Chapter 2

回到数集

2.1 自然数 Entier naturel

基于序数理论提出的皮亚诺公理可以得到自然数，这五条公理用非形式化的方法叙述如下：

1. 对象0是自然数；
2. 每一个确定的自然数a，都有一个确定的后继数$a++$，$a++$ 也是自然数；
3. 对于每个自然数b、c，$b=c$当且仅当b的后继数等于c的后继数；
4. 对象0不是任何自然数的后继数；
5. 任意关于自然数的命题，如果满足下面两个条件：（1）它对自然数0是真的，（2）当设它对自然数a为真时，可以证明对$a++$ 也真；那么，命题对所有自然数都真。

特别地，公理5保证了数学归纳法（raisonnement par récurrence）的正确性，从而被称为归纳法原理。

练习Exercice 2.1: 伯努利不等式（Inégalité de Bernoulli）

oulliInequality

设$x>-1$，不等式$(1+x)^n \geqslant 1+nx$对任意自然数n都成立。

练习Exercice 2.2: 棣莫弗公式（Formule de Moivre）

Moivre'sFormula

使用数学归纳法证明：对任意$t\in\mathbb{R}$，等式$(\cos t+\mathrm{i}\sin t)^n=\cos(nt)+\mathrm{i}\sin(nt)$ 对所有自然数n都成立，其中i为虚数单位。

注释Remarque 2.3. 以上给出的公理化的自然数，参考自陶哲轩《实分析》第一章。

于是可以定义

• 自然数的二元运算加法"+"：对任意两个自然数m, n，规定$0+n$等于n，$(m++)+n$等于$(m+n)++$，则根据递归法可以得到$m+n$.

思考题Problème 2.4. 证明：对任意两个自然数m, n，都有$m+n=n+m$。

证明Démonstration:

1. 我们首先去证明，$m=0$时等式成立，即对于任意$n\in\mathbb{N}$，有$0+n=n+0$。方法为对n进行数学归纳。

   (a) 当$n=0$时，由加法定义知：左边$=0+0=0$，右边$=0+0=0$。

   (b) 假设对$n=k$时等式成立，也就是$0+k=k+0$。我们想证对$n=k++$，等式$0+(k++)=(k++)+0$也成立。由加法定义得，左边$=0+(k++)=(k++)$，由加法定义和假设条件得，右边$=(k++)+0=(k+0)++=(0+k)++=k++$。于是等式对$n=k++$成立。

   于是我们证明了对于任意$n\in\mathbb{N}$，有$0+n=n+0$。

2. 现在假设对$m=p$，对于任意$n\in\mathbb{N}$，有等式$p+n=n+p$。我们想证对$m=p++$，等式$(p++)+n=n+(p++)$也成立。由加法定义得，左边$=(p++)+n=(p+n)++\overset{\text{由假设}}{=}(n+p)++$。下面我们再次(对$n$)用归纳法来证明

   $$n+(p++)=(n+p)++ \qquad (*)$$

   因为只要(*)式成立，我们想证的等式在$m=p++$时成立。

   (a) 当$n=0$时，(*)式左边$=0+(p++)=p++$，(*)式右边$=(0+p)++=p++$，所以此时(*)式左右相等。

   (b) 假设对$n=\ell$时(*)式成立，也就是$=\ell+(p++)=(\ell+p)++$。那么当$n=\ell++$时，(*)式左边$=(\ell++)+(p++)=(\ell+(p++))++\overset{\text{由假设}}{=}((\ell+p)++)++$；(*)式右边$=((\ell++)+p)++\overset{\text{由定义}}{=}((\ell+p)++)++$。所以(*)式对$n=\ell++$成立。

   所以(*)式对$\forall n\in\mathbb{N}$成立。
   也就是我们证明了：当$m=p++$，等式$(p++)+n=n+(p++)$成立。

由第1步和第2步得出，对任意$(m,n)\in\mathbb{N}^2$，交换律$m+n=n+m$成立。

□

●自然数的二元运算乘法"$\times$"：对任意两个自然数m,n，规定$0\times m$等于0，$(m++)\times n$等于$(m\times n)+n$，则根据递归法可以得到$m\times n$.

思考题Problème 2.5. 证明：对任意两个自然数m,n，都有$m\times n=n\times m$。

思考题Problème 2.6. 证明：对任意三个自然数m,n,k，都有$(m+n)\times k=(m\times k)+(n\times k)$。

●**定义自然数的"序"**： 对任意两个自然数m,n，我们称m小于等于n，记为$m\leqslant n$，如果存在一个自然数a，使得$n=m+a$。此时我们也称n大于等于m，记为$n\geqslant m$。

思考题Problème 2.7. 证明：对任意两个自然数m,n，如果$m\leqslant n$，那么对于任意自然数k都有$m+k\leqslant n+k$。

edeanProperty **命题Proposition 2.8.** 不存在最大的自然数。假设K是最大的自然数，根据定义，$K++$也是自然数，并且由加法定义$K++=K+1$，由序的定义，$K+1>K$。这与假设矛盾。

2.2 整数 Entier

考虑集合$\mathbb{N}^2$以及该集合上的等价关系$\sim$:有序对$(m,n)\sim(p,q)$当且仅当$m+q=p+n$。我们把商集$\mathbb{N}^2/\sim$定义为整数集合$\mathbb{Z}$。

●定义整数的加法：对任意两个整数数$[(m,n)]$和$[(p,q)]$，规定$[(m,n)]+[(p,q)]=[(m+p,n+q)]$。●定义整数的乘法：对任意两个整数数$[(m,n)]$和$[(p,q)]$，规定$[(m,n)]\times[(p,q)]=[(m\times p+n\times q,n\times p+m\times q)]$。

需要验证，这样的定义是良定的！下面以加法为例证明。

证明： 假设$[(m,n)]=[(m',n')]$, $[(p,q)]=[(p',q')]$，也就是$(m,n)\sim(m',n')$, $(p,q)\sim(p',q')$，当且仅当

$$m+n'=n+m',\qquad p+q'=q+p'.$$

我们考察$(m+p,n+q)$与$(m'+p',n'+q')$的关系。根据上式验证，$m+p+n'+q'=n+q+m'+p'$。故$(m+p,n+q)\sim(m'+p',n'+q')$，即等价。所以$[(m+p,n+q)]=[(m'+p',n'+q')]$，整数加法的定义与代表元的选取无关。

对于整数$[(m,n)]$，如果$m\geqslant n$，即存在自然数k使得$m=n+k$，此时称$[(m,n)]$为非负整数， 可以用k来(简化)表示$[(m,n)]$，可以验证（为什么）如果$[(m,n)]=[(m',n')]$，那么$m'\geqslant n'$且$m'=n'+k$，所以用k来表示是合理的。 由于对自然数有$k\geqslant 0$,可以扩展定义"非负整数大于等于0"，即$[(m,n)]\geqslant 0$当且仅当$m\geqslant n$。 如果$m<n$，那么存在非零自然数ℓ使得$n=m+\ell$，此时称$[(m,n)]$为负整数，那么

用$-\ell$来(简化)表示$[(m,n)]$，同样可以验证是合理的。经过这样简化的表示，使得整数集合包含了自然数集合。

可以定义整数的绝对值(valeur absolue)，通常用"$|*|$"表示。对于非负整数k，定义$|k|=k$；对于负整数$-\ell$，定义$|-\ell|=\ell$。所以整数绝对值可以看成是从$\mathbb{Z}$到$\mathbb{N}$的映射。

还可以定义整数的二元运算减法"$-$"减法：对任意两个整数数$[(m,n)]$和$[(p,q)]$，规定$[(m,n)]-[(p,q)]=[(m,n)]+[(q,p)]$。

经过以上准备，可以把自然数的序的概念扩展到整数上。对任意两个整数数$[(m,n)]$和$[(p,q)]$，$[(m,n)]\geqslant[(p,q)]$当且仅当$[(m,n)]-[(p,q)]\geqslant 0$。

2.3 有理数 Nombre rationnel

考虑集合$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$以及该集合上的等价关系$\sim$:有序对$(m,n)\sim(p,q)$当且仅当$m\times q=p\times n$。我们把商集$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})/\sim$定义为有理数集合$\mathbb{Q}$。

•定义有理数的加法：对任意两个整数数$[(m,n)]$和$[(p,q)]$，规定$[(m,n)]+[(p,q)]=[(m\times q+n\times p,n\times q)]$。•定义整数的乘法：对任意两个整数数$[(m,n)]$和$[(p,q)]$，规定$[(m,n)]\times[(p,q)]=[(m\times p,n\times q)]$。

