高等数学(I)讲义

巴黎居里工程师学院　　姜恺[1]

September 23, 2024

[1]Email: kai.jiang@mail.buct.edu.cn

Contents

Chapter 0

课程、教学、考核说明，大学数学知识简介

不一定喜欢数学，但一定可以不害怕数学。

想要学好数学，不必须爱上数学，但一定需要敬畏数学。

以下摘自维基百科。

数学，是研究数量、结构、变化以及空间等概念的一门学科，从某种角度看属于形式科学的一种。数学透过抽象化和逻辑推理的使用，由计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察而产生。数学家们拓展这些概念，为了公式化新的猜想以及从选定的公理及定义中建立起严谨推导出的定理。

基础数学的知识与运用是个人与团体生活中不可或缺的一环。对数学基本概念的完善，早在古埃及、美索不达米亚及古印度内的古代数学文本便可观见，而在古希腊那里有更为严谨的处理。从那时开始，数学的发展便持续不断地小幅进展，至16世纪的文艺复兴时期，因为新的科学发现和数学革新两者的交互，致使数学的加速发展，直至今日。数学并成为许多国家及地区的教育范畴中的一部分。

今日，数学使用在不同的领域中，包括科学、工程、医学、经济学和金融学等。数学对这些领域的应用通常被称为应用数学，有时亦会激起新的数学发现，并导致全新学科的发展，例如物理学的实质性发展中建立的某些理论激发数学家对于某些问题的不同角度的思考。

如上所述，数学主要的学科最先产生于商业上计算的需要、了解数字间的关系、测量土地及预测天文事件。这四种需要大致地与数量、结构、空间及变化（即算术、代数、几何及分析）等数学上广泛的子领域相关连着。除了上述主要的关注之外，亦有用来探索由数学核心至其他领域上之间的连结的子领域：至逻辑、至集合论（基础）、至不同科学的经验上的数学（应用数学）、及较近代的至不确定性的严格研究。

- **基础与哲学**

为了阐明数学基础，数学逻辑和集合论等领域被发展了出来。

数学逻辑专注于将数学置在一坚固的公理架构上，并研究此一架构的结果。就数学逻辑本身而言，其为哥德尔第二不完备定理所属的领域，而这或许是逻辑学中最广为流传的成果：总是存在不能被证明的真命题。

- **纯粹数学** (I)数量

数量的研究起于数，一开始为熟悉的自然数及整数与被描述在算术内的自然数及整数的算术运算。整数更深的性质于数论中有详细的研究，此一理论包括了如费马最后定理等著名的结果。数论还包括两个被广为探讨的未解问题：孪生素数猜想及哥德巴赫猜想。

当数系更进一步发展时，整数被视为有理数的子集，而有理数则包含于实数中，连续的量即是以实数来表示的。实数则可以被进一步广义化成复数。数的进一步广义化可以持续至包含四元数及八元数。从自然数亦可以推广到超限数，它形式化了计数至无限的这一概念。另一个研究的领域为大小，这个导致了基数和之后对无限的另外一种概念：阿列夫数，它允许无限集合之间的大小可以做有意义的比较。

(II)结构

许多如数及函数的集合等数学对象都有着内含的结构。这些对象的结构性质被探讨于群、环、域等抽象系统中，该些对象事实上也就是这样的系统。此为代数的领域。在此有一个很重要的概念，即广义化至向量空间的向量，它于线性代数中被研究。向量的研究结合了数学的三个基本领域：数量、结构及空间。向量分析则将其扩展至第四个基本的领域内，即变化。

创立于二十世纪三十年代的法国的布尔巴基学派认为：纯粹数学，是研究抽象结构的理论。 结构，就是以初始概念和公理出发的演绎系统。 布尔巴基学派认为，有三种基本的抽象结构：代数结构（群，环，域......），序结构（偏序，全序......），拓扑结构（邻域，极限，连通性，维数......）。

(III)空间

空间的研究源自于几何－尤其是欧几里得几何。三角学则结合了空间及数，且包含有著名的勾股定理。现今对空间的研究更推广到了更高维的几何、非欧几里得几何（其在广义相对论中扮演着核心的角色）及拓扑学。数和空间在解析几何、微分几何和代数几何中都有着很重要的角色。在微分几何中有着纤维丛及流形上的微积分等概念。在代数几何中有着如多项式方程的解集等几何对象的描述，结合了数和空间的概念；亦有着拓扑群的研究，结合了结构与空间。李群被用来研究空间、结构及变化。在其许多分支中，拓扑学可能是二十世纪数学中有着最大进展的领域，并包含有存在已久的庞加莱猜想，以及有争议的四色定理。庞加莱猜想已在2006年确认由俄罗斯数学家格里戈里·佩雷尔曼证明[27]，而四色定理已在1976年由凯尼斯·阿佩尔和沃夫冈·哈肯用电脑证明[28]，而从来没有由人力来验证过。

(IV)变化

了解及描述变化在自然科学里是一普遍的议题，而微积分更为研究变化的有利工具。函数诞生于此，做为描述一变化的量的核心概念。对于实数及实变函数的严格研究为实分析，而复分析则为复数的等价领域。黎曼猜想－数学最基本的未决问题之一－便是以复分析来描述的。泛函分析注重在函数的（一般为无限维）空间上。泛函分析的众多应用之一为量子力学。许多的问题很自然地会导出一个量与其变化率之间的关系，而这在微分方程中被研究。在自然界中的许多现象可以被动力系统所描述；混沌理论则是对系统的既不可预测而又是决定的行为作明确的描述。

- **离散数学**

离散数学是指对理论计算机科学最有用处的数学领域之总称，这包含有可计算理论、计算复杂性理论及信息论。可计算理论检验电脑的不同理论模型之极限，这包含现知最有力的模型－图灵机。复杂性理论研究可以由电脑做为较易处理的程度；有些问题即使理论是可以以电脑解出来，但却因为会花费太多的时间或空间而使得

其解答仍然不为实际上可行的，尽管电脑硬件的快速进步。最后，信息论专注在可以储存在特定媒介内的数据总量，且因此有压缩及熵等概念。

作为一相对较新的领域，离散数学有许多基本的未解问题。其中最有名的为P/NP问题－千禧年大奖难题之一。

• **应用数学**

应用数学思考将抽象的数学工具运用在解答科学、工商业及其他领域上之现实问题。应用数学中的一重要领域为统计学，它利用概率论为其工具并允许对含有机会成分的现象进行描述、分析与预测。大部分的实验、调查及观察研究需要统计对其数据的分析。数值分析研究有什么计算方法，可以有效地解决那些人力所限而算不出的数学问题；它亦包含了对计算中舍入误差或其他来源的误差之研究。

(I) 数学物理

力学（经典力学与量子力学）、光学（几何光学、波动光学）、电磁学、......

（II）化学

除了实验总结规律，还需要运用非实验的推算来解释或预测化合物的各种现象，称为理论化学或数学化学，一般可以泛泛地分为电子结构、动力学和统计力学几个方面。如在解决预测化合物的反应活性、对处于各物态的大块物质化学的数学表征(例如，化学动力学的研究)和研究更晚近的数学进展在基础研究的适用性(例如拓扑学原理在研究电子结构方面的可能应用)。

理论化学的很大一部分可以被归类为计算化学，而计算化学作为理论化学的一个分支，常特指那些可以用电脑程序实现的数学方法。 计算化学在研究原子和分子性质、化学反应途径等问题时，常侧重于解决以下两个方面的问题：(1)为合成实验预测起始条件， (2)研究化学反应机理、解释反应现象。

2013年因“为复杂化学系统创造了多尺度模型”，马丁·卡普拉斯、迈可·列维特和阿里耶·瓦舍尔一同获得诺贝尔化学奖。

(III)数学生物学

数学生物学是一个跨学科的领域，其主要目标是利用数学的技巧和工具为自然界，特别是生物学中的过程建模并进行分析。一些生物数学界的热门研究领域包括演化生物学、生态学、细胞模型和分子生物学、生理系统模型。这些项目所研究对象的共同特点是极其复杂并具有非线性的动力特征。一种观点认为，此类多种因素交互的问题只能通过数学或计算机模拟的方式来理解。

最经典的例子有，在生态学中，族群动态学（Population dynamics）描述生物族群大小的变化。马尔萨斯的《人口论》提出指数成长的人口模型，可以说是最早的族群动态学理论。与人口动力学密切相关的另一领域是数学流行病学，其主要研究内容为传染病在易感人群中的传播。

其他的例子包括，分子生物学中，生物组织培养动力学，酶化学和酶动力学，癌症模型与模拟、疤痕组织形成模型 等等。

应用数学还包括 数值分析、最优化、概率论、数理统计学、计量金融、博弈论、数理经济学、控制论等。

0.1 数学语言与数学符号

我们现今所使用的大部分数学符号在16世纪后才被发明出来的。在此之前，数学以

文字的形式书写出来，这种形式会限制了数学的发展。现今的符号使得数学对于专家而言更容易掌握，但初学者却常对此望而却步。它被极度的压缩：少量的符号包含着大量的信息。如同音乐符号一般，现今的数学符号有明确的语法，并且有效地对信息作编码，这是其他书写方式难以做到的。符号化和形式化使得数学迅速发展，并帮助各个科学领域建立基础支撑理论。

