligned}\frac{d\rho'}{dt} + \nabla_j u'_j &= S'_\rho(t, \mathbf{r}), \\ \frac{du'_i}{dt} + \nabla_i p' &= \mu \left( \Delta u'_i + \frac{1}{3} \nabla_i (\nabla_j u'_j) \right) + S'_{u_i}(t, \mathbf{r}), \\ \frac{d(p' - \rho')}{dt} &= \frac{\mu}{\text{Pr}} \Delta (\gamma p' - \rho') + (S'_p(t, \mathbf{r}) - S'_\rho(t, \mathbf{r})),\end{aligned}\quad (5)$$

где через  $d/dt$  обозначена субстанциональная производная:  
 $d/dt = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)$ , а

$$\mathbf{S}'(t, \mathbf{r}) = \left( S'_\rho, S'_u + \bar{\mathbf{u}} S'_\rho, \frac{S'_p}{\gamma - 1} + \frac{\bar{\mathbf{u}}^2}{2} S'_\rho + \bar{\mathbf{u}} \cdot S'_u \right) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{Q}}(t, \mathbf{r}, \bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{Q}'(t, \mathbf{r}).$$

Уравнения Эйлера допускают линеаризацию на разрывном фоновом поле. В этом случае для получения линеаризованных уравнений требуется аккуратная работа с (3), включающая в себя учёт бесконечно малых колебаний положения разрыва под действием акустической волны.

Если же фоновое поле является непрерывным, линеаризованные уравнения Эйлера получаются из линеаризованных уравнений Навье –

Стокса занулением коэффициента вязкости. В частности, если фоновое поле имеет вид  $\bar{\rho} = 1$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = \text{const}$ ,  $\bar{p} = 1/\gamma$ , они приобретают вид

$$\frac{dp'}{dt} + \text{div} \mathbf{u}' = S'_p(t, \mathbf{r}), \quad \frac{d\mathbf{u}'}{dt} + \nabla p' = S'_u(t, \mathbf{r}), \quad \frac{d}{dt}(p' - \rho') = S'_p(t, \mathbf{r}) - S'_\rho(t, \mathbf{r}). \quad (6)$$

Уравнение для энтропийного возмущения  $(p' - \rho')$  отщепляется и является уравнением переноса со скоростью фонового потока.

Рассмотрим теперь частный случай (6). Пусть энтропийное возмущение отсутствует ( $S'_p(t, \mathbf{r}) \equiv S'_\rho(t, \mathbf{r})$ ,  $p' \equiv \rho'$ ), источник в уравнении для скоростей отсутствует ( $S'_u(t, \mathbf{r}) \equiv 0$ ), а поле скоростей потенциально:  $\mathbf{u}' = \nabla W$ . При этом  $W$  называется волновым потенциалом. Тогда из (6) следует

$$\frac{d^2 W}{dt^2} - \Delta W = -S'_p(t, \mathbf{r}), \quad p' = -\frac{dW}{dt}. \quad (7)$$

В системе отсчёта, связанной с фоновым потоком, (7) превращается в волновое уравнение.

## Простейшие решения, сохраняющие форму начальных данных

### s\_Polynom: одномерный полиномиальный профиль

Класс	s_Polynom
Мат. модель	Линеаризованные уравнения Эйлера / уравнение переноса
Решение	Энтропийная волна, т. е. $u' = p' = 0$ , $\rho'(t, x) = \rho'(0, x - \bar{u}t)$ . $\rho'(0, x)$ – многочлен Чебышёва заданного порядка
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение растёт при $x \rightarrow \infty$
Цель	Проверка равенства нулю аппроксимационной ошибки на многочленах

### s\_4peak: энтропийное возмущение «4 пика»

Класс	s_4peak
Мат. модель	Линеаризованные уравнения Эйлера / уравнение переноса
Решение	Энтропийная волна. $\rho'(0, x)$ задаётся композицией элементарных функций и представлена на рис. 1
Гладкость	Разрывное
Поведение на бесконечности	Решение имеет финитный носитель
Цель	Анализ точности численных методов, предназначенных для решения задач с разрывами. Популярный тест

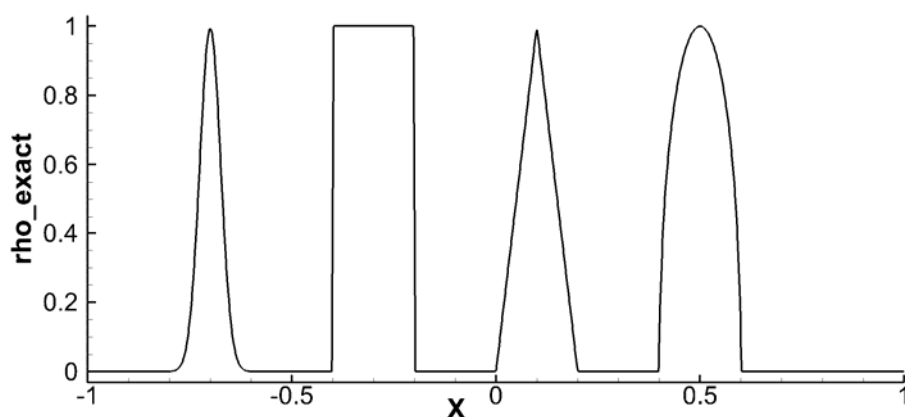


Рис. 1. Начальные данные для задачи о переносе негладкого импульса



**s\_PlanarSinus, s\_PlanarGauss: плоская акустическая волна**

Класс	s_PlanarSinus, s_PlanarGauss
Мат. модель	Волновое уравнение (возможен фоновый поток)
Решение	<p>Плоская акустическая волна</p> $\begin{pmatrix} \rho' \\ \mathbf{u}' \\ p' \end{pmatrix} = f(\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{u}}t) - \bar{c}t) \begin{pmatrix} 1 / \bar{c}^2 \\ \mathbf{e} / (\bar{\rho} \bar{c}) \\ 1 \end{pmatrix},$ <p>где <math>\mathbf{e}</math> – единичный вектор. Допускаются два профиля волны: синусоидальный и гауссовый, см. рис. 2. В первом случае <math>f(x) = A \sin(2\pi\nu x)</math> или <math>f(x) = A \sin(2\pi\nu x) \Theta(x)</math>. Во втором случае <math>f(x) = A \exp(-(\ln 2)x^2 / b^2)</math> или представляет собой решётку таких импульсов. На рис. 3 изображено решение в случае, когда нормаль <math>\mathbf{e}</math> к волновому фронту лежит под углом к осям координат</p>
Цель	Простейшая задача для верификации. Как и большинство гладких решений линеаризованных уравнений, подходит для верификации высокоточных численных методов моделирования сжимаемых течений. В то же время, s_PlanarSinus допускает и негладкие решения.

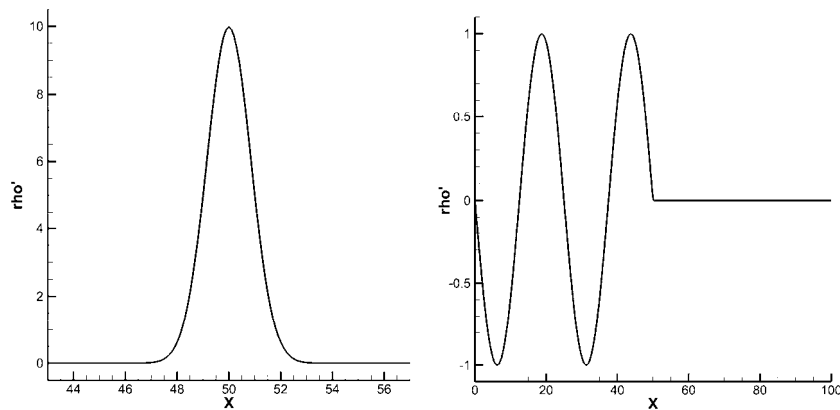


Рис. 2. Гауссовый и синусоидальный профили возмущения

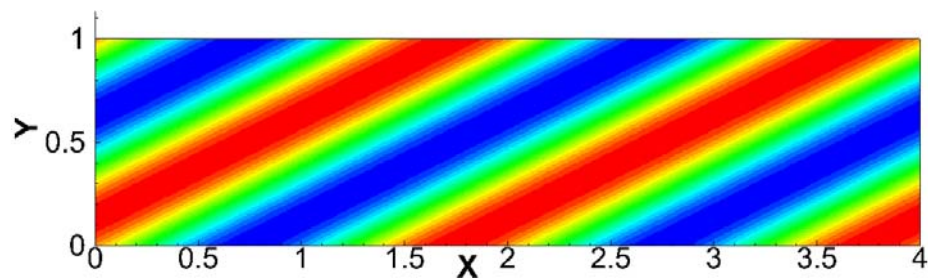


Рис. 3. Плоская волна с волновым фронтом, расположенным под углом к осям координат

**s\_EntropyVortex: энтропийное и вихревое возмущения**

Класс	s_EntropyVortex
Мат. модель	Линеаризованные уравнения Эйлера
Область определения	$t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка задачи	Решение содержит только вихревую и энтропийную компоненты. В начальный момент времени задаётся $\rho' = A_2 \exp(-(\ln 2)(x^2 + y^2) / b^2)$ , $p' = 0$ , и $\mathbf{u}' = \text{rot}(0, 0, Q)^T$ , где $Q(x, y) = A_1 \exp(-(\ln 2)(x^2 + y^2) / b^2)$ , см. рис. 4. Возмущение переносится фоновым потоком без искажений.
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Цель	Простейшая задача для верификации

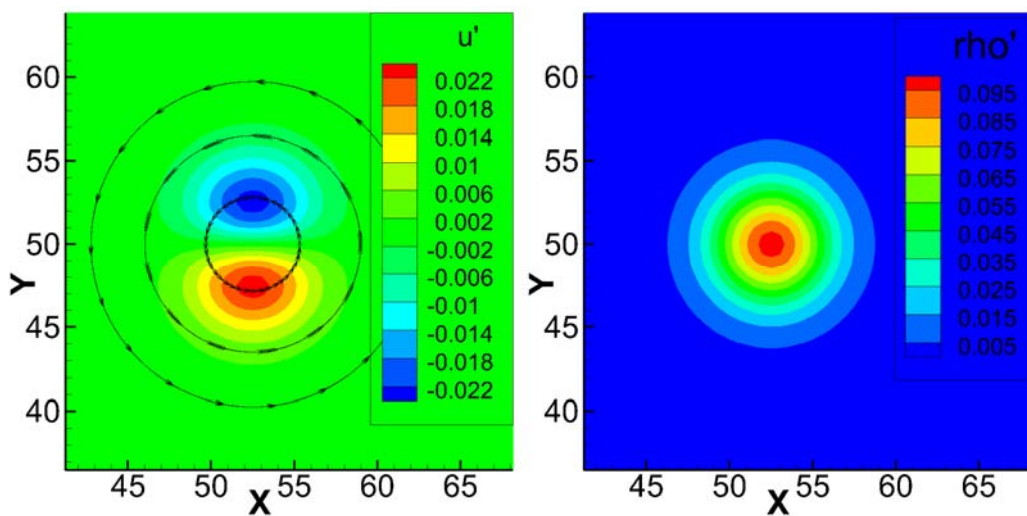


Рис. 4. Решение задачи о переносе однородным потоком вихревого возмущения (слева) и энтропийного возмущения (справа)

## Линейные одномерные задачи

### s\_Source1D: одномерная задача с источником

Класс	s_Source1D
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t > 0, x \in \mathbb{R}$
Постановка	Нулевые начальные условия, источник $S'_p(t, x) = f(x)g(t)$ . Пространственная зависимость допускается в виде гауссиана или $f(x) = \cos^2(\pi x / (2b)) \Theta(b - x)$ ; зависимость от времени – в виде $g(t) = \sin^p(2\pi ft) \Theta(t_{\max} - t) \Theta(t - t_{\min})$ , где $p = 1$ или $p = 4$
Гладкость	Возможны варианты
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $x \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Требуется вычисления интеграла

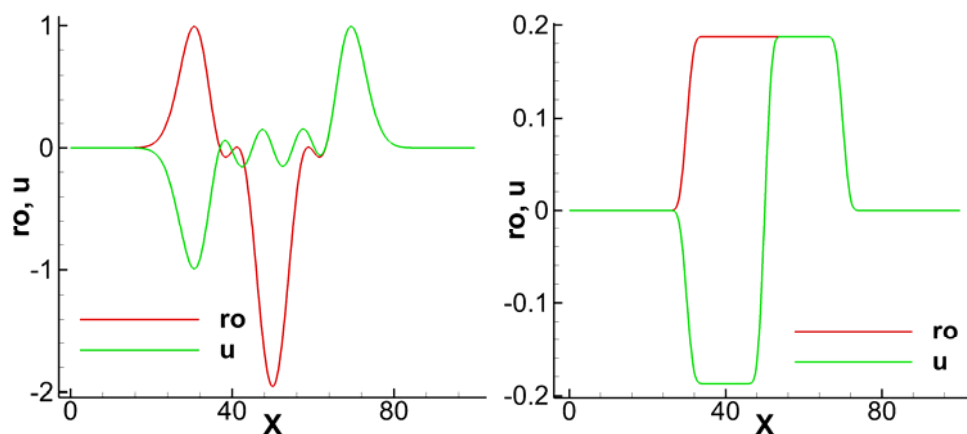


Рис. 5. Решение одномерной задачи с источником.  
Слева: постановка 1, справа: постановка 2

### **s\_PlanarAcousticShock: прохождение акустической волны через фронт ударной**

Класс	s_PlanarAcousticShock
Мат. модель	Линеаризованные уравнения Эйлера на разрывном фоновом поле
Область определения	$t > 0, x \in \mathbb{R}$
Постановка	Фоновое поле является стационарной ударной волной, расположенной в точке $X_0$ . В областях $x > X_0$ и $x < X_0$ решаются линеаризованные уравнения Эйлера; при $x = X_0$ решения связываются линеаризованными условиями Гюгонио. Условия при $x = X_0$ учитывают пульсации скорости ударной волны. Начальные условия задаются в виде правой акустической волны с профилем в форме гауссиана, расположенной в сверхзвуковой области.
Гладкость	Разрывное в месте разрыва фонового поля
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $x \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Анализ точности методов решения задач газовой динамики с разрывами (решение этой задачи предполагается в рамках полных уравнений Эйлера)
Примечание	При решении этой задачи в рамках полных уравнений Эйлера энтропийный пик воспроизводится неверно большинством численных методов до тех пор, пока шаг сетки не становится достаточно малым для отслеживания смещения фронта ударной волны, вызываемого действием акустической волны

Решение задачи для плотности приведено на рис. 6. Разными цветами отмечено решение на разные моменты времени. Малый пик зелёного цвета соответствует энтропийной волне.

