Mathématique Avencée I
高等数学 I
(AR1-AR4)

K.JIANG

Pris par F.YANG

如有问题联系作者

Email：2023100038@mail.buct.edu.cn

AR1-3 LIMITE ET CONTINUITÉ

实数、极限与连续

1. 实数的表示：Cauchy 列（Suite de Cauchy）

Def.*(de la* ***Suite de Cauchy****)*：设$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$是一列有理数，若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\forall m>n\land n>N,\exists|a_m-a_n|<\varepsilon$，那么这个数列被称为一个有理 Cauchy 列。

1.1 数列的收敛与发散（Convergence et Divergence）

Def.*(de* ***Convergence****)*：设$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$是一列有理数，A是一个实数若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,\exists|a_n-A|<\varepsilon$，那么这个数列**收敛**于$A$。

Def.*(de* ***Divergence****)*：设$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$是一列有理数，$\forall A\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N,\exists|a_n-A|>\varepsilon$，那么这个数列**发散**。

1.2 收敛于同值

如果对于某两个 Cauchy 列，$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}\setminus,\exists|a_n-b_n|<\varepsilon$，则说这两个数列收敛于同值。

2. 邻域与无穷邻域（Voisinage et Voisinage d'infini）

Def.*(du* ***Voisinage****)*：设对于某一点x_0，其周围加减半径δ的范围称为以x_0为中心，δ为半径的**邻域**，记作

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

这个集合与$\{x_0\}$的差集称为以x_0为中心，δ为半径的**去心邻域**，记作

$$U^\circ(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$$

Def.*(du* ***Voisinage d'infini****)*：对于任何实数 N，记其相关的**无穷邻域**为：

$$U(\infty)=(-\infty,N)\cup(N,+\infty)$$

3. 子列（Sous-suite）

Def.*(de la* ***Sous-suite****)*：若(a_n)为一个序列，f为$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$的严格增函数，那么序列$(a_{f(n)})$称为(a_n)的子列，记作(a_{n_k})。

3.1 收敛等价定理（Théorème d'équivalence de convergence）

若(a_n)收敛于 A，其子列必然收敛于 A。

3.2 Cauchy 收敛准则（Critère de convergence de Cauchy）

若(a_n)是一个实数列，当且仅当该数列收敛于某实数时数列是一个 Cauchy 列。

3.3 收敛的值和可加性

若$(a_n),(b_n)$分别收敛于 A，B，则和列也收敛，收敛于 A+B。

4. 有界与确界

4.1 有界与上下界（Bornée, Majorée et Minorée）

若A是$\mathbb{R}$的一个子集：

（1）有上界：

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$$

（2）有下界：

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \geq m$$

（3）有界：

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq |\mu|$$

4.2 上确界与下确界（Supérieur et Inférieur）

（1）上确界（$sup(A)$）：即最小的上界：

$$\exists M = sup(A) \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M, \forall M' < M, \exists a \in A, a > M$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \setminus a > M - \varepsilon$$

（2）下确界（$inf(A)$）：即最大的上界：

$$\exists m = inf(A) \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a > m, \forall m' > m, \exists a \in A, a < m$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \setminus a < m + \varepsilon$$

4.3 确界存在性定理

若 A 有上界：A 必然有上确界；

若 A 有下界：A 必然有下确界。

4.4 确界-单调收敛定理

若(a_n)是一个实数列，若(a_n)单调递增且有上确界：(a_n)必然收敛。

若(a_n)是一个实数列，若(a_n)单调递减且有下确界：(a_n)必然收敛。

5. 区间套定理（数列夹逼定理 Théorème des intervalles emboîtés）

***Def**.(de la **Suite exhaustive de segment**)*：区间套指的是定义在区间I上具有下面性质的区间序列(J_n)：

（1）对于$\forall n \in \mathbb{N}$，J_n都是一个区间；

（2）对于$\forall n \in \mathbb{N}$，都有：$J_{n+1} \subset J_n \subset \cdots \subset J_1 \subset I$；

（3）$\lim_{n \to +\infty} \cup_i^n J_i = I$

区间套定理描述如下：对于任何一个区间套，都可以写成这样的双数列描述：

$$J_n = [a_n, b_n]$$

那么有：给定$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus, b_n - a_n < \varepsilon$，则存在唯一的实数$C$使得$C \in [a_n, b_n]$。