这样定义的加法和乘法是良定的。

我们约定用$\frac{m}{n}\overset{\text{def}}{=}[(m,n)]$（简化）表示包含有序对$(m,n)$的等价类，并且约定$n>0$，当$\frac{m'}{n'}=\frac{m}{n}$时取"分母"较小的那种表示。特别地，当$n=1$时，约定$\frac{m}{n}=m$，这样有理数包含了全体整数。

OrderRational **思考题Problème 2.9.** 以整数作参考，如何定义有理数减法(差)？如何定义正（负）有理数？如何定义绝对值？如何合理地定义有理数的序？

练习Exercice 2.10: 阿基米德原理

RationalNumbers 证明：不存在最小的正有理数。

2.4 实数 Nombre réel

有理数序列

定义Définition 2.11: 有理数柯西（Cauchy）序列

:CauchySequence 设(x_n)是一个有理数序列，$\varepsilon=\frac{p}{q}$是正的有理数。我们称该有理序列

1. 是ε-稳定的，如果对于给定任意两个自然数的m,n，都有$|x_m-x_n|<\varepsilon$;
2. 是终极ε-稳定的，如果存在正整数N，使得对于任意两个满足$m>N$以

及$n > N$的自然数m, n，都有$|x_m - x_n| < \varepsilon$；

3. 是有理数的**柯西（Cauchy）序列**（终极任意ε-稳定的），如果任意选取一个正的有理数ε（选定后不再变化），存在一个与ε有关的（可以随ε的变化而变化的）正整数N，使得对于任意两个满足$m > N$以及$n > N$的自然数m, n，都有$|x_m - x_n| < \varepsilon$；

4. 收敛到0，如果任给一个正的有理数ε（给定后不再变化），存在一个与ε有关的（可以随ε的变化而变化的）正整数N，使得对于任意满足$n > N$的自然数n，都有$|x_n| < \varepsilon$。

例子Exemple 2.12.
$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$，
序列$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$， 满足a_{n+1}与a_n的整数部分和前n位小数部分相同。比如$(a_0 = 3, a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, a_4 = 3.1415, \ldots)$

注释Remarque 2.13. "柯西（Cauchy）序列"的定义可以修改为：设c, s是两个正的有理常数，如果$\forall\varepsilon \in \mathbb{Q}\bigcap]0, s[$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得对于$\forall(m, n) \in \mathbb{N}^2$只要$m > N$且$n > N$，总有$|x_m - x_n| < c\varepsilon$。

练习Exercice 2.14

quenceIsBounded

一个ε-稳定的(有理数)序列是有界的。终极ε-稳定的(有理数)序列是有界的。(有理数)柯西序列是有界的。

练习Exercice 2.15

- 如果一个(有理数)序列是有界的，那么存在有理数$\varepsilon > 0$，使得该序列是ε-稳定的。
- 如果一个(有理数)序列是终极 ε-稳定的，那么存在有理数$\delta > 0$，使得该序列是 δ-稳定的。

练习Exercice 2.16

求证由以下a_n构成的序列$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$是有理数Cauchy序列。

- $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$。

- $a_n = \dfrac{n^2+2n+5}{n^2-3n+8}$。
- $a_0 = \dfrac{1}{2}$；当$n > 1$时$a_n = \dfrac{1}{2-a_{n-1}}$。（提示：先考察有理数序列的有界性和单调性。）

我们可以定义两个有理数的柯西序列(x_n)和(y_n)的加法和乘法为：

$$(x_n)+(y_n) = (x_n+y_n), \qquad (x_n)\times(y_n) = (x_n \times y_n).$$

运算得到的序列依然会是柯西序列。

练习Exercice 2.17

CauchySequences

两个（有理数）柯西序列的和仍是柯西序列。两个（有理数）柯西序列的积仍是柯西序列。

定义Définition 2.18: 有理数柯西序列的一个等价关系

我们考虑所有的有理数柯西序列组成的集合，把它记为$\tilde{\mathbb{R}}$。称两个（有理数）柯西序列(x_n)和(y_n)是等价的，如果它们之间的差收敛到0。

这样便在$\tilde{\mathbb{R}}$上定义了一个等价关系。（为什么？）。我们把商集$\tilde{\mathbb{R}}/\sim$定义为实数集合$\mathbb{R}$。我们约定用$x \stackrel{\text{def}}{=} [(x_n)]$(简化)表示包含序列$(x_n)$的等价类；特别地，当有理数序列$(a_n)$为常数序列时(自然是柯西序列)，约定用该常数表示$[(a_n)]$，这样使得实数包含了有理数。

练习Exercice 2.19

(有理数)柯西序列的子列也是柯西序列。

alentSequence

命题Proposition 2.20. 有理数柯西序列的子列与原柯西序列是等价的。

证明Démonstration: 假设(x_n)是一个有理数柯西序列，$(x_{f(n)})$是它的一个子列，其中f是一个从$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的严格单调递增的函数。任给一个有理数$\varepsilon > 0$。由于(x_n)是柯西序列，存在正整数N，

当$m>N, n>N$时，总有$|x_m-x_n|<\varepsilon$. (*)

那么我们就取上面得到的N(存在N)，当$n>N$时，由于$f(n)\geqslant n$恒成立，所以$f(n)>N$；根据(*)式得到 $|x_{f(n)}-x_n|<\varepsilon$。也就是$(x_{f(n)})$与$(x_n)$的差收敛到0，于是两个有理数柯西序列等价。 □

我们可以在实数集上定义加法和乘法：

$$[(x_n)]+[(y_n)]=[(x_n)+(y_n)], \qquad [(x_n)]\times[(y_n)]=[(x_n)\times(y_n)].$$

同样地，这两个运算是良定的。

思考题Problème 2.21. 证明上述定义的加法与乘法是良定的。

练习Exercice 2.22

设$[(x_n)]$、$[(y_n)]$、$[(z_n)]$是$\tilde{\mathbb{R}}/\sim$的三个元素。证明

$$([(x_n)]+[(y_n)])\times[(z_n)]=[(x_n)]\times[(z_n)]+[(y_n)]\times[(z_n)].$$

思考题Problème 2.23. 如何定义实数的减法？到此为止，可否定义"与中学知识一致的"实数的除法？

定义Définition 2.24: 实数的"序关系"

我们现在考虑实数的序，比较$\tilde{\mathbb{R}}/\sim$中元素的大小：称$[(x_n)]>[(y_n)]$当且仅当$[(x_n)]-[(y_n)]>[(0)]$当且仅当存在正整数N和正有理数ε，使得对一切$n>N$有$x_n-y_n>\varepsilon$。根据注记??，可以类似定义出$<, \geqslant, \leqslant$另外三种序关系。

练习Exercice 2.25

如何定义实数的绝对值？（需要证明所定义的绝对值是良定的。）

由实数的序的定义可以直接得出如下性质。

op:Trichotomy **命题Proposition 2.26** (三歧性). 对于两个实数$x=[(x_n)], y=[(y_n)]$，要么$x<y$，要么$x=y$，要么$x>y$。

op:LessMayLEQ **命题Proposition 2.27.** 对于两个实数$x=[(x_n)], y=[(y_n)]$，如果对任意n都有$x_n<y_n$，那么$x\leqslant y$。

gleInequality

命题Proposition 2.28 (三角不等式). 对于两个实数$x = [(x_n)]$, $y = [(y_n)]$，总有$|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$。

命题Proposition 2.29. 有理数序列$(\frac{1}{n})$与有理数序列(0)等价，即$[(\frac{1}{n})] = [(0)] \overset{\text{根据约定}}{=} 0$.

