# 基于Gamma-高斯先验的线性回归问题求解

## 一、问题模型

在线性回归问题中，为了利用权系数稀疏的特征，在先验概率中引入高斯-Gamma层级模型，对应的图模型如下：



图1 问题对应的贝叶斯图模型

观测模型为：

 （1）

其中为观测值，为基矩阵（字典），为权向量，为噪声向量。为了利用散射点分布连续的性质，对该模型进行概率建模，即

 （2）

权值的先验分布满足：

 （3）

为了灵活描述信号的局部特征，给权向量构造动态的高斯先验分布，即对于每个权向量均对应不同的参数。为便于计算，这里取共轭先验。由于高斯分布的共轭先验为Gamma分布，因此令由精度参数构成的随机变量服从Gamma分布，

 （4）

同时，给噪声的精度参数（precision parameter）引入Gamma先验，即

 （5）

## 二、基于变分贝叶斯的模型参数求解

若要实现对隐变量（unobserved variable）中的推断，可以直接计算后验概率，然后令其均值为对的估计。按照图1给出的贝叶斯图模型和贝叶斯公式可得：

 （6）

其中

 （7）

但是由于涉及到复杂的多重积分，的边缘概率无法直接计算。根据EM方法，观测向量的分布可被表示为：

 （8）

其中

 （9）

 （10）

由于，因此为的下界。另外，由于式（8）的左侧与无关，因此使最大化相当于使最小化，即是对的近似。现在问题转化为寻找合适的，足够简单的使下界容易计算（用于检验算法的准确性）。这里根据变分贝叶斯方法，采用的因式分解形式对其进行近似，假设，，之间相互独立，则可以得到近似表达式：

 （11）

为了使下界最大，则将（11）带入表达式中，可以得到各因式满足：

 （12）

其中表示对所有满足的因式求期望。由于该式并未能提供各因式的显示解，因此需要进行循环求解。按照式（12）和线性回归模型（如图1所示）可以得到：



 （13）

其中

 （14）

因此

 （15）

对权向量的估计为。

 （16）

其中，。因此，

 （17）

则对的估计为。

类似的，可以得到

 （18）

其中，。因此对的估计为。

注：Gama分布表达式为：。

## 三、仿真结果

信号长度为1024，其中包含60个分量，观测信号的长度为512。信噪比为15dB。原始信号分量及重构的结果如图2所示。可以看出，大部分的信号分量被准确重构出来。



图2 仿真信号的估计结果

## 四、后续研究方向

1、能否根据原始ISAR像（或其一维距离像）对其超参数进行设置？

2、是否能够适用于压缩感知或稀疏矩阵重构？特别是字典为扁阵时？

3、是否得到信号分量位置后再用最小二乘求幅度会更准确一些？

## 参考文献

1. D. G. Tzikas, A. C. Likas, and N. P. Galatsanos, “The variational approximation for Bayesian inference,” *IEEE Signal Processing Magazine*, Nov. 2008, pp. 131-146.
2. C. Bishop and M. Tipping, “Variational Relevance Vector Machines,” in *Proc. 16th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, 2000, pp. 46–53.