6. Bolzano-Weierstrass 聚点定理与致密性定理

***Def.**(des **Points limites**)*：设$S \subset \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$，若在邻域$U(\varepsilon, \xi)$内有无穷多点属于 S，则说$\xi$是 S 的一个聚点。

Bolzano-Weierstrass 定理描述如下：

（1）点集表述（聚点定理）：若$S \subset \mathbb{R}$,且S是有界无穷集，则S在$\mathbb{R}$上必然至少存在一个聚点。

（2）数列表述（致密性定理）：若(a_n)有界，则存在其的一个子列收敛（其极限即为原数列对应点集的聚点）。

7. 点极限与无穷极限（Limite au point et Limite à l'infini）

***Def.**(de la **Limite au point**)*：设$f(x)$在x_0的邻域内有定义，若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, A \in \mathbb{R} \setminus \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta, \exists |f(x) - A| < \varepsilon$，则称$f(x)$在**点$x_0$处的极限**为$A$，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

***Def.**(de la **Limite à l'infini**)*：设$f(x)$在x_0的邻域内有定义，若$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, A \in \mathbb{R} \setminus \forall x > N, \exists |f(x) - A| < \varepsilon$，则称$f(x)$在**无穷处的极限**为$A$，记作：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

8. 趋向正无穷与趋向负无穷（vers L'infini）

如果对于某个函数有：

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta, \exists f(x) > M$$

则说这个函数在x_0处趋向正无穷，记作：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \simeq +\infty$$

如果对于某个函数有：

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \setminus \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta, \exists f(x) < -M$$

则说这个函数在x_0处趋向负无穷，记作：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \simeq -\infty$$

9. 极限的线性性质

9.1 极限可加性（Additivité）

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + \lambda g(x) = A + \lambda B$$

9.2 极限可乘性（Multiplicativité）

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) . g(x) = A . B$$

9.3 极限可除性（Divisibilité）

设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $B \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

9.4 极限可复合性（Compositionnalité）

若$I \subseteq \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$在$I \setminus \{x_0\}$上有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(A) = B$：

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = B$$

10.极限的偏序性质与极限的局部性质

本节的讨论全部基于下面假设：

若$I \subseteq \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$在$I \setminus \{x_0\}$上有定义, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \simeq A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \simeq B$

10.1 极限偏序性（Partialité）

若两函数的极限都存在，$f(x) > g(x)$则：

$$A \geq B$$

10.2 极限局部性质（Propriété de la partie）

（1）若在某个区间内$A \geq B$，则在x_0的一个去心邻域上恒满足：

$$f(x) > g(x)$$

（2）若$f(x_0)\exists, \exists M \in \mathbb{R}_+ \setminus |f(x_0)| < M$，则$f(x)$在$x_0$处局部有上界：

11.夹逼准则（Théorème des gendarmes）

设I是包含x_0的区间，若三个函数f, g, h在$I \setminus \{x_0\}$上都有定义，那么对于任何$x \in I \setminus \{x_0\}$，有偏序关系：$g(x) \le f(x) \le h(x)$，若$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$，则：

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

12.极限的计算

12.1 极限的四则运算法则（即线性性质）

12.2 极限的换元计算

12.3 经典极限表

1	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
3（e 的定义）	$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$
4	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
6	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$
7	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{ln(x+1)} = 1$
8	$\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$
9	$\lim\limits_{x\to x_0} cosx = cosx_0$
10	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
11	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinhx}{x} = 1$
12	$\lim\limits_{x\to 0} xsin(\frac{1}{x}) = 0$
13	$\lim\limits_{x\to+\infty} sin(\frac{1}{x}) = non\ défini$
14	$\lim\limits_{x\to+\infty} cos(\frac{1}{x}) = non\ défini$

12.4 等价关系与等价无穷小（Relation équivalant）

Def.*(de la **Relation équivalant**)*：假设有一种关系 r，对于这个关系有下面三个性质：

（1）自反性：$\mathrm{ArA} \Leftrightarrow \mathrm{ArA}$

（2）对称性：$\mathrm{ArB} \Leftrightarrow \mathrm{BrA}$

（3）传递性：$\mathrm{ArC}, \mathrm{BrC} \Longrightarrow \mathrm{ArBrC}$

则称这种关系为**等价关系。**

那么显然，下面这种情况可以被定义为一种等价关系，我们定义下面等价关系，若两函数在x_0处都是无穷小量，这种关系被称为等价无穷小，反之称为等价无穷大：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x)\sim g(x)$$

