

Chapter 5

Dérivée et Différentielle

La dérivée est un concept fondamental en calcul différentiel. La dérivée d'une fonction en un point décrit le taux de variation de la fonction autour de ce point. La différentielle, quant à elle, est essentiellement une approximation linéaire locale de la fonction basée sur le concept de limite. Par exemple, en cinématique, la dérivée de la position d'un objet par rapport au temps donne la vitesse instantanée de l'objet.

La dérivée est une propriété locale d'une fonction. Toutes les fonctions n'ont pas de dérivée, et une fonction peut ne pas être dérivable en tous points. Si une fonction a une dérivée en un point, on dit qu'elle est dérivable (ou différentiable) en ce point, sinon elle est dite non dérivable (ou non différentiable). Si la variable indépendante et les valeurs de la fonction sont des nombres réels, alors la dérivée de la fonction en un point est la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction en ce point.

5.1 Définition de la Dérivée

Definition 5.1: Dérivée de la fonction $f(x)$ au point x_0

Soit une fonction réelle $f(x)$ définie dans un voisinage $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ du point x_0 . Lorsque la variable indépendante x subit un incrément h (pas nécessairement positif, on peut le comprendre comme une variation) en x_0 (le point $x_0 + h$ reste dans ce voisinage), la fonction $f(x)$ subit un incrément correspondant $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; le rapport des incréments $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ peut être vu comme une fonction de h , définie pour $0 < |h| < \delta$. Si la limite de ce rapport $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe lorsque $h \rightarrow 0$, alors on dit que la fonction $y = f(x)$ est dérivable au point x_0 , et cette limite est appelée la dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x_0 , notée $f'(x_0)$, c'est-à-dire

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x_0 peut également être notée $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ ou $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Si on n'utilise pas le concept d'incrément, la dérivée de la fonction $f(x)$ au point x_0 peut être définie de manière équivalente comme suit :

定义 Définition 5.2: Dérivée de la fonction $f(x)$ au point x_0

La dérivée de la fonction $y = f(x)$ au point x_0 peut également être définie comme suit : si la limite de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe lorsque la variable x dans le domaine de définition tend vers x_0 , alors on dit que la fonction $f(x)$ est dérivable au point x_0 , et sa dérivée est définie par

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

练习 Exercice 5.3

Montrer qu'une fonction f est dérivable au point x_0 si et seulement s'il existe une fonction $q(x)$ continue au point x_0 telle que $f(x) - f(x_0) = q(x)(x - x_0)$.

练习 Exercice 5.4

Montrer que si une fonction f est dérivable au point x_0 , alors $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$. De plus, peut-on utiliser directement cette égalité pour définir la dérivabilité ?

Comme pour la continuité d'une fonction, si $f(x)$ est dérivable en tout point d'un intervalle I de son domaine de définition, alors on dit que $f(x)$ est (partout) dérivable. Dans ce cas, puisque chaque point correspond à une dérivée **unique** (valeur de la limite), $f'(x)$ est une application de I vers \mathbb{R} , c'est-à-dire une nouvelle fonction, appelée la fonction dérivée de $f(x)$, ou simplement la dérivée de $f(x)$.

练习 Exercice 5.5

Supposons que la fonction $f(x)$ soit dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que si f est une

fonction impaire, alors f' est une fonction paire ; si f est une fonction paire, alors f' est une fonction impaire.

Dérivées des fonctions élémentaires de base

- La fonction constante $f(x) = c$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et sa dérivée est toujours 0.

En effet, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$.

- L'application identité $f(x) = x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et sa dérivée est toujours 1.

En effet, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$.

- La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$.

En effet, lorsque $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$, on a $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{x_0 - x}{xx_0(x - x_0)} = -\frac{1}{xx_0}$, donc $\lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2}$.

- La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et sa dérivée en ce point est e^{x_0} .

En effet,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

- La fonction logarithme $f(x) = \ln x$ est dérivable en tout point $x_0 > 0$, et sa dérivée en ce point est $\frac{1}{x_0}$.

En effet, $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \frac{\ln \frac{x_0+h}{x_0}}{h} = \frac{\ln(1 + \frac{h}{x_0})}{h}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{h}{x_0})}{h} = \frac{1}{x_0}$.

- La fonction sinus $f(x) = \sin x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et sa dérivée en ce point est $\cos x_0$.

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{(\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{\sin x_0(\cos h - 1) + \cos x_0 \sin h}{h} = \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x_0(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x_0 \sin h}{h} \right) \\ &= \sin x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x_0 \times 0 + \cos x_0 \times 1 = \cos x_0\end{aligned}$$

- La fonction cosinus $f(x) = \cos x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, et sa dérivée en ce point est $-\sin x_0$.

Laissé en exercice.

5.2 Propriétés de base de la Dérivée

5.2.1 Propriétés Locales

命题 Proposition 5.6. *Dérivable implique continu, mais continu n'implique pas dérivable*

Soit une fonction $f(x)$ dérivable au point x_0 , alors $f(x)$ est continue au point x_0 . La réciproque n'est pas vraie.

证明 Démonstration: Puisque la fonction $f(x)$ est dérivable au point x_0 , la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, notons-la A . Il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que pour $0 < |x - x_0| < \delta_0$, on ait $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < 1$, d'où $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < 1 + |A|$. De plus, pour $|x - x_0| < \delta_0$, on a $|f(x) - f(x_0)| < (1 + |A|)\delta_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{1+|A|}\}$, alors pour $|x - x_0| < \delta$, on a $|f(x) - f(x_0)| < (1 + |A|)\delta_0 < \varepsilon$. Donc $f(x)$ est continue au point x_0 .

Considérons la fonction valeur absolue $f(x) = |x|$, elle est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce point. En effet, la limite à gauche $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ et la limite à droite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ ne coïncident pas. \square

思考題 Problème 5.7. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, donnez une preuve ; si elles sont fausses, donnez un contre-exemple.

- Soit une fonction $f(x)$ dérivable au point x_0 , alors il existe un petit voisinage de x_0 dans lequel $f(x)$ est continue.
- Soit une fonction $f(x)$ dérivable sur un intervalle I , alors la fonction dérivée $f'(x)$ est continue sur I .

5.2.2 Relations avec les autres opérations

Opérations arithmétiques

Comme pour les limites et la continuité des fonctions, nous pouvons considérer les relations entre la dérivée et les opérations arithmétiques.

命题 Proposition 5.8.