数学语言亦对初学者而言感到困难。如“或”和“只”这些字有着比日常用语更精确的意思。亦困恼著初学者的，如“开”和“闭”等字在数学里有着特别的意思。数学术语亦包括如“同胚”及“可积性”等专有名词。但使用这些特别符号和专有术语是有其原因的：数学需要比日常用语更多的精确性。数学家将此对语言及逻辑精确性的要求称为“严谨”。但在现实应用中，舍弃一些严谨性往往会得到更好的结果。

严谨是数学证明中很重要且基本的一部分。数学家希望他们的定理以系统化的推理依著公理被推论下去。这是为了避免依著不可靠的直观而推出错误的“定理”，而这情形在历史上曾出现过许多的例子。在数学中被期许的严谨程度因着时间而不同：希腊人期许著仔细的论证，但在牛顿的时代，所使用的方法则较不严谨。牛顿为了解决问题所做的定义，到了十九世纪才重新以小心的分析及正式的证明来处理。今日，数学家们则持续地在争论电脑协助证明的严谨度。当大量的计算难以被验证时，其证明亦很难说是足够地严谨。

公理在传统的思想中是“不证自明的真理”，但这种想法是有问题的。在形式上，公理只是一串符号，其只对可以由公理系统导出的公式之内容有意义。希尔伯特计划即是想将所有的数学放在坚固的公理基础上，但依据哥德尔不完备定理，每一相容且能蕴涵皮亚诺公理的公理系统必含有一不可决定的公式；因而所有数学的最终公理化是不可能的。尽管如此，数学常常被想像成只是某种公理化的集合论，在此意义下，所有数学叙述或证明都可以写成集合论的公式。

三个目标

1. 知识：学会课程中的数学知识
2. 能力：会使用所学问题解决其他学科以及生活中的实际问题。
3. 素养：逐步体会理解数学的思维方式，遇到困难的未知问题，勇于用数学思维思考并尝试解决。

评分标准: **{50%平时成绩+50%期末成绩}**,其中平时成绩包括 30%课堂（习题课）表现，40%作业，30%期中和平时测验

涉及平时成绩考核要素：

- 纪律。（不要缺课逃课，迟到早退，上课做与课程无关的事情）
- 作业完成情况(坚决杜绝抄袭)
- 数学学习习惯。（比如随身有笔和纸）
- 课堂表现。（比如主动思考，积极回答问题）
- 群里提问、回答有价值的问题。

课程企业微信群：

- 讲义，习题，作业
- 课程、考试等通知
- 参考文献，一些参考学习资料（慕课，B站，知乎）

教材使用方法：

颜色标记。

重要！！！须倒背如流　重要！！须记忆深刻　重要！须记住　重要。需记住

重要！！！须理解透彻　重要！！须理解清楚　重要！须理解　重要。需要理解

作为扩展材料，不做要求。
定义最重要！数学之本。
定理：记住条件和结论，会推导和应用。
例子（反例）是帮助理解定义和定理的最有力的武器，没有之一。

Chapter 1

基础知识

1.1 逻辑 Logique

1.1.1 数学命题

命题是一个可以判断真或假的陈述句。数理逻辑的一条基本公理是，每个良好构成的命题都或是真的，或是假的，而不可两者都是。

所谓良好陈述，是指的陈述有意义。比如$2+3=5$有意义，$2+3=6$也有意义，但是2星级宾馆 +3星级宾馆$=5$星级宾馆就没有意义。数学上，$\frac{0}{0}=1$就没有意义，两个复数比较大小没有意义。

一个命题的真假，是该命题的内在属性而不以观察此命题的人的意见为转移（一切定义和记号都明确）。所以，要证明一个命题是 真的，只需证明它不是假的；同时要证一个命题是假的，只需证明它不是真的.这是可以使用**反证法**的理论基础。比如"今天很热"，"她真漂亮"就不算作数学命题。

- **逻辑与(合取)** 设X是命题，Y也是命题，那么命题"X且Y"称为X和Y的合取，记为$X\wedge Y$。当X和Y都真时$X\wedge Y$为真，当X与Y不都真时$X\wedge Y$为假。

- **逻辑或(析取)** 设X是命题，Y也是命题，那么命题"X或Y"称为X和Y的析取，记为$X\vee Y$。只要X与Y中有一个为真时$X\vee Y$就是真的，当X与Y都假时$X\vee Y$为假。比如$4\geqslant 2$就是$4>2$或$4=2$，因为$4>2$为真，所以$4\geqslant 2$为真。

- **否定** 设X是命题，X的否定指的是：命题"X不真"或"X不成立"，记作$\neg X$。$\neg X$为真当且仅当X为假。

  ♠ 否定的是"动词"：$1+1=2$的否定是$1+1\neq 2$，不是$1+1=3$。"我爱你"的否定是"我不爱你"，而不是"我爱他/她"。

- **蕴含** 设X是命题，Y也是命题，那么命题"若X则Y"称为X蕴含Y，有时也说"当X 成立时，Y也成立"，记为$X\implies Y$。命题"若X则Y"依赖于X的真假：

– 如果X是真的，那么当Y真时$X \implies Y$是真的，而当Y假时$X \implies Y$是假的；

– 如果X本身就是假的，那么$X \implies Y$总是真的，不管Y是真的还是假的！

♠ 蕴含是伴随今后数学学习过程的最重要的逻辑概念。注意以下两点:
"若X则Y"是一个整体。比如"若$a=2$则$a^2=4$"，可以说$a=2 \implies a^2=4$。但是"若$a=2$则$3^2=9$"，尽管$3^2=9$是真命题，但它不是由$a=2$推导出的（$a=2$不是$3^2=9$的原因），那么我们不能说$a=2 \implies 3^2=9$。
前提为假，命题一定为真："如果$1+1=3$，那么$1+1=2$"是真命题（但不说$1+1=3$蕴含$1+1=2$）;"如果$1+1=3$，那么$1+1=4$"也是真命题（可以说$1+1=3$蕴含$1+1=4$），总之对于"杠精"（前提为假），他/她说什么都对的！

原命题、逆命题、否命题和逆否命题

我们设定一个有蕴含关系的命题$X \implies Y$为原命题，那么

- $Y \implies X$称为原命题的逆命题（Implication réciproque）
- $\neg X \implies \neg Y$称为原命题的否命题
- $\neg Y \implies \neg X$称为原命题的逆否命题（Proposition contraposée）

一些结论和注释。

- 命题$X \wedge \neg X$一定为假，命题$X \vee \neg X$一定为真。
- 命题$\neg(\neg X)$与命题X等价。
- 否定合取的命题，需要把"且"转化成"或"，否定析取的命题，需要把"或"转化成"且"。
- 命题$X \implies Y$与命题$(\neg X) \vee Y$表达相同的含义，故它们要么同为真命题，要么同为假命题。
- 命题的否定和否命题不是一回事：任何命题都有否定，而否命题只对有蕴含关系"$\implies$"的命题才有意义，比如$2>1$的否定是$2 \leqslant 1$，但没有否命题一说。
- 命题$X \implies Y$的否定不是$X \implies \neg Y$，而是$X \not\Rightarrow Y$，也就是$X \wedge \neg Y$。

1.1.2 变量与量词

变量

一个变量是一个符号，它代表一定类型的数学对象——整数、向量、矩阵之类的东西。在几乎所有情况下，变量所代表的对象类型必须明确，否则就不能用这个变量

来构成命题，更不能用来叙述定理。换言之，当出现一个变量、一个符号时，在没有事先约定的情况下，必须说明它是类型，否则就不认为是一个良好陈述。

一个含有变量的命题的真假可能依赖于命题的语境，比如，命题“方程$x^2-2=0$有解”，当在有理数中考虑时，命题为假；当在实数中考虑时，命题为真。设x是实数，那么$x^2-2=0$只是一个叙述或表达式，本身不能判别真假，只有代入具体的数才能成为一个可判断真假的命题；但设x是实数，“$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$”是真命题。

变量通常用字母表示，并且有约定俗成的表示，比如m,n一般是自然数或整数，f,g,h常用来表示函数，x,y则经常代表函数中的变量。而对于同类型的多个变量，可以用下标加以区别，比如3个函数f_1,f_2,f_3，n个实数$x_1,x_2,\ldots,x_n$。