等价无穷小列：

当趋于 0 时：

$$x\sim sinx\sim tanx\sim e^x-1\sim ln(x+1)\sim$$

$$sinhx\sim arcsinx\sim arctanx\sim arsinx\sim tanhx\sim artanhx$$

$$x^2\sim 2-2cosx$$

有无穷小关系后可以通过下面极限转化：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)\sim g_1(x) \\ f_2(x)\sim g_2(x)\end{cases}$$

13.函数在某点的连续

连续性有下面三种表述，如果函数$f(x)$在区间I上有定义，满足下面三种任意表述都有$f(x)$在x_0处连续：

（1）Cauchy 表述：$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, A\in\mathbb{R} \setminus \forall x, 0 < |x-x_0| < \delta, \exists |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$；

（2）左右极限表述：若$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$称该函数左连续，$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$称该函数右连续，如果一个函数左右极限相等则该函数在该点连续。

（3）Heine 归结表述：若$f(x)$是连续函数，对于I中任意收敛于x_0的 Cauchy 列(a_n)有$(f(a_n))$是收敛于$f(x_0)$的 Cauchy 列。

14.连续的线性性质

若$f(x),g(x)$是连续函数，那么下面的函数都连续：

（1）$f(x)\pm g(x)$

（2）$f(x).g(x)$

（3）$\frac{f(x)}{g(x)},g(x)\neq 0$

（4）$g\circ f(x)$

15.间断点的描述和间断点存在定理

间断点分为两类：

第一类间断点，包括下面两种情况：

（1）**可去间断点**，即：存在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$

（2）**跳跃间断点**，即：存在$\lim\limits_{x\to {x_0}^-}f(x),\lim\limits_{x\to {x_0}^+}f(x)$，但是$\lim\limits_{x\to {x_0}^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to {x_0}^+}f(x)$

第二类间断点，也叫做单调间断点：$\nexists\lim\limits_{x\to {x_0}^-}f(x)\vee\nexists\lim\limits_{x\to {x_0}^+}f(x)$

间断点存在定理：如果一个函数是单调的，那么它必然不存在第二类间断点和可去间断点。

16.介值定理和极值定理

16.1 介值定理（Théorème des valeurs intermédiaires）

若实函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续必然有$u\in[f(a),f(b)],c\in[a,b]\setminus f(c)=u$，特殊地，当存在两者区间跨零（即函数值有正负），则其中必然有零点（零点存在性定理）。

16.1 极值定理（Théorème des valeurs extrèmes）

若实函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续必然有这个函数是在这个区间有界的，并且可以取得最值。

17.一致连续与 Lipschitz 条件

Def*.(de la* ***Continuité uniforme****)*：若$f(x)$是I上的连续函数，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x,y)\in I^2\setminus|x-y|<\delta,\exists|f(x)-f(y)|<\varepsilon$则$f(x)$在$I$上一致连续。

17.1 Heine-Contor 定理

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则其一定在区间$[a,b]$上一致连续。

17.2 Lipschitz 条件

对于单变量函数来说，其 Lipschitz 条件是：

$$|f(x_1) - f(x_2)| = L.|x_1 - x_2|$$

满足这个条件的函数我们说它是 Lipschitz 的，其中L是的 Lipschitz 常数，如果一个函数是 Lipschitz 的那么这个函数**必然一致连续**（对于$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0 \setminus \cdots$）但是一致连续的函数不一定是 Lipschitz 的。

AR4 DÉRIVÉS ET DIFFÉRENTIELLE

导数与微分

1. 导数的定义

***Def.**(de la **Dérivé**)*：对于显式单变量函数 $y = f(x)$，定义该函数在点x_0处的导数为：

$$\dot{f}(x_0) = f'(x_0) \triangleq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

其中，$\dot{f}(\cdot)$称为 **Newton 记号**，$f'(\cdot)$称为 **Lagrange 记号**。由导数的定义可以知道：导数表示当Δx很小时，函数 $f(x)$ 在点x_0处的瞬时变化率。导数的几何意义是函数在某点处切线的斜率。