- Si deux fonctions f et g sont dérivables au point x , et λ est un nombre réel, alors $f + \lambda g$ est également dérivable au point x , et $(f + \lambda g)'(x) = f'(x) + \lambda g'(x)$. (Propriété de linéarité)
- Si deux fonctions f et g sont dérivables au point x , alors le produit $f \cdot g$ est également dérivable au point x . De plus, on a
Règle de Leibniz (formule de Leibniz): $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Si deux fonctions f et g sont dérivables au point x , et si $g(x) \neq 0$ pour tout x dans le domaine de définition, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est également dérivable au point x , et la formule de dérivation du quotient est
$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

证明 Démonstration:

- Par hypothèse, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ et $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$. D'après les propriétés des limites pour l'addition ??, on a
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + \lambda g)(x+h) - (f + \lambda g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda g(x+h) - \lambda g(x)}{h} \\ &= f'(x) + \lambda g'(x). \end{aligned}$$

Donc $(f + \lambda g)'(x)$ existe et est égal à $f'(x) + \lambda g'(x)$.

- En ajoutant et soustrayant un terme, on obtient l'égalité suivante, notée (*)

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, les limites $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ existent. D'après la proposition 5.6, g est continue au point x , donc la limite $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$. En utilisant à nouveau les propriétés des limites pour

l'addition et la multiplication ??, en prenant la limite des deux côtés de (*), on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

c'est-à-dire la règle de Leibniz $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

- Comme pour la continuité, il suffit de calculer la dérivée de $\frac{1}{g}$. Par définition, on a directement

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \frac{1}{g(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

□

练习 Exercice 5.9

Si deux fonctions f et g sont dérivables au point x , et si $g(x) \neq 0$ pour tout x dans le domaine de définition, alors $\frac{f}{g}$ est également dérivable au point x_0 , et sa dérivée est $\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

例子 Exemple 5.10. Considérons la fonction puissance $f_n(x) = x^n$, où n est un entier non nul. Alors $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

En effet, nous avons déjà trouvé que $f'_1(x) = 1 = x^0$. Supposons que pour un entier positif m , on ait $f'_m(x) = mx^{m-1}$. Alors, puisque $f_{m+1}(x) = xf_m(x)$, d'après la règle de Leibniz, on a

$$f'_{m+1}(x) = x'f_m(x) + xf'_m(x) = x^m + x \cdot mx^{m-1} = (m+1)x^m.$$

Nous avons ainsi démontré par récurrence que pour tout entier positif n , on a $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

Pour les entiers négatifs n , nous avons déjà trouvé que $f'_{-1}(x) = -x^{-2}$, et on peut également démontrer par récurrence que $f'_n(x) = nx^{n-1}$. On peut aussi utiliser l'égalité $f_n(x) = f_{-n}(x) = \frac{1}{x^{-n}}$, et en utilisant la formule de dérivation du quotient, on obtient

$$f'_n(x) = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{1'x^{-n} - 1(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = \frac{0 - (-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}.$$

Dérivation des fonctions composées

定理Théorème 5.11: Dérivation des fonctions composées — (链式法则)

Soit une fonction g dérivable au point x_0 , et soit $g(x_0)$ dans le domaine de définition de la fonction f . Supposons également que f est dérivable au point $g(x_0)$. Alors la fonction composée $f \circ g$ est dérivable au point x_0 , et on a la règle de dérivation des fonctions composées (règle de dérivation en chaîne)

$$(f \circ g)' = \frac{df}{dx} \Big|_{x=g(x_0)} \frac{dg}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

证明Démonstration: Nous allons directement démontrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Nous supposons d'abord que dans un voisinage épointé de x_0 , on a $g(x) \neq g(x_0)$. Dans ce cas, on peut réécrire $\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$.

- Puisque f est dérivable en $g(x_0)$, on a $\lim_{y \rightarrow g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0))$;
- Puisque g est dérivable en x_0 , elle est continue en x_0 d'après 5.6, donc $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$;
- Nous avons supposé que dans un voisinage épointé de x_0 , $g(x) \neq g(x_0)$;

D'après le théorème de la limite des fonctions composées ??, la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \frac{df}{dx} \Big|_{x=g(x_0)} = f'(g(x_0))$. Par la dérivabilité de g en x_0 , on a directement $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{dg}{dx} \Big|_{x=x_0} = g'(x_0)$. Donc dans ce cas, on a $(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Si l'hypothèse "dans un voisinage épointé de x_0 , $g(x) \neq g(x_0)$ " n'est pas vérifiée. D'après la deuxième partie de la preuve ci-dessus, nous pouvons en fait construire une fonction auxiliaire $Q(y)$ définie comme suit

$$Q(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)}, & y \neq g(x_0), \\ f'(g(x_0)), & y = g(x_0). \end{cases}$$

La fonction $Q(y)$ est continue au point $g(x_0)$. Donc d'après ??, la fonction composée $Q(g(x))$ a une limite lorsque $x \rightarrow x_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(g(x)) = f'(g(x_0))$. De plus, puisque

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} (Q(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}) = f'(g(x_0))g'(x_0)$. Remarquons que

$$Q(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}, & g(x) \neq g(x_0), \\ 0, & g(x) = g(x_0), x \neq x_0 \end{cases}$$

$$= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \quad \forall x \neq x_0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} Q(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$. La proposition est démontrée. \square

例子Exemple 5.12. Supposons que deux fonctions f et g soient dérivables au point x_0 . Si $g(x) \neq 0$ pour tout x dans le domaine de définition, alors puisque $\frac{1}{x}$ est dérivable au point $g(x_0)$ et que $g(x)$ est dérivable en x_0 , la fonction composée $\frac{1}{g}$ est également dérivable en x_0 , et sa dérivée est $(\frac{1}{x})'|_{g(x_0)} = -\frac{1}{x^2}|_{g(x_0)}g'(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}g'(x_0)$. De plus, puisque f est dérivable en x_0 , le produit $f(x)\frac{1}{g(x)}$ est également dérivable en x_0 , et d'après la **règle de Leibniz**, sa dérivée est $f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)(\frac{1}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)(-\frac{1}{g^2(x_0)})g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. Ainsi, en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées et la règle de Leibniz, nous avons obtenu la **formule de dérivation du quotient**.

Dérivation des fonctions inverses

定理Théorème 5.13: Théorème de la fonction inverse

InverseFunction Supposons que la fonction $y = f(x)$ soit une injection continue sur un intervalle I , dérivable au point $x_0 \in I$ avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors f est inversible sur I , c'est-à-dire que sa **fonction inverse** f^{-1} existe ; de plus, f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$, et sa dérivée est $\frac{df^{-1}}{dy}\Big|_{y_0} = \frac{1}{\frac{df}{dx}\Big|_{x_0}}$. Si on utilise t comme variable pour la fonction inverse f^{-1} , alors $(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'((f^{-1}(t)))}$.

证明Démonstration: Puisque f est une injection sur I , c'est une bijection de I vers $f(I)$, donc il existe une fonction f^{-1} de $f(I)$ vers I qui est l'inverse de f sur I .