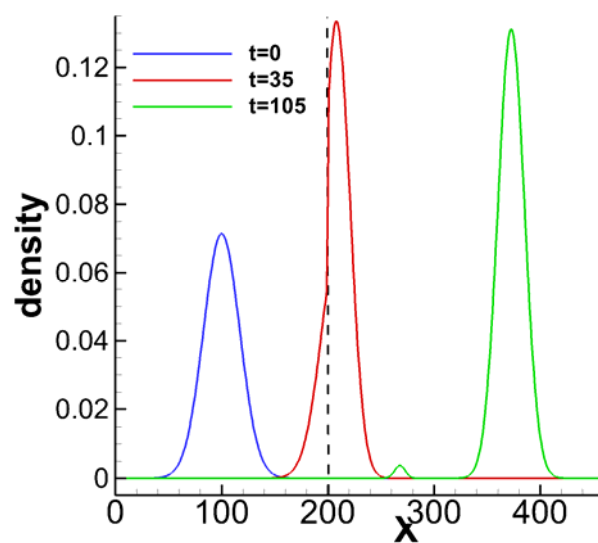


Рис. 6. Решение задачи о проходе акустической волны через фронт ударной

## Линейные двумерные осесимметрические задачи

### s\_Gaussian2D: задача с начальными данными в форме гауссиана

Класс	s_Gaussian2D
Мат. модель	Волновое уравнение (возможен фоновый поток)
Область определения	$t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка	Начальные данные задаются в форме гауссиана $\rho'(0, r) = p'(0, r) = \exp(-\ln 2 (r / b)^2)$ , $\mathbf{u}'(0, r) = 0$ . Допускается задание решётки импульсов указанного вида, что соответствует постановке периодических граничных условий
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Решение вычисляется разными способами в зависимости от соотношения между временем, расстоянием до центра импульса и его полушириной
Цель	Популярный тест для высокоточных методов

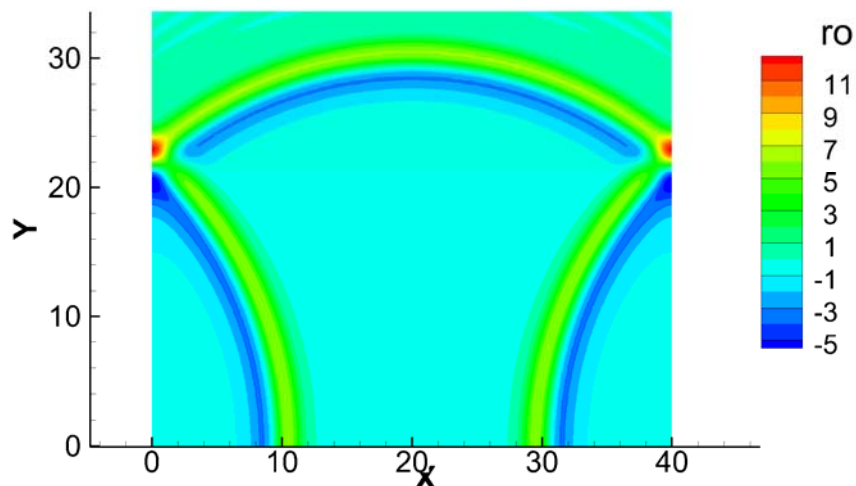


Рис. 7. Решение двумерной задачи о распаде одномерной решётки импульсов. При  $y = 0$  задано условие симметрии

**s\_IVP2D: распространение волны от финитного импульса произвольной формы**

Класс	s_IVP2D
Мат. модель	Волновое уравнение (возможен фоновый поток)
Область определения	$t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка	Начальные данные задаются в виде осесимметричного импульса: $\rho'(0, r) = p'(0, r) = f(r)$ , $\mathbf{u}'(0, r) = 0$ . $f(r)$ полагается либо гауссианом (тогда решение совпадает с s_Gaussian2D), либо равной $f(r) = \cos^2(\pi r / (2b)) \Theta(b - r)$ . Допускается задание решётки импульсов, что соответствует постановке периодических граничных условий.
Гладкость	Ограниченная гладкость или бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Решение вычисляется в виде свёртки функции $f$ с фундаментальным решением волнового уравнения (требуется вычисление двумерного интеграла)

**s\_Source2D: протяжённый источник**

Класс	s_Source2D
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t \in \mathbb{R}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка	Задаётся источник в виде $S'_p(t, \mathbf{r}) = f( \mathbf{r} ) \sin(\omega t)$ , действующий при $t \in (-\infty, \infty)$ , и условие излучения на бесконечности. $f$ имеет вид гауссиана. На практике начальные данные задаются по точному решению при $t = 0$
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Требуется вычисление интеграла
Цель	Решение приводится для полноты изложения. Оно плохо подходит для верификации численных методов из-за сильного влияния отражения волн от внешней границы расчётной области

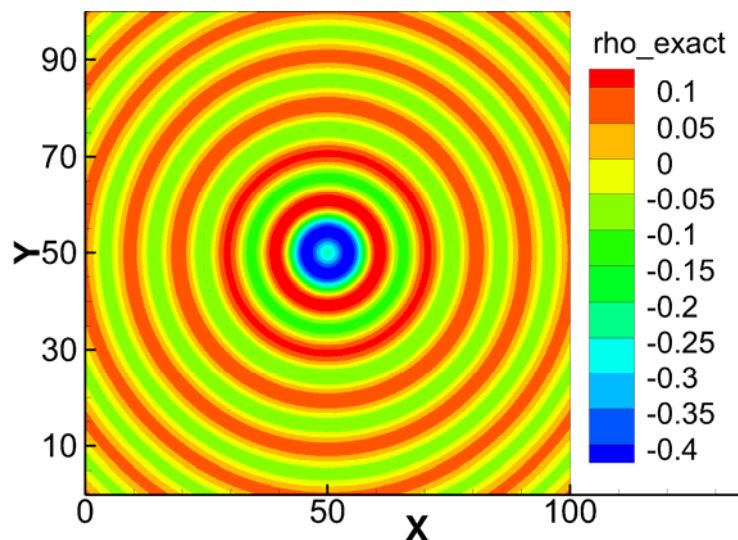


Рис. 8. Распространение волны от двумерного источника



## Линейные трёхмерные задачи в свободном пространстве

### s\_Gaussian3D: задача с начальными данными в форме гауссиана

Класс	s_Gaussian3D
Мат. модель	Волновое уравнение (возможен фоновый поток)
Область определения	$t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$
Постановка	Начальные данные задаются в форме гауссиана $\rho'(0, r) = p'(0, r) = \exp(-\ln 2 (r / b)^2), \quad \mathbf{u}'(0, r) = 0.$ Допускается задание решётки импульсов указанного вида, что соответствует постановке периодических граничных условий
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций (в отличие от аналогичной двумерной задачи)
Цель	Может использоваться для верификации как высокоточных методов, так и моделей предсказания шума в дальнем поле

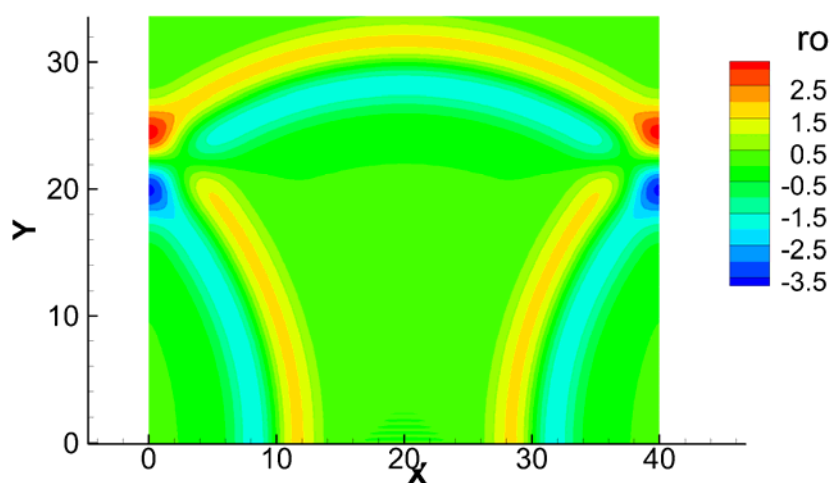


Рис. 9. Решение задачи о волне от последовательности импульсов в 3D

**s\_Source3D: задача с протяжённым источником**

Класс	s_Source3D
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$
Постановка	Нулевые начальные условия, источник $S'_p(t, r) = f(r)g(t)$ . Пространственная зависимость допускается в виде гауссиана или $f(r) = \cos^2(\pi r / (2b)) \Theta(b - r)$ ; зависимость от времени – в виде $g(t) = \sin^p(2\pi f t) \Theta(t_{\max} - t) \Theta(t - t_{\min})$ , где $p = 1$ или $p = 4$
Гладкость	Возможны варианты
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Требуется вычисление интеграла.
Цель	Может использоваться для верификации как высокоточных методов, так и моделей предсказания шума в дальнем поле

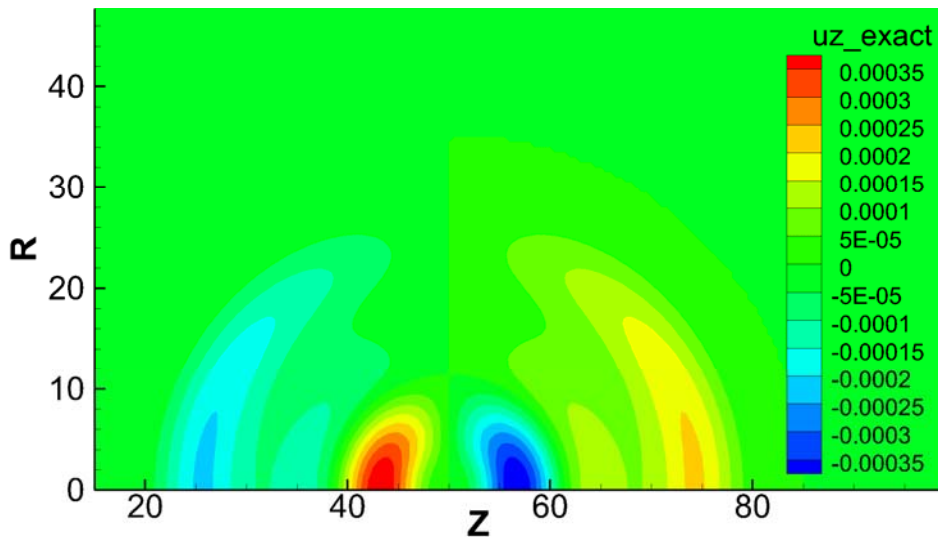


Рис. 10. Решение трёхмерной задачи с протяжённым источником для одной из компонент скорости

