Mathématique Avencée II
高等数学 II
(AR5-AR7)

K.JIANG

Pris par F.YANG

如有问题联系作者

Email：2023100038@mail.buct.edu.cn

AR5 PRIMITIVE ET INTÉGRALE INDÉTERMINÉE

原函数与不定积分

1. 原函数（Primitive）

Def.(de la ***Primitive***)：F与f是定义在I上的两个函数，如果F在I上可微且$F'(\cdot) = f(\cdot)$，则说F是f的原函数。

原函数的性质：任何一个函数f的原函数是一个集合，即：

$$\exists F \in \{F + C | C \in \mathbb{R}\} \setminus F' = f$$

2. 不定积分（Intégrale indéterminée）

Def.(de l'***Intégrale indéterminée***)：函数$f(x)$在I上有定义，其所有原函数的集合叫做f的不定积分，记作：

$$F(x) = \int f(x)dx$$

3. 初等函数的不定积分表

初等函数的不定积分表非常有用，下面是初等函数的不定积分表的汇总：

函数	不定积分
$f(x) = C$	$\int Cdx = Cx + C'$
$f(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$f(x) = \ln x$	$\int \ln x dx = (x\ln x - x) + C$
$f(x) = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = x^{-1}$	$\int x^{-1} dx = \ln x + C$
$f(x) = sinx$	$\int sinxdx = - cosx + C$
$f(x) = cosx$	$\int cosdx = sinx + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + C$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctanx + C$
$f(x) = sinhx$	$\int sinhxdx = coshx + C$

$f(x) = coshx$	$\int coshxdx = sinhx + C$
$f(x) = sec^2x$	$\int sec^2xdx = tanx + C$
$f(x) = csc^2x$	$\int csc^2xdx = - cotx + C$
$f(x) = secx.tanx$	$\int secx.tanxdx = secx + C$
$f(x) = cscx.cotx$	$\int cscx.cotxdx = - cscx + C$
$f(x) = secx$	$\int secxdx = \ln(secx + tanx) + C$
$f(x) = cscx$	$\int cscxdx = \ln(cscx + cotx) + C$
$f(x) = tanx$	$\int tanxdx = - \ln(cosx) + C$
$f(x) = cotx$	$\int cotxdx = \ln(sinx) + C$

4. 不定积分的线性性质

对于某个不定积分，如果有$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$：

$$\int f(x) + \lambda.g(x)dx = \int f(x)dx + \lambda.\int g(x)dx = F(x) + \lambda.G(x) + C$$

因此，积分算子是线性算子。

5. 不定积分的计算

5.1 分部积分法（Intégrale par partie I.P.P.）

依据导数的 Leibniz 公式（导数乘法法则），如果有$F'(x) = f(x)$，$G'(x) = g(x)$，必然有：

$$(F.G)' = f.G + g.F$$

因此对于某个不定积分，

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f.g - \int f(x)g'(x)dx}$$

这种方法被称为分部积分法（I.P.P.）。

5.2 积分换元法（Changement des variables）

5.2.1 第一类积分换元法（正替换法）

依据导数的链式法则：

$$(F \circ G)' = fG.g$$

因此对于某个不定积分，

$$\boxed{\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

5.2.2 第二类积分换元法（逆替换法）

依据导数的反函数法则：

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

因此对于某个不定积分，

$$\boxed{\int f'(x(t))x'(t)dt = f(x(t)) + C}$$

5.3 有理函数的积分（Intégrale rationnelle）

***Def.**(de l'**Intégrale rationnelle**)*：对于两个多项式的比值，我们称为有理函数，其积分称为有理函数的积分：

$$I = \int \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}dx$$

这类积分的计算方法一般是分母配方、因式分解后进行待定系数法积分：

函数	不定积分
$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, (a > 0)$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, (a > 0)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
$f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}, (a > 0)$	$\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a + x}{a - x}\right\rvert + C$

5.4 三角换元法——Bioche 准则（Loi de Bioche）

对于三角函数可以用三角换元法进行计算，经验上的三角换元法称为 Bioche 准则：

被积函数	换元
$f(x) = -f(x)$	$u = cosx$
$f(x) = f(\pi - x)$	$u = sinx$
$f(x) = f(\pi + x)$	$u = tanx$
其他三角换元	$u = tan\frac{x}{2}$

AR6 L'INTÉGRALE D'UNE FUNCTION SUR UN SEGMENT

线段上的 Riemann 积分

1. 线段、分割、步长（Segment, Subdivision, Pas）

Def.*(de la* ***Segment****)*：**线段**指的是一个广义上的，一维的闭区间。

Def.*(de la* ***Subdivision****)*：**分割**指的是在线段$[a,b]$上定义的一个点集：

$$\sigma = \{x_i | x_i < x_{i+1}, i \in [0, n-1], x_0 = a, x_n = b\}$$

Def.*(de le* ***Pas****)*：**步长**指的是一个分割中距离最大两点的距离：

$$|\sigma| = max\{x_{i+1} - x_i\}$$

Def.*(de la* ***Somme de Darboux****)*：**Darboux 和**指的是对于任何分割上的下面式子：

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).(x_{i+1} - x_i)$$

这个式子取 f(ξ)的上确界得到的是 Darboux 上和，反之为 Darboux 下和：

$$\begin{cases} \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} sup\{f(\xi_i)\}.(x_{i+1} - x_i) \\ \underline{S} = \sum_{i=1}^{n} inf\{f(\xi_i)\}.(x_{i+1} - x_i) \end{cases}$$