Puisque $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$. La fonction $y = f(x)$ est une bijection continue sur l'intervalle I , donc d'après l'exercice ??, f^{-1} est continue sur $f(I)$, d'où $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$. De plus, par bijection, on a $x \neq x_0$ implique $f(x) \neq y_0$. Donc d'après le théorème de la limite des fonctions composées ??, on a

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

思考題Problème 5.14. Veuillez corriger la preuve suivante :

En dérivant l'identité $f^{-1} \circ f(x) = x$ par rapport à x , en utilisant la **règle de dérivation en chaîne** pour la dérivation des fonctions composées, on obtient au point x_0

$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = f^{-1}'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = f^{-1}'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1.$$

$$\text{Donc } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

5.2.3 Dérivées d'ordre supérieur

La dérivée d'une fonction f est également appelée la dérivée première de f , notée f' . Si la dérivée de f' existe, alors sa dérivée $(f')'$ est appelée la dérivée seconde de f , notée f'' . On peut définir par récurrence la dérivée n -ième de f , notée $f^{(n)}$, comme la dérivée de la dérivée $(n-1)$ -ième $f^{(n-1)}$, c'est-à-dire $(f^{(n-1)})'$. Nous convenons que la notation $f^{(0)}$ désigne f elle-même. Les dérivées d'ordre supérieur sont également définies point par point, mais si la dérivée n -ième $f^{(n)}(a)$ existe en un point a , alors cela implique que dans un voisinage de a , la dérivée $(n-1)$ -ième de f existe.

La dérivée première $f'(x)$ représente la vitesse. La dérivée seconde $f''(x)$ peut alors représenter l'accélération. Les dérivées d'ordre supérieur ont d'autres applications importantes, que nous étudierons progressivement.

♠Notation importante : L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I ayant une dérivée n -ième existante et continue sur I est noté $C^n(I)$.

例子Exemple 5.15. La dérivée k -ième ($k \leq n$) d'un polynôme de degré n , $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$, au point a est exactement $k!$ fois le coefficient c_k du terme de degré k , c'est-à-dire $P^{(k)}(a) = k!c_k$.

例子Exemple 5.16.

Nous avons $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$, $(\cos x)''' = \sin x$, $(\cos x)^{(4)} = \cos x$. Par récurrence, on peut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.

De la même manière, ou en utilisant $(\sin x)^{(n)} = (\cos x)^{(n-1)} = \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{n\pi}{2})\right)$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Pour le calcul des dérivées d'ordre supérieur, la linéarité est évidemment satisfaite. Pour tout $(f, g) \in (\mathcal{C}^n(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}.$$

Ensuite, nous allons calculer la dérivée n -ième du produit de deux fonctions $(fg)^{(n)}$.

定理 Théorème 5.17: Formule de Leibniz pour les dérivées d'ordre supérieur

Soient f et g deux fonctions ayant des dérivées n -ièmes sur un intervalle I . Alors le produit fg a également une dérivée n -ième sur I , et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)},$$

où les coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

证明 Démonstration: Nous procédons par récurrence sur n . Pour $n = 1$, la proposition est évidemment vraie. Supposons maintenant que pour $m \geq 1$, on ait

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} f^{(m-k)} g^{(k)}.$$

En dérivant les deux côtés de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned}
(fg)^{(m+1)} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (f^{(m-k)} g^{(k)})' \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (f^{(m-k+1)} g^{(k)} + f^{(m-k)} g^{(k+1)}) \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(m-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(m-k)} g^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(m-k+1)} g^{(k)} + \sum_{\tilde{k}=1}^{m+1} \binom{m}{\tilde{k}-1} f^{(m-\tilde{k}+1)} g^{(\tilde{k})} \quad (\text{en posant } \tilde{k} = k+1) \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(m-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} f^{(m-k+1)} g^{(k)} \quad (\text{en revenant à la variable } k) \\
&= \left(f^{(m+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} f^{(m-k+1)} g^{(k)} \right) + \left(\sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} f^{(m-k+1)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(m+1)} \right) \\
&= f^{(m+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^m \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) f^{(m-k+1)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(m+1)} \\
&= f^{(m+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} f^{(m+1-k)} g^{(k)} + f^{(0)} g^{(m+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} f^{(m+1-k)} g^{(k)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré l'égalité pour $n = m + 1$. Cela complète la preuve par récurrence. \square

Exemple 5.18. Soit $f(x) = x^2 \cos x$, trouvez $f^{(100)}(x)$.

Remarquez que la dérivée troisième et supérieure de x^2 est toujours nulle. En utilisant la formule de Leibniz, nous avons

$$\begin{aligned}
f^{(100)} &= (x^2 \cos x)^{(100)} \\
&= (\cos x)^{(100)} x^2 + \binom{100}{1} (\cos x)^{(99)} (x^2)' + \binom{100}{2} (\cos x)^{(98)} (x^2)''.
\end{aligned}$$

Puisque $(\cos x)^{(100)} = \cos x$, $(\cos x)^{(99)} = \sin x$, $(\cos x)^{(98)} = -\cos x$, en substituant, on obtient $f^{(100)} = (x^2 - 9900) \cos x + 200x \sin x$.

5.3 Calcul des Dérivées

练习 Exercice 5.19

Trouvez la dérivée seconde $f''(x)$ par rapport à x pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{x^2};$
2. $f(x) = x^2 a^\pi (a > 0);$
3. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2};$
4. $f(x) = \frac{1}{a+\sqrt{x}};$
5. $f(x) = \tan x;$
6. $f(x) = (1 + x^2) \arctan x;$
7. $f(x) = \ln \sin x \quad (0 < x < \pi);$
8. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$
9. $f(x) = x^3 \cos x;$
10. $f(x) = x \ln x.$

练习 Exercice 5.20

Trouvez la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2},$
2. $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}},$
3. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}.$

练习 Exercice 5.21

Soit une fonction f ayant une dérivée seconde sur $(-\infty, x_0]$. Définissons

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{lorsque } x \leqslant x_0 ; \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{lorsque } x = x_0. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a, b, c la fonction F a-t-elle une dérivée seconde sur \mathbf{R} ?

练习 Exercice 5.22

Trouvez la dérivée n -ième de la fonction f au point 0, pour $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{lorsque } x \neq 0 ; \\ 0, & \text{lorsque } x = 0. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de a, b, c la fonction F a-t-elle une dérivée seconde sur \mathbf{R} ?

练习 Exercice 5.23

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{lorsque } x \neq 0 ; \\ 0, & \text{lorsque } x = 0. \end{cases}$$

Trouvez toutes les dérivées (existantes) de la fonction composée $g(x) = f(x^n)$ au point 0.

5.3.1 Dérivation des fonctions implicites

La dérivation des fonctions implicites sera abordée de manière rigoureuse dans le cadre du calcul multivarié. Ici, nous allons simplement effectuer des calculs sur quelques exemples simples.