除了英文字母，还有希腊字母可以用。下面列举部分数学里常用的。

字母	拼写	中文读法	字母	拼写	中文读法	字母	拼写	中文读法
$A,\ \alpha$	alpha	阿尔法	$B,\ \beta$	beta	贝塔	$\Gamma,\ \gamma$	gamma	伽马
$\Delta,\ \delta$	delta	德尔塔	E,ϵ,ε	epsilon	艾普西隆	$H,\ \eta$	eta	伊塔
$\Theta,\ \theta$	theta	西塔	$\Lambda,\ \lambda$	lambda	拉姆达	$\Xi,\ \xi$	xi	克西
$\Pi,\ \pi$	pi	派	$P,\ \rho$	rho	柔	$\Sigma,\ \sigma$	sigma	西格马
Φ,ϕ,φ	phi	斐	Ψ,ψ	psi	普西	$\Omega,\ \omega$	omega	奥米伽

全称量词

“所有”、“一切”、“全部”（pour tout）等称为全称量词。对于含有由全称量词修饰的变量的命题，命题“对于指定类型的一切变量x，命题$P(x)$为真”指的是，对于每一个该类型的变量x，$P(x)$都是真的。

证明这样的命题有如下套路：如果变量x可以代表的元素仅为有限多个，那么，自然可以用枚举法一一验证，比如“所有大于2小于100的偶数都可以写成两个素数的和”。但如果变量x可以代表的元素仅为无穷多个，那么枚举法失效，此时，要**任意**取定一个该类型的变量x，然后对这个具体对象来证明$P(x)$为真，比如“对于所有正实数x，都有$\sin x<x$”。反之，如果能造出哪怕只是一个反例，即一个该类型的元素y,却使$P(y)$是假的，那么命题就是假的。

任意x可以用数学符号$\forall x$表示。

注意♠，造一个例子使$P(x)$为真并不能证明对于一切x命题$P(x)$为真。所以不能只用一个例子来证明“对于一切(pour tout)”的命题。有时可能命题里面没有直接出现“所有”、”一切”等字样，但是仍然暗含着全称量词，比如证明$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，隐含着对一切集合$A,B,C$，所以不能随便设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{3,4,5\}$来论证。反之, 要推翻“对于所有实数$x$都满足$x^2>0$，”只需要找到一个反例$x=0$时不成立。

存在量词

“存在”称为存在量词。对于含有由存在量词修饰的变量的命题，命题$P(x)$为真指的是，**存在**（至少一个）指定类型的x，使得$P(x)$为真。虽然可能存在多于一个这样

的x，但要证明这样的一个命题，只需提出一个这样的x的例子即可。如果要求使得这样的x既存在又唯一，那就应该使用"存在唯一的x"这样的量词。

存在x可以用数学符号$\exists x$表示，存在唯一x可以用数学符号$\exists! x$表示。

想要说明存在性，通常有两种情况。一是"找到它"，比如存在$x \in \mathbb{R}$使得$x^2 - 2 = 0$，$x = \sqrt{2}$是满足方程的，我们"找到了它"，所以自然证明了存在。第二种，不一定能找到具体的x，比如"存在$x_0 \in \mathbb{R}$使得$x^5 + \pi x^4 + \mathrm{e} x^3 + \sqrt{2} x^2 + x + 1 = 0$"，我们无法求出方程的解，但是$x_0$一定存在，这就需要严格的数学证明（这个命题需要用到连续函数的性质）。

练习Exercice 1.1

存在两个无理数a和b，使得a^b是有理数。（可以用两种方法证明。）

嵌套量词

把两个或多个量词嵌套在一起。

例如：$\forall C > 0$，$\exists a \in \mathbb{R}$，使得$a^2 = C$。

一些性质与结论

全称命题与存在命题的否定。

- 否定一个全称命题就产生一个存在命题。"任意天鹅都是白的"的否定并不是"任意天鹅都不是白的"，而是"并非一切天鹅都是白的，也就是"存在一个天鹅不是白的"。

- 否定一个存在命题就产生一个全称命题。"存在黑天鹅"的否定不是"存在非黑的天鹅"而是"不存在黑天鹅"，也就是"任意天鹅都不是黑的"。

嵌套量词的次序 ♠量词的顺序非常重要，因为后面的变量可能依赖于前面的变量。

- 在没有限制时，可以交换两个"任意"量词。命题"$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$，等式$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$成立"和命题"$\forall b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$，等式$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$成立"是一回事。但是，当后一个变量和前一个变量有关时，不能交换顺序。比如$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b > a$，不等式$\dfrac{a}{b} < 1$成立。

- 在没有限制时，可以交换两个"存在"量词。命题"$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}$，使得等式$a^2 + b^2 = 0$成立"和命题"$\exists b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}$，使得等式$a^2 + b^2 = 0$成立"是一回事。 但是，当后一个变量和前一个变量有关时，不能交换顺序。比如$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b < a$，使得$a^2 - b^2 = 0$成立。

- 不可以交换"对于一切"和"存在一个"。命题"对于每个整数n，都存在一个整数m比n大。"和命题"存在一个整数m比每个整数n都大"完全不同。逻辑上是有先后的：玩剪刀石头布，你任意出拳，（在此之后）我总能有一种出拳办法赢你。

1.1.3 练习

练习Exercice 1.2

理解下面的命题，判断真假并给出理由。

- 对于每个正数x,以及每个正数y有$y^2 = x$，
- 存在一个正数x,使得对于每个正数y有$y^2 = x$,
- 存在一个正数x,并存在一个正数y，使得$y^2 = x$,
- 对于每个正数y,存在一个正数x，使得$y^2 = x$,
- 存在一个正数y,使得对于每个正数x，有$y^2 = x$.

练习Exercice 1.3

给出各个命题的否定。

- 对于任意正数x,对于任意正数y，等式$y^2 = x$成立，
- 存在一个正数x,对于任意正数y，等式$y^2 = x$成立,
- 存在一个正数x,存在一个正数y，使得等式$y^2 = x$成立,
- 对于任意正数y,存在一个正数x，使得等式$y^2 = x$成立,
- 存在一个正数y,对于任意正数x，等式$y^2 = x$成立.

练习Exercice 1.4: 按照下列句式造句(三连)

- 任意对象A，存在与A有关的对象B，使得只要对象C满足（某个与B有关的）条件时，总有（某个与A有关的）D事件必然成立。
  例句：对于任意一个国家A，存在这个国家制定的酒驾标准B，使得只要驾驶员血液中酒精含量超过B时，就违反了A国的法律。
- 存在对象A，对任意的条件B，虽然（满足某个与B有关的）条件C发生了，仍有（某个与A有关的）D事件会发生。
  例句： 存在醉驾要刑拘的法律A， 任意要求一个检查力度B， 虽然交警上路检查频率C高于要求，有漏网之鱼逃避了法律制裁这件事仍会发生。

记号$\sum$和$\prod$以及常见变量字母

求和符号（ le symbole de sommation） $\sum$，是欧拉于1755年首先使用的一个数学符号，源自于希腊文“增加”的首字母。 常用来简化有多个数值相加的数学表达式。

假设有n个数值$x_1, x_2, \cdots, x_n$，则这n个数值的总和$x_1+x_2+\cdots+x_n$可记为$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$。也就是

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

式子中的字母i称为求和指标，取值是从1到n的自然数。

比如，如果$x_1, x_2, \cdots, x_n$是等差数列，那么$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n(x_1 + x_n)}{2}$。如果$x_1, x_2, \cdots, x_n$是公比为$q \neq 0$的等比数列，那么$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}$。

类似地，我们有乘积符号，可以用希腊字母Π来表示，用来简化有多个数值相乘的数学表达式

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ \cdots \ \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$

比如$\prod_{i=1}^{n} i = n!$

1.2 集合 Ensemble

何谓集合? G. Cantor 曾说: “集合意谓吾人感知或思想中一些确定的, 并且相互区别的对象汇集而成的整体, 这些对象称为该集合的元素.” 百余年后回首, 仍然得承认 Cantor 的说法审慎而精当. 即便如此, 不加节制地操作这些“确定的”, “相区别”的对象将导致悖论, 譬如著名的 Russell 佯谬便考虑了所有集合构成的“集合” $\mathbf{V}$, 构造其子“集合” $\{x \in \mathbf{V} : x \notin x\}$ 而导出矛盾. 现代集合论处理此问题的主流方法是限制概括原理 $\{x : x$ 满足性质 $P\}$ 的应用范围, 并在一阶逻辑与合适的公理系统下进行演绎.

集合是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇总而成的集体。其中，构成集合的这些对象则称为该集合的元素。集合的元素具有以下特征：确定性、互异性、无序性。

集合通常可以用大写字母A、B等表示，集合中的元素可以用小写字母a, b, x, y等表示。一个元素a在集合A中，我们说a属于A，记作$a \in A$。

注释Remarque 1.5.