如果上面的极限存在则说这个函数**可导（Dérivable）**，反之不可导。可导必然连续，连续不一定可导。

1.1 导函数（Fonction dérivée）

***Def.**(de la **Fonction dérivée**)*：以函数 $f(x)$的定义域为定义域，将点x_0映射为的函数被称为函数 $f(x)$ 的导函数，记为$\dot{f}(x)$或者$f'(x)$。

1.2 微分算子与导数算子（Leibniz 记号）

***Def.**(de la **Différentielle**)*：对于显式单变量函数 $y = f(x)$，定义该函数在点x_0处的微分为：

$$dy = df(x) \triangleq f'(x)dx$$

其中式子中的$d(\cdot)$称为微分算子，移项可得：

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

这称为导数的 Leibniz 记号，$\frac{d}{dx}(\cdot)$称为导数算子。

1.3 偏导数（Dérivée partielle）

***Def.**(de la **Dérivée partielle**)*：如果某个函数是多元的，则其可以按照某一个变量求导，这被称为偏导数，其记号为：

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

导数的全微分和偏微分的关系是：

$$\frac{df(x_1,\cdots,x_n)}{ds}=\sum_i^n\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

2. 导数的计算

2.1 线性运算法则

（1）加减：

$$(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$$

（2）数乘：

$$(\lambda f)'(x)=\lambda.f'(x)$$

（3）乘法（Leibniz 法则）：

$$(f.g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

（4）除法：

$$(f/g)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)},g(x),g'(x)\neq 0$$

（5）复合（链式法则）：

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$$

（6）反函数（算子循环法则）：

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

2.2 参数方程的求导

对于下面的参数方程，且$\varphi(t)$有反函数，且两个方程都可导，$\varphi(t)\neq 0$。

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$$

则其导数为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

3. 高阶导数

对于函数 $f(x)\in C^n(I)$，则存在 k 阶导数（k<n）。

对于其高阶导数有下面记号形式：

$$\begin{cases} \text{Notation Newtonniene: } f\dddot{(x)}/f^{(k)}(x) \\ \text{Notation Lagrangienne: } f'''(x)/f^{(k)}(x) \\ \text{Notation Leibnizienne: } \dfrac{d^k f(x)}{dx^k} \end{cases}$$

3.1 高阶导数的线性性质与其 Leibniz 公式

对于函数 $f(x) \in \mathcal{C}^n(I)$，则存在 k 阶导数（k<n），有其线性性质：

$$(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(n)} + \lambda . g^{(n)}$$

对于函数 $f(x) \in \mathcal{C}^n(I)$，则存在 k 阶导数（k<n），有其乘法性质（Leibniz 公式）：

$$(f.g)^{(k)} = \sum_{i}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)} g^{(k)}$$

其中$\binom{k}{i}$为组合数的二项式记号，$\binom{k}{i} = C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$

4. 微分中值定理（Théorème des moyennes）

4.1 Fermat 引理（Lemme de Fermat）

对于既定点ξ与既定的函数 $f(x) \in \mathcal{C}(U(\xi))$，$f(x)$在$\xi$处可导且对于任意的 $x \in U(\xi)$都有，$f(x) \geq f(\xi)$或$f(x) \leq f(\xi)$。

则$\dot{f}(\xi) = 0$。

另一种表述是：若该函数可导，则极值点必然在驻点取到。

4.2 Rolle 定理（Théorème de Rolle）

对于既定函数 $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$，$f(x)$在$(a,b)$上可导且$f(a) = f(b)$。

那么必然存在一个值$\xi \in (a,b) \setminus \dot{f}(x) = 0$。

4.2 Lagrange 中值定理（有限增值定理，Théorème des accroissement finie）

对于既定函数 $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$，$f(x) \in \mathcal{C}^1((a,b))$。

那么必然存在一个值$\xi \in (a,b) \setminus \dot{f}(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

4.3 Cauchy 中值定理（广义有限增值定理，Théorème des accroissement finie généralisé）

对于既定函数 $(f(x), g(x)) \in (\mathcal{C}([a,b]))^2$，$(f(x), g(x)) \in (\mathcal{C}^1((a,b)))^2$，$\dot{g}(x) \neq 0$。

那么必然存在一个值$\xi \in (a,b) \setminus \frac{\dot{f}(\xi)}{\dot{g}(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

5. 导函数定理（Théorème des déffirentielles）

5.1 导函数极限定理

设 $f(x) \in \mathcal{C}(I)$，$f(x) \in \mathcal{C}^1(I)$，若$\lim\limits_{x \to x_0} \dot{f}(x)$存在，则$f$在$x_0$处也可导，$\dot{f}(x)$在$x_0$处连续。

5.2 导函数介值定理

设 $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$，$f(x) \in \mathcal{C}^1((a,b))$，若$\dot{f}(a) < \dot{f}(b)$，$u \in [f(a), f(b)]$，$\exists \xi \in [a,b] \setminus \dot{f}(\xi) = u$，特殊地，当存在两者区间跨零（即函数值有正负），则其中必然有零点（导函数零点定理）。