证明Démonstration: 根据定义，有理数序列$(\frac{1}{n})$与有理数序列(0)等价当且仅当它们之间的差收敛到0，即任给一个正的有理数ε，存在一个与ε有关的正整数N，使得对于任意满足$n > N$的正整数n，都有$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$。事实上，任给(定)一个正的有理数$\varepsilon = \frac{p}{q}$，我们取正整数$N = q + 1$，则$N$满足$\frac{1}{N} < \varepsilon$，于是，当$n > N$时，$|\frac{1}{n} - 0| < \frac{1}{N} < \varepsilon$。 □

命题Proposition 2.30. 任何一个实数a，都存在一个单调递增的有理数柯西序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$使得$[(x_n)] = a$。

证明Démonstration: 设$a = [(a_n)]$。对每一个正整数N,$\varepsilon := \frac{1}{2^N}$是有理数，由于$(a_n)$是柯西数列，所以存在与$N$有关的$K \in \mathbb{N}$使得

当$k_1 > K,\ k_2 > K$时，$\lvert a_{k_1} - a_{k_2}\rvert < \frac{1}{2^{N+1}}$。　(i)

对于$N = 1$，我们选取满足条件(i)“当$k_1 > K,\ k_2 > K$时，$|a_{k_1} - a_{k_2}| < \frac{1}{2^{1+1}}$”的最小的正整数，记为$K_1$。当$N > 1$时，我们依次（依照$N$从小到大）选取满足$K_N > \max\{K_{N-1}, N\}$,并且满足条件（i）的最小的正整数$K$，记为$K_N$。于是从(i)得到

当$k_1 > K_N,\ k_2 > K_N$时，$\lvert a_{k_1} - a_{k_2}\rvert < \frac{1}{2^{N+1}}$。　(ii)

令$x_N = a_{K_{N+1}} - \frac{1}{2^N}$.
我们首先证明:(x_N)是严格单调递增序列。

$$\begin{aligned} x_{N+1} - x_N &= (a_{K_{N+2}} - \frac{1}{2^{N+1}}) - (a_{K_{N+1}} - \frac{1}{2^N}) \\ &= \left(\frac{1}{2^{N+1}} - (a_{K_{N+1}} - a_{K_{N+2}})\right) \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2^{N+1}} - |a_{K_{N+2}} - a_{K_{N+1}}|\right). \end{aligned}$$

由于$K_{N+2} > K_{N+1} > K_N$，所以根据(ii)得到，

$$x_{N+1} - x_N \geqslant \left(\frac{1}{2^{N+1}} - |a_{K_{N+2}} - a_{K_{N+1}}|\right) > 0.$$

进而，对于任意正整数$N' > N$都有$x_{N'} > x_N$，于是我们证明了x_N是一个严格单调递增的有理数序列。

下面我们证明:(x_N)是柯西序列.

任给一个有理数$\varepsilon > 0$。由于(a_n)是柯西序列，根据柯西序列的定义，对于特定的有理数$\frac{1}{2}\varepsilon$，存在正整数L，

$$\boxed{\text{当两个正整数}\ell_1 > L,\, \ell_2 > L\text{时，}|a_{\ell_1} - a_{\ell_2}| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \qquad \text{(iii)}}$$

于是，存在正整数$M > L$满足 $\frac{1}{2^M} < \frac{1}{2}\varepsilon,$ (iv)

并且当两个正整数$m_1 > M,\, m_2 > M$时，

$$\begin{aligned}
|x_{m_1} - x_{m_2}| &\overset{\text{代入}}{=} |(a_{K_{m_1+1}} - \frac{1}{2^{m_1}}) - (a_{K_{m_2+1}} - \frac{1}{2^{m_2}})| \\
&\overset{\text{交换次序}}{=} |(a_{K_{m_1+1}} - a_{K_{m_2+1}}) - \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}}| \\
&\overset{\text{三角不等式}}{\leqslant} |a_{K_{m_1+1}} - a_{K_{m_2+1}}| + |\frac{1}{2^{m_1}}| + |\frac{1}{2^{m_2}}| \qquad \text{(v)}
\end{aligned}$$

注意到$K_{m_1+1} > K_{m_1} \geqslant m_1 > M > L$，$K_{m_2+1} > K_{m_2} \geqslant m_2 > M > L$，那么可以根据(iii)得到

$$|a_{K_{m_1+1}} - a_{K_{m_2+1}}| < \frac{1}{2}\varepsilon; \quad \text{(vi)}$$

根据(iv)得到

$$\frac{1}{2^{m_1}} \leqslant \frac{1}{2^{M+1}} < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad \frac{1}{2^{m_2}} \leqslant \frac{1}{2^{M+1}} < \frac{1}{4}\varepsilon. \quad \text{(vii)}$$

把(vi)和(vii)代回到(v)中，最终得到

$$|x_{m_1} - x_{m_2}| < \varepsilon,$$

证明了(x_N)是柯西序列。

我们最后证明:(x_n)与(a_n)等价。

直接根据x_n的构造，得到$|x_n - a_{K_{n+1}}| = \frac{1}{2^n}$，并且根据定义直接可以得出$\frac{1}{2^n}$收敛到0，于是$(x_n)$与$(a_{K_{n+1}})$等价。又由于$(a_{K_{N+1}})$是$(a_n)$的子列，根据命题2.20，得到$(a_{K_{N+1}})$与$(a_n)$等价。最后，根据等价关系的传递性，$(x_n)$与$(a_n)$等价。

综上所述，我们得到一个严格单调递增的有理数序列(x_n)，并且它所在的等价类可以表示实数a，也就是$a = [(x_n)]$。 □

注释Remarque 2.31. 常用的小数记法可以自然地理解为柯西序列，比如说，$\pi = 3.1415926...$的记法意味着π是柯西序列 $(3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, ...)$所在的等价类。序列$(0, 0.9, 0.99, 0.999, ...)$ 和$(1, 1, 1, 1, ...)$是等价的，即它们之间的差的绝对值收敛到0，于是有等式$[(0.999...)] = [(1)]$。

注释Remarque 2.32. 在定义了实数的加法、乘法、序之后，可以参照定义2.11，定义实数序列的“ε-稳定”、“终极ε-稳定”、“柯西序列”、“收敛到0”以及收敛到某个实数。

lCauchySequence

定义Définition 2.33: （实）柯西序列

设(x_n)是一个实数序列，称它是**柯西（Cauchy）序列**，如果任意选取一个正实数ε，存在正整数N，使得对于任意两个满足$m > N$以及$n > N$的自然数m, n，都有$|x_m - x_n| < \varepsilon$。

vergentSequence

定义Définition 2.34: （实）收敛序列

设(x_n)是一个实数序列，a是一个实数。如果任给一个正实数ε，存在（与ε有关的、可以随ε的变化而变化的）正整数N，使得对于任意满足$n > N$的自然数n，都有$|x_n - a| < \varepsilon$，那么我们称(x_n)收敛到a。

如果(x_n)不收敛到任何实数，那么称该序列**发散**。

vergeToItself

例子Exemple 2.35. 假设(x_n)是有理数柯西序列并且设实数$x = [(x_n)]$，那么(x_n)作为实数序列仍是柯西序列，并且(x_n)收敛到x。

证明Démonstration: 任给一个正实数ε。由于(x_n)是柯西序列，所以对于$\frac{\varepsilon}{2} > 0$，存在正整数$N$，使得对于任意满足$m > N, n > N$的自然数$m$和$n$，都有$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。于是对于每个固定的正整数$m$，$(x_m - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$仍是有理数柯西序列，它所代表的实数为$[(x_m - x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x_m)_{n\in\mathbb{N}}] - [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = x_m - a$。当$m > N$时，由实数序的定义，直接得到$|x_m - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$，这就是我们定义的序列$(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$收敛到$a$。 □

练习Exercice 2.36

假设实数序列(x_n)收敛到实数a，也收敛到实数b，那么一定有$a = b$。

这个练习题的结论告诉我们，“收敛到”这种操作得到的结果是唯一的。

练习Exercice 2.37

设$b \in \mathbb{R}$。假设实数序列(x_n)收敛到实数a，并且序列(x_n)中的每一项x_n都满足$x_n > b$，求证：$a \geqslant b$。
并举出一个序列例子，恰为$a = b$的情形。(提示：三歧性)

注释Remarque 2.38. 如果在实数柯西序列中再定义如本节开始一样的等价关系，其商集仍然是$\mathbb{R}$，不会再“多出来”一些元素。实数柯西序列(x_n)收敛到a，则自然有(x_n)等价于常数列(a)，也就是$[(x_n)] = a$。

练习Exercice 2.39

equenceConverge

证明:如果一个实数序列收敛到某个实数，那么它的任意子列也收敛到这个实数。

2.4.1 实数的“完备性”

直观上，实数完备性意味着实数轴上（以戴德金的说法）没有“间隙”。这是实数区别于有理数的特点。 实数的完备性公理有一组等价命题。完备性的定义方式与实数的构造方式相关，在确立其中之一为公理后，其余皆为完备性公理的等价定理。

根据我们对实数的构造，我们首先介绍“柯西收敛准则”，然后选择介绍“上确界定理”，“区间套定理”，“Bolzano–Weierstrass（聚点）定理”三种等价的定理。更多等价定理，如单调有界定理，有限覆盖定理，介值定理等，将在阅读材料中、习题中、后续课程中涉及。