- 符号$\in$是所属关系。右边一定是集合，左边是集合中的一个元素。

- 一个元素x不属于一个集合A，可以用符号写成$x \notin A$。

- x 与 $\{x\}$是不同的，$x \neq \{x\}$,正确的写法是$x \in \{x\}$。
  例♠：0 和 $\{0\}$是不同的。

一个集合中的元素满足互异性；不可重复性 和无序性。

1.2.1 集合的表示方法

表示集合的方法有两种，即列举法、描述法。

1，列举法

列举法就是将集合的元素逐一列举出来的方式。例如，光学中的三原色可以用集合{红，绿，蓝}表示；由四个字母a, b, c, d组成的集合A可用$A = \{a, b, c, d\}$表示。

优点：方便、快捷，集合中的元素一目了然；

缺点：不易看出所有元素具有的特征，而且有的集合不能用列举法表示。

2，描述法

描述法的形式为{代表元素—满足的性质}。

设集合S是由具有某种性质P的元素全体所构成的，则可以采用描述集合中元素公共属性的方法来表示集合：$S = \{x|P(x)\}$。例如，由2的平方根组成的集合B可表示为$B = \{x|x^2 = 2\}$。

优点：语言简洁、抽象，元素的规律与性质能清楚地表示出来；

缺点：不易看出集合中具体的元素。

注：图像法，又称韦氏图法，是一种利用二维平面上的点集直观**描述(不是表示！)**集合的方法。一般用平面上的矩形或圆形表示一个集合。

为了方便，有些集合约定俗成可以用特殊符号表示：

$\emptyset$或$\{\}$:	空集（不含有任何元素的集合）
$\mathbb{N}$:	非负整数集合或自然数集合$\{0,1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{N}^*$或$\mathbb{N}^+$:	正整数集合$\{1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$:	整数集合$\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$
$\mathbb{Q}$:	有理数集合
$\mathbb{Q}^+$:	正有理数集合
$\mathbb{Q}^-$:	负有理数集合
$\mathbb{R}$:	实数集合(包括有理数和无理数）
$\mathbb{R}^+$:	正实数集合
$\mathbb{R}^-$:	负实数集合
$\mathbb{C}$:	复数集合
$[a,b]$:	左端点为a右端点为b的闭区间
(a,b)或者$]a,b[$:	左端点为a右端点为b的开区间 （法国用后一种记号，对半开半闭的情况同理）
$[\![1;n]\!]$:	（法国常用的记号）$\{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$

♠**注意符号的字体!**通常$\mathbb{N}$和N不代表同一个意思，前者是自然数集，后者通常代表一个自然数。同理，同样，$\mathbb{Z}$与Z不同，$\mathbb{Q}$与Q不同，$\mathbb{R}$与R不同， $\mathbb{C}$与C不同。

1.2.2 集合的势(Cardinal)

集合的势是用来度量集合规模大小的属性的，通常用$Card$来表示。如果一个集合中元素的个数是有限的，那么我们称之为有限集合，简称有限集，此时集合的势就是集合的元素个数。

注：一个集合的元素个数，有时会用记号$\#$来表示。例如，对集合$A=\{a,b,c,d\}$，有$Card(A)=\#A=4$。

对于无限集合，为此我们需要采用一种新的方法来比较两个集合规模的大小，这种方法将在后面介绍。

1.2.3 集合的关系与运算

集合间的关系

集合的包含关系：对于两个集合A和B，如果集合A的任意一个元素都是集合B的元素，那么称集合A包含于集合B，记作$A\subset B$；或者称B包含A，记作$B\supset A$。此时，我们也经常说集合A是集合B的子集（sous-ensemble），符号语言：若任意$a\in A$，均有$a\in B$，则$A\subset B$。

集合的相等：对于两个集合A和B，如果集合A的任意一个元素都是集合B的元素，并且集合B的任意一个元素都是集合A的元素，那么称集合A与集合B相等，记作$A=B$。换句话说，$A=B$ 当且仅当 $A\subset B$并且$B\subset A$。

再次注意♠：$\{(1,2)\}$与$\{1,2\}$是不同的。

练习Exercice 1.6

判断下列集合A与B的关系,并且验证你的判断。

1. $A=\{x\mid x^4=1\}$ 与 $B=\{y: y=\pm 1\}$ (此处有坑)
2. $A=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, x+y=0\}$ 与 $B=\{(\lambda,-\lambda)\mid \lambda\in\mathbb{R}\}$
3. $A=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 与 $B=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, x^2+y^2=1\}$
4. A是平面上所有以原点为圆心，以正实数r为半径的同心圆组成的集合，$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=r^2, r>0\}$
5. A是$\mathbb{R}$上满足$y'=y$的函数组成的集合， $B=\{y=\mathrm{e}^x\}$

集合的基本运算

1. 交集（intersection）：集合论中，设A，B是两个集合，由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合，叫做集合A与集合B的交集，记作$A\cap B$，读作A交B。

   如果有三个集合A,B,C，则可以定义$A\cap B\cap C$；如果有n个集合A_i，其中$i\in[\![1;n]\!]$，那么可以（用归纳法）定义$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$。更进一步，如果有（可数的）无穷多个集合，其中$i\in\mathbb{N}$，可以定义$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$: 一个元素属于该集合当且仅当它属于每一个$A_i$，用数学符号语言，

   $$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\Leftrightarrow(\forall i\in\mathbb{N},\ x\in A_i).$$

2. 并集（union）：给定两个集合A，B，把它们所有的元素合并在一起组成的集合，叫做集合A与集合B的并集，记作$A\cup B$，读作A并B。换句话说，$x\in A\cup B$当且仅当$x\in A$**或**$x\in B$。特别地，当$A\cap B=\emptyset$时，可以记$A\cup B$为$A\sqcup B$，读作A与B的无交并（union disjointe）。

如果有三个集合A,B,C，则可以定义$A\cup B\cup C$；如果有n个集合A_i，其中$i\in[\![1;n]\!]$，那么可以（用归纳法）定义$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。更进一步，如果有（可数的）无穷多个集合，其中$i\in\mathbb{N}$，可以定义$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$: 一个元素属于该集合当且仅当它至少属于某一个$A_i$，用数学符号语言，

$$x\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow (\exists i\in\mathbb{N},\ x\in A_i).$$

例子Exemple 1.7. 我们定义实数集合$\mathbb{R}$上的**开集**为一些开区间的并集。这里的"一些"可以是0个，即得到空集；也可以是一个，即某个开区间(a,b)自己；也可以是两个，三个等任意有限多个；还可以是无穷多个。比如集合$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(n-\frac{1}{n},n+\frac{1}{n})$是$\mathbb{R}$上的开集。

3. 差集：若A和B是两个集合，则A与B的差集是所有属于A但不属于B的元素的集合，记作$A-B$或$A\backslash B$，用数学符号表示为：$A-B=\{x\mid x\in A且x\notin B\}$。

4. 补集（complémentaire）：若给定全集U，有$A\subset U$，则U与A的差集称为A的补集，记作C_UA，在全局U众所周知时可以记成$\bar{A}$。

tesianProduct

5. **笛卡积（produit cartésien）**：给定两个集合A和B，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对，所有这样的**有序对**组成的集合叫做A与B的笛卡尔积，记作$A\times B$。笛卡尔积有时也叫做直积。笛卡尔积的符号化表示为：

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A且y\in B\}.$$

当恰好$B=A$时，$A\times B$可以记作A^2。

例子:假设集合$A=\{a,b\}$，集合$B=\{0,1,2\}$，则两个集合的笛卡尔积为$\{(a,0),(a,1),(a,2),(b,0),(b,1),(b,2)\}$。

例子:假设A表示某学校学生的集合，B表示该学校所有课程的集合，则A与B的笛卡尔积表示所有可能的选课情况。

例子:$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，$\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

def:PowerSet

6. **幂集（ensemble des parties, ensemble puissance）**：给定一个集合A，它的所有子集组成的集合叫做A的幂集，记作$\mathcal{P}(A)$或者2^A。用集合的符号，

$$\mathcal{P}(A)=\{X|X\subset A\}.$$

♠ 请再次注意符号是$\mathcal{P}$而不是P,也不是$\mathbb{P}$

例子Exemple 1.8. 假设集合$A = \{a, b\}$，那么$\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\Big\}$。

例子Exemple 1.9. 假设集合$B = \{1, 2, 3\}$，那么

$$2^B = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}.$$

幂集的性质：若集合A是有限集，假设$\#A = N$，那么$\mathcal{P}(A)$也是有限集，并且有 $\#\mathcal{P}(A) = 2^N$。

集合运算的性质

- $A \cap A = A \cup A = A$；
- $A \cap \emptyset = \emptyset$；
- $A \cup \emptyset = A$；
- $A \cap B = A$ 当且仅当 $A \cup B = B$ 当且仅当 $A \subset B$；
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$，$A \cup C_U A = U$;
- $\overline{\bar{A}} = A$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

思考题Problème 1.10.

笛卡尔积是否满足交换律，即$A \times B$是否等于$B \times A$?
笛卡尔积是否满足结合律，即 $(A \times B) \times C$是否等于$A \times (B \times C)$?
笛卡尔积是否满足关于交集的分配律，即$(A \cap B) \times C$是否等于$(A \times C) \cap (B \times C)$? 对于并集呢?