**s\_PointSource: движущийся точечный источник**

Класс	s_PointSource
Мат. модель	Волновое уравнение (возможен фоновый поток)
Область определения	$t > t_{\min}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$
Постановка	Задаётся источник в виде $S'_p(t, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})g(t)$ . Функция $g(t)$ задаётся в виде $g(t) = \sin^p(2\pi ft) \Theta(t_{\max} - t) \Theta(t - t_{\min})$ , где $p = 1$ или $p = 4$ . При $t = t_{\min}$ решение нулевое. Если $t_{\min}$ меньше момента начала счёта, то начальные данные нужно задавать по точному решению
Гладкость	В начале координат при $t_{\min} < t < t_{\max}$ у решения имеется особенность; вне окрестности начала координат решение ограниченное. Однако если положить $t_{\max} \leq 0$ , то на протяжении численного расчёта особенностей у решения не будет. В этом случае гладкость решения определяется гладкостью $g(t)$
Поведение на бесконечности	Решение имеет финитный носитель
Вычисление решения	Композиция элементарных функций.
Цель	Верификация моделей предсказания шума в дальнем поле. Также может использоваться для верификации высокоточных методов

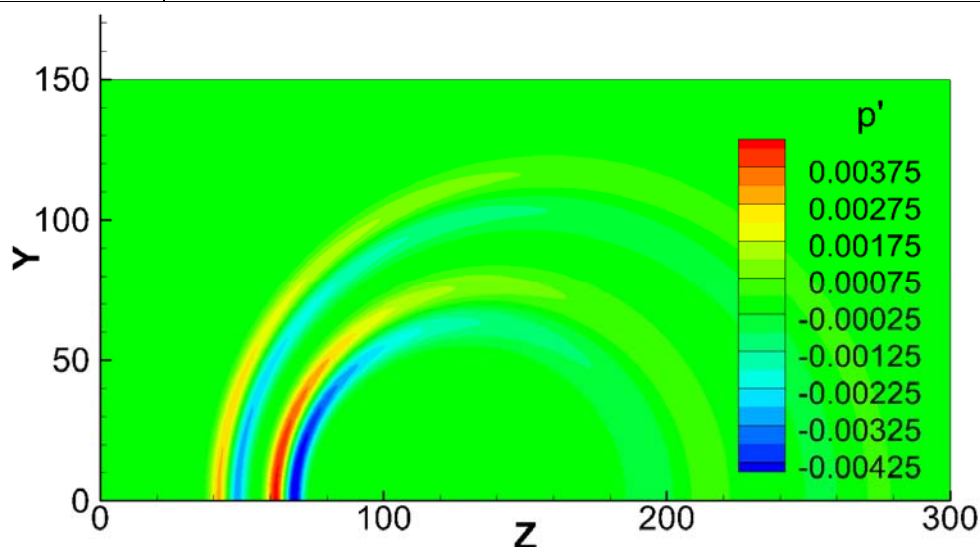


Рис. 11. Решение трёхмерной задачи с точечным источником

**s\_RotatingDipole: вращающийся диполь**

Класс	s_PointSource
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t \in \mathbb{R}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$
Постановка	Задаётся источник в виде $S'_p(t, \mathbf{r}) = -4\pi \nabla \delta(\mathbf{r}) \cdot (\Omega_{\omega t} \mathbf{e})$ , где $\mathbf{e}$ – некоторый вектор, а $\Omega_{\omega t}$ – оператор поворота на угол $ \omega t $ вокруг оси $\omega/ \omega $ . На бесконечности задаётся условие излучения
Гладкость	Решение имеет особенность в начале координат
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Решение	Решение для волнового потенциала имеет вид [5] $W(t, \mathbf{r}) = -\text{Re} \left[ \exp(i\omega t) (1 - i\omega  \mathbf{r} ) \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{e} - i\mathbf{e}')}{ \mathbf{r} ^3} \right],$ где $\mathbf{e}' = [\omega \times \mathbf{e}] /  \omega $
Цель	Верификация моделей предсказания шума в дальнем поле, в частности, тонального шума винтов

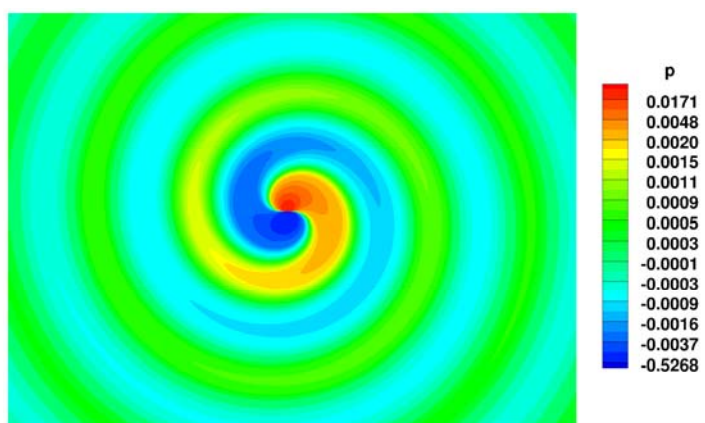


Рис. 12. Решение задачи о вращающемся дипольном источнике в плоскости, проходящем через диполь и перпендикулярном его оси

**s\_Coaxial: волна между концентрическими цилиндрами**

Класс	s_Coaxial
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t > 0$ , пространственная область задаётся в цилиндрических координатах условием $r_{\min} < r < r_{\max}$
Постановка	На стенках цилиндра задаётся условие 2-го рода. Допускается случай $r_{\min} = 0$ , тогда при $r = 0$ ставится условие ограниченности решения. Ищется решение в виде одной моды, то есть пульсации плотности, давления и цилиндрических компонент скоростей имеют вид $f(r)\exp(ik_z z + iv\phi + i\omega t)$ . Осевое волновое число $k_z$ и азимутальное волновое число $v$ задаются, а частота $\omega$ находится из дисперсионного соотношения
Гладкость	Бесконечно гладкое
Финитность носителя	Область определения ограниченная с учётом периодических условий по $z$
Вычисление решения	Композиция элементарных и цилиндрических функций
Примечание	При $r = 0$ решение становится частным случаем s_ViscAcCylinder, если в последнем положить коэффициенты вязкости и теплопроводности равными нулю

Решение для трёх постановок задач приведено на рис. 13. В первой постановке использовалась нулевая радиальная мода, в последних двух – вторая. На рисунке 13 (с) изображена сумма двух решений, полученных с противоположными значениями  $k_z$ .

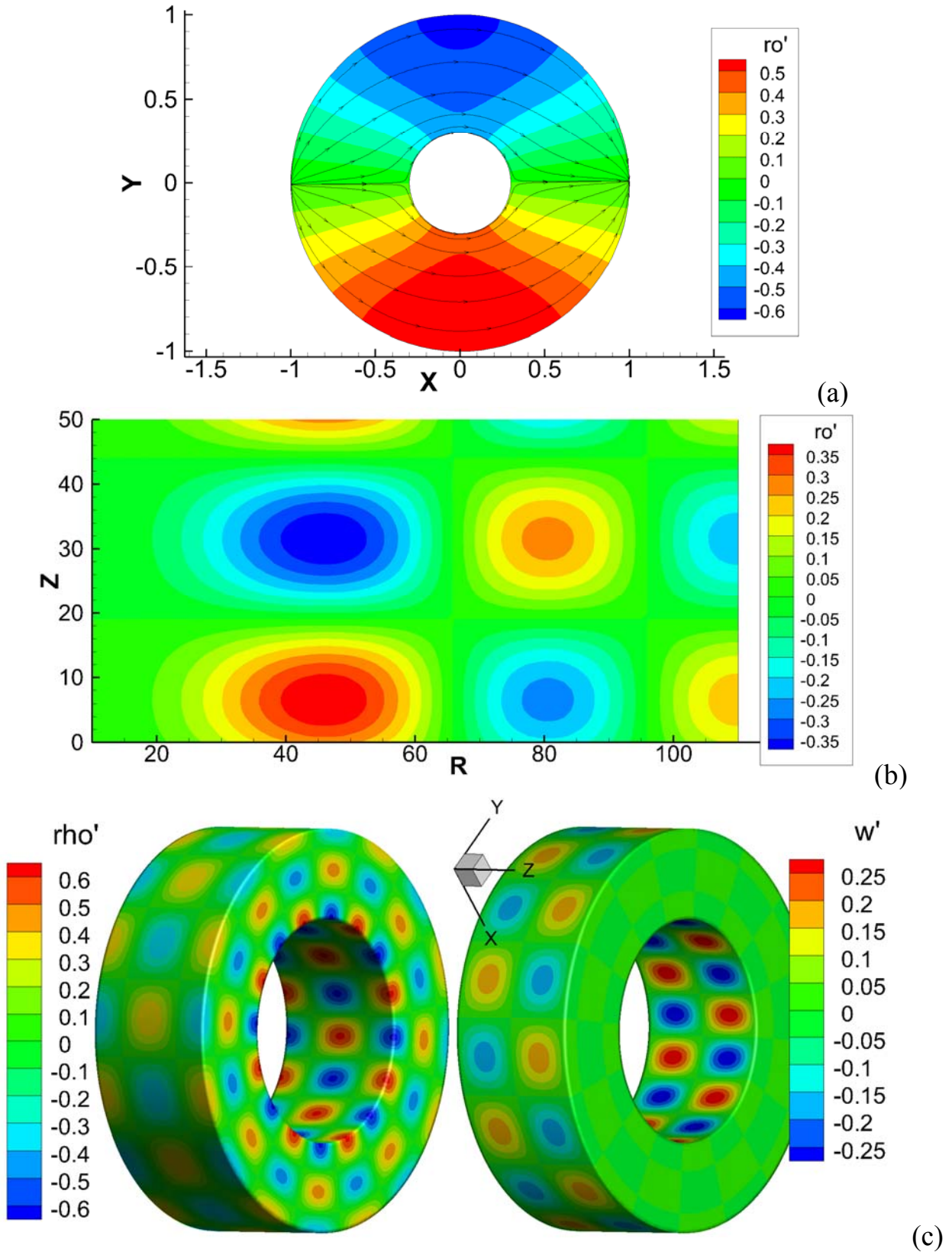


Рис. 13. Решение задачи о волне между концентрическими цилиндрами.  
 (a):  $k_z = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $r_{\min} = 0.3$ ,  $r_{\max} = 1$ ; (b):  $k_z = \pi/25$ ,  $\nu = 4$ ,  $r_{\min} = 10$ ,  $r_{\max} = 110$ ;  
 (c): сумма двух решений с  $k_z = \pm 3\pi$ ,  $\nu = 8$ ,  $r_{\min} = 5/9$ ,  $r_{\max} = 1$ .

## Задачи дифракции

### s\_Corner: дифракция на угле $2\pi/n$

Класс	s_Corner
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t > 0$ , двумерный сектор с углом $2\pi/n$ , где $n$ натуральное. При $n = 1$ областью является плоскость с разрезом
Постановка	На границе сектора задаётся условие непротекания. Начальные данные задаются в виде гауссиана: $\rho'(0, \mathbf{r}) = p'(0, \mathbf{r}) = \exp(-\ln 2 ( \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 /b)^2)$ , $\mathbf{u}'(0, \mathbf{r}) = 0$ . Предполагается, что носитель начальных данных (определяемый с машинной точностью) не пересекает полупрямую, то есть на полупрямой выполняется $\rho'(0, \mathbf{r}) \approx 0$ .
Гладкость	Бесконечно гладкое в любой замкнутой области, не содержащей вершину полупрямой. В вершине полупрямой при $n > 1$ решение непрерывно (показатель гладкости зависит от $n$ ), а при $n = 1$ имеется коренная особенность по скоростям
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Решение задачи вычисляется как свёртка функции Грина для оператора волнового уравнения с данными граничными условиями с профилем начальных данных. Требуется вычисление двумерного интеграла

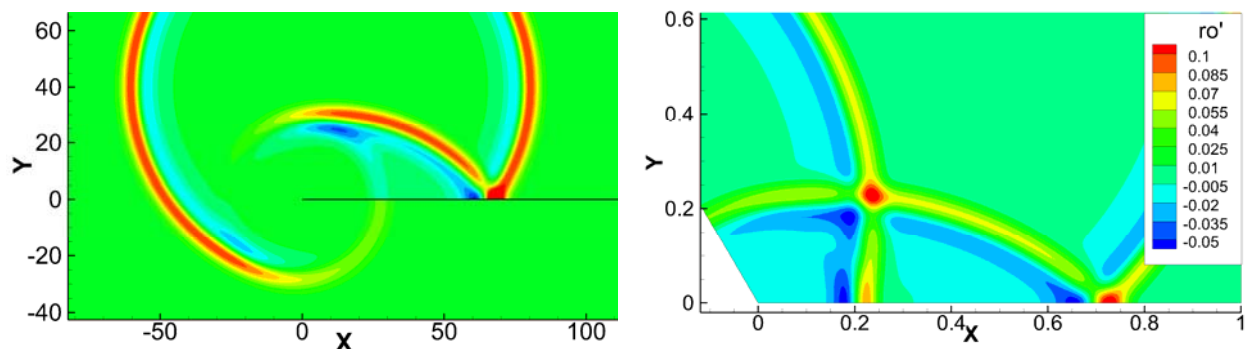


Рис. 14. Решение задачи о дифракции волны от импульса в форме гауссиана. Слева: дифракция на полупрямой ( $n = 1$ ), справа: дифракция на угле ( $n = 3$ )