Soit $F(x, y)$ une fonction de deux variables, c'est-à-dire une application d'un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} . Supposons que la fonction $y = f(x)$ satisfait l'équation $F(x, y) = 0$, c'est-à-dire $F(x, f(x)) = 0$. Si la fonction $F(x, f(x))$ peut être dérivée par rapport à x , alors nous pouvons **éventuellement** calculer la dérivée de $y = f(x)$: en dérivant l'identité $F(x, f(x)) = 0$ par rapport à x , nous pouvons trouver une équation contenant $f'(x)$ et résoudre pour f' .

练习 Exercice 5.24

Supposons que la fonction $y = y(x)$ satisfait $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$. Trouvez $y'(x)$.

5.3.2 Dérivation des fonctions paramétriques

Supposons que les variables $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ sont liées par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Si la fonction $x = \varphi(t)$ a une fonction inverse continue et monotone $t = \varphi^{-1}(x)$ sur un intervalle I , alors nous pouvons obtenir une fonction $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ sur $\varphi(I)$, que nous notons $y = f(x)$. De plus, si $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$ sont dérivables sur I , et si $\varphi'(t) \neq 0$, alors en utilisant la [règle de dérivation en chaîne](#) et le théorème de dérivation des fonctions inverses [5.13](#), nous obtenons

$$f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right) \circ \varphi^{-1}(x)$$

5.4 Propriétés importantes des fonctions dérivables

ableFunctions

5.4.1 Théorèmes de la moyenne

Les théorèmes de la moyenne en calcul différentiel incluent le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis (de Lagrange) et le théorème des accroissements finis généralisé de Cauchy. En gros, ces théorèmes indiquent que pour une courbe différentiable entre deux points fixes, il existe au moins un point où la pente de la tangente est égale à la pente de la droite reliant les deux points. Lorsqu'on parle du théorème de la moyenne sans précision, il s'agit généralement du théorème des accroissements finis (de Lagrange).

定理Théorème 5.25: Théorème de Rolle

`thm:Rolle` Si une fonction $f(x)$ satisfait les conditions suivantes :

1. Elle est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$;
2. Elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$;
3. Les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle sont égales, c'est-à-dire $f(a) = f(b)$;

Alors il existe au moins un point $\xi (a < \xi < b)$ dans $]a, b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.

证明Démonstration: Puisque f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des valeurs extrêmes ??, f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$. Si le maximum et le minimum sont tous deux atteints aux extrémités, alors d'après la condition $f(a) = f(b)$, f est une fonction constante, et sa dérivée est nulle en tout point de l'intervalle ouvert.

Supposons maintenant que le maximum de f est atteint à l'intérieur de l'intervalle. Soit ξ ce point. Pour tout $h > 0$, tant que $\xi+h$ est dans $[a, b]$, on a $\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leq 0$, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \leq 0.$$

De même, pour tout $h < 0$, tant que $\xi + h$ est dans $[a, b]$, on a $\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0$, donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Puisque f est dérivable en ξ , d'après la définition de la dérivée, on doit avoir $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$, donc $f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = 0$. \square

练习 Exercice 5.26

Si une fonction $f(x)$ satisfait les conditions suivantes :

1. Elle est continue sur l'intervalle fermé $[a, +\infty[$;
2. Elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

Alors il existe au moins un point ξ dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(\xi) = 0$.

练习 Exercice 5.27

- Un polynôme de degré n a au plus n racines réelles.
- L'équation $e^x = ax^2 + bx + c$ a au plus 3 racines réelles.
- L'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ a au moins une racine réelle dans $(0, 1)$.

定理 Théorème 5.28: Théorème des accroissements finis (拉格朗日中值定理)

Si une fonction $f(x)$ satisfait les conditions suivantes :

1. Elle est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$;
2. Elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$;

Alors il existe au moins un point $\xi (a < \xi < b)$ dans $]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

证明 Démonstration: Définissons $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a) - f(x)$. Alors

- g est continue sur $[a, b]$
- g est dérivable sur $]a, b[$
- $g(a) = g(b) = 0$

D'après le théorème de Rolle, il existe au moins un point $\xi \in (a, b)$ tel que $g'(\xi) = 0$. C'est-à-dire $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$. \square

定理 Théorème 5.29: Théorème des accroissements finis généralisé de Cauchy

CauchyMeanValue

Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont les conditions suivantes :

1. Elles sont continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$;
2. Elles sont dérivables sur l'intervalle ouvert $]a, b[$;
3. Pour tout $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$;

Alors il existe au moins un point $\xi (a < \xi < b)$ dans $]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明 Démonstration: Si $g(a) = g(b)$, d'après le théorème de Rolle, il existe un point $\xi \in]a, b[$ tel que $g'(\xi) = 0$, ce qui contredit la condition 3. Donc $g(a) \neq g(b)$.

Définissons $h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, b]$
- h est dérivable sur $]a, b[$
- $h(a) = h(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$

D'après le théorème de Rolle, il existe un point $\xi \in (a, b)$ tel que $h'(\xi) = 0$. C'est-à-dire $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)$. \square

Remarquez que si la fonction g est l'application identité id, que obtenons-nous ?

练习 Exercice 5.30

Soient $f, g \in C[a, b]$, dérivables sur (a, b) , et $g(a) = 1, g(b) = 0$. Montrez qu'il existe $\xi \in (a, b)$ tel que $f'(\xi) = g'(\xi)[f(a) - f(b)]$.

5.4.2 Deux théorèmes sur les fonctions dérivées

定理Théorème 5.31: Théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions dérivées

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors f' a la propriété de la valeur intermédiaire : pour tout $(a, b) \subset I$, si $f'(a) < u < f'(b)$, alors il existe $\xi \in (a, b)$ tel que $f'(\xi) = u$.

Puisque f' n'est pas nécessairement continue sur I , on ne peut pas utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions continues. Nous devons donc trouver une autre approche. La preuve d'existence utilise le théorème des accroissements finis : si on peut trouver $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ tels que $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = u$, alors il existe naturellement $\xi \in (x_1, x_2)$ satisfaisant la condition.

证明Démonstration: Comparons d'abord $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et u .

Si $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = u$, alors d'après le théorème des accroissements finis , la proposition est vraie.

Si $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < u < f'(b)$, considérons la fonction

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(b) - f(t)}{b - t} & a \leq t < b \\ f'(b) & t = b \end{cases}$$

On peut vérifier directement que $g(t)$ est continue sur $[a, b]$, et que $g(a) < u < g(b)$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions continues, il existe $t_0 \in (a, b)$ tel que $g(t_0) = \frac{f(b) - f(t_0)}{b - t_0} = u$. En appliquant le théorème des accroissements finis , il existe $\xi \in (t_0, b)$ tel que $f'(\xi) = g(t_0) = u$.