定理Théorème 2.40: 柯西收敛准则critère de Cauchy

CauchyCriterion

设(x_n)是一个实数序列。它收敛到某个实数**当且仅当**它是一个柯西序列。

证明Démonstration:

“必要性：” 任给$\varepsilon > 0$。假设(x_n)收敛到a，那么根据定义，对于$\frac{\varepsilon}{2} > 0$，存在正整数$N$，当$n > N$时$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$。于是当$m > N, n > N$时，

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

“充分性：” 假设(x_n)是一个柯西序列。现在对于每个正整数n，我们取有理数柯西序列$(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$所在的等价类代表实数$x_n$。

由于对每个固定的正整数n来说$(x_{n,k})$是柯西序列，所以对于$\frac{1}{n} > 0$，存在正整数K_n，使得

当$k > K_n$, $\tilde{k} > K_n$时，$x_{n,k} - x_{n,\tilde{k}} < \frac{1}{n}$.　　(*)

我们还可以要求K_n是严格单调递增整数序列，于是$K_n > n$对所有正整数n成立。

对每个正整数n，令$y_n = x_{n,K_n+1}$，我们得到有理数序列(y_n)。**下面证明:**(y_n)是(有理数)柯西序列。任给有理数$\varepsilon > 0$。

由于(x_n)是柯西序列，所以对于$\frac{\varepsilon}{3} > 0$，存在正整数$N$，当$m > N, n > N$时，$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$。根据实数"小于"的定义，对每个满足$m > N, n > N$的正整数对$(m, n)$，存在正整数$K_{(m,n)}$使得

当$k > K_{m,n)}$时，$|x_{m,k} - x_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{3}$.　　(**)

我们取正整数K使得$\frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{3}$，那么当$m > K$, $n > K$时，这里不妨假设$m > n$，我们得到

$$\begin{aligned}
&|y_n - y_m| \\
&= |x_{n,K_n+1} - x_{m,K_m+1}| \\
&= |(x_{n,K_n+1} - x_{n,K_m+K_{(m,n)}}) + (x_{n,K_m+K_{(m,n)}} - x_{m,K_m+K_{(m,n)}}) + (x_{m,K_m+K_{(m,n)}} - x_{m,K_m+1})| \\
&\leqslant |x_{n,K_n+1} - x_{n,K_m+K_{(m,n)}}| + |x_{n,K_m+K_{(m,n)}} - x_{m,K_m+K_{(m,n)}}| + |x_{m,K_m+K_{(m,n)}} - x_{m,K_m+1}| \qquad (***)
\end{aligned}$$

- 因为$K_m + K_{(m,n)} > K_n + 1 > K_n$，由(*)可得$|x_{n,K_n+1} - x_{n,K_m+K_{(m,n)}}| < \frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{3}$;
- 因为$K_m + K_{(m,n)} > K_{(m,n)}$，由(**)可得$|x_{n,K_m+K_{(m,n)}} - x_{m,K_m+K_{(m,n)}}| < \frac{\varepsilon}{3}$;
- 因为$K_m + K_{(m,n)} > K_m + 1 > K_m$，由(*)可得$|x_{m,K_m+K_{(m,n)}} - x_{m,K_m+1}| < \frac{1}{m} < \frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{3}$。

把这三个不等式相加带回到(***)，得到$|y_n - y_m| < \varepsilon$。也就是$(y_n)$是(有理数)柯西序列。

我们用y来表示等价类$[(y_n)]$所代表的实数。**下面证明**(实数)柯西序列(x_n)收敛到y。任给$\varepsilon > 0$。取正整数L满足$\frac{1}{L} < \frac{\varepsilon}{4}$。

$$\begin{aligned}
|x_n - y| &= |[(x_{n,p} - y_p)_{p\in\mathbb{N}}]| = [(|x_{n,p} - y_p|)_{p\in\mathbb{N}}] \\
&= [(|x_{n,p} - x_{p,K_p+1}|)_{p\in\mathbb{N}}] \\
&= [(|x_{n,p} - x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}} + x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}} + x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_p+1}|)] \\
&\leqslant [(|x_{n,p} - x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}}|)_{p\in\mathbb{N}}] + [(|x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}}|)_{p\in\mathbb{N}}] \\
&\qquad + [(|x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_p+1}|)_{p\in\mathbb{N}}] \qquad (****)
\end{aligned}$$

当$n > L$时，

- 因为$K_n + K_p + K_{(n,p)} > K_n$，由(*)可得只要$p > K_n$则有$|x_{n,p} - x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}}| < \frac{1}{n} < \frac{1}{L} < \frac{\varepsilon}{4}$;那么根据实数"比较大小"的定义，

$$[(|x_{n,p} - x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}}|)_{p\in\mathbb{N}}] \leqslant \frac{\varepsilon}{4};$$

- 因为$K_n + K_p + K_{(n,p)} > K_{(n,p)}$，由(**)可得$|x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}}| < \frac{\varepsilon}{4}$;那么根据实数“比较大小”的定义，

$$[(|x_{n,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}}|)_{p\in\mathbb{N}}] \leqslant \frac{\varepsilon}{4};$$

- 因为$K_n+K_p+K_{(n,p)} > K_p+1 > K_p$，由(*)可得只要$p > L$则有$|x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_p+1}| < \frac{1}{p} < \frac{1}{L} < \frac{\varepsilon}{4}$;那么根据实数“比较大小”的定义，

$$[(|x_{p,K_n+K_p+K_{(n,p)}} - x_{p,K_p+1}|)_{p\in\mathbb{N}}] \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

把这三个不等式相加带回到(****)，得到当$n > L$时，$|x_n - y| \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$。于是我们证明了(实数)柯西序列$(x_n)$收敛到实数$y$。 □

练习Exercice 2.41

geToEqualNumber

两个等价的实数柯西序列收敛到相同的实数。

定义Définition 2.42: 有（上、下）界，（上、下）确界

设A是实数集合$\mathbb{R}$的一个子集，称A是有上界的(majorée)，如果存在一个实数M（不必在A中），使得对于任意$a \in A$，都有$a \leqslant M$，此时称M是A的一个上界（majorant）；称A是有下界的（minorée），如果存在一个实数m（不必在A中），使得对于任意$a \in A$，都有$a \geqslant m$，此时称m是A的一个下界（minorant）。如果A既有上界又有下界，则称为有界（borné）。

设集合A是有上界的。我们称M是A的上确界(borne supérieure)，记作$M = \sup(A)$，如果满足

1. M是A的一个上界：对所有$a \in A$，都有$a \leqslant M$；
2. M是最小的上界：对A的任意上界M'，都有$M' \geqslant M$；换句话说，对任意实数$M'' < M$，M''一定不是A的上界。

设集合A是有下界的。我们称m是A的下确界(borne inférieure)，记作$m=\inf(A)$，如果满足

1. m是A的一个下界：对所有$a\in A$，都有$a\geqslant m$；
2. m是最大的下界：对A的任意下界m'，都有$m'\leqslant m$。

定理Théorème 2.43: 确界存在定理（实数的“完备性”）

istenceSupremum

实数集合$\mathbb{R}$中有上界的非空子集必有上确界。

证明Démonstration: 设A是$\mathbb{R}$的一个有上界的非空子集，a是A的一个元素，正整数M是A的一个上界。取一个整数K（为什么存在？）使得$K<a$，于是$K<M$。我们构造如下有理数序列(x_n)：
令$x_1=K,\ x_2=M;$
如果$\frac{x_1+x_2}{2}$是A的上界，令$x_3=x_1,\ x_4=\frac{x_1+x_2}{2}$；如果$\frac{x_1+x_2}{2}$不是$A$的上界，令$x_3=\frac{x_1+x_2}{2},\ x_4=x_2;$
对于$i=3,4,5,\ldots$，依次构造下去，如果$\frac{x_{2i-1}+x_{2i}}{2}$是$A$的上界，令$x_{2i+1}=x_{2i-1},\ x_{2i+2}=\frac{x_{2i-1}+x_{2i}}{2}$；如果$\frac{x_{2i-1}+x_{2i}}{2}$不是$A$的上界，令$x_{2i+1}=\frac{x_{2i-1}+x_{2i}}{2},\ x_{2i+2}=x_{2i}.$