1.3 映射 Application

定义Définition 1.11: 映射

def:Mapping

设A, B是两个非空集合，若对A中的**任一元素**x, 依照某种规律（或法则）f, 总有B中的**唯一确定的**元素y与之对应，则称对应规律（或法则）f为一个从A到B的**映射**。

记作：

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & y. \end{array}$$

•元素y为x的**像**，记作$y = f(x)$, 并称x为y的**原像**。

•集合A称为映射f的**定义域**(domaine de definition, ensemble de départ)，集合B称为f的**陪域**(codomaine)或**到达域(ensemble d'arrivée)**(ensemble d'arrivée)。

•集合$\{f(x)|x \in A\}$称为映射 f 的**值域或像集**(Image de f)，记为$f(A)$。

•设A'是A的一个子集，称$\{f(x) \in B|x \in A'\}$为A'在f下的**像集**，记作$f(A')$。

•设B'是B的一个子集，称$\{x \in A|f(x) \in B'\}$为B'在f下的**逆像**，记作$f^{-1}(B')$。

•特别地，当映射的陪域$B = \mathbb{R}$或$\mathbb{C}$或它们的子集时，此时映射也称为**函数**。

由映射的定义，一个法则能称为映射，必须同时满足：

- 定义域的遍历性：A中的每个元素x在映射的值域中都有对应对像
- 对应的唯一性：定义域中的一个元素只能与映射值域中的一个元素对应

注释Remarque 1.12. 自己定义某个映射时，需要检验该定义是**良定的(bien dé finie)**，即满足上述两条要求。（举一个不良定的例子）

映射的相等

设f是一个从A到B的映射，g是一个从C到D的映射，那么我们说$f = g$，当且仅当$A = C$，$B = D$，并且$A = C$中的任意元素x,由$f(x) = g(x)$。

练习Exercice 1.13

判断下列每组映射是否相等，为什么?

1. $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = \begin{cases} x & 当x \geqslant 0 \\ -x & 当x < 0 \end{cases}$

2. $f(x) = x + 1$ 与 $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

3. $f(x)=\sin x$ 与 $f(x)=\sin(x+2\pi)$

映射的复合

设f是一个从A到B的映射，g是一个从B到C的一个映射。那么，我们可以定义一个从A到C的映射，记作$g\circ f$， 它把A中的元素x，映到C中的元素$g(f(x))$.

定义Définition 1.14: 单射injection

设f是由集合A到集合B的映射， 如果对任意$(x,y)\in A^2$， 只要 $x\neq y$，都有$f(x)\neq f(y)$，则称f为从A到B的单射。 等价地(逆否命题):映射f称为单射，若$(x,y)\in A^2$满足$f(x)=f(y)$，则一定有$x=y$。

换句话说，f被称为是单射，如果对每一个值域内（♠不是陪域内）的y，存在定义域内的**唯一一个**x使得$f(x)=y$。

定义Définition 1.15: 满射 surjection

设f是从集合A到集合B的映射，如果对于陪域B中的任意元素y，在函数的定义域A中存在一个元素x使得$f(x)=y$，则称一个映射$f:A\to B$为满射。

换句话说， f是满射时当且仅当它的值域$f(X)$与陪域Y相等。

定义Définition 1.16: 双射 bijection

如果一个映射既是单射又是满射，则称它是双射（或一一映射）。

定义Définition 1.17: 逆映射 Bijection réciproque

设f是从集合A到集合B的双射，那么存在一个从B到A的一个对应关系，把B中的元素$b=f(a)$映射到a，这是一个映射，称为f的逆映射，通常记为f^{-1}。

注释Remarque 1.18.

- 很多时候，当两个集合存在一个双射的时候，我们可以根据需要把这两个集合看成是同一个集合。比如，对于集合笛卡尔积$(A\times B)\times C$与 $A\times(B\times C)$在严格意义上不同的两个集合。但是由于它们之间存在着“显而易见”的双射，一般情况下可以把它们看成是同一个集合。
- 通过双射，我们定义集合的**势(cardinal)**:如果存在一个从集合A到集合B的双射，则称两个集合A与B有相同的势。

练习Exercice 1.19

设f和g分别是从A到B和B到C的映射。求证：

- 若f和g皆为单射，则$g \circ f$亦为单射。
- 若$g \circ f$为单射，则f为单射(但g不一定是)。
- 若f和g皆为满射，则$g \circ f$亦为满射。
- 若$g \circ f$为满射，则g为满射(但f不一定是)。
- 若f和g均为双射，则$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

例子Exemple 1.20. 恒同映射
定义从非空集合A到A的一个对应关系f，把x对应到x。这是一个特殊的映射，称它为恒同映射(Identité)，记为Id_A。

例子Exemple 1.21. 定义从区间$[0, 2\pi[$到$\mathbb{R}^2$的一个对应关系f，把θ对应到$(2\sin\theta - \sin(2\theta), 2\cos\theta - \cos(2\theta))$。这是一个映射。它是一个单射，不是满射。（试画出该映射的像的示意图）。

例子Exemple 1.22. 数列 设f是一个从$\mathbb{N}$到$\mathbb{Q}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$的映射，$f(n) = a_n$。称这个映射为一个有理数（实数、复数）序列（suite），记为$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$。

例子Exemple 1.23. 记从闭区间$[a, b]$到$\mathbb{R}$的所有连续函数组成的集合为$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$。定义从$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$到$\mathbb{R}$上的一个对应关系$F$，把$[a, b]$上的连续函数$f$对应到其最大值$\max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$。这是一个映射。它是满射，但不是单射。

例子Exemple 1.24. 多项式 设$\mathbb{R}_n[X]$是次数不高于n次的实系数多项式(polynôme)组成的集合，即$\mathbb{R}_n[X] = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \mid (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$。定义从$\mathbb{R}_n[X]$到$\mathbb{R}^{n+1}$的一个对应关系$f$，把$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$对应到$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$。$f$是一个映射，并且是双射。

例子Exemple 1.25. 多项式函数 设$P_n(X) \in \mathbb{R}_n[X]$。定义从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的一个对应关系$P_n$，把$x$对应到$P_n(x)$。$P_n$是一个映射。一般情况下$P_n$不是单射；当$n$为奇数时$P_n$是满射。

例子Exemple 1.26. 定义从$\mathbb{R}^4$到由2行2列实数组成的、形如$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$的阵列集合$M_2(\mathbb{R})$上的一个对应关系$f$，把$(a, b, c, d)$对应到$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$。$f$是一个映射，并且是双射。

练习Exercice 1.27

设Ω是一个含有三个元素的集合。请给出一个从幂集$\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$到区间$[0,1]$的映射$\mathbb{P}$，要求满足以下两个条件：

- 如果$(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) =: \mathcal{P}(\Omega)^2$，并且$A \cap B = \emptyset$，那么$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

例子Exemple 1.28. 给定非空集合U，设A是U的一个子集。定义一个从集合U到$\{0,1\}$的对应关系f为，把A中的元素对应到1，把A的补集$C_U A$中的元素对应到0。f是一个从集合U到$\{0,1\}$的映射，叫做A的特征映射，通常记为χ_A，也记作1_A。

练习Exercice 1.29

虽然自然数集合$\mathbb{N}$包含于整数集合$\mathbb{Z}$中，但是它们有相同的势。自然数集合$\mathbb{N}$与笛卡尔积$\mathbb{N}^2$也有相同的势。与自然数集合具有相同的势的集合是可数的（dénombrable），称这样的集合为可数集。

思考题Problème 1.30. 给出10个，或者20个“不同类型”的映射的例子。

1.4 函数Function

定义Définition 1.31: 函数

设f是一个从集合A到集合B的映射。当集合A与集合B都是数集时，我们称f是一个**函数(fonction)**，不易产生混淆时可以记成$y = f(x)$。

在本讲义中，若未特别注明，一般指实值函数，即$B = \mathbb{R}$或$\mathbb{R}$的子集。此时$\{(x, f(x)) | x$在定义域中$\}$是$\mathbb{R}^2$的一个子集，称为f的**图像(graphe)**。注意♠：不是“像（image）”