**s\_CornerPlanar: задача плоской волны на угле  $2\pi/n$** 

Класс	s_CornerPlanar
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t > 0$ , сектор с углом $2\pi/n$ , где $n$ натуральное. При $n = 1$ областью является плоскость с разрезом
Постановка	На границе сектора задаётся условие непротекания. Начальные данные представляют собой плоскую волну с профилем в виде гауссиана, возможно, отражённую от стенок угла. Ввиду сложности перечисления всех отражений удобно задавать начальные данные по точному решению
Гладкость	Бесконечно гладкое в любой замкнутой области, не содержащей вершину полупрямой. В вершине полупрямой при $n > 1$ решение непрерывно, а при $n = 1$ имеется коренная особенность по скоростям
Поведение на бесконечности	Решение <b>не</b> убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Требуется вычисление интеграла (одномерного, в отличие от s_Corner)

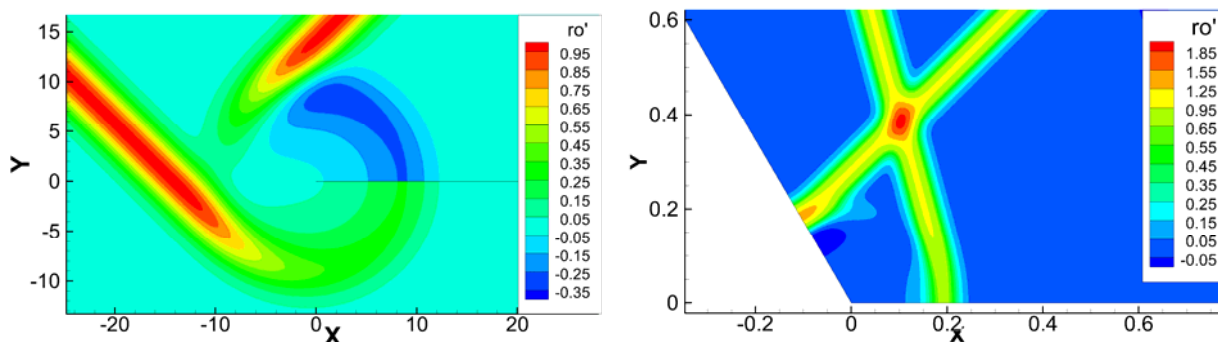


Рис. 15. Решение задачи о дифракции плоской волны с гауссовым профилем.  
 Слева: дифракция на полупрямой ( $n = 1$ ), справа: дифракция на угле ( $n = 3$ )



**s\_Cylinder: дифракция на цилиндре**

Класс	s_Cylinder
Мат. модель	Волновое уравнение
Область определения	$t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2,  \mathbf{r}  > R$
Постановка	Начальные данные задаются в форме гауссиана: $\rho'(0, \mathbf{r}) = p'(0, \mathbf{r}) = \exp(-\ln 2 ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / b)^2)$ , $u'(0, r) = 0$ . Предполагается, что при $ \mathbf{r}  = R$ эта функция пренебрежимо мала. На границе цилиндра задаётся условие непротекания
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение быстро убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Решение ищется в виде разложения по собственным функциям и представляет собой ряд по угловому числу и интеграл по радиальному волновому числу. Его вычисление может быть трудоёмким. Из-за погрешности вычисления функций Бесселя высокого порядка можно рассчитывать на 5 верных значащих цифр
Примечание	Эта задача была предложена в [6], однако приведённое в этой работе решение ошибочно

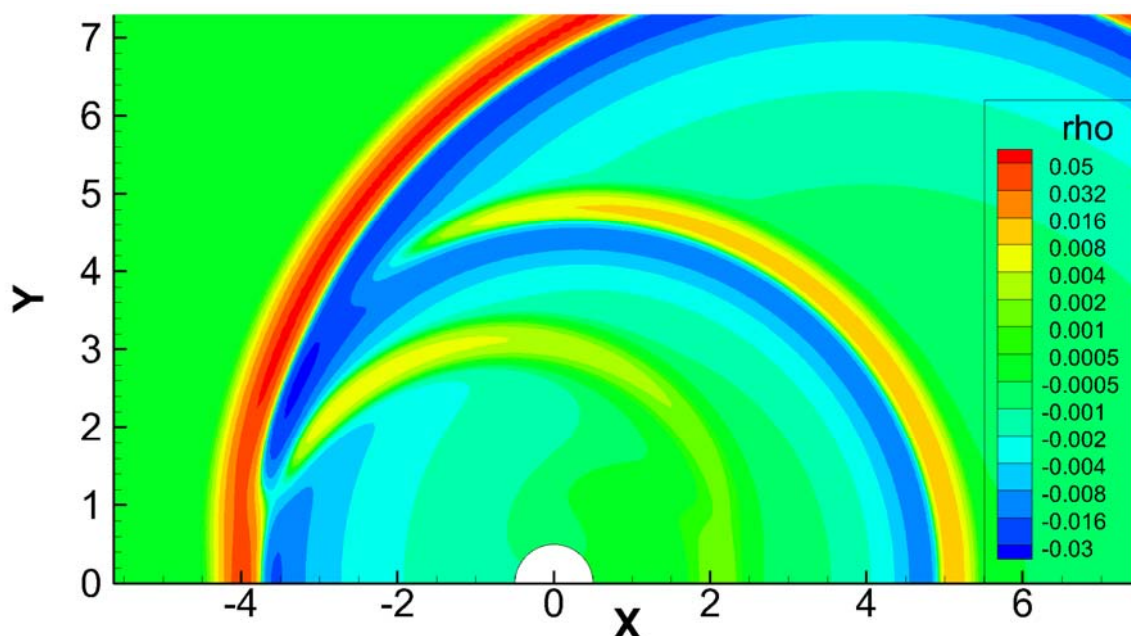


Рис. 16. Решение задачи о дифракции волны от начального импульса на цилиндре

## Линейные возмущения с вязкостью

### s\_SinusVisc: простая волна в свободном пространстве

Класс	s_SinusVisc
Мат. модель	Линеаризованные уравнения Навье – Стокса
Область определения	$t \in \mathbb{R}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ (фактически решение зависит от одной переменной)
Постановка	Ищется решение, в котором пульсации физических переменных зависят от координат как $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . а) Нетеплопроводный случай. Решение складывается из потенциальной и вихревой составляющей, амплитуды которых задаются независимо. Скорость затухания обеих составляющих находится из уравнения. б) Теплопроводный случай. Рассматривается только потенциальная компонента
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение периодическое
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Верификация аппроксимации вязких и теплопроводных потоков (простейшее решение LNSE)
Примечание	Решение допускает 1D и 2D постановки, а при отсутствии вязкости и теплопроводности совпадает с решением s_PlanarSinus.

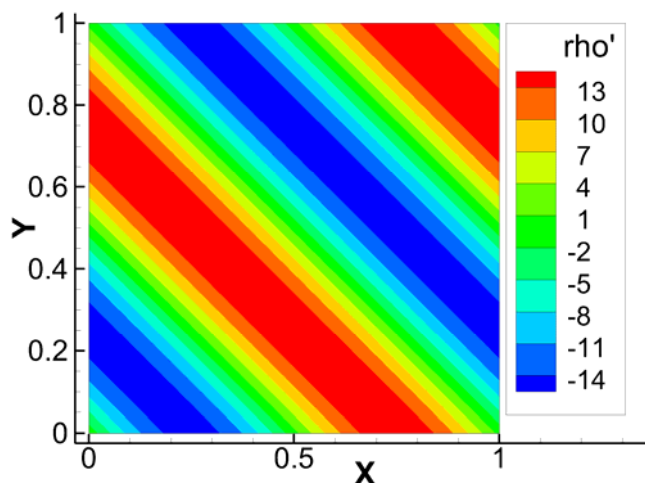


Рис. 17. Ячейка периодичности для простой волны

**s\_VortexInCylinder: вихревое возмущение в круге**

Класс	s_VortexInCylinder
Мат. модель	Линеаризованные уравнения Навье – Стокса при отсутствии теплопроводности
Область определения	$t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2,  \mathbf{r}  < R$
Постановка	На границе круга задаётся условие прилипания. Начальные данные задаются функцией $u_\phi(r) = f(r/R)$ , где $f$ – непрерывная функция, такая что $f(0) = f(1) = 0$ ; пульсации радиальной скорости, плотности и давления полагаются равными нулю
Гладкость	Бесконечно гладкое начиная с любого бесконечно малого момента времени, если вязкость отлична от нуля
Вычисление решения	Решение ищется в виде ряда по собственным функциям
Примечание	В невязком случае решение является стационарным

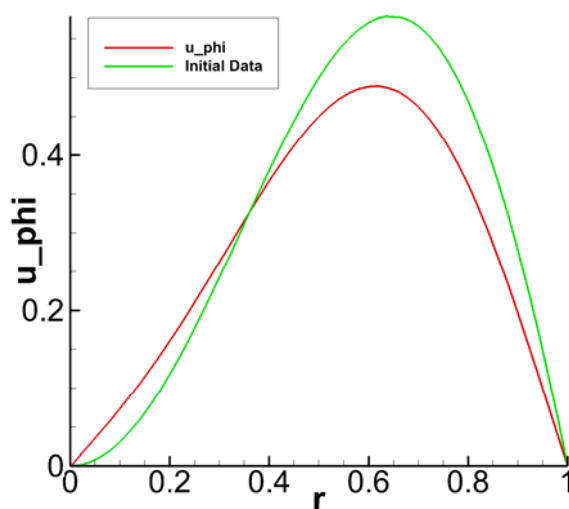


Рис. 18. Профиль азимутальной скорости на моменты времени  $t = 1$  в сравнении с начальным профилем  $f(x) = x \sin(\pi x)$  в задаче о вихре в круге

**s\_WaveInChannel: волна в плоском или круглом канале**

Класс	s_PlanarSinusVisc
Мат. модель	Линеаризованные уравнения Навье – Стокса
Область определения	а) $t \in \mathbb{R}, \mathbf{r} \in \mathbb{R} \times [y_{\min}, y_{\max}]$ ; б) $t \in \mathbb{R}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 < R^2$
Постановка	<p>На границе канала задаётся условие прилипания, а при наличии теплопроводности – дополнительно равенство нулю пульсации температуры.</p> <p>а) Ищется решение, такое что пульсации плотности, давления и скоростей имеют вид <math>f(y)\exp(ik_x x + i\omega t)</math>. Осевое (<math>k_x</math>) волновое число задаётся.</p> <p>б) Ищется решение, такое что пульсации плотности, давления и цилиндрических компонент скоростей имеют вид <math>f(r)\exp(ik_z z + i\nu\phi + i\omega t)</math>. Осевое (<math>k_z</math>) и угловое волновые числа задаются</p>
Гладкость	Бесконечно гладкое
Вычисление решения	<p>а) композиция элементарных функций;</p> <p>б) композиция элементарных и цилиндрических функций. Основная сложность заключается в определении <math>\omega \in \mathbb{C}</math> из решения нелинейного алгебраического уравнения на этапе инициализации. При большой вязкости найденное значение может не соответствовать запрошенной радиальной моде. Если в результате итерационного процесса <math>\omega</math> приближается к мнимой оси, поиск <math>\omega</math> обычно завершается аварийным остановом. Если частота успешно находится, то решение удовлетворяет уравнениям (5)</p>
Цель	Верификация методов расчёта высокорейнольдсовых течений. При малой вязкости решение этих задач имеет большие градиенты в пограничном слое по скорости и/или температуре. Решение (б) особенно полезно для методов, основанных на использовании криволинейных элементов.
Примечание	<p>Допускаются случаи <math>k_x = 0</math> (с понижением размерности задачи), невязкая и/или нетеплопроводная постановки. Если коэффициенты вязкости и теплопроводности достаточно малы, решение задачи (б) близко к стационарному в системе, вращающейся со скоростью <math>\Omega = -\text{Re}\omega / \nu</math>. Впервые решение получено Г. Кирхгоффом в [7]; детали численной реализации решения описаны в [8]</p>