Def.*(de* ***Intégable de Riemann****)*：假设一个定义在线段$[a,b]$上的函数f，有：$\exists I \subset \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall \sigma = \{x_i | x_i < x_{i+1}, i \in [0, n-1], x_0 = a, x_n = b\}, \forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$做 Darboux 和，即：

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).(x_{i+1} - x_i)$$

那么，假设该线段上有对于$(x_{i+1} - x_i)$趋近于步长$|\sigma|$的极限存在（记作I），即：

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).|\sigma| - I \right| < \varepsilon$$

则说这个函数是在该线段上 **Riemann 可积**的，这个积分被称为定积分，给

出记号（这句话也等价于 Darboux 上和和 Darboux 下和有相同的极限）：

$$\int_a^b f(x)dx = I \ ou \ \int_{[a,b]} f = I$$

2. Riemann 积分（Intégrale riemannienne）

2.1 Riemann 和（Somme de Riemann）

***Def.**(de la **Somme de Riemann**)*：对于任意一个 Riemann 可积的函数来说，都必然存在一个特殊地分割，这个分割保证了对于这个区间来说是均分的，这种分割我们将其称为**均匀分割**：

$$\sigma = \{x_i | x_i = a + \frac{i}{n}, i \in [0, n]\}$$

对于任何均匀分割的 Darboux 和称为 Riemann 和（Somme de Riemann），同理可以定义 Riemann 上和和 Riemann 下和：

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} . f(a + \frac{i}{n}(b-a))$$

2.1 Riemann 积分（Intégrale riemannienne）

***Def.**(de l'**Intégrale riemannienne**)*：任何可以写成下面 Riemann 和极限式的积分都是 Riemann 积分，或者说是线段上的可积积分就是 Riemann 积分：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} . f(a + \frac{i}{n}(b-a))$$

或者有这种定义：

如果一个函数的积分可以被一对 Riemann 和（Riemann 上和和 Riemann 下和）收敛与某值，那么这个积分是一个 Riemann 积分：

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} . inf\{f(a + \frac{i}{n}(b-a))\} =$$

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} . sup\{f(a + \frac{i}{n}(b-a))\}$$

3. Riemann 积分的性质

3.1 有界性（Bornitude）

对于任意一个 Riemann 可积的函数来说，其 Riemann 积分存在则该函数必然是有界的。

3.2 线性（Linéairité）

对于任意一个 Riemann 可积的函数来说，Riemann 积分算子是线性算子，即：

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

3.3 正定性与偏序性（Positivité, Croissance）

对于任意一个恒正的 Riemann 可积的函数来说，都必然正定且有偏序：

$$\begin{cases}\text{Positivité:}\quad \forall \mathrm{f}>0,\ \int_a^b f(x)dx>0\\ \text{Croissance:}\quad \forall \mathrm{f}>\mathrm{g},\ \int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx\end{cases}$$

3.4 分区间性（Chasle 关系，Relation de Chasle）

对于任意一个在区间$[a,b]$上有定义的 Riemann 可积的函数来说，任意在区间中的点c都满足：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

特殊地，如果是区间取反：

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

3.5 平移不变性（Invariance par translation）

对于任意一个在区间$[a,b]$上有定义的 Riemann 可积的函数来说，如果它在$[a+\alpha,b+\alpha]$上有等价的类似定义：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f(x-\alpha)dx$$

3.6 空集零值性

如果一个 Riemann 积分在一个空集上定义，那么其积分值恒 0。

4. 积分的均值和积分中值定理

4.1 均值（Moyenne）与有效值（Valeur efficace）

对于任意一个 Riemann 可积的函数，其均值这样定义：

$$m(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

对于任意一个 Riemann 可积的 T-周期函数，其有效值这样定义：

$$e(f)=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)dx}$$

4.2 第一积分中值定理（Le premier théorème de la moyenne pour les intégrales）

若对于任意一个 Riemann 可积的函数，有：

（1）函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）函数$g(x)$在$[a,b]$上**可积且不变号**（恒非正或恒非负）。

则：在这个区间上至少存在一点$\xi\in[a,b]\setminus$:

$$\int_a^b f(x).g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

4.3 第二积分中值定理（Le premier théorème de la moyenne pour les intégrales）

若对于任意一个 Riemann 可积的函数，有：

（1）函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）函数$g(x)$在$[a,b]$上**单调有界**。