1.4.1 对函数经常考察的一些性质

- 定义域、值域: 参见函数的定义1.11;
- 有界性: 如果存在一个实数M，使得对定义域内的所有x，都有$f(x) < M$，则称f是**上有界的(majorée)**，称M是f的一个上界(majorant)；如果存在一个实数m，使得对定义域内的所有x，都有$f(x) > m$，则称f是**下有界的(minorée)**，称m是f的一个下界(minorant)。如果f既上有界又下有界，则称f是**有界的(bornée)**。
- 单调性（monotone）：对于区间$[a,b]$上的x,y，如果只要$x < y$就有$f(x) \leqslant f(y)$，那么称f在区间$[a,b]$上是**单调递增的(croissante)**；如果是严格小于，则为严格递增的(strictement croissante)。相反地，如果只要$x < y$就有$f(x) \geqslant f(y)$，那么称f在区间$[a,b]$上是**单调递减的(décroissante)**；如果是严格大于，则称f是严格递减的(?法语应该是?)。单调递增函数与单调递减函数统称单调函数。
- 对称性: 设定义域关于点a对称，即$a+x$在定义域中可以推出$a-x$在定义域中。如果$f(a+x) = f(a-x)$，那么函数关于直线$\{x = a\}$对称；特别地，当$a = 0$时，f为**偶函数(fonction paire)**。如果$f(a+x) = -f(a-x)$，那么函数图像关于点$\{(a,0)\}$对称；特别地，当$a = 0$时，f为**奇函数(fonction impaire)**。
- 周期性:设f是$\mathbb{R}$上的一个函数。如果存在正数T，使得对任意$x \in \mathbb{R}$，都有$f(x+T) = f(x)$。
- 零点:使得$f(x) = 0$的点的集合$\{x \mid f(x) = 0\}$。
- 凸性(convexité)：设f是$\mathbb{R}$上或一个区间上的函数，如果对于任意$t \in [0,1]$及定义域中的两点x,y都有$f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$，那么称$f$是**(上)凸的(concave)**。若上面式子中为$\leqslant$，则函数是**(下)凸的(convexe)**（有的书上叫"凹的"）。
- 齐次性：如果对于任意$t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$，都有$f(tx) = t^N f(x)$，其中$N$为整数，则称$f$是$N$次齐次的（homogène de l'ordre N）。
- 连续性(continuité)、可导性(dérivabilité)、可积性(intégrabilité)、是否有原函数；是否解析、是否一致连续……

1.4.2 基本初等函数

- 幂函数$f(x) = x^{\alpha}$，其中α是实数。

- 指数函数：$f(x)=\exp(x)=\mathrm{e}^x$，其中e为自然对数的底，也称Euler数。（后面将详细讨论）

- 对数函数：$f(x)=\ln(x)=\log_e(x)$

- 三角函数：常见三角函数主要有：

正弦函数	：	$y=\sin x$	余弦函数	：	$y=\cos x$
正切函数	：	$y=\tan x$	余切函数	：	$y=\cot x$
正割函数	：	$y=\sec x$	余割函数	：	$y=\csc x$

- 反三角函数：常见反三角函数主要有：

反正弦函数	：	$y=\arcsin x$	反余弦函数	：	$y=\arccos x$
反正切函数	：	$y=\arctan x$	反余切函数	：	$y=\operatorname{arccot} x$
反正割函数	：	$y=\operatorname{arcsec} x$	反余割函数	：	$y=\operatorname{arcses} x$

由上述基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为**初等函数(fonctions élémentaire)**。

练习Exercice 1.32

完成下列表格

性质 函数	定义域	值域	是否有界	单调性	对称性	周期性	凸性
幂函数							
指数函数							
$\cdots$							

练习Exercice 1.33

下列函数是不是初等函数？为什么？

$$y=2^x,\quad y=x^x(x>0),\quad y=3,\quad y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad y=|\sin x|,\quad y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$y=\begin{cases}1 & 当x\geqslant 0\\ -1 & 当x<0\end{cases},\quad y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$ 这里“！”代表阶乘：$n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$

一些补充

- 设f是一个(有理数、实数)序列，记为$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$。设g是一个从$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的严格单调递增函数，把k映到n_k。我们称复合函数$f\circ g$为$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$的一个子列，记为$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，或简记为$(a_{n_k})$。

- 复数的指数映射。有多种等价的定义方法，这里选取一种人为的但初等的定义：对于纯虚数$\mathrm{i}\theta$，定义欧拉公式 $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}$ 并且对任意复数z_1,z_2满

足性质$\mathrm{e}^{z_1+z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$。特别地，当$\theta=\pi$时，有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$，该等式把数学中最重要最神奇的四个数字联系到了一起。

- 三角函数恒等式，不等式。

$$\begin{aligned}\sin^2 x+\cos^2 x&=1,\\ \sin(x+y)&=\sin x\cos y+\cos x\sin y,\\ \cos(x+y)&=\cos x\cos y-\sin x\sin y,\\ 0<\sin x<x<\tan x,&\ \text{如果}\ 0<x<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

- 当映射f为函数时，它的逆映射f^{-1}（如果存在）也称为f的反函数。特别地，如果f是从$D\subset\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的单射，那么f是从D到$f(D)$的双射，可以定义f的反函数f^{-1}，从$f(D)$映射到D。♠注意：$f^{-1}(x)$与$(f(x))^{-1}$是不同的含义，前者是反函数，有意义的前提是f是双射；后者是倒数$\dfrac{1}{f(x)}$，有意义的前提是$f(x)\neq 0$.

- 函数的表示。
表示方法除了常见的$f(x)$之外，有需要时还可以用参数化表示，比如图像为半圆的函数，除了$y=\sqrt{1-x^2}$，还可以用参数方程$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,\pi]$表示。参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，可以理解为函数$x=\varphi(t)$有反函数$t=\varphi^{-1}(x)$，然后代入$y=\psi(t)$得到复合函数$y=\psi\circ\varphi^{-1}(x)$。

1.4.3 双曲三角函数

我们下面学习一类新的函数，叫做双曲三角函数，这类函数在生产生活中也很常见，比如悬链线。我们在学习新函数的同时，练习(复习)如何分析一个函数。它们的定义方式如下

定义Définition 1.34: 双曲三角函数

- 双曲正弦函数 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$
- 双曲余弦函数 $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$
- 双曲正切函数 $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{arsinh} x$: $\sinh x$的反函数

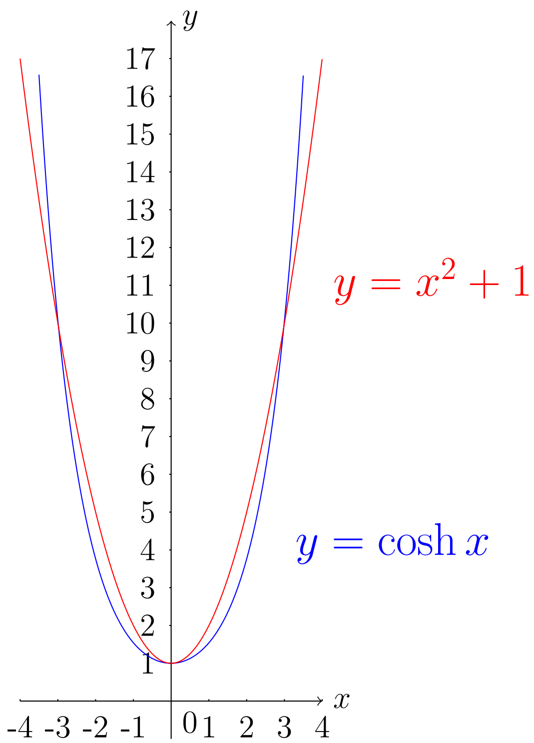
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{arcosh} x$: $\cosh x$在区间$[1,+\infty)$上的反函数
- 反双曲正切函数 $\operatorname{artanh} x$: $\tanh x$的反函数

我们以$\cosh(x)$为例，看怎么分析一个函数。

- $\cosh(x)$的定义域是$\mathbb{R}$。值域是$[1,+\infty)$, 因为$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \geqslant \frac{2\sqrt{e^x e^{-x}}}{2} = 1$。最小值1当且仅当$x=0$时可以取到。
- $\cosh(x)$没有上界，有下界；在所有下界中，最大的下界是1。
- $\cosh(x)$在$(-\infty,0]$上严格单调递减，在$[0,+\infty)$上严格单调递增。这是因为，对于任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 总有$\cosh x-\cosh y = \frac{1}{2}(e^x+\frac{1}{e^x}-e^y-\frac{1}{e^y}) = \frac{1}{2}(e^x-e^y)(1-\frac{1}{e^x e^y})$，所以当$0\leqslant x<y$时，$e^x-e^y<0$而$1-\frac{1}{e^x e^y}>0$，故$\cosh x-\cosh y<0$。类似地，当$x<y\leqslant 0$时，$\cosh x-\cosh y>0.$
- $\cosh(x)$是偶函数，因为$\cosh(x)=\cosh(-x)$
- $\cosh(x)$不是周期函数，因为它在$[0,+\infty)$上严格单调递增
- $\cosh(x)$没有零点，最小值是1,当且仅当$x=0$时取得。
- $\cosh(x)$是连续的、可导的、可积的、下凸的（这些性质将在后面证明）
- 类似于三角函数，双曲三角函数有如 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$等一系列恒等式，都可以直接展开验证。我们给出一个表格。

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y & \sinh(x-y) &= \sinh x\cosh y-\cosh x\sinh y\\
\cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y & \cosh(x-y) &= \cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y\\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y} & \tanh(x-y) &= \frac{\tanh x-\tanh y}{1-\tanh x\tanh y}
\end{aligned}$$