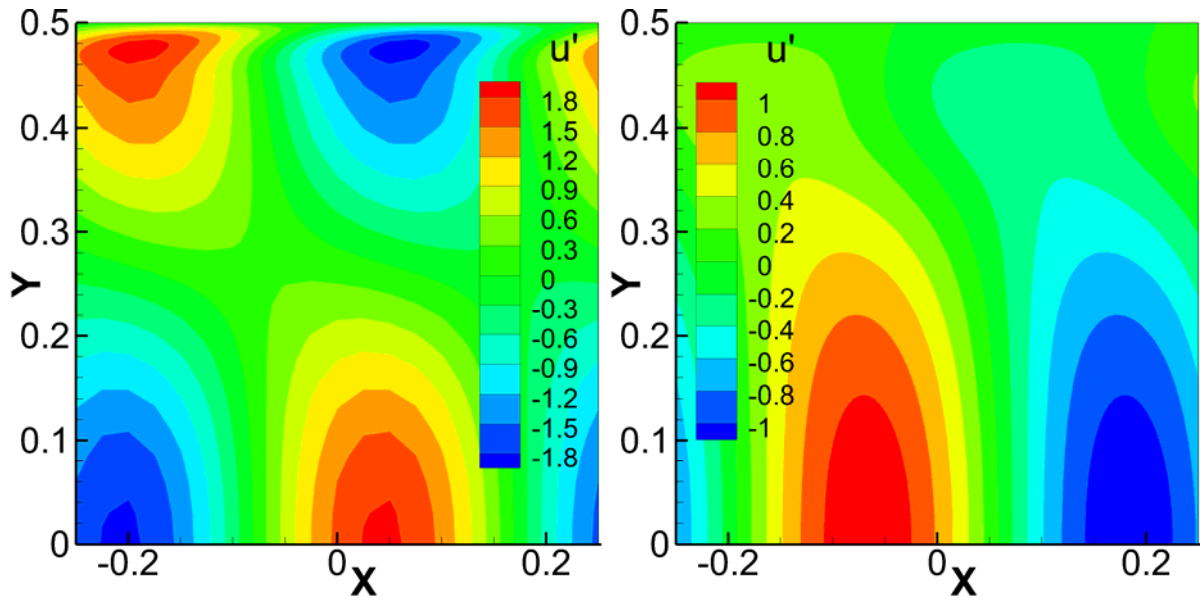


Рис. 19. Волна в плоском канале. Слева:  $\mu = 10^{-3}$ , справа:  $\mu = 0.02$

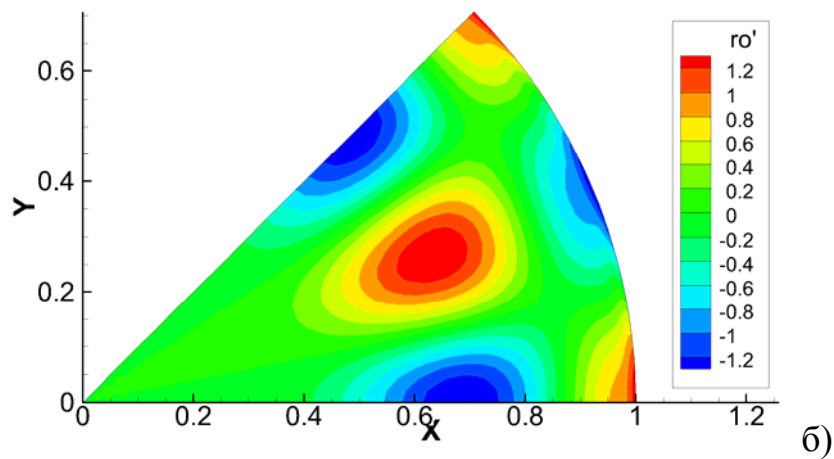
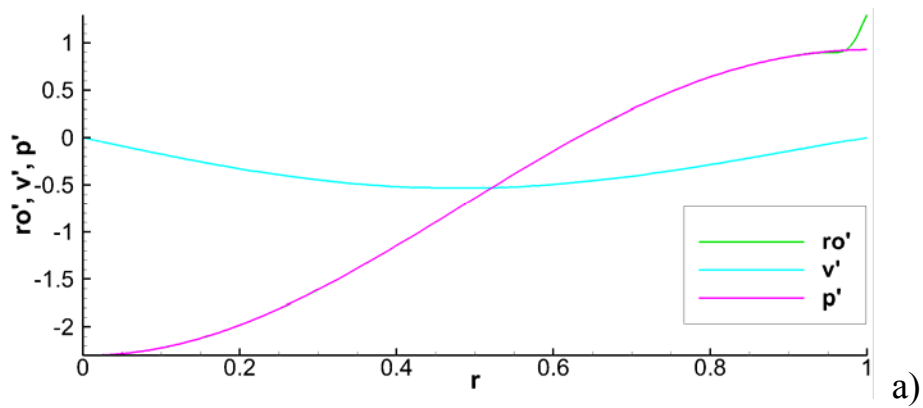


Рис. 20. Акустическая мода в цилиндрическом канале:  
 а) осесимметричная 1-я радиальная мода при  $k_z = 0$  и  $\mu = 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $Pr = 1$ ;  
 б) 8-я угловая 1-я радиальная мода при  $k_z = 0$  и  $\mu = 10^{-3}$ ,  $Pr = 1$ .

## Плоские вихри

Стационарный плоский вихрь представляет собой стационарное решение двумерных уравнений Эйлера, при котором плотность, давление и азимутальная компонента скорости зависят только от  $r$ , а радиальная компонента скорости равна нулю. При этих условиях уравнения неразрывности и энергии удовлетворяются автоматически, а уравнение импульса сводится к

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{u_\phi^2}{r}. \quad (8)$$

Ниже рассматриваются изэнтропические решения, то есть удовлетворяющие условию  $\ln p - \gamma \ln \rho = \text{const}$ . Профиль скорости может выбираться различным образом (при больших скоростях решение может не существовать). Во всех рассматриваемых ниже случаях параметр  $M$  имеет смысл отношения максимальной скорости вихря к скорости звука в невозмущённом потоке.

### s\_FiniteVortex: вихрь с финитным профилем скоростей

Класс	s_FiniteVortex
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка	<p>Возможные профили скорости:</p> $u_\phi^{(1)}(r) = M \left( \frac{r}{R} \left( 2 - \frac{r}{R} \right) \right)^n \Theta(2R - r) \quad (n \text{ задаётся}) \text{ или}$ $u_\phi^{(2)}(r) = M \frac{r(3R - r)^2}{4R^3} \Theta(3R - r).$ <p>Давление и плотность определяются из (8) с учётом постоянства энтропии</p>
Гладкость	Конечное число непрерывных производных
Поведение на бесконечности	Вне конечной области решение постоянно
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Анализ точности методов решения уравнений Эйлера
Примечание	Устойчивость этих вихрей специально не исследовалась, однако на практике при наибольших $M$ она наблюдается

**s\_GaussianVortex: вихрь с гауссовым профилем циркуляции**

Класс	s_GaussianVortex
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка	<p>Профиль скорости</p> $u_\phi(r) = \frac{A_0 MR}{r} \left( 1 - \exp\left(-\alpha_0 \frac{r^2}{R^2}\right) \right),$ <p>где <math>A_0 \sim 1.398</math> и <math>\alpha_0 \sim 1.256</math> – константы, обеспечивающие максимум скорости при <math>r = R</math>, равный <math>Mc_\infty</math>. Давление и плотность определяются из (8) с учётом постоянства энтропии</p>
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций и экспоненциального интеграла
Цель	Верификация методов решения уравнений Эйлера
Примечание	Численные исследования [9] позволяют утверждать, что этот вихрь является устойчивым, как минимум, при $M \leq 1.5$

**s\_Vortex\_BG: вихрь с профилем скорости вида  $u = 1/(1+r^2)$** 

Класс	s_Vortex_BG
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка	<p>Профиль скорости <math>u_\phi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{1}{1 + (r/R)^2}</math>. Давление и плотность определяются с учётом постоянства энтропии</p>
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Верификация методов решения уравнений Эйлера

**s\_RankineVortex: вихрь Рэнкина**

Класс	s_RankineVortex
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$
Постановка	Профиль скорости $u_\phi(r) = Mr, r < 1$ ; $u_\phi(r) = M / r, r \geq 1$ . Давление и плотность определяются из (8) с учётом постоянства энтропии
Гладкость	Непрерывное с разрывом производных
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> убывает при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Примечание	Этот вихрь является неустойчивым стационарным решением уравнений Эйлера
Цель	Напрямую для верификации не используется

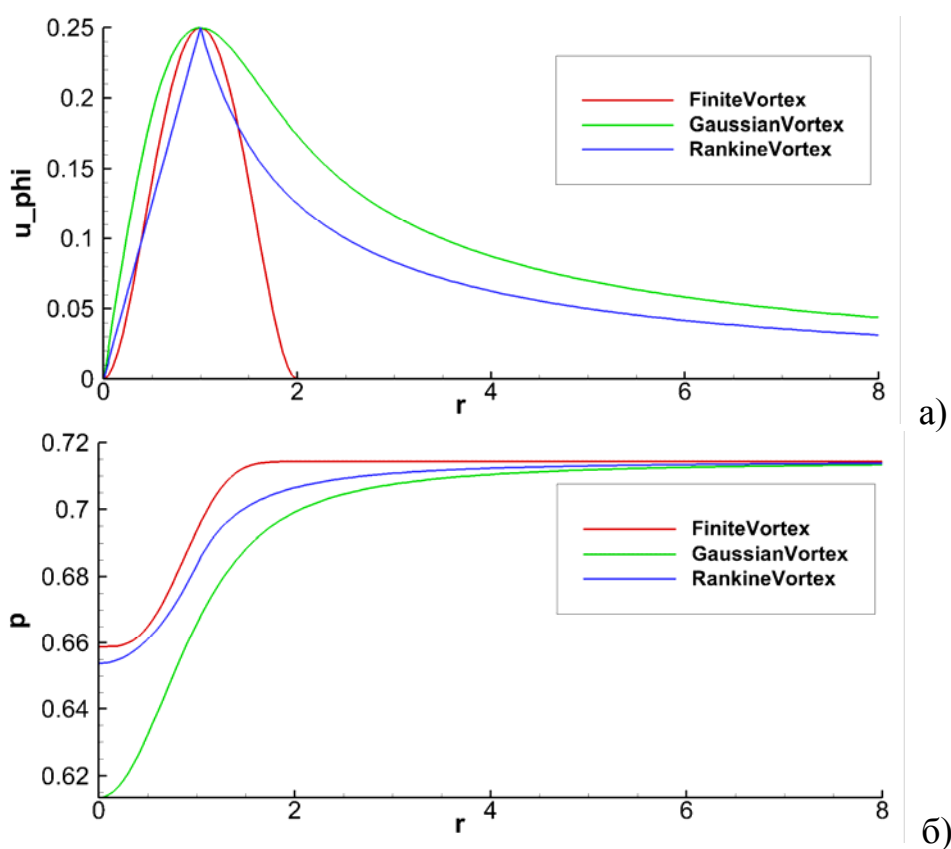


Рис. 21. Плоские осесимметрические вихри:  
а) профили скорости; б) профили давления.



## Одномерные решения уравнений Эйлера

### s\_Riemann: задача Римана о распаде разрыва

Класс	s_Riemann
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$t > 0, x \in \mathbb{R}$
Постановка	Задаются положение разрыва $X_0$ , значения $\rho_L, u_L, p_L$ слева и $\rho_R, u_R, p_R$ справа от разрыва
Гладкость	Разрывное
Поведение на бесконечности	Справа и слева от конечной (зависящей от времени) области решение постоянно
Вычисление решения	В некоторых случаях требуется итерационный процесс, сходящийся за несколько итераций
Цель	Верификация и анализ точности методов решения уравнений Эйлера в случае разрывных решений
Примечание	Показатель адиабаты полагается постоянным. Решение приведено в [2] и [10]