Le cas $f'(a) < u < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ peut être démontré de manière similaire. \square

定理Théorème 5.32: Théorème de la limite des dérivées

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0 , et $f'(x)$ est continue en x_0 .

证明 Démonstration: Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$. Pour montrer que f est dérivable en x_0 et que f' est continue en x_0 , il suffit de montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < |x - x_0| < \delta$, on ait $|f'(x) - A| < \varepsilon$. De plus, pour $0 < |x - x_0| < \delta$, en appliquant le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[x, x_0]$ (ou $[x_0, x]$), il existe ξ entre x et x_0 tel que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$. Puisque $0 < |\xi - x_0| < \delta$, on a $|f'(\xi) - A| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A| < \varepsilon$. \square

推论 Corollaire 5.33. *Les fonctions dérivées n'ont pas de discontinuités de première espèce.*

5.4.3 Exemples d'application des théorèmes de la moyenne

例子 Exemple 5.34. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$, avec $f(a) = f(b) = 0$.

Montrez que pour tout $x \in (a, b)$, il existe $\xi \in (a, b)$ tel que $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b)$.

Preuve : Pour tout $x \in (a, b)$, posons $\lambda = \frac{2f(x)}{(x - a)(x - b)}$. Il suffit de montrer qu'il existe $\xi \in (a, b)$ tel que $f''(\xi) = \lambda$. Construisons la fonction auxiliaire

$$F(t) = f(t) - \frac{\lambda}{2}(t - a)(t - b).$$

Par hypothèse, $f(a) = f(b) = 0$, donc $F(a) = F(b) = 0$. De plus, par définition de λ , on a $F(x) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à F sur les intervalles $[a, x]$ et $[x, b]$, on obtient deux points η_1 et η_2 tels que $a < \eta_1 < x < \eta_2 < b$ et $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$.

Remarque : Cette méthode de construction de fonctions auxiliaires est appelée **méthode des coefficients indéterminés** : on fixe une partie contenant ξ comme une constante λ , puis on déplace les termes pour obtenir une fonction auxiliaire. Essayez d'utiliser cette méthode pour redémontrer le théorème des accroissements finis .

练习 Exercice 5.35

Soit f une fonction trois fois dérivable sur $[a, b]$, avec $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Montrez que pour chaque $x \in [a, b]$, il existe $\xi \in (a, b)$ tel que

$$f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - a)^2(x - b)$$

练习 Exercice 5.36

Soit f une fonction trois fois dérivable sur $[a, b]$. Montrez qu'il existe $\xi \in (a, b)$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

5.5 Utilisation des dérivées pour étudier les fonctions

5.5.1 Monotonie

命题 Proposition 5.37. *Si la dérivée ne change pas de signe sur un intervalle, alors la fonction est monotone.*

Soit une fonction $f(x)$ dérivable sur un intervalle I avec une dérivée non négative. Alors $f(x)$ est croissante sur l'intervalle I .

证明 Démonstration: D'après les hypothèses, pour tout $a \in I, b \in I$ avec $a < b$, la fonction $f(x)$ satisfait les conditions du théorème des accroissements finis ?? sur l'intervalle $[a, b]$. Il existe donc un point $\xi (a < \xi < b)$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$, d'où $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Puisque $f'(\xi) \geq 0$, on a $f(a) \leq f(b)$. \square

练习 Exercice 5.38

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, donnez une preuve ; si elles sont fausses, donnez un contre-exemple.

- Soit une fonction $f(x)$ dérivable sur un intervalle I avec une dérivée toujours positive. Alors $f(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle I .
- Soit une fonction $f(x)$ dérivable sur un intervalle I et strictement croissante. Alors sa dérivée est toujours positive.

练习 Exercice 5.39

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, donnez une preuve ; si elles sont fausses, donnez un contre-exemple.

- Soit une fonction $f(x)$ dérivable au point x_0 , avec $f'(x_0) > 0$. Alors il existe

un petit intervalle I contenant x_0 sur lequel f est croissante.

- Soit une fonction continue $f(x)$ dérivable au point x_0 , avec $f'(x_0) > 0$. Alors il existe un petit intervalle I contenant x_0 sur lequel f est croissante.
- Soit $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, avec $f'(x_0) > 0$. Alors il existe un petit intervalle I contenant x_0 sur lequel f est strictement croissante.

推论Corollaire 5.40. *Une fonction dont la dérivée est toujours nulle est une fonction constante.*

推论Corollaire 5.41. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f(a) = g(a)$ et si $f'(x) \leq g'(x)$, alors $f(x) \leq g(x)$.*

练习 Exercice 5.42

Montrez que la dérivée d'une fonction non bornée dérivable sur un intervalle ouvert fini (a, b) est également non bornée.

练习 Exercice 5.43

Utilisation de la monotonie pour démontrer des inégalités

1. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.
2. Pour $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^+$, on a $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

练习 Exercice 5.44

1. Pour $x > 0$, on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
2. Pour $x < 0$, on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

5.5.2 Extrema et valeurs extrêmes

定义Définition 5.45: Extrema

Soit une fonction f définie sur un intervalle I , et $x_0 \in I$. Si pour tout $x \in I$, on a $f(x_0) \geq f(x)$, alors $f(x_0)$ est appelé le **maximum** de f sur I ; s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0)$ soit le maximum de f sur $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, alors on dit que

$f(x_0)$ est un (local) **maximum**, et x_0 est appelé un **point de maximum**. De manière similaire, si pour tout $x \in I$, on a $f(x_0) \leq f(x)$, alors $f(x_0)$ est appelé le **minimum** de f sur I ; s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0)$ soit le minimum de f sur $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, alors on dit que $f(x_0)$ est un (local) **minimum**, et x_0 est appelé un **point de minimum**.

Dans la preuve du théorème de Rolle, nous avons déjà utilisé et démontré le théorème suivant de Fermat :

定理 Théorème 5.46: Théorème de Fermat

Si une fonction f a un extremum en un point x_0 où elle est dérivable, alors $f'(x_0) = 0$.

Les points où la dérivée est nulle sont également appelés **points stationnaires**, attention : les points stationnaires sont des conditions nécessaires mais non suffisantes pour les extrema.

Lorsque les conditions sont plus fortes, nous avons le théorème suivant.

定理 Théorème 5.47: Critère des extrema

Si en un point stationnaire x_0 , on a $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un point de maximum local pour f . Si en un point stationnaire x_0 , on a $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un point de minimum local pour f .

証明 Démonstration: L'existence de $f''(x_0)$ implique que f' existe dans un voisinage I de x_0 , donc f est continue sur I .

Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$. Par la propriété de conservation du signe des limites ??, il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < |x - x_0| < \delta$, on ait $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$. Ainsi, pour $x_0 - \delta < x \leq x_0$, on a $f'(x) \geq 0$, donc $f(x)$ est croissante sur $(x_0 - \delta, x_0]$; de manière similaire, on montre que $f(x)$ est décroissante sur $[x_0, x_0 + \delta]$. Par conséquent, $f(x_0)$ est un maximum sur l'intervalle $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, et x_0 est un point de maximum local pour f .

De manière similaire, on peut démontrer que si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un point de minimum local pour f . \square

5.5.3 Convexité

Rappelons la définition d'une fonction convexe : soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $(x_1, x_2) \in I^2$, on a $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, alors f est dite **convexe vers le haut (concave)** ; si pour tout

$t \in [0, 1]$ et tout $(x_1, x_2) \in I^2$, on a $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, alors f est dite **convexe vers le bas (convexe)**. Si les inégalités sont strictes, on parle de convexité stricte vers le haut ou vers le bas.

注释 Remarque 5.48. Les termes "convexe vers le haut" et "convexe vers le bas" sont des traductions courantes en français, cohérentes avec l'intuition visuelle de la convexité ; cependant, de nombreux manuels utilisent respectivement les termes "fonction convexe" et "fonction concave".

Graphiquement, une fonction f est convexe vers le haut sur un intervalle I si, pour tout couple de points $x_1 < x_2$ dans I , la droite reliant $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ se situe en dessous du graphe $\{(x, f(x)) | x_1 \leq x \leq x_2\}$. La convexité vers le bas est l'inverse. Par exemple, la fonction exponentielle e^x est convexe vers le bas, la fonction logarithme $\ln x$ est convexe vers le haut, et la fonction puissance x^2 est convexe vers le bas.

练习 Exercice 5.49

- Si f est une fonction convexe vers le haut sur un intervalle I , alors la fonction λf est convexe vers le haut sur I si $\lambda > 0$, et convexe vers le bas si $\lambda < 0$.
- Si f est une fonction convexe vers le bas sur un intervalle I et que $f(x)$ est une bijection, alors f^{-1} est une fonction convexe vers le haut sur l'intervalle $f(I)$.
- Si f et g sont des fonctions convexes vers le haut sur un intervalle I , alors $f + g$ est une fonction convexe vers le haut sur I .
- Si f est une fonction convexe vers le bas sur un intervalle I , et g est une fonction convexe vers le bas et croissante sur l'intervalle $f(I)$, alors $g \circ f$ est une fonction convexe vers le bas sur I .

命题 Proposition 5.50. (*Inégalité de Jensen pour les fonctions convexes*)

Supposons que f soit une fonction convexe vers le haut sur un intervalle I . Alors pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ et pour tout n nombres positifs t_1, t_2, \dots, t_n tels que $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, on a l'inégalité

$$t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n) \leq f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n).$$

De manière similaire, si f est une fonction convexe vers le bas sur I , on a l'inégalité

$$t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n) \geq f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n).$$

Si la convexité est stricte, alors les égalités dans les inégalités ci-dessus sont vérifiées si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

练习 Exercice 5.51

Démontrez l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes.

p: Convexity

命题 Proposition 5.52. Une fonction f est convexe vers le bas sur un intervalle I si et seulement si pour tout triplet de points $x_1 < x_2 < x_3$ dans I , on a l'inégalité

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Pour la convexité vers le haut, les inégalités sont inversées.

注释 Remarque 5.53. Dans la proposition ci-dessus, chacune des trois inégalités implique les deux autres. Cela découle des propositions suivantes :

- Si $a > 0$ et $c > 0$, alors $\frac{b}{a} \leq \frac{d}{c}$ implique $\frac{b}{a} \leq \frac{b+d}{a+c} \leq \frac{d}{c}$.
- Si $c > a > 0$, alors $\frac{b}{a} \leq \frac{d}{c}$ implique $\frac{b}{a} \leq \frac{d}{c} \leq \frac{d-b}{c-a}$.
- Si $a > c > 0$, alors $\frac{b}{a} \leq \frac{d}{c}$ implique $\frac{b-d}{a-c} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{d}{c}$.

证明 Démonstration: Montrons d'abord la nécessité. Posons $t = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$, avec $0 < t < 1$. Puisque f est convexe vers le bas, en substituant dans l'inégalité de convexité, on obtient

$$f(x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_3).$$

En substituant l'expression de t , on obtient

$$(x_3 - x_2)(f(x_2) - f(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)),$$

ce qui donne l'inégalité $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. En utilisant la proposition "si $a > 0$ et $c > 0$, alors $\frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$ implique $\frac{b}{a} \geq \frac{b+d}{a+c} \geq \frac{d}{c}$ ", on obtient les inégalités souhaitées.

Montrons maintenant la suffisance. Prenons une inégalité, et pour tout $0 < t < 1$, posons $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$. En substituant dans l'inégalité

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

on obtient

$$f(tx_1 + (1-t)x_3) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_3).$$

□

思考题 **Problème 5.54.** Si f est une fonction convexe sur un intervalle **ouvert** I , alors f est continue sur I .

Les fonctions convexes sur I ne sont pas nécessairement dérivables, mais si elles le sont, on peut utiliser le critère suivant.

定理 Théorème 5.55: Critère de convexité

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I . Alors f est convexe vers le haut si et seulement si f' est décroissante, et f est convexe vers le bas si et seulement si f' est croissante. En particulier, si f est deux fois dérivable sur I , alors si $f''(x) < 0$, f est strictement convexe vers le haut ; si $f''(x) > 0$, f est strictement convexe vers le bas.

证明 Démonstration: Nous ne démontrons que le cas de la convexité vers le haut, le cas de la convexité vers le bas étant similaire.

Supposons que f est convexe vers le haut. Alors pour tout triplet de points $x_1 < x_2 < x_3$ dans I , on a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Puisque $f'(x_1)$ existe, par définition, en prenant la limite du premier terme lorsque $x_2 \rightarrow x_1$, on obtient $f'(x_1) \geqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$. De même, puisque $f'(x_3)$ existe, en prenant la limite du deuxième terme lorsque $x_2 \rightarrow x_3$, on obtient $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geqslant f'(x_3)$. Donc $f'(x_1) \geqslant f'(x_3)$. Ainsi, f' est décroissante.

Supposons maintenant que f' est décroissante. Pour tout triplet de points $x_1 < x_2 < x_3$ dans I , d'après le théorème des accroissements finis, il existe $x_1 < \xi < x_2$ et $x_2 < \eta < x_3$ tels que $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et $f'(\eta) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Puisque f' est décroissante, on a $f'(\xi) \geqslant f'(\eta)$, c'est-à-dire $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

En utilisant à nouveau la proposition "si $a > 0$ et $c > 0$, alors $\frac{b}{a} \geqslant \frac{d}{c}$ implique $\frac{b}{a} \geqslant \frac{b+d}{a+c} \geqslant \frac{d}{c}$ ", on obtient

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \geqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Donc f est convexe vers le haut. \square

Lorsqu'une fonction convexe est dérivable, on peut observer que le graphe d'une fonction convexe vers le haut se situe toujours en dessous de toutes ses tangentes, et le graphe d'une fonction convexe vers le bas se situe toujours au-dessus de toutes ses tangentes. Vérifions cette conclusion.