我们首先证明： 我们构造的有理数序列(x_n)是柯西序列。

根据我们的构造，对任意正整数i，都有

$$|x_{2i+2}-x_{2i+1}|=(M-K)\frac{1}{2^i}<(M-K)\frac{1}{1.1^{2i}}<(M-K)\frac{1}{1.1^{2i-1}}$$
$$|x_{2i+1}-x_{2i}|\leqslant(M-K)\frac{1}{2^{i-1}}<(M-K)\frac{1}{1.1^{2i-2}}.$$

也就是对任意整数$i>1$，都有$|x_{i+1}-x_i|>(M-K)\frac{1}{1.1^{i-2}}$。

对任意两个正整数$k\,p$，有进行如下估计：

$$\begin{aligned}
|x_{k+p}-x_k|&=|(x_{k+p}-x_{k+p-1})+(x_{k+p-1}-x_{k+p-2})+\cdots+(x_{k+1}-x_k)|\\
&\overset{\text{三角不等式}}{\leqslant}|x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|\\
&\leqslant(M-K)\left(\frac{1}{1.1^{k+p-3}}+\frac{1}{1.1^{k+p-4}}+\cdots+\frac{1}{1.1^{k-2}}\right)\\
&=(M-K)\frac{\frac{1}{1.1^{k-2}}\left(1-\frac{1}{1.1^{p+1}}\right)}{1-\frac{1}{1.1}}\\
&\overset{1-\frac{1}{1.1^{p+1}}<1}{<}(M-K)\frac{11}{1.1^{k-2}}.
\end{aligned}$$

于是，任给一个有理数$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得$(M-K)\frac{11}{1.1^{N-2}} < \varepsilon$。所以任意的两个正整数$m, n$，只要$m > N, n > N$，不妨假设$m > n$ 都有$|x_m - x_n| = |x_{n+(m-n)} - x_n| < (M-K)\frac{11}{1.1^{n-2}} < (M-K)\frac{11}{1.1^{N-2}} < \varepsilon$，也就是我们证明了我们构造的序列是柯西序列。

下面我们证明：$x = [(x_n))]$是A的一个上界。

令$y_n = x_{2n}$并设$y = [(y_n)]$，根据性质2.20，$x = y$。根据序列的构造，对每个正整数i，都有$y_i = x_{2i}$是A的一个上界。任取$a \in A$，并用有理数柯西序列(a_n)作为$a = [(a_n)]$的代表元。（用反证法）假设$a > y$，也就是存在正有理数ε，存在正整数N_1使得

当$n > N_1$时，$a_n - y_n > \varepsilon$，　　(*)

由于(a_n)是柯西序列，对于正有理数$\frac{\varepsilon}{2}$，存在正整数N_2使得

当$n > N_2, m > N_2$时，$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.　　(**)

现在取定$N = \max\{N_1+1, N_2+1\}$，那么当$n > N$时，有

$$a_n - y_N = (a_n - a_N) + (a_N - y_N) > -\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据实数的序的定义，可以得到$a = [(a_n)] > y_N$，这与y_N是A的上界矛盾。于是假设$a > y = x$不正确，根据三歧性2.26得到$a \leqslant x$。于是我们证明了$x = y = [(y_n))]$是A的一个上界。

我们最后证明：A的任何上界都不小于$x = [(x_n)]$。

令$z_n = x_{2n-1}$并设$z = [(z_n)]$，根据性质2.20，$x = z$。假设实数$b = [(b_n)] < x = [(z_n)]$，则存在正有理数$\varepsilon$和正整数$N_3$，使得

当$n > N_3$时，$z_n - b_n > \varepsilon$.　　(***)

由于(b_n)是柯西序列，对于正有理数$\frac{\varepsilon}{2}$，存在正整数N_4使得

当$n > N_4, m > N_4$时，$|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.　　(****)

现在取定$N = \max\{N_3+1, N_4+1\}$，那么当$n > N$时，由(***)(****)得

$$z_N - b_n = (z_N - b_N) + (b_N - b_n) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是得到$Z_N > b$。根据序列的构造，对每个正整数i，都有$z_i = x_{2i-1}$不是A的一个上界，所以Z_N不是A的上界。也就是说，存在$a \in A$满足$a > Z_N$。自然地，$a > b$，也就是b不是A的上界。我们证明了，任意小于x的实数，都不可能是A的上界。故A的每个上界都要大于等于$x = [(x_n))]$。

综上所述，$x = [(x_n))]$是A的最小上界，即上确界。

□

这种思路叫做“二分法”。实数集合的“完备性”也可以通过下面的区间套定理等价地给出。

定理Théorème 2.44: 区间套定理（实数的“完备性”）

NestedIntervals

设$[a_n,b_n]\ n = 1,2,\ldots$是一串实数集上的闭区间，对所有正整数$n$满足$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$。如果任给$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得当$n>N$时总有$b_n-a_n\leqslant\varepsilon$(我们说$b_n-a_n$趋近于0)，那么存在唯一一个实数$c$，使得对所有正整数$n$满足$c\in[a_n,b_n]$。

练习Exercice 2.45

(用上确界定理)证明区间套定理。

定理Théorème 2.46: Bolzano-Weierstrass聚点定理（实数的“完备性”）

ano-Weierstrass

假设实数序列$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$有界，即存在实数m,M使得对所有自然数n都有$m\leqslant a_n\leqslant M$，那么$(a_n)$至少存在一个收敛的子列，收敛到的实数$a$满足$m\leqslant a\leqslant M$。

练习Exercice 2.47

(用区间套定理)证明聚点定理。

命题Proposition 2.48. 假设聚点定理成立，那么柯西收敛准则*2.40*成立。

证明Démonstration: 收敛的实数序列一定是柯西序列，与定理2.40的证明相同，不需要用到聚点定理。

现在假设实数序列(a_n)是柯西序列，我们需要通过聚点定理证明它收敛到某个实数。参考2.14，（实数）柯西序列(a_n)一定有界。由Bolzano-Weierstrass聚点定理，

存在(a_n)的子列(a_{n_k})。设(a_{n_k})收敛到实数a，我们下面证明(a_n)收敛到a。（不能使用2.39的结论，注意此处的不同！）任给$\varepsilon>0$。由于(a_{n_k})收敛到a,那么对于$\frac{\varepsilon}{2}>0$存在正整数N_1使得当$k>N_1$时，$|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$。由于$(a_n)$是柯西序列，那么对于$\frac{\varepsilon}{2}>0$存在正整数$N_2$使得当$n>N_2,m>N_2$时，$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$。我们选取$N=\max N_1+1,N_2+1$，于是当$n>N$时，

$$|a_n-a|=|(a_n-a_{n_N})+(a_{n_N}-a)|\leqslant|a_n-a_{n_N}|+|(a_{n_N}-a)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

我们证明了(a_n)收敛到a。 □

2.4.2 一些特殊的实数

实数e

f:EulerNumber

我们给出实数e的三种等价定义。

●直接构造

我们考虑有理数序列(a_n)，通项$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$，其中$k!$代表$k$的阶乘。显然$a_n$是单调递增序列。那么对任意正整数$n$和正整数$p$，都有

$$a_{n+p}-a_n=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k!}<\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=n+1}^{n+p}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

于是，对任意正有理数ε，存在N满足$\frac{1}{N}<\varepsilon$，使得当$m>N,n>N$时（不妨假设$m>n$），都有

$$|a_m-a_n|=a_m-a_n=a_{n+(m-n)}-a_n<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

所以(a_n)是有理数柯西序列。我们定义$[(a_n)]=\mathrm{e}$，或者说，有理数柯西序列(a_n)收敛到e。

●**使用上确界存在定理**2.43
我们考虑实数集合$\mathbb{R}$中的子集 $\{(1+\frac{1}{n})^n | n \in \mathbb{N}\}$。我们记$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$。对任意大于1的正整数$n$，用$C_n^k$代表从$n$个元素中取$k$个元素的组合数，可以通过分配律直接计算，

$$
\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + C_n^3\frac{1}{n^3} + \ldots + C_n^n\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 3
\end{aligned}
$$

从而得到$\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$是有上界的。根据上确界存在定理，这个子集有上确界。我们把这个上确界叫做e。

●**使用区间套定理**2.44 我们继续考虑上述序列$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$。它是一个单调递增的序列，因为

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} = &\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
=&1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \\
&\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \\
&\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\
>&a_n
\end{aligned}
$$

再考虑序列$b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$。我们可以利用伯努利不等式2.1得到

$$\begin{aligned}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}} &= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\\ &> 1+\frac{n+1}{n^2+2n}\\ &> 1+\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