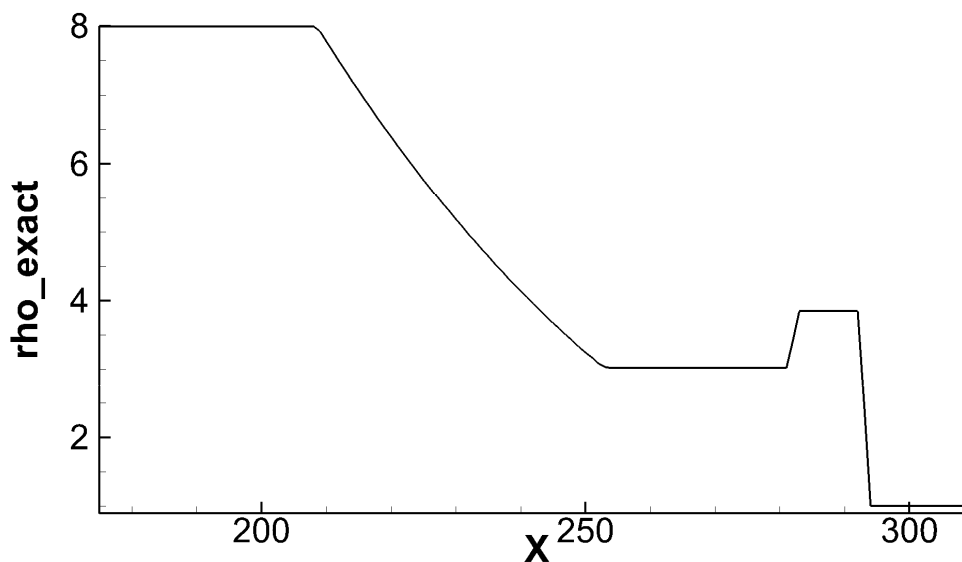


Рис. 22. Пример решения задачи Римана

**s\_Shock: ударная волна**

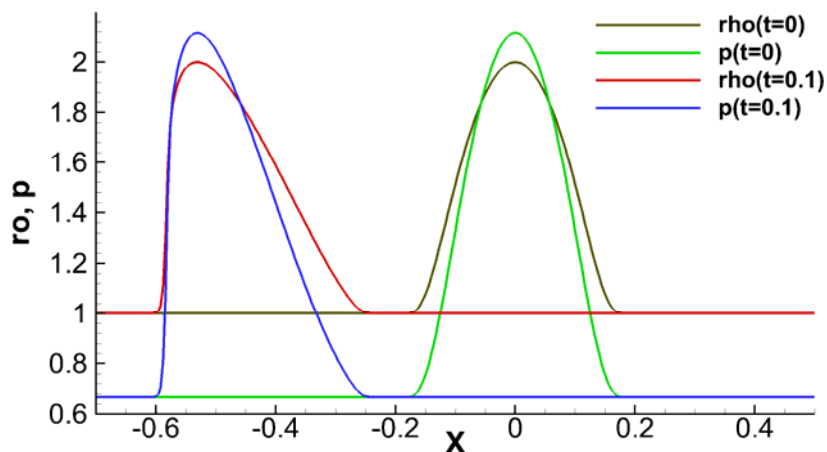
Класс	s_Shock
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$t > 0, x \in \mathbb{R}$
Постановка	Решение представляет собой ударную волну, распространяющуюся с постоянной скоростью. Ударная волна задаётся числом Маха ударной волны, скоростью потока перед фронтом и либо плотностью, либо давлением перед фронтом.
Гладкость	Разрывное
Поведение на бесконечности	Справа и слева от разрыва решение постоянно
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Простейший тест для верификации. Также может использоваться, например, в качестве фонового поля для s_AcousticShock
Примечание	Это решение является частным случаем предыдущего

**s\_ShockRefl: задача об отражении ударной волны**

Класс	s_ShockRefl
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$t > 0, x < x_w$
Постановка	Начальные данные задаются в виде ударной волны, распространяющейся вправо. При $x = x_w$ задаётся условие $u = 0$ .
Гладкость	Разрывное
Поведение на бесконечности	Справа и слева от разрыва решение постоянно
Вычисление решения	На каждый момент времени решение является ударной волной: на малое время – движущейся вправо, а на большое время – влево (с другой скоростью). Решение выражается композицией элементарных функций
Цель	Верификация граничного условия отражения в случае разрывных решений
Примечание	Решение приведено в [11], стр. 263–265

**s\_SimpleWave: простая волна**

Класс	s_SimpleWave
Мат. модель	Уравнения Эйлера
Область опред-я	$t > 0, x \in \mathbb{R}$
Постановка	<p>Решение ищется в виде простой волны, соответствующей левому инварианту Римана. При этом физические переменные связаны соотношениями</p> $p(t, x) = c_0^2 \rho(t, x) / \gamma, \quad u(t, x) = u_0 - \frac{2c_0}{\gamma - 1} (\rho(t, x)^{(\gamma-1)/2} - 1).$ <p>Начальные данные выбираются в виде</p> $\rho(0, x) = \begin{cases} 1 + \exp(-2x^2 / (l^2 - x^2)), &  x  < l; \\ 1, &  x  \geq l. \end{cases}$
Гладкость	Бесконечно гладкое до критического момента, далее разрывное
Поведение на бесконечности	Вне конечной области решение постоянно
Вычисление решения	Используется быстро сходящийся итерационный процесс
Цель	Анализ точности численных методов решения уравнений Эйлера на гладких, но существенно нелинейных решениях
Примечание	Постановка взята из [12]. <b>Решение приводится только до того момента, пока оно сохраняет гладкость.</b> Если проводить расчёт дальше, эталонное решение нужно определять путём расчёта на подробной сетке

Рис. 23. Простая волна: решения на моменты времени  $t = 0$  и  $t = 0.1$

## Течения с преобладанием вязкости или теплопроводности

### s\_ViscShock: структура вязкой нетеплопроводной ударной волны

Класс	s_ViscShock
Мат. модель	Уравнения Навье – Стокса с или без теплопроводности
Область опред-я	$x \in \mathbb{R}$ или $t > 0, x \in \mathbb{R}$
Постановка	<p>Задаются все физические переменные <math>\mathbf{Q}_-</math> при <math>x \rightarrow -\infty</math> и <math>\mathbf{Q}_+</math> при <math>x \rightarrow +\infty</math> таким образом, чтобы они удовлетворяли условию Гюгоньо для ударной волны, то есть чтобы для некоторого <math>D</math> выполнялось <math>\mathcal{F}_c(\mathbf{Q}_L) - D\mathbf{Q}_L = \mathcal{F}_c(\mathbf{Q}_R) - D\mathbf{Q}_R</math>. Если <math>D = 0</math>, может искаться стационарное решение. Иначе начальные данные должны задаваться по точному решению, а расчёт – проводиться до конечного времени. Рассматриваются три постановки задачи:</p> <p>а) постоянный коэффициент кинематической вязкости, то есть <math>\mu = \rho\nu</math>, где <math>\nu = \text{const}</math>, и отсутствие теплопроводности (<math>\text{Pr} = \infty</math>);</p> <p>б) постоянный коэффициент кинематической вязкости и <math>\text{Pr} = 3/4</math>;</p> <p>в) постоянный коэффициент динамической вязкости, то есть <math>\mu = \text{const}</math>, <math>\text{Pr} = 3/4</math>, скачок плотности <math>\rho(+\infty) / \rho(-\infty) = 2</math></p>
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	При $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ решение выходит на предельные значения с экспоненциальной скоростью
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Верификация и анализ точности численных методов решения уравнений Навье – Стокса <b>при отсутствии твёрдых стенок</b>
Примечание	Точное решение определяется с точностью до сдвига по $x$ . Решение приведено: а) в [2, 13]; б) в [14, 15]; в) в [15].

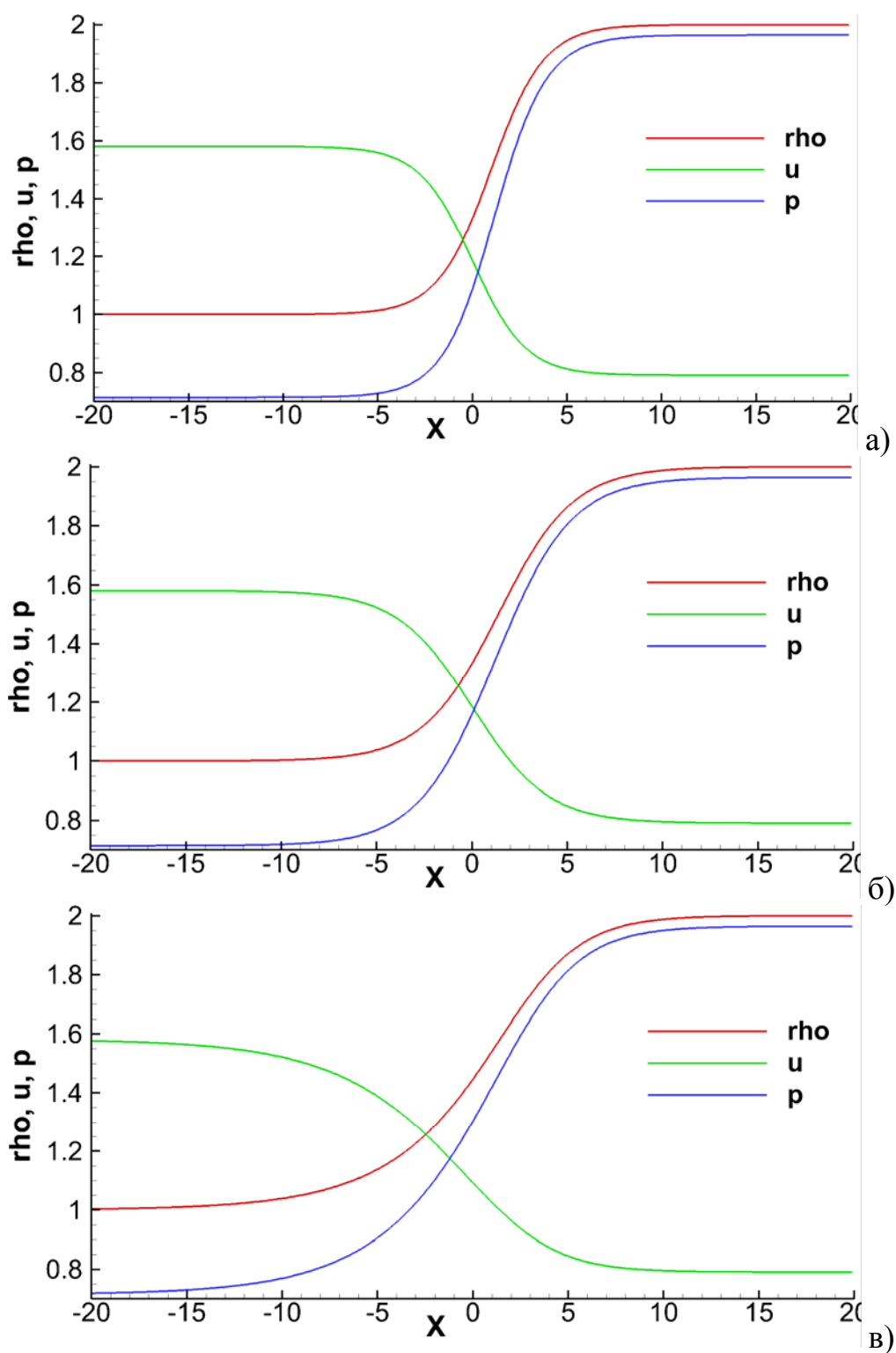


Рис. 24. Профили ударных волн для постановок а), б) и в) при  $\nu = 1$  (для а и б) и  $\mu = 1$  (для в).

**s\_Couette: течение между параллельными плоскостями**

Класс	s_Couette
Мат. модель	Уравнения Навье – Стокса
Область опред-я	$x_L < x < x_R, y \in \mathbb{R}$
Постановка	<p>На каждой из двух границ задаётся условие прилипания <math>s</math>, вообще говоря, ненулевой касательной скоростью: <math>v(x_L, y) = v_L, v(x_R, y) = v_R</math>. По температуре могут задаваться условия 1-го рода (изотермические) или 2-го рода (адиабатические) независимо для каждой из границ, но задание адиабатических условий на обеих границах одновременно не допускается. Расчёт проводится до получения стационарного решения.</p> <p>Допускаются три зависимости вязкости от температуры:</p> <p>а) <math>\mu = \mu_0</math>;</p> <p>б) <math>\mu = \mu_0 T^{-1/2}</math>;</p> <p>в) <math>\mu = \mu_0 T</math>.</p>
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	По $x$ расчётная область ограниченная, от $y$ решение не зависит
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Простейшие тесты для верификация методов решения уравнений Навье – Стокса при наличии стенок
Примечание	Сравнение с точным решением проводится по скорости и температуре $T = p/\rho$ ; давление является постоянным, но однозначно не определяется

**s\_ConcCyl: течение между вращающимися цилиндрами**

Класс	s_Couette
Мат. модель	Уравнения Навье – Стокса
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, r_L <  \mathbf{r}  < r_R$
Постановка	Коэффициент динамической вязкости является постоянным. При $ \mathbf{r}  = r_L$ задаются скорость $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}$ и адиабатическое условие, а при $ \mathbf{r}  = r_R$ держатся скорость $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{r}$ и температура $T_R$ . Угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}_R$ и температура $T_R$ являются независимыми параметрами задачи
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Расчётная область ограниченная
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Верификация методов решения уравнений Навье – Стокса при наличии стенок
Примечание	Решение этой задачи приведено в [2, 16]. Сравнение с точным решением проводится по азимутальной компоненте скорости и температуре $T = p/\rho$ ; плотность и давление в отдельности однозначно не определяются