定理 Théorème 5.56: Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses tangentes

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I . f est convexe vers le haut si et seulement si pour tout couple de points x, x_0 dans I , on a $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, et f est convexe vers le bas si et seulement si pour tout couple de points x, x_0 dans I , on a $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

证明 Démonstration: Nous ne démontrons que le cas de la convexité vers le haut, le cas de la convexité vers le bas étant similaire.

Supposons que f est convexe vers le haut. Alors f' est décroissante. Posons $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, on a $g(x_0) = 0$ et $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Ainsi, pour $x \geq x_0$, on a $g'(x) < 0$, donc $g(x) \leq 0$; pour $x \leq x_0$, on a $g'(x) > 0$, donc $g(x) \leq 0$. Par conséquent, sur l'intervalle I , on a toujours $g(x) \leq 0$, ce qui démontre la proposition.

Supposons maintenant que pour tout couple de points $x_1 < x_2$ dans I , on a $f(x_2) \leq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)$ et $f(x_1) \leq f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2)$. Ainsi,

$$f'(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_2).$$

Donc f' est décroissante, et f est convexe vers le haut. □

5.5.4 Règle de L'Hôpital

La règle de L'Hôpital (Règle de L'Hôpital) est une méthode utilisant les dérivées pour calculer des limites de formes indéterminées. Cette règle porte le nom du mathématicien français Guillaume de l'Hôpital, mais elle a en réalité été découverte par le mathématicien suisse Johann Bernoulli.

Une forme indéterminée (Forme indéterminée), également appelée forme indéterminée, est un type de limite qui, après substitution selon les règles de calcul des limites, ne fournit pas suffisamment d'informations pour déterminer la valeur de la limite. Ce terme a été introduit pour la première fois par le disciple de Cauchy, Moigno, au milieu du XIXe siècle. Une méthode courante pour calculer les valeurs des formes indéterminées est d'utiliser la règle de L'Hôpital.

Le tableau suivant classe les formes indéterminées et montre comment transformer une forme indéterminée générale en une forme $\frac{0}{0}$ à laquelle la règle de L'Hôpital peut

être directement appliquée.

Forme indéterminée	Condition	Transformation en 0/0
0/0	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	
∞/∞	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$
$\infty - \infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))}$
0^0	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}\right)$
1^∞	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}\right)$
∞^0	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/\ln f(x)}\right)$

定理 Théorème 5.57: Règle de L'Hôpital

Prérequis : Soit I un intervalle ouvert, a un point de I , et f et g des fonctions définies sur I .

Conditions :

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$
2. Dans un voisinage épointé de a , les fonctions f et g sont dérivables et $g'(x) \neq 0$,
3. La limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

Conclusion : La limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

证明 Démonstration: Nous allons démontrer le cas où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. En termes de $\varepsilon - \delta$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x satisfaisant $0 < |x - a| < \delta$, on a $A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \varepsilon$.

Puisque la limite d'une fonction en un point ne dépend pas de la valeur de la fonction en ce point, d'après la condition $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, on peut supposer

que $f(a) = g(a) = 0$ pour que les fonctions f et g soient continues en a (si f et g sont dérivables en a , elles sont continues en a), donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Considérons maintenant la restriction de la variable x à l'intervalle $(a - \delta, a + \delta)$. D'après le théorème des accroissements finis de Cauchy 5.29, pour tout $x \neq a$, il existe un nombre ξ_x entre a et x (dépendant de x) tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

On a alors $0 < |\xi_x - a| < \delta$, donc $A - \varepsilon < \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} < A + \varepsilon$. C'est-à-dire que pour $0 < |x - a| < \delta$,

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon.$$

Nous avons ainsi démontré que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Le cas où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ et $g'(a) \neq 0$ est similaire mais légèrement plus complexe. La preuve est la suivante.

La première étape est identique : supposons que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. En termes de $\varepsilon - \delta$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout x satisfaisant $0 < |x - a| < \delta_1$, on a $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon$.

La deuxième étape ne peut plus utiliser $f(a)$ et $g(a)$. Pour $a < x < a + \delta_1$, la fonction $\frac{f}{g}$ satisfait les conditions du théorème des accroissements finis de Cauchy 5.29 sur l'intervalle $[x, a + \delta_1]$. Il existe donc un nombre $\xi_x \in (x, a + \delta_1)$ (dépendant de x) tel que :

$$\frac{f(x) - f(a + \delta_1)}{g(x) - g(a + \delta_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Le côté gauche de cette équation n'est plus égal à $\frac{f(x)}{g(x)}$. Pour l'obtenir, nous pouvons exprimer $f(x)$ en fonction de $g(x)$: $f(x) = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}(g(x) - g(a + \delta_1)) + f(a + \delta_1)$. Puisque $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, nous pouvons supposer que pour $0 < |x - a| < \delta_1$, $g(x) \neq 0$. En divisant les deux côtés par $g(x)$, on obtient

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \left(1 - \frac{g(a + \delta_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(a + \delta_1)}{g(x)}.$$

La troisième étape, puisque $0 < |\xi_x - a| < \delta_1$, on a $|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A| < \varepsilon$, donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &= \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \frac{g(a + \delta_1)}{g(x)} + \frac{f(a + \delta_1)}{g(x)} - A \right| \\ &\leqslant \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| + \left| \frac{f(a + \delta_1) - g(a + \delta_1) \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}}{g(x)} \right| \\ &\leqslant \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| + \frac{|f(a + \delta_1)| + (|A| + 1)|g(a + \delta_1)|}{|g(x)|} \end{aligned}$$

La quatrième étape, puisque $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, et que $a + \delta_1$ est un nombre fixe, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour $0 < |x - a| < \delta_2$, on a $\frac{|f(a + \delta_1)| + (|A| + 1)|g(a + \delta_1)|}{|g(x)|} < \varepsilon$.

Donc pour $a < x < a + \min\{\delta_1, \delta_2\}$, on a toujours

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leqslant \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| + \frac{|f(a + \delta_1)| + (|A| + 1)|g(a + \delta_1)|}{|g(x)|} < 2\varepsilon.$$

Nous avons ainsi démontré que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Le cas de la limite à gauche est similaire. \square

思考題Problème 5.58. Supposons que dans les conditions de la règle de L'Hôpital pour la forme $\frac{0}{0}$, on sait que $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables en a , les autres conditions restant inchangées. Veuillez corriger la preuve suivante.