从而得到

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=\frac{n+2}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

也就是(b_n)是一个单调递减的序列。

于是，我们由对所有正整数n，都有$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$,并且

$$b_n-a_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n<\frac{3}{n},$$

也就是(b_n-a_n)趋向于0。由区间套定理，存在唯一的实数落在所有的闭区间$[a_n,b_n]$中。我们把这个实数叫做e。

思考题Problème 2.49. 证明对e上述三种定义是等价的，也就是说，这三种方法定义的e是相等的。

开方

到目前为止，我们定义了实数的加减乘除运算。但是还没有定义诸如$\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[5]{\mathrm{e}}$究竟是什么？我们见过的指数函数$\mathrm{e}^x$，当$x$取无理数时函数值如何取？

我们首先定义实数的整数次方。

定义Définition 2.50: 实数的整数次方

设a是一个实数，n是一个正整数。定义$a^n=\overbrace{a\times\cdots\times a}^{n个}$，即$n$个$a$相乘，并规定$a^0=1$，$a^{-n}=(\frac{1}{a})^n$。这样，我们定义了实数的整数次方这样的运算。

定义Définition 2.51: 正实数有理次方

我们通过上确界定义正实数的有理次方:设a是一个正实数，p,q是两个正整数，定义$a^{\frac{p}{q}}=\sup\{x\in\mathbb{R}|x^q\leqslant a^p\}$，并规定$a^0=1$，$a^{-\frac{p}{q}}=(\frac{1}{a})^{\frac{p}{q}}$。

练习Exercice 2.52

通过e以及$e^{\frac{1}{n}}$的定义证明：

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \text{不等式}1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}<1+\frac{e}{n}\text{恒成立。}$$

练习Exercice 2.53

PowerIsPositive 证明一个正实数的有理次方$a^{\frac{p}{q}}$是一个满足$(a^{\frac{p}{q}})^q=a^p$正实数。

(这也需要证明？这也需要证明！)(看到证明$=,>,<$，第一反应一定是相减，或者同号不为零的时候相除。)

证明Démonstration: 集合$A=\{x\in\mathbb{R}|x^q\leqslant a^p\}$是非空的，因为0是集合中的元素；并且该集合$A$是有上界的，因为一定存在正整数$N_1$大于$a^p$这个正实数，那么集合$A$中任意一个正的元素$x$一定满足$x<N_1$，否则$x^q\geqslant N_1^q\geqslant N_1>a^p$。所以根据定理2.43，$a^{\frac{p}{q}}=\sup\{x\in\mathbb{R}|x^q\leqslant a^p\}$是一个实数。

同样的，存在正整数N_2满足$\frac{1}{N_2}<a^p$。所以$(\frac{1}{N_2})^q\leqslant\frac{1}{N_2}<a^p$，于是可以得出$\frac{1}{N_2}\in A$。那么 $a^{\frac{p}{q}}=\sup\{x\in\mathbb{R}|x^q\leqslant a^p\}\geqslant\frac{1}{N_2}>0$。

假设$(a^{\frac{p}{q}})^q>a^p$，那么存在大于2的整数N_3，使得$(a^{\frac{p}{q}})^q-a^p>\frac{2a^p}{N_3}$。于是由伯努利不等式2.1可以得到

$$\begin{aligned}(a^{\frac{p}{q}}-\frac{a^{\frac{p}{q}}}{qN_3})^q&=(a^{\frac{p}{q}})^q(1-\frac{1}{qN_3})^q\\&\geqslant(a^p+\frac{2a^p}{N_3})(1-\frac{1}{N_3})\\&=a^p+\frac{(N-2)a^p}{N_3^2}\\&>a^p\end{aligned}$$

我们得到$a^{\frac{p}{q}}-\frac{a^{\frac{p}{q}}}{qN_3}$也是集合$A$的一个上界。这与$a^{\frac{p}{q}}$是最小上界矛盾。

假设$(a^{\frac{p}{q}})^q<a^p$（所以$<N_1$），那么存在正整数N_4使得$(a^{\frac{p}{q}})^q+\frac{(q+1)!N_1^q}{N_4}<a^p$，那

么

$$
\begin{aligned}
(a^{\frac{p}{q}} + \frac{1}{N_4})^q &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (a^{\frac{p}{q}})^k (\frac{1}{N_4})^{q-k} \\
&\leqslant (a^{\frac{p}{q}})^q + \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q}{k} (a^{\frac{p}{q}})^k \frac{1}{N_4} \\
&< (a^{\frac{p}{q}})^q + \sum_{k=0}^{q-1} q! \cdot N_1^k \frac{1}{N_4} \\
&< (a^{\frac{p}{q}})^q + \sum_{k=0}^{q-1} q! \cdot N_1^q \frac{1}{N_4} \\
&< (a^{\frac{p}{q}})^q + \frac{(q+1)!\, N_1^q}{N_4} < a^p.
\end{aligned}
$$

我们得到$a^{\frac{p}{q}} + \frac{1}{N_4}$在集合$A$中，从而比$a^{\frac{p}{q}} + \frac{1}{N_4}$小的数$a^{\frac{p}{q}}$不可能是$A$的上界。产生矛盾。 □

练习Exercice 2.54

设a是一个正实数，那么

- 对任意两个有理数x, y，有$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 对任意两个有理数x, y，有$a^{xy} = (a^x)^y$;
- 考虑从$\mathbb{Q}$到$\mathbb{R}$的函数$f(x) = a^x$，当$a > 1$时$f(x)$严格单调递增，当$0 < a < 1$时$f(x)$严格单调递减;
- 任给实数$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当有理数x满足$|x| < \delta$时，有$|a^x - 1| < \varepsilon$。

证明Démonstration: (i)设$x = \frac{p_1}{q_1}$和$y = \frac{p_2}{q_2}$。我们有

$$
\begin{aligned}
(a^x \cdot a^y)^{q_1 q_2} &= (a^{\frac{p_1}{q_1}} a^{\frac{p_2}{q_2}})^{q_1 q_2} \\
&= \left((a^{\frac{p_1}{q_1}})^{q_1}\right)^{q_2} \left((a^{\frac{p_2}{q_2}})^{q_2}\right)^{q_1} \quad \text{实数乘法的交换律} \\
&= (a^{p_1})^{q_2} (a^{p_2})^{q_1} \quad \text{前面(2.53)的结论} \\
&= a^{p_1 q_2 + p_2 q_1}. \quad \text{实数乘法的交换律}
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
a^{x+y} &= (a^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}})^{q_1 q_2} \\
&= (a^{\frac{p_1 q_2 + q_2 q_1}{q_1 q_2}})^{q_1 q_2} \\
&= a^{p_1 q_2 + q_2 q_1}
\end{aligned}
$$

根据练习2.53的结果，$a^x \cdot a^y$和a^{x+y}都等于$(a^{p_1q_2+q_2q_1})^{\frac{1}{q_1q_2}}$，正实数有理数次方的定义（上确界的唯一性）可知$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$。

(ii) 同样设$x = \frac{p_1}{q_1}$和$y = \frac{p_2}{q_2}$，可以验证$(a^{xy})^{q_1q_2} = a^{p_1p_2} = ((a^x)^y)^{q_1q_2}$，从而$a^{xy} = (a^x)^y$。

(iii) 不妨假设$a > 1$($a < 1$时可以考虑a^{-x})。设x为正有理数，表示成$x = \frac{p}{q} > 0$，其中p, q均为正整数。当正整数$N > q$时，我们通过计算

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{N^2})^q &= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(\frac{1}{N^2})^k \\
&= 1 + q\frac{1}{N^2} + \frac{q(q-1)}{2}(\frac{1}{N^2})^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}(\frac{1}{N^2})^3 + \cdots + \frac{q!}{1!(q-1)!}(\frac{1}{N^2})^{q-1} + (\frac{1}{N^2})^q \\
&= 1 + \frac{q}{N}\frac{1}{N} + \frac{q(q-1)}{2N^2}(\frac{1}{N})^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!N^3}(\frac{1}{N})^3 + \cdots + \frac{q!}{(q-1)!N^{q-1}}(\frac{1}{N})^{q-1} + \frac{1}{N^q}(\frac{1}{N})^q \\
&< 1 + \frac{1}{N} + (\frac{1}{N})^2 + \cdots + (\frac{1}{N})^q \\
&< 1 + \frac{q}{N}
\end{aligned}$$