则：在这个区间上至少存在一点$\xi\in[a,b]\setminus$:

$$\int_a^b f(x).g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

5. 积分不等式（Inégalités）

5.1 积分均值不等式（Inégalités de la moyenne）

$$\left|\int_a^b f(x).g(x)dx\right|\leq sup\{|f(x)|\int_a^b |g(x)|dx\}$$

对于$g=1$时：

$$\left|\int_a^b f(x).g(x)dx\right|\leq sup\{|f(x)|.(b-a)\}$$

5.2 积分三角不等式（Inégalités triangulaire）

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$$

5.3 Cauchy-Schwartz 不等式（Inégalités de Cauchy-Schwartz）

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx.\int_a^b g(x)^2dx$$

6. 不定积分与定积分的转化

6.1 微积分基本定理（Newton-Leibniz 公式，Théorème fondemental d'Analyse calcul）

从不定积分到定积分：

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

6.2 变上限准则

从定积分到不定积分：

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C$$

6.3 积分式求导

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{f(x)} h(t)dt = f'(x)h(f(x)) - g'(x)h(f(x))$$

AR7 ÉQUITION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE (E.D.O.)

常微分方程

1. 常微分方程（Équition différentielle ordinaire）

***Def.**(de la **Équition différentielle ordinaire**)*：**常微分方程**指的是一个含有常微分项的方程。

***Def.**(de la **Solution**)*：如果有一个项代入方程之后使得方程的等号成立，我们说这是这个方程的一个**解**。一系列解构成的集合称为**解集**。

***Def.**(de la **Structure de solution**)*：解的结构一般分为两个，即映射到核的**通解/齐次解（Solution homogène）**和映射到列空间的**特殊解（特解，Solution particulière）**。实际上的解由这两份部分构成：

$$y = y_h + y_p$$

⚠**Remarque：** 下面只讨论齐次解的情况，通解需要结合初始条件进行。

***Def.**(de l'**Équition homogène**)*：齐次方程指的是常数项等于 0 的方程。

2. 一阶常微分方程（Équition différentielle ordinaire de l'ordre 1）

***Def.**(de la **Équition différentielle ordinaire de l'ordre 1**)*：如果一个方程中的微分只有一阶，我们说这是一个一阶常微分方程，其形式和其解以下表给出：

类型	形式	通解
Type1	$y' = f(x)$	$y = \int f(x)dx$
Type2	$y' + \lambda y = 0$	$y = C.exp(-\lambda.x)$
Type3	$y' + \lambda.y = \mu$	$y = \frac{\mu}{\lambda}.exp(-\lambda.x)$
Type4	$y' + \gamma(x).y = 0$	$y = C.exp(-\Gamma(x))$
Type5	$y' + \gamma(x).y = \delta(x)$	$y = exp(-A(x))\int \beta(x).(-A(x))dx$

3. 线性常微分方程（Équition différentielle ordinaire linéaire, E.D.O.L.)

***Def.**(de l'**Équition différentielle ordinaire linéaire, E.D.O.L.**)*：当且仅当下面式子中的项$\alpha(x) = cte.$的时候，我们说这个方程是一个线性常微分方程：

$$\sum_{i}^{n} \alpha(x)y^{(i)}(x) = 0$$

Def.*(de l'**E.D.O.L. homogène**)*：如果上面式子中没有常数项，那么说这个式子是一个齐次线性常微分方程。

4. 线性二阶常微分方程（E.D.O.L de ordre 2）

Def.*(de la **Équition différentielle ordinaire de l'ordre 2**)*：如果一个方程中的微分最高阶数为 2，我们说这是一个二阶常微分方程。

Def.*(de la **Équition caractéristique**)*：对于一个形式如下的齐次二阶常微分方程，下面的二次方程被称为这个齐次二阶常微分方程的特征方程：

$$\begin{cases} y'' + Ay' + By = 0 \\ r^2 + Ar + B = 0 \end{cases}$$

Def.*(de la **Discriminant**)*：这个齐次二阶常微分方程的判别式就是其特征方程的判别式，记作：

$$\Delta = \sqrt{A^2 - 4.B}$$

对于一个形如：

$$y'' + Ay' + By = 0$$

的齐次二阶常微分方程的齐次解形式是：

判别式形式	特征方程情况	齐次解形式
$\Delta > 0$	$(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$	$y = C_1 exp(r_1.x) + C_2 exp(r_2.x)$
$\Delta = 0$	$r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$	$y = (C_1.x + C_2)exp(r.x)$
$\Delta < 0$	$(r_1, r_2) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$	$y = exp(\mathfrak{Re}(r_1).x)(C_1 sin(\mathfrak{Im}(r_1).x$ $+ C_2 cos(\mathfrak{Im}(r_2).x)$

5. 其他常微分方程的解法

5.1 常数变易法（也是一种换元法，Méthode de variation de constante）

对于下面的非齐次方程：

$$y'' + Ay' + By = f(x)$$

依据导函数的乘积可以设为：

$$\tilde{y} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

然后待定系数求解。

5.2 积分因子法

移动积分因子致使体系可积的方法。