Preuve : Puisque $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables en a , elles sont continues en a , donc $f(a) = g(a) = 0$. Pour $x \neq a$, on a $x - a \neq 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

思考題Problème 5.59. Veuillez corriger la preuve suivante de la règle de L'Hôpital pour la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Preuve : Puisque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0$. Ainsi, on peut transformer la limite originale en une forme $\frac{0}{0}$, et en utilisant la **règle de dérivation en chaîne** pour la dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

练习 Exercice 5.60: Règle de L'Hôpital pour les limites à l'infini

Supposons que

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \pm\infty$
2. Les fonctions f et g sont dérivables sur $(100, +\infty)$, et $g'(x)$ n'est jamais nul aux points où elles sont dérivables.
3. La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Montrez que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Avant d'utiliser la règle de L'Hôpital, assurez-vous que les trois conditions du théorème sont satisfaites !

Par exemple, les limites suivantes ne peuvent pas être calculées avec la règle de L'Hôpital.

1. Pas une forme indéterminée : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+2}$,
2. Le dénominateur a une infinité de zéros : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x e^{\cos x}}$
3. La limite du rapport des dérivées n'existe pas : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\tan x}$

5.6 L'essence du calcul différentiel — La formule de Taylor Formule de Taylor

Dans la section 5.4, le théorème des accroissements finis est sans doute le théorème le plus important. La formule de Taylor, quant à elle, est la couronne du calcul différentiel. Sans exagération, la plupart des problèmes de calcul différentiel peuvent être résolus avec la formule de Taylor. Une fois maîtrisée, la formule de Taylor donne une perspective claire sur les théories précédentes, offrant une vue d'ensemble.

5.6.1 La différentielle d'une fonction

定义Définition 5.61: Différentielle d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I , et $a \in I$. S'il existe une constante λ et une fonction $R(x)$ tels que

$$f(x) - f(a) = \lambda(x - a) + R(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0$$

alors on dit que la fonction f est différentiable au point a . Nous appelons $x - a$ l'incrément de la variable indépendante, noté $\Delta_a x$; $f(x) - f(a)$ est l'incrément de la fonction, et $\lambda \Delta_a x$ est la partie linéaire principale de l'incrément de la fonction. L'application linéaire de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $\Delta_a x \mapsto \lambda \Delta_a x$ est appelée la différentielle de f en a , notée $df(a)$.

Examinons d'abord la relation entre la différentiabilité et la dérivabilité pour les fonctions d'une variable : Si une fonction f est différentiable en un point a , alors il existe une constante λ et une fonction $R(x)$ tels que $f(x) - f(a) = \lambda(x - a) + R(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lambda + \frac{R(x)}{x - a} \right) = \lambda$, c'est-à-dire que la fonction f est dérivable en a , et sa dérivée est exactement λ . Inversement, si une fonction f est dérivable en a avec une dérivée $f'(a)$, alors en posant $\lambda = f'(a)$, $R(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$, on a naturellement $f(x) - f(a) = \lambda(x - a) + R(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$, ce qui montre que f est différentiable en a .

Ainsi, pour les fonctions d'une variable, la dérivabilité et la différentiabilité sont équivalentes.

Reconsidérons la différentielle de f en a , $df(a)$. C'est une application de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $\Delta_a x \mapsto f'(a)\Delta_a x$, que l'on peut également écrire $t \mapsto f'(a)t$. Considérons maintenant la fonction identité id . Puisque la dérivée de id en tout point est 1, la différentielle de id en tout point $*$ est $\Delta x \mapsto \Delta x$. Ainsi, on a $df(a) = f'(a)d id(*)$. Pour les fonctions, l'application identité $id(*)$ est souvent notée x , donc cette relation est souvent écrite $df(a) = f'(a)dx$. (Notez que ici x représente la fonction identité). Si f est différentiable sur tout son domaine, cette relation peut varier avec a , ce qui donne l'égalité suivante.

$$df = f'dx.$$

df et dx sont des applications de I vers $\{L : L \text{ est une application linéaire de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}\}$, qui associent respectivement a à $df(a)$ et $d id(a)$.

C'est à cause de cette égalité que la dérivée est également appelée quotient différentiel, et qu'elle est notée $\frac{df}{dx}(a)$ par Leibniz.

定理 Théorème 5.62: Lemme fondamental de la différentielle

Une fonction $f(x)$ est différentiable en un point a si et seulement s'il existe une fonction $q(x)$ telle que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + q(x)(x - a), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0.$$

练习 Exercice 5.63

Démontrez le lemme fondamental de la différentielle.

例子 Exemple 5.64. Utilisation du lemme fondamental de la différentielle pour démontrer la règle de dérivation en chaîne 5.11.

g est dérivable en a , donc différentiable, donc $g(x) - g(a) = g'(a)(x - a) + q_1(x)(x - a)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} q_1(x) = 0$. f est dérivable en $g(a)$, donc différentiable, donc $f(y) - f(g(a)) = f'(g(a))(y - a) + q_2(y)(y - g(a))$ avec $\lim_{y \rightarrow g(a)} q_2(y) = 0$. Ainsi,

$$f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a))(g(x) - g(a)) + q_2(g(x))(g(x) - g(a)) = f'(g(a))(g'(a)(x - a) + q_1(x)(x - a)) +$$

Posons $q(x) = \begin{cases} f'(g(a))q_1(x) + q_2(g(x))\frac{(g(x)-g(a))}{x-a} & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$, alors en réarrangeant l'équation ci-dessus, on obtient

$$f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a))g'(a)(x - a) + q(x)(x - a).$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(g(a))q_1(x) + q_2(g(x))\lim_{x \rightarrow a} \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} = 0$.

Ainsi, $f \circ g$ est différentiable en a , et sa dérivée en a est $f'(g(a))g'(a)$.

5.6.2 Formule de Taylor

La formule de Taylor est une formule qui utilise les informations d'une fonction en un point pour décrire ses valeurs à proximité de ce point. Cette formule provient du théorème de Taylor en calcul différentiel : si une fonction est suffisamment lisse (a des dérivées d'ordre suffisamment élevé), alors en connaissant les valeurs des dérivées de la fonction en un point, la formule de Taylor permet de construire un polynôme qui approxime la fonction au voisinage de ce point. Ce polynôme est appelé polynôme de Taylor (polynôme de Taylor). La formule de Taylor donne également un terme d'erreur, appelé reste, qui quantifie l'écart entre le polynôme et la fonction réelle. La formule de Taylor porte le nom du mathématicien britannique Brook Taylor, qui l'a énoncée pour

la première fois dans une lettre en 1712. La forme actuelle avec le reste a été proposée par Lagrange à la fin du XVIII^e siècle.

Avant d'introduire le théorème de Taylor, discutons de l'idée derrière la formule de Taylor. Nous souhaitons