6. 导函数应用

6.1 单调性判断

单调递增：$\dot{f}(x) > 0$

单调递减：$\dot{f}(x) < 0$

6.2 极值点和最值点

驻点：$\dot{f}(x) = 0$

极大值：$\ddot{f}(x) < 0, \dot{f}(x) = 0$

极小值：$\ddot{f}(x) > 0, \dot{f}(x) = 0$

6.2 函数的凸性

6.2.1 凸性的定义（Jensen 不等式）

对于任意的$x_1 < x_2$，总有下面二元 Jensen 不等式成立，则称该函数是上凸的（Convexe）：

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f(\frac{x_1+x_2}{2}) \Leftrightarrow f(x_1) + (1-t)f(x_2) \leq f(t.x_1 + (1-t).x_2)$$

对于任意的$x_1 < x_2$，总有下面二元 Jensen 不等式成立，则称该函数是下凸的（Concave）：

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1+x_2}{2}) \Leftrightarrow f(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(t.x_1 + (1-t).x_2)$$

6.2.2 凸性的性质

（1）凸函数在开区间上一定连续；

（2）如果$f(x)$可导且其**导函数单增**，则$f(x)$必然**下凸**；

（3）如果一个**下凸**函数二阶可导，则其**导函数必然为正**；

定义**拐点**为：$\exists\delta>0, f(x)$在某点x_0的左邻域有上（下）凸性，在该点的右邻域有下（上）凸性，则称点x_0是函数$f(x)$的拐点。

（1）拐点处必然有：$\ddot{f}(x)=0$

（2）如果函数$f(x)$不是常函数且全域凸，那么该函数只有一个极值点

（3）如果$f(x)$与其反函数$f^{-1}(x)$都是单调递增的，那么两者凸性相反，如果两者都是单调递减的，那么两者凸性相同。

7. L'Hôpital 法则

7.1 未定式（Forme indéterminée）

如果对于某个极限有如下形式：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

且不定，即满足$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0.\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0的情况被称为未定式。

7.2 L'Hôpital 法则

如果对于下面的未定式满足下面的三个条件：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

（1）两个函数可导，且$g(x)\neq 0$；

（2）两个函数的极限都是 0 或者都是无穷；

（3）下面的极限存在：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\dot{f}(x)}{\dot{g}(x)}$$

那么有 **L'Hôpital 法则**：

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dot{f}(x)}{\dot{g}(x)}}$$

7.3 L'Hôpital 法则变式

其他未定式需要变换到 0/0 型进行定义：

未定式	条件	变换到 0/0
$\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$	-
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}}$
$0.\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0; \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$\infty - \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{g(x).f(x)}}$
0^0	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \exp(\frac{g(x)}{\ln\frac{1}{f(x)}})$
1^∞	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1; \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} \exp(\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}})$
∞^0	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty; \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \exp(\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}})$

8. 微分（Dérivée）

8.1 微分与微分学基本定理（Forme indéterminée）

设 $f(x)$在I上有定义，$\forall x_0 \in I$，若$\exists A \in \mathbb{R} \setminus f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R_{x_0}(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0}$，则称函数 $f(x)$在点x_0处可微，记：

$$df(x) = Adx$$

其中$R_{x_0}(x)$称为 $f(x)$在点x_0的 **Peano 余项**。

微分学基本定理：

如果某函数可微，那么对于这个函数来说存在余项函数$r(x)$使得：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

则：

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$$

8.2 微分学的精髓：Taylor-Young 定理（Théorème de Taylor-Young）

设$n \in \mathbb{N}$，$f(x)$在I上有定义，$\forall x_0 \in I$，$f(x) \in C^n((a,b))$，对于$\forall x \in I$：

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_{f,x_0,n}(x)}$$

其中求和项被称为 **Taylor-Young 多项式（Polynôme de Taylor-Young）**，最后的余项具有下面形式：

余项名称	余项形式	备注
Peano 余项	$R_{f,x_0,n}(x) = o(x-x_0)^n$	
Lagrange 余项	$R_{f,x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$	
Cauchy 余项	$R_{f,x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n$	
Schlomich-Roch 余项	$R_{f,x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p}$	$p=1$ 退化为 Cauchy 余项；$p=n+1$ 退化为Lagrange 余项