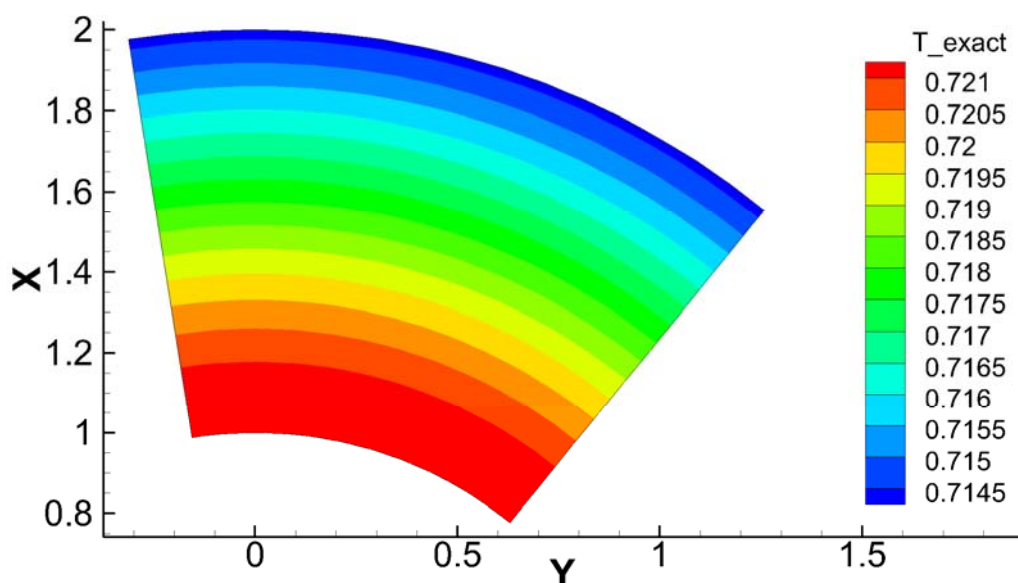


Рис. 25. Распределение температуры при течении между концентрическими цилиндрами. Расчёт в секторе раствора  $\pi/3$

## Течения несжимаемой жидкости

### s\_CurlFreeCylinder: безвихревое обтекание цилиндра

Класс	s_CurlFreeCylinder
Мат. модель	Уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2,  \mathbf{r}  > R$
Постановка	На бесконечности задаётся поток с числом маха $M \ll 1$ , направленный вдоль оси $X$ . На поверхности цилиндра задаётся условие непротекания
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> стремится к фоновому полю при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций. Решение определяется с точностью $O(M^2)$
Цель	Верификация методов решения уравнений Эйлера при малой скорости потока
Примечание	Решение этой задачи приведено в [2, 17]. Решение содержит свободный параметр – циркуляцию по контуру вокруг цилиндра. Численный расчёт может дать решение с любым значением циркуляции

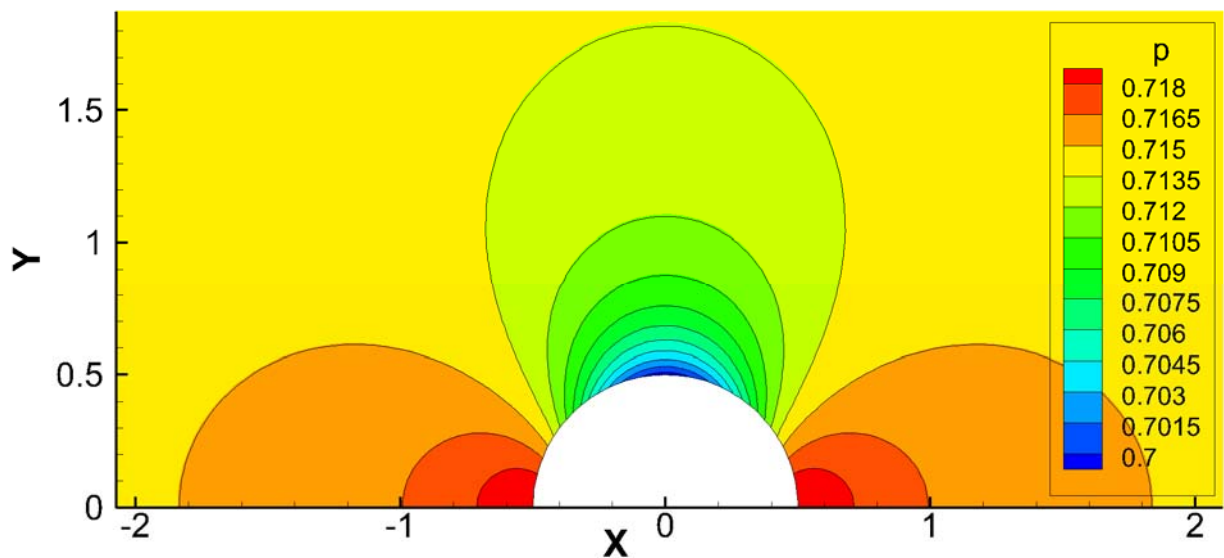


Рис. 26. Безвихревое обтекание цилиндра



**s\_PotentialSphere: потенциальное обтекание сферы**

Класс	s_PotentialSphere
Мат. модель	Уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,  \mathbf{r}  > R$
Постановка	На бесконечности задаётся поток с числом Маха $M \ll 1$ , направленный вдоль оси $X$ . На поверхности сферы задаётся условие непротекания
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> стремится к фоновому полю при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций. Решение определяется с точностью $O(M^2)$
Цель	Верификация методов решения уравнений Эйлера при малой скорости потока
Примечание	Решение этой задачи приведено в [2]

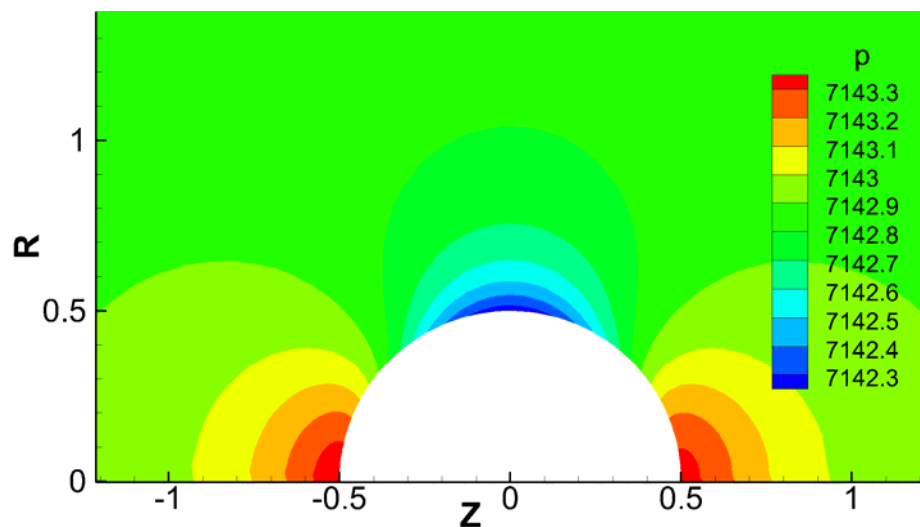


Рис. 27. Потенциальное обтекание сферы

**s\_ViscSphere: вязкое обтекание сферы**

Класс	s_ViscSphere
Мат. модель	Уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости
Область опред-я	$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3,  \mathbf{r}  > R$
Постановка	Предполагается доминирование вязкости над конвекцией ( $Re \ll 1$ ). На бесконечности задаётся поток с числом Маха $M \ll 1$ , направленный вдоль оси $X$ . На поверхности сферы задаётся условие прилипания и адиабатической стенки.
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Решение <b>медленно</b> стремится к фоновому полю при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$
Вычисление решения	Композиция элементарных функций
Цель	Проверка корректности методов решения уравнений Навье – Стокса для трёхмерных течений. Возможность использования этого решения для количественной оценки точности неочевидна
Примечание	Решение этой задачи приведено в [2, 18]. Решение справедливо при $M \ll 1$ и $Re \ll 1$

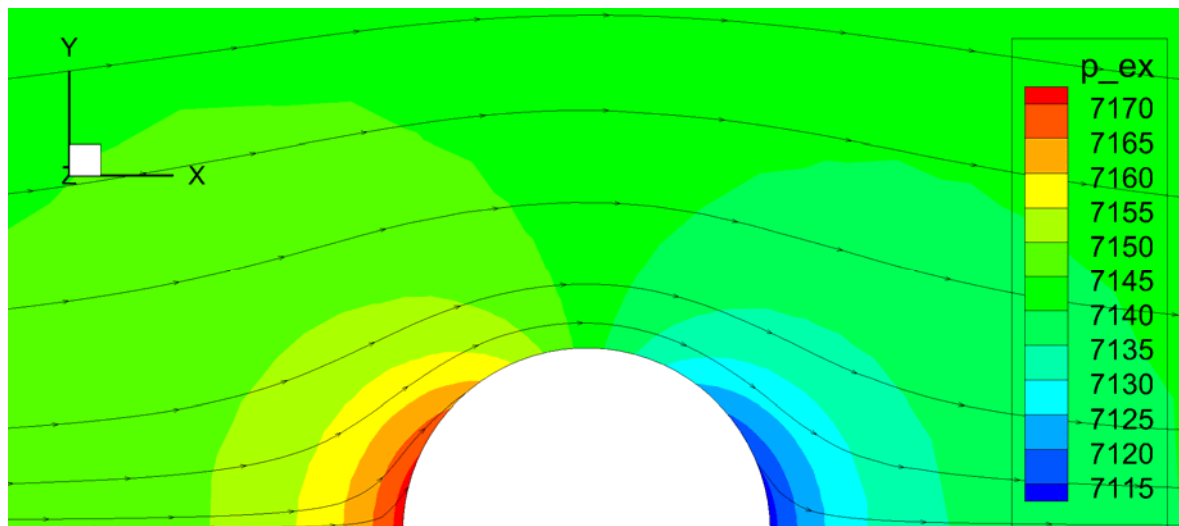


Рис. 28. Обтекание сферы при большой вязкости

**s\_Blasius: обтекание тонкой полубесконечной пластины**

Класс	s_Blasius
Мат. модель	Уравнения Прандтля
Область опред-я	$x > 0, y = 0$
Постановка	На бесконечности задаётся поток с числом маха $M \ll 1$ , направленный вдоль оси $X$ . На поверхности пластины задаётся условие прилипания и адиабатической стенки
Гладкость	Бесконечно гладкое
Поведение на бесконечности	Предельного перехода при $r \rightarrow \infty$ в решении нет
Вычисление решения	На инициализации решение вычисляется путём интегрирования ОДУ, при вызове PointValue() это решение интерполируется. Решение выписывается для уравнения Прандтля и справедливо при больших $x$ , см. [17].
Цель	Задача Блазиуса часто используется для верификации численных методов для расчёта задач аэродинамики, поскольку отражает их основные особенности. Однако для оценки точности численных методов она не вполне удобна ввиду того, что решение уравнения Прандтля при конкретных значениях $x$ может сильно отличаться от решения уравнений Навье – Стокса

## Сводная таблица решений

Краткие характеристики всех точных решений сведены в таблицы 1 (решения линеаризованных уравнений) и 2 (решения полных уравнений). Для каждого точного решения в них приведены:

- модель, то есть система уравнений, которому удовлетворяет решение. Используются следующие сокращения: перенос – уравнение переноса, EE – уравнения Эйлера, NSE – уравнения Навье – Стокса, LEE – линеаризованные уравнения Эйлера, LNSE – линеаризованные уравнения Навье – Стокса., IEE – несжимаемые уравнения Эйлера, INSE – несжимаемые уравнения Навье – Стокса. Уточнение (без тепл.) означает отсутствие учёта теплопроводности;
- переменные, от которых зависит решение. Используются обозначения  $r_{xy} = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $r_{xyz} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ . Зависимость от переменных, заключённых в скобки, необязательна;
- ограничения на область определения решения;
- гладкость решения. BV – решение с ограниченной вариацией (вообще говоря разрывное), особ. – решение, содержащее особенность. Если гладкость зависит от параметров задачи, возможные варианты перечисляются через косую черту.  $C^?$  означает, что решение непрерывное, а число непрерывных производных может зависеть от параметров решения;
- финитность носителя решения (за вычетом фонового поля) на конечный момент времени. Если область ограниченная, ставится прочерк. Если решение выходит на константное поле с экспоненциальной скоростью, указано «есть». Если решение периодическое по какому-либо направлению, указано «пер»;
- сложность вычисления: прочерк – явная формула, И – интегральная формула, Р – ряд,  $I^2$  – двумерный интеграл, ИР – интеграл и ряд.

Примечания к таблице 1:

- s\_PlanarAcousticShock: решаются линеаризованные уравнения Эйлера на разрывном фоновом поле. В точке разрыва задаются линеаризованные условия Гюгонио;
- s\_WaveInChannel и (только в теплопроводном случае) s\_SinusVisc: на этапе инициализации требуется решение нелинейного алгебраического уравнения.