当$N > \frac{q}{a-1}$时有$1+\frac{q}{N} < a$。那么，只要取$N > q$且$N > \frac{q}{a-1}$，我们就有$(1+\frac{1}{N^2})^q < a < a^p$。所以，$1+\frac{1}{N^2}$在集合$\{t \in \mathbb{R} | t^q \leqslant a^p\}$中，根据定义，有$a^x = \sup\{t \in \mathbb{R} | t^q \leqslant a^p\} \geqslant 1 + \frac{1}{N^2} > 1$。现在假设$(x, y) \in \mathbb{Q}^2$并且$x < y$。那么由上面性质得$\frac{a^y}{a^x} = \mathrm{e}^{y-x} > 1$。故可由练习2.53的结论$a^x > 0$得出$a^x < a^y$。

(iv) 不妨假设$a > 1$($a < 1$时可以考虑$|a^{-x}| < \delta$并得到相同结论)。任给$\varepsilon > 0$。由于$(1+\frac{a}{n})^n \geqslant 1 + a > a$，所以$1+\frac{a}{n}$是集合$\{x \in \mathbb{R} | x^n \leqslant a\}$的上界，进而根据定义，$a^{\frac{1}{n}} = \sup\{x \in \mathbb{R} | x^n \leqslant a\} < 1 + \frac{a}{n}$。再次根据定义，$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{1+\frac{a}{n}}$。所以存在正整数$N > \frac{a}{\varepsilon}$，当$n > N$时有$0 < (1+\frac{a}{n}) - 1 < \varepsilon$并且$0 < 1 - \frac{1}{1+\frac{a}{n}} = \frac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} < \frac{a}{n} < \varepsilon$。

现在，我们取$\delta = \frac{1}{N+1}$，如果有理数x满足$0 < x < \delta$，根据单调性，$0 = a^0 - 1 < a^x - 1 < a^\delta - 1 = a^{\frac{1}{N+1}} - 1 < \varepsilon$；如果有理数$x$满足$-\delta < x < 0$，根据单调性，$-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N+1}} - 1 = a^{-\delta} - 1 < a^x - 1 < a^0 - 1 = 0$。总之，当有理数$x$满足$|x| < \delta$时，有$|a^x - 1| < \varepsilon$。 □

auchySequence **命题Proposition 2.55.** 设a是一个正实数，(x_n)是有理数柯西序列。那么(a^{x_n})是实数柯西序列。如果有理数柯西序列(y_n)与(x_n)是等价的，那么(a^{y_n})也与(a^{x_n})在实数柯西序列中等价。

证明Démonstration: 任给$\varepsilon > 0$。由于(x_n)是有理数柯西序列，所以它是有界的（参见练习2.14），可以设存在正实数M使得$|a_n| < M$对所有正整数n成立。根据上面性质得到存在$\delta > 0$，使得当有理数x满足$|x| < \delta$时，有$|a^x - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$。再次由于$(x_n)$是有理数柯西序列，所以存在正整数$N$，使得当$m > N, n > N$时，$|x_m - x_n| < \delta$。所以$|a^{x_m} - a^{x_n}| = |a^{x_n}(a^{x_m - x_n} - 1)| < |a^{x_n}|\frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon$。所以$(a^{x_n})$是实数柯西序列。

如果有理数柯西序列(y_n)与(x_n)是等价的，那么存在正整数K使得当$n > K$时，$|x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$。那么$|a^{x_n} - a^{y_n}| = |a^{x_n}(a^{x_n - y_n} - 1)| < |a^{x_n}|\frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon$。所以实数柯西序列$(a^{y_n})$也与$(a^{x_n})$等价。 □

定义Définition 2.56: 指数函数 Fonction Exponentielle

nentialFunction 设a是一个正实数，$x = [(x_n)]$是实数，其中(x_n)是有理数（柯西）序列。由命题2.55可知实数序列(a^{x_n})是实数柯西序列。由柯西收敛准则2.40，实数序列(a^{x_n})必收敛到某个实数，我们把它定义成a^x，从而也就定义了以a为底数的指数函数（fonction exponentielle de base a）。由练习2.41的结论可知此定义是良定的。

ntialFunction **思考题Problème 2.57.** 指数函数有如下性质：

- 对任意两个实数x, y，有$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 对任意两个实数x, y，有$a^{xy} = (a^x)^y$;
- 考虑从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的函数$f(x) = a^x$，当$a > 1$时$f(x)$严格单调递增，当$0 < a < 1$时$f(x)$严格单调递减;
- 任给实数$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$|x| < \delta$时，$|a^x - 1| < \varepsilon$。

练习Exercice 2.58

证明：指数函数$f(x) = \mathrm{e}^x$是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}^+$上的双射。

定义Définition 2.59: 对数函数Fonction logarithmique

rithmicFunction 从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}^+$上的指数函数$f(x) = \mathrm{e}^x$的反函数是从$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}$上的函数，称为（以e为底数的）对数函数(fonction logarithmique de base e)，记为$f(x) = \ln x$。

练习Exercice 2.60

rithmicFunction

- 对任意两个正实数x, y，有$\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
- 对任意实数x和任意正实数a，有$x \ln a = \ln a^x$;
- 对数函数$f(x) = \ln x$在定义域内严格单调递增;
- 任给实数$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$|x| < \delta$时，$|\ln(1 + x)| < \varepsilon$。

2.4.3 实数的其他构造方法（选读）

戴德金分割方法构造实数

戴德金分割的方法在有关数学分析的著作中多有介绍。在各种引入实数系的方法中，戴德金分割方法受到了高度的评价，被称作完全不依赖于空间与时间直观的人类智慧的创造物。

分划是数学中对于全序集的操作。对于给定的全序集A及其中某个元素x而言，将A分拆为两个非空集合，使得两者其一中所有元素（按照顺序）均在x之前、另一真子集中所有元素均在x之后。

常见的是对于全体有理数$\mathbb{Q}$的操作，对于有理数x，将有理数集合分拆为两个非空集合A和A'，若A和A'满足条件：

- $\forall a \in \mathbb{Q}$，关系式$a \in A$和$a \in A'$必有且只有一个成立;
- $\forall a \in A$，$\forall a' \in A'$，必有$a < a'$，并且$a \leqslant x$和$x \leqslant a'$两者在不同时取等号时均成立。

则称这样的分拆为有理数的一个分划，记为$A|A'$。其中集合A称为分划的下组，集合A'称为分划的上组。

根据分划中A和A'是否有最大数、最小数，可以将分划分为三种类型：

1. A中有最大数，A'中无最小数;
2. A中无最大数，A'中有最小数;
3. A中无最大数，A'中无最小数;

可以证明，"A中有最大数，A'中有最小数"的情况并不存在。这是因为如果A有最大数a，A'有最小数a'，则根据分割的定义可知$a < a'$。但是$\frac{a+a'}{2}$显然也是有理数，并且$a < \frac{a+a'}{2} < a'$，因此$\frac{a+a'}{2}$既不在 A 中，也不在 A' 中，这就与 $A \cup A'$ 是全体有理数矛盾。

第三种情况揭示了在有理数域中存在这样的一种"空隙"（A和A'之间的"界"），这个"空隙"所对应的数既不属于A，也不属于A'，因此它不是有理数，它所对应的数就是无理数，因此说第3种情况的分划定义了一个无理数。

参考书目：菲赫金哥尔茨《微积分学教程》，华东师范大学数学系《数学分析（第三版）》附录Ⅱ。

实数的十进制表示

这种魏尔斯特拉斯从十进小数表示出发的方法与前面方法不同，不需要引入新的数学对象作为无理数，而是从中学已有的定义出发，即承认十进制有限小数和无限循环小数是有理数，而十进制无限非循环小数则是无理数。这样就比较容易为中学生

所接受。因此也称为中学生的实数理论。 但为什么是十进制无限非循环小数? 这里不可避免地涉及到极限问题。在有了柯西准则之后，我们可以从数列极限或无穷级数之和来理解十进制无限非循环小数。

因此，为了避免逻辑上的循环定义，在将十进制无限非循环小数定义为无理数时，一开始不可能将它看成是一个无穷级数的和，而只是将它看成一个纯粹的记号，一个还不清楚有什么意义的数学对象。

在所有十进制小数全体组成的集合内引入加法、乘法运算，并规定其中任何两个小数之间的序，并验证它满足域公理、序公理、阿基米德公理和连续性公理这4组公理。

参考书目： 华罗庚的《高等数学引论》，张筑生的《数学分析新讲》

公理化方法

设$\mathbb{R}$是所有实数的集合，则：

1. 集合$\mathbb{R}$ 是一个域：可以作加、减、乘、除运算，且有如交换律，结合律等常见性质。

2. 域$\mathbb{R}$是个有序域，即存在全序关系$\geqslant$，对所有实数x, y和z： 若$x \geqslant y$则$x + z \geqslant y + z$;若$x \geqslant 0$且$y \geqslant 0$则$xy \geqslant 0$.