- $\cosh x$在区间$[1,+\infty)$上有反函数$\operatorname{arcosh} x$, 事实上，$\operatorname{arcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$: 记$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，由恒等式 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$可得，当$x>0$时，$\sinh x=\sqrt{y^2-1}$。因为$e^x=\sinh x+\cosh x=\sqrt{y^2-1}+y$，所以 $x=\ln(\sqrt{y^2-1}+y)$。
- 下面给出函数的图像



1.5 关系 Relation

集合E与集合F上的二元关系R可以看成是笛卡儿积$E \times F$的子集。若$(x, y) \in R$则称x与y有关系$\mathcal{R}$，通常记作$x\mathcal{R}y$。当$F = E$时，称$\mathcal{R}$为E上的关系（relation interne sur E）。关系通常是"谓词"，例如，有四个人{甲，乙，丙，丁}，四件物件{球，糖，车，枪}。若甲拥有球有糖，乙拥只有糖，丁拥只有车，无人有枪及丙一无所有，则二元关系为"......拥有......"便是 {(甲,球),(甲,糖),(乙,糖),(丁,车)}。

本小节学习目标：

- 掌握理解数学中"等价关系"、"序关系"的定义；
- 给定等价关系时，会判断验证两个元素是否等价。

1.5.1 等价关系 Relation d'équivalence

定义Définition 1.35: 等价关系

vqlenceRelation 设E是一个集合，$\mathcal{R}$ 是E上的一个二元关系。如果 $\mathcal{R}$ 满足以下三个条件:

1. 自反性(réflexive): $\forall x \in E$, 满足$x\mathcal{R}x$;

2. 对称性(symétrique): 如果 $x, y \in E$满足关系$x\mathcal{R}y$, 那么$y\mathcal{R}x$;

3. 传递性(transitive): 如果 $x, y, z \in E$满足关系$x\mathcal{R}y$和 $y\mathcal{R}z$, 那么$x\mathcal{R}z$;

那么，我们称$\mathcal{R}$为E上的一个**等价关系(Relation d'équivalence)**，并常用$\sim$代替$\mathcal{R}$。

集合上等价关系的一些例子

- 数集上的"等于", 比如$\frac{1}{2}$ 等于 0.5，通常用 $=$ 表示；
- 所有的人组成的集合中的关系"在同一天出生"；
- 欧式平面几何中，直线的"重合或平行"；
- 欧式平面几何中，三角形的"全等", 通常记作$\cong$；
- 手机集合中，关系"有一样的操作系统"；
- 复数集上"有相同的模长"，回顾：复数$z = a + bi$模长的定义是$\sqrt{a^2 + b^2}$。

例子Exemple 1.36. 实数集上，关系"两个数的差是有理数"，是一个等价关系。

1. 自反性：$\forall a \in \mathbb{R}$, $a \sim a$: 由于$a - a = 0$是有理数；

2. 对称性：如果 $a \sim b$, 那么$b \sim a$: 如果$a - b$是有理数,那么$b - a$也是有理数；

3. 传递性：如果 $a \sim b$并且 $b \sim c$, 那么$a \sim c$：如果$a - b$是有理数且$b - c$也是有理数，那么$a - c = (a - b) + (b - c)$是有理数。

例子Exemple 1.37. 给定一个大于1的整数n, 那么两个整数a和b称为模n同余的，如果存在一个整数k使得$a - b = kn$，通常记作 $a \sim b \pmod n$. 在整数集合$\mathbb{Z}$中，同余关系是一个等价关系。

1. 自反性：$\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \sim a \pmod n$: 由于$a - a = 0n$；

2. 对称性：如果 $a \sim b \pmod n$, 那么$b \sim a \pmod n$: 如果$a - b = kn$,那么$b - a = (-k)n$;

3. 传递性：如果 $a \sim b \pmod n$并且 $b \sim c \pmod n$, 那么$a \sim c \pmod n$：如果$a-b = k_1n$且$b-c = k_2n$，那么$a-c = (a-b)+(b-c) = k_1n+k_2n = (k_1+k_2)n$。

例子Exemple 1.38. 一些不是等价关系的二元关系

- 实数集上的"小于"：不满足自反性；

- 实数集上的“小于等于”： 不满足对称性;
- 欧式平面几何中，所有直线上的“相交”： 不满足传递性;
- 实数集中，关系“两个数的和是有理数”： 不满足哪条性质？
- 在自然数集合$\mathbb{N}$中，“有大于2的共同的质因子”： 不满足哪条性质？

练习Exercice 1.39

实数集中，关系“两个数的和是有理数”，是不是一个等价关系？为什么？

思考题Problème 1.40. 等价关系要求满足三条性质，能不能分别找出满足其中两条但不满足第三条的例子？

1.5.2 等价类

定义Définition 1.41: 等价类classe d'équivalence

在数学中，假设在一个集合X上定义了一个等价关系$\sim$，则X中等价于a的所有元素所形成的子集:

$$\{x \in X | x \sim a\}$$

称为**元素a所在的等价类**，记作$[a]$，称a为$[a]$的代表元。

f:QuotientSet

等价类的概念有助于从已经构造了的集合构造新集合。

定义Définition 1.42: 商集 ensemble quotient

在X中的关于给定等价关系$\sim$的所有等价类的组成集合叫做X除以$\sim$的商集，一般记为$X/\sim$。

- 如果X是轿车的集合，而$\sim$ 是“颜色相同”的等价类，则一个特定等价类由所有绿色轿车组成。$X/\sim$自然的被认同于所有轿车颜色的集合。
- 考虑在整数集合$\mathbb{Z}$上的“模2” 等价关系: $x \sim y$当且仅当$x - y$是偶数。这个关系精确的引发两个等价类: $[0]$由所有偶数组成，$[1]$由所有奇数组成。在这个关系下$[7], [9]$和$[1]$都表示$\mathbb{Z}/\sim$的同一个元素。
- 任何函数$f : X \to Y$定义在X上的如下等价关系，$x_1 \sim x_2$当且仅当$f(x_1) = f(x_2)$。x的等价类是在X中被映射到$f(x)$的所有元素的集合，类$[x]$是$f(x)$的逆像。
- 复数集上定义等价关系“有相同的模长”。

例子Exemple 1.43. 实数集上$\mathbb{R}$，定义等价关系，$x \sim y$当且仅当$x-y$是2π的整数倍。此时，对于任意a满足$0 \leqslant a < 2\pi$，$[a]$是一个等价类。圆周$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1\}$在下述意义下可以看成商集$\mathbb{R}/\sim$：存在一个双射

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}/\sim & \to & S \\ & [x] & \mapsto & (\cos x, \sin x). \end{array}$$

首先需验证f是良定的（与等价类的代表元无关）：假设a,b是一个等价类$[x]$的不同代表元，有定义可知，存在一个整数K使得$a-b=2K\pi$，那么，由于$\cos x$和$\sin x$都是以2π为周期的函数，我们得到

$$\cos a = \cos(b+2K\pi) = \cos b, \qquad \sin a = \sin(b+2K\pi) = \sin b,$$

也就是

$$f([a]) = (\cos a, \sin a) = (\cos b, \sin b) = f([b]).$$

所以f是良定的。

验证f是单射：设$(\cos x, \sin x) = (\cos x', \sin x')$是$S$中的同一个元素，由$\cos x = \cos x'$可以得出$x' \in \{2K\pi + x | K \in \mathbb{Z}\} \cup \{2K\pi - x | K \in \mathbb{Z}\} =: A$，由$\sin x = \sin x'$可以得出$x' \in \{2K\pi + x | K \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2K+1)\pi - x | K \in \mathbb{Z}\} =: B$，故$x' \in A \cap B = \{2K\pi + x | K \in \mathbb{Z}\}$。所以，$x - x'$一定是$2\pi$的整数倍，也就是$x$和$x'$在同一个等价类中，即$[x] = [x']$。所以$f$是单射。

验证f是满射：假设$(x,y) \in S$，由$x^2+y^2=1$可得$-1 \leqslant x \leqslant 1$。我们取$\mathbb{R}$中的一个元素$\arccos x$，有$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$，如果$y \geqslant 0$，那么

$$f([\arccos x]) = (\cos(\arccos x), \sin(\arccos x)) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (x,y);$$

如果$y < 0$，那么

$$f([2\pi - \arccos x]) = (\cos(2\pi - \arccos x), \sin(2\pi - \arccos x)) = (x, -\sqrt{1-x^2}) = (x,y).$$

所以f是满射。

练习Exercice 1.44

用等价类的思想理解正弦函数sin的定义域可以是$\mathbb{R}$。

1.5.3 序关系 Relation d'ordre

有些时候，序关系可能比“绝对数量”更重要。比如GPA，看的是排名，就是序。我们可以说五星级酒店比三星级酒店好，但是不能说五星级酒店等于（等价于）三星级酒店加上二星级酒店。更不会出现4杯25度的水兑一块就成了100度的水这种笑话。