Таблица 1

## Сводная таблица линейных решений

Точное решение	Модель	Зависит от	Область	Глад- кость	Финит- ность	Слож- ность
s_Polynom	перенос	$t, x$		$C^\infty$	нет	--
s_4peak	перенос	$t, x$		BV	пер.	--
s_PlanarSinus, s_PlanarGauss	WE	$t, x, (y, z)$		$C^\infty / BV$	есть / нет / пер	--
s_EntropyVortex	LEE	$t, x, y$		$C^\infty$	есть	--
s_Source1D	WE	$t, x$		$C^\infty$	есть	И
s_AcousticShock	LEE*	$t, x$		BV	есть	--
s_Gaussian2D	WE	$t, r_{xy}$		$C^\infty$	есть	И
s_IVP2D	WE	$t, r_{xy}$		$C^?$	есть	$I^2$
s_Source2D	WE	$t, r_{xy}$		$C^\infty$	нет	И
s_Gaussian3D	WE	$t, r_{xyz}$		$C^\infty$	есть	--
s_Source3D	WE	$t, r_{xyz}$		$C^\infty$	есть	И
s_PointSource	WE	$t, x, r_{yz}$		$C^? / \text{особ}$	есть	--
s_RotatingDipole	WE	$t, x, y, z$		особ	нет	--
s_Coaxial	WE	$t, x, y, (z)$	$r_{xy} < r_2$ или $r_1 < r_{xy} < r_2$	$C^\infty$	пер	--
s_Corner	WE	$t, x, y$	сектор	$C^\infty / \text{особ}$	есть	$I^2$
s_CornerPlanar	WE	$t, x, y$	сектор	$C^\infty / \text{особ}$	нет	И
s_Cylinder	WE	$t, x, y$	$r_{xy} > r_{\min}$	$C^\infty$	есть	ИР
s_SinusVisc	LNSE	$t, x, (y, z)$		$C^\infty$	пер	-- *
s_VortexInCylinder	LNSE	$t, r_{xy}$	$r_{xy} < r_{\max}$	$C^\infty$	--	Р
s_WaveInChannel	LNSE	$t, x, (y, z)$	$y_1 < y < y_2$ или $r_{yz} < r_{\max}$	$C^\infty$	пер	-- *

Таблица 2

## Сводная таблица нелинейных решений

Точное решение	Модель	Зависит от	Область	Гладкость	Финитность	Сложность
s_RankineVortex	EE	$r_{xy}$		C	нет	--
s_GaussianVortex	EE	$r_{xy}$		$C^\infty$	нет	--
s_FiniteVortex	EE	$r_{xy}$		$C^?$	есть	--
s_Riemann, s_Shock	EE	t, x		BV	есть	итер. процесс
s_ShockRefl	EE	t, x		BV	есть	--
s_SimpleWave	EE	t, x		$C^\infty^*$	есть	итер. процесс
s_ViscShock	NSE	x		$C^\infty$	есть	--
s_Couette	NSE	x	$x_1 < x < x_2$	$C^\infty$	--	--
s_ConcCyl	NSE	$r_{xy}$	$r_1 < r_{xy} < r_2$	$C^\infty$	--	--
s_CurlFreeCylinder	IEE	x, y	$r_{xy} > r_{min}$	$C^\infty$	нет	--
s_PotentialSphere	IEE	x, $r_{yz}$	$r_{xyz} > r_{min}$	$C^\infty$	нет	--
s_ViscSphere	INSE, Re $\ll 1$	x, $r_{yz}$	$r_{xyz} > r_{min}$	$C^\infty$	нет	--
s_Blasius	Prandtl	y/x	x, y $> 0$	$C^\infty$ /особ	нет	*

Примечания к таблице 2:

- s\_SimpleWave: решение является гладким только до конечного момента времени, однако после этого момента решение не реализовано;
- s\_Blasius: решение приводится для уравнения Прандтля; на инициализации решение вычисляется путём интегрирования ОДУ, при вызове PointValue( ) это решение интерполируется.

## Программная реализация

Библиотека ColESo написана на языке C++ в рамках стандарта C++03.

Каждое точное решение представляет собой класс, наследующий класс tPointFunction. Базовый класс tPointFunction содержит следующие методы:

- `virtual const char* description() const`  
Возвращает описание решения (не более 80 символов).
- `virtual tFuncType Type() const`  
Возвращает тип решения: скалярная величина; пульсации физических переменных; комплекснозначное решение для пульсаций; полные физические переменные; температура и скорость.
- `int NumVars() const`  
Возвращает количество переменных, которые определяются решением (однозначно определяется Type()).
- `virtual ~tPointFunction(void)`  
Деструктор: освобождение динамической памяти, если она выделялась при инициализации решения.
- `virtual const char* filename() const`  
Возвращает имя файла, из которого считываются параметры.
- `virtual void ReadParams(struct tFileBuffer&)`  
Считывание параметров из предварительно считанного файла.
- `virtual void ReadParamsFromFile(const char* fname)`  
Считывание параметров из заданного файла.
- `virtual void Init()`  
Инициализация решения. Процедура **обязательно** должна вызываться после задания/считывания параметров и до первого запуска PointValue.
- `virtual void PointValue`  
(double t, const double\* coor, double\* V) const  
Вычисляет решение в момент времени t в точке coor. Процедура может обращаться к трём координатам, даже если решение одномерное. Выходной массив V должен иметь размер NumVars(). Расположение переменных в массиве V сведено в таблицу 3.

Конкретные точные решения всегда переопределяют процедуры description(), Type(), filename(), ReadParams() и PointValue(). Процедура Init() и деструктор переопределяются при необходимости.

Таблица 3

**Расположение переменных в возвращаемом массиве**

Тип функции (Type())	К-во переменных (NumVars())	Расположение переменных в массиве, возвращаемом PointValue(...)
FUNC_SCALAR	1	V[0] – решение
FUNC_PULSATIONS	5	V[0] – пульсация плотности, V[1..3] – пульсация скоростей, V[4] – пульсация давления
FUNC_PULSATIONS_COMPLEX	10	V[0..4] – действительные компоненты пульсаций (расположение аналогично FUNC_PULSATIONS), V[5..9] – мнимые компоненты пульсаций в том же порядке
FUNC_PHYSICAL	5	V[0] – плотность, V[1..3] – скорости, V[4] – давление
FUNC_TEMPVEL	5	V[0] = 1, V[1..3] – скорости, V[4] – отношение давления к плотности
FUNC_CONSERVATIVE	5	не используется в ColESo

Библиотека ColESo не содержит неконстантных статических переменных (исключая интерфейс для совместимости с программами для FORTRAN), и, следовательно, может использоваться в многонитевом режиме. Также в библиотеке обеспечивается корректность работы конструкторов и операторов копирования.

Библиотека ColESo частично совместима с библиотекой четверной и восьмерной точности QD [19]. Некоторые точные решения представлены в виде шаблонных классов. Параметром шаблона является тип значения с плавающей запятой, который может принимать значения double, dd\_real и qd\_real. При этом процедура PointValue() принимает на вход и возвращает величины этого типа.

Некоторые точные решения выражаются через специальные функции математической физики. Цилиндрические функции произвольного индекса вычисляются при помощи рекурсивных алгоритмов. Другие специальные функции вычисляются процедурами библиотек Cephes (для двойной точности) и GNU LibQuadMath (для четверной точности), автором которых



является S. Moshier. Для вычисления квадратур Гаусса – Якоби используется код S. Elhay, J. Kautsky и J. Burkadrt [20].

## Использование библиотеки

Библиотека ColESo может быть скачана с Github [4].

Чтобы вычислить решение при помощи библиотеки ColESo, необходимо последовательно выполнить следующие операции:

- создать объект, соответствующий конкретному точному решению;
- задать параметры решения или вызвать процедуру считывания их из файла;
- вызвать процедуру инициализации решения;
- вызвать процедуру для вычисления решения в заданный момент времени в заданной точке. Эта процедура может вызываться многократно, в т. ч. в параллельном режиме.

Подробную инструкцию по использованию библиотеки см. в файлах README\_RUS и README\_ENG, прилагаемых к коду.

## Пример кода на языке C++.

```
#include "coleso.h"
int main(int, char**) {
    // Создаём объект для решения задачи о дифракции
    // плоской волны на углу 2*Pi/n
    s_CornerPlanar S;
    // Задаём параметры задачи
    const double Pi = 4.0*atan(1.0);
    S.angle = 2.*Pi; // мера угла
    S.phi0 = Pi / 4.; // направление волны
    S.X0 = 0.2; // дистанция до центра волны при t=0
    S.Bterm = 0.025; // полуширина волны
    S.Aterm = 1.0; // амплитуда волны
    // Вызываем процедуру инициализации
    S.Init();
    // Определяем время и координаты
    double t = 0.4;
    double c[3] = {0.005, 0., 0.};
    double V[5];
    // Вычисляем решение и печатаем на экран
    S.PointValue(t, c, V);
    for(int i=0; i<5; i++)
        printf("V[%i] = %25.15e\n", i, V[i]);
    return 0;
}
```

Чтобы библиотеку ColESo можно было использовать в программах, написанных на языке FORTRAN, был реализован интерфейс к библиотеке на основе строковых переменных.

### Пример кода на языке FORTRAN.

```

INCLUDE "coleso_fortran.h"

program main
USE COLESO_FORTRAN
USE, INTRINSIC :: ISO_C_BINDING
CHARACTER(LEN=100, KIND=C_CHAR) :: NAME, VALUE

integer ID
real*8 t, c(3), v(5)

! Создаём объект для решения задачи
! о распространении в свободном пространстве
! импульса от начальных данных в форме гауссиана
NAME = 'Gaussian2D' // C_NULL_CHAR
call coleso_add_function(NAME, ID)

! Передаём параметры в строковой буфер библиотеки
NAME = 'Bterm' // C_NULL_CHAR
write(VALUE,*) 6.0, C_NULL_CHAR
call coleso_set_parameter(NAME, VALUE)
NAME = 'NormalizeForm' // C_NULL_CHAR
write(VALUE,*) 1, C_NULL_CHAR
call coleso_set_parameter(NAME, VALUE)
! Считываем параметры из строкового буфера
call coleso_read_set(ID)

! Вызываем процедуру инициализации решения
call coleso_init(ID)
! Вычисляем решение в заданных точках
! в заданный момент времени и печатаем на экран
t = 1
c = 0d0
do i = 0, 1100
    c(1) = i * 0.02d0
    call coleso_pointvalue(ID, t, c, v)
    write(*,*) c(1),v
enddo
end

```

## Список литературы

1. Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations // American Institute of Aeronautics and Astronautics. AIAA G-077-1998(2002). DOI:10.2514/4.472855.001
2. Katate Masatsuka. I do like CFD, Vol.1. 304 p.
3. П.А. Бахвалов, М.Д. Сурначёв. Линейные схемы с несколькими степенями свободы для многомерного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2019. №74. 44 с.
4. Collection of exact solutions (ColESo). [Электронный ресурс]. URL: <http://caa.imamod.ru/index.php/research/coleso> (дата обращения: 11.01.2021).
5. Общая акустика. М. А. Исакович. Учебное пособие. Главная редакция физико-математической литературы, М.: Наука, 1973 г. 496 с.
6. Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems, Tam, C. K. W., Hardin, J. C., United States., Florida State University., & Langley Research Center. (1997). *Second Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on Benchmark Problems: Proceedings of a workshop ... held in Tallahassee, Florida, November 4-5, 1996*. Hampton, Va: National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center.
7. Kirchhoff G. Über der Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // Annalen der Physik und Chemie. 1868. Vol. 134, no. 6. P. 177–193.
8. П.А. Бахвалов. Звуковая волна в круглой бесконечной трубе при наличии вязкости и теплопроводности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 135. 32 с.
9. Chan W. Shariff K. Pulliam T. Instabilities of 2D inviscid compressible vortices // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 253. pp. 173–209.
10. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. [и др.]. М: Наука, 1976. с. 400.
11. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М: Наука, 1971. 856 с.
12. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Лимитер повышенного порядка точности для разрывного метода Галеркина на треугольных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 53. 26 с.
13. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
14. Becker R. Stosswelle und Detonation // Z. Physik. 1922. Vol. 8. P. 321–362.
15. Johnson B. M. Closed-form shock solutions // J. Fluid. Mech. 2014. Vol. 745. p. R1.

16. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Часть II. Государственное издательство физико-математической литературы. 1963. 728 с.
17. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М: Дрофа, 2003. 840 с.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. М.: Физматлит, 2015. с. 728.
19. QD – A C++/Fortran-90 double-double and quad-double package. Yozo Hida, Xiaoye S. Li, David H. Bailey et al. [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/aoki-t/QD> (дата обращения: 31.12.2019).
20. [Электронный ресурс] URL: [people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp\\_src/jacobi\\_rule/jacobi\\_rule.html](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/jacobi_rule/jacobi_rule.html) (дата обращения: 31.12.2019).

## Содержание

Введение .....	3
Решаемые уравнения .....	5
Простейшие решения, сохраняющие форму начальных данных .....	8
Линейные одномерные задачи .....	11
Линейные двумерные осесимметрические задачи .....	14
Линейные трёхмерные задачи в свободном пространстве .....	17
Задачи дифракции .....	23
Линейные возмущения с вязкостью .....	26
Плоские вихри .....	30
Одномерные решения уравнений Эйлера .....	33
Течения с преобладанием вязкости или теплопроводности .....	36
Течения несжимаемой жидкости .....	40
Сводная таблица решений .....	44
Программная реализация .....	47
Использование библиотеки .....	49
Список литературы .....	51