3. 集合$\mathbb{R}$满足戴德金完备性，即任意 $\mathbb{R}$的非空子集($S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$)，如果$S$在$\mathbb{R}$内有上界，那么$S$在$\mathbb{R}$内有上确界。

实数通过上述性质唯一确定。更准确的说，给定任意两个戴德金完备的有序域$\mathbb{R}_1$和$\mathbb{R}_2$，存在从$\mathbb{R}_1$到$\mathbb{R}_2$的唯一的域同构（存在一个双射，保持加、减等运算、序关系）。

2.5 广义实数系

我们在实数集中，加入$+\infty$和$-\infty$两个元素，称为广义实数集合，记作$\bar{\mathbb{R}}$。在$\bar{\mathbb{R}}$中规定：$-\infty < +\infty$；对任意$x \in \mathbb{R}$，有$-\infty < x$以及$x < +\infty$；对于$(x, y) \in \mathbb{R}^2$，“$<$”的定义继承实数的序的定义。于是我们在$\bar{\mathbb{R}}$中定义了序的关系。

我们定义$\bar{\mathbb{R}}$上的负运算“$-$”。$-(+\infty) := -\infty$,$-(-\infty) = +\infty$; 对于$x \in \mathbb{R}$，对其负运算得到$-x \in \mathbb{R}$。

于是广义实数系（广义实数集带上序关系和负运算）中，对任意广义实数x, y, z，满足

- 自反性:总有$x \leqslant x$;

- 三歧性 参见性质2.26

- 传递性: 若$x \leqslant y$，$y \leqslant z$则$x \leqslant z$；
- 负运算颠倒次序：若$x \leqslant y$则有$-y \leqslant -x$。

除了序关系和负运算之外，我们一般不定义$\overline{\mathbb{R}}$上的其他运算，比如加法。因为如果定义加法关系，我们就只能放弃加法的"消去律"，比如如$+\infty = 1 + \infty$可以通过"消去律"得到$0 = 1$的荒谬结论。

定义Définition 2.61: 序列趋向于正无穷

vergeToInfinity

设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$为实数序列。如果$\forall M \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，$a_n > M$，那么称序列$(a_n)$**趋向于正无穷**(tend vers plus l'infini)。(♠不能叫收敛到正无穷)，记作$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$。

练习Exercice 2.62

设f为从$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的单射。自然$(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$是一个实数序列。

1. 求证:序列$(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$发散。
2. 求证：$f(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$
3. 求证：如果序列设$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$收敛到实数A，那么序列$(a_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$也收敛到实数$A$.
4. （思索题）比较上述结论和练习2.39中结论的联系和区别。

2.6 复数 Nombre complexe

我们考虑集合$\mathbb{R}^2$并定义上面的加法与乘法：
对$\mathbb{R}^2$中的任意两个元素$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，定义$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$，定义 $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 \times x_2 - y_1 \times y_2, x_1 \times y_2 + x_2 \times y_1)$. 可以验证，这样定义的加法、乘法满足交换律和结合律，乘法对加法由分配律。 对于这样定义了加法与乘法的集合$\mathbb{R}^2$，叫做复数，记作$\mathbb{C}$，元素(a, b)重新约定记为$z = a + b\mathrm{i}$；特别地，$b = 0$时可以用a表示(a, b)，这样复数包含了实数。我们称a为$z = a + b\mathrm{i}$的实部（ partie réelle ），b为$z = a + b\mathrm{i}$的虚部（partie imaginaire）。

注释Remarque 2.63. 复数集合不是一个有序域。复数不能比较大小！
不是不能规定两个复数的大小，而是大小不满足"有序域"的要求。比如，对于$z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$)，可以定义一个序$z_1 \prec z_2$如果$x_1 < x_2$，或者$x_1 = x_2$且$y_1 < y_2$。但是，不能满足"$z_1 \succ 0$, $z_2 \succ 0$推出$z_1 \times z_2 \succ 0$"，比如对上面的例子，$\mathrm{i}^2 = -1 < 0$。

2.6.1 复数的指数表示和应用

平面上的点，经常可以用极坐标表示。平面上的点(x, y)到原点$(0, 0)$的欧式距离为$r = \sqrt{x^2 + y^2}$。于是， 点(x, y)在以原点$(0, 0)$为圆心r为半径的圆上，可以由$(r, 0)$出发逆时针旋转一个角度得到，这个角度我们设为θ，取值在$[0, 2\pi)$范围里。在极坐标系中，r称为 点(x, y)的半径坐标，θ称为点(x, y)的角坐标。并且有$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$.

由于复数$z = x + y\,\mathrm{i}$对应到平面上的点(x, y)，所以可以有类似的三角形式表示方法。

$$z = r\cos\theta + r\sin\theta\,\mathrm{i} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

根据欧拉公式，可以得到复数的指数表示。

$$z = r\cos\theta + r\sin\theta\,\mathrm{i} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

练习Exercice 2.64

验证棣莫弗公式2.2.

指数表示下的乘法、除法、n次方和开n次方根

两个复数的加法只是两个向量的向量加法，所以用代数表示比较方便。而乘以或或者除以一个固定复数的可以被看作同时旋转和伸缩，所以计算 乘法、除法、指数和开方根时，使用指数表示要容易许多。

设$z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,于是乘法为

$$z_1 z_2 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_1)}.$$

当$z_2 \neq 0$时，除法为

$$\frac{z_1}{z_2 =}\frac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_1)}.$$

由上面的式子可以看出，z_1乘以z_2，是在向量z_1的基础上，长度伸缩了r_2倍，角度逆时针旋转了θ_2，z_1除以z_2，是在向量z_1的基础上，长度伸缩了$\frac{1}{r_2}$倍，角度顺时针旋转了θ_2。特别地，乘以i对应于一个逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$ 弧度。

依据棣莫弗定理做整数n次幂的指数运算，

$$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_1}$$

任何数的整数n次方根为，实数或复数的，都可以用简单的算法找到。

$$\sqrt[n]{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

其中$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$， $\sqrt[n]{r}$表示实数r的n次方根。

共轭（conjugaison）、模长（module）、辐角（argument）

定义Définition 2.65: 共轭

对于任意一个复数$z = x + y\mathrm{i}$，它的共轭复数定义为$z = x - y\mathrm{i}$，记作$\overline{z}$，是z关于实数轴$\{z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$的“对称点”。

共轭与四则运算显然有以下关系：对任意两个复数z及w，

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\tfrac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

我们可以把共轭看作是从$\mathbb{C}$到$\mathbb{C}$的一个映射，把z映到$\overline{z}$。共轭映射是一个对合（involution）映射，即自己与自己的复合恰为恒同映射。

定义Définition 2.66: 模长与辐角

对于任意一个复数$z = x + y\mathrm{i}$，把它写成指数形式$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，并要求$\theta \in [0, 2\pi)$，那么其中的$r = \sqrt{x^2 + y^2}$就定义为$z$的模长。再定义复数$z$的辐角（argument）为指数表示中的$\theta$，记作$\arg(z)$。

对任意两个复数z及w，有关于加减法的三角不等式

$$\Big||z| - |w|\Big| \leqslant |z + w| \leqslant |z| + |w|$$

以及关于乘法和关于共轭的等式

$$|zw| = |z|\,|w|, \quad |z| = |\overline{z}|, \quad |z|^2 = z\,\overline{z} = \overline{z}\,z.$$

练习Exercice 2.67

求证：棣莫弗公式2.2对所有的$n \in \mathbb{Z}$都成立。

练习Exercice 2.68

解下列方程$(z \in \mathbb{C})$：
$z^2 = 1\, z^3 = 1, z^4 = 1, z^n = 1$其中$n \in \mathbb{N}$(解称为$n$次单位根，解集常记为$\mathbb{U}_n$)；
$z^2 = -1, z^2 = \mathrm{i}, z^2 = 1 + \mathrm{i}, z^2 = 1 - \mathrm{i}$(可以定义复数的平方根)；
$\mathrm{e}^z = -1, \mathrm{e}^z = \mathrm{i}, \mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}$(可以定义非零复数的对数)。