偏序关系 Relation d'ordre partiel

定义Définition 1.45: 非严格偏序

给定集合E，$\preceq$是E上的二元关系，若$\preceq$满足：

1. 自反性：$\forall a \in E$, 有 $a \preceq a$；
2. 反对称性：$\forall a, b \in E$, 如果 $a \preceq b$ 且 $b \preceq a$，那么$a = b$；
3. 传递性：$\forall a, b, c \in E$, 如果 $a \preceq b$ 且 $b \preceq c$，那么$a \preceq c$。

则称"$\preceq$"是E上的**非严格偏序**或**自反偏序**。

定义Définition 1.46: 严格偏序

给定集合E，$\prec$是E上的二元关系，若$\prec$满足：

1. 自反性：$\forall a \in E$, 有 $a \not\prec a$；
2. 反对称性：$\forall a, b \in E$, 如果 $a \prec b$，那么 且 $b \not\prec a$；
3. 传递性：$\forall a, b, c \in E$, 如果 $a \prec b$ 且 $b \prec c$，那么$a \prec c$。

则称"$\prec$"是E上的**严格偏序**,称$(E, \prec)$是一个偏序集合。

给定集合E上的一个（非严格）偏序"$\preceq$"，则可自然地诱导出E上的一个（严格）偏序"$\prec$"，只需如此定义：$a \prec b$，如果 $a \preceq b$ 且 $a \neq b$。

反之，给定集合E上的一个（严格）偏序"$\prec$"，则可自然地诱导出E上的一个（非严格）偏序"$\preceq$"。

练习Exercice 1.47

给出由$\prec$诱导出来的$\preceq$的定义，并证明它是一个非严格偏序？

uivalentOrder

注释Remarque 1.48. 给定集合E上的一个（非严格）偏序"$\preceq$"，其逆关系"$\succeq$"也是E上的一个（非严格）偏序；给定集合E上的一个（严格）偏序"$\prec$"，其逆关系"$\succ$"也是E上的一个（严格，反自反）偏序；所以，只要定义了"$\preceq$"、"$\prec$"、"$\succeq$"、"$\succ$"中的任何一个，其余三个关系的定义可以自然诱导而出，这四种关系实际上可以看成一体。故只需定义其一即可（通常是"$\preceq$"），称之为集合E上的**偏序关系**。

定义Définition 1.49: 全序关系 relation d'ordre total

设$(E,\prec)$是一个偏序集合。如果偏序关系$\prec$还满足完全性，即任意$a\in E, b\in E$，都有$a\preceq b$或者$b\preceq a$，那么称$\preceq$是E上的一个全序关系，$(E,\prec)$是一个**全序集**。

1.6 代数结构 Structure algébrique

本小节学习目标：

- 掌握理解数学中"二元运算"的定义；（会验证给定的性质）
- 了解常见的代数结构：群、域、向量空间 （本学期课程不需要记住）

一个代数结构包含集合及符合某些公理的运算或关系。如常见的群、环、域、向量空间等。一个集合可以看成没有定义运算关系的平凡的代数结构。最常见的运算关系是给定集合上的二元运算（composition interne）。

定义Définition 1.50: 二元运算

给定集合 A，一个从A^2到A的映射$F\colon A\times A\to A$又称为集合 A上的**二元运算**。给定集合A 中任意两个元素 a,b，可以得到A中唯一确定的元素$F(a,b)$。更多时候，二元运算会采用某种运算符，如$*,\circ,\times,+,\ldots$。

确定了集合A上的一个二元运算$*$，通常会考察它是否满足

- 结合律(loi associative):任意$(x,y,z)\in A^3$，总有$(x*y)*z=x*(y*z)$.
- 交换律(Loi commutative):任意$(x,y)\in A^2$，总有$x*y=y*x$

例子Exemple 1.51.

- 在实数集$\mathbb{R}$上，通常的加法和乘法都是一个二元运算。减法是不是？除法是不是？
- 在实数集$\mathbb{R}$上，可以定义很多二元运算，比如$a*b=ab+a+b$，比如$a*b=a^3+b^a$，比如$a*b=|b|$...
- 考虑所有$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$上的函数构成的集合（记为$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$），函数的复合$g\circ f$是$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$上的二元运算。

1.6.1 群 Groupe

群$(G,*)$是由集合G和G上的二元运算$*$构成的，符合以下三个性质（称"群公理"）的数学结构。群公理所述的三个性质为

- 结合律 (Associativité)：对于所有G中的a,b,c，等式 $(a*b)*c=a*(b*c)$成立;
- 单位元(élément neutre)：存在G中的一个元素e，使得对于所有G中的元素a，总有等式$e*a=a*e=a$ 成立;
- 逆元(Symétrique)：对于每个G中的a，存在G中的一个元素b使得总有$a*b=b*a=e$，此处e为单位元。

如果群$(G,*)$还有交换性质（Loi commutative），即G中的任意两个元素a,b满足$a*b=b*a$，则称$(G,*)$是交换群，或阿贝尔群（groupe abélien）。

例子Exemple 1.52.

- 循环群（时钟$\{1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}\}$）
- 整数加法群 （整数对乘法不是群）
- 对称群
- 圆周

1.6.2 域 Corps commutatif

一个集合 K带有$+$和$\times$两种二元运算，称为**域**（corps commutatif），如果$(K,+,\times)$满足如下性质：

- $(K,+)$ 是一个交换群，其单位元记作0;
- $(K-\{0\},\times)$ 也是一个交换群，其单位元记作1；
- $\times$关于$+$满足（左右）分配律（distributivité），即 $\forall(a,b,c)\in K^3,\quad a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 且 $(b+c)\times a=b\times a+c\times a.$

注释Remarque 1.53. 在法语数学书中，会单独出现"le corps"，没有"commutatif"的情况，此时第二条只要求$(K-\{0\},\times)$是一个群，不一定交换。第一条和第三条要求不变。

$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$都是域，$\mathbb{Z}$不是（为什么）。

思考题Problème 1.54. 集合$\{a+b\sqrt{2}|\ a,b\in\mathbb{Q}\}$关于通常意义下的加法和乘法，构成一个域。

1.6.3 向量空间 Espace vectoriel

给定域K。E是一个集合，其上定义下面两种运算，满足如下性质，则称E是K上的**一个向量空间**。

- 二元运算$(E,+)$，称为向量加法，满足$(E,+)$是一个交换群;
- 运算（映射） $F : K \times E \to E$，称为数乘，通常把$F(a,u)$记为$a \cdot u$(法语下称F为une loi de composition externe)，满足四条性质

  1. 数乘与域K中的乘法$\times$相容: 任意K中任意两个元素a,b以及E中任意元素u，满足$a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$;
  2. 域F关于乘法$\times$的单位元1对E中任意元素u，满足$1 \cdot u = u$;
  3. 数乘对向量加法满足分配律：K中任意元素a和E中任意两个元素u,v，满足$a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$;
  4. 标量乘对域加法的分配律： K中任意两个元素a,b和E中任意元素u，满足$(a+b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$.

例子Exemple 1.55.

(1) 给定数域$\mathbb{R}$。定义$\mathbb{R}^n$上的加法$(a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n) = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$，对任意$\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$定义数乘$\lambda \cdot (a_1,\ldots,a_n) = (\lambda a_1,\ldots,\lambda a_n)$，可以验证定义的加法与数乘满足向量空间的要求。

(2) 给定数域$\mathbb{R}$。考虑所有$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$上的函数构成的集合（记为$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$）。 定义$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$上的加法：对$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$上的任意两个元素f,g(它们是函数)，通过加法得到$f+g$是一个新函数，这个新函数在x点的值定义为$f(x)+g(x)$；定义数乘：对任意$\lambda \in \mathbb{R}$以及$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$上的任意元素f(它是函数)，通过数乘得到$\lambda \cdot f$是一个新函数，这个新函数在x点的值定义为$\lambda f(x)$;可以验证定义的加法与数乘满足向量空间的要求。

练习Exercice 1.56

找出$\mathbb{R}^3$上的（非零的）二元运算$*$，使得该二元运算分别满足下面的条件。

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda a, \lambda b, \lambda c) * (a',b',c') = \lambda((a,b,c) * (a',b',c'))$
- $(a,b,c) * (a'+a'', b'+b'', c'+c'') = (a,b,c) * (a',b',c') + (a,b,c) * (a'',b'',c'')$
- $(a,b,c) * (a',b',c') = -(a',b',c') * (a,b,c)$
- 同时满足上面三个条件。

练习Exercice 1.57

记$A = [\![1; n]\!]$，设$n = 3$。

- 写出三个不同的从A到它自身的双射，并验证它们是双射。
- 所有从A到它自身的双射组成一个集合，记为B，求集合B的势。
- 验证映射的复合$\circ$是B上的二元运算。
- 验证上述定义的二元运算$\circ$满足结合律。
- 找到B中的单位元素e。
- 对于B中的任意元素f，找出B中元素g，要求满足$f \circ g = g \circ f = e$。
- 由此推出B关于$\circ$构成一个群。它是否满足交换律？证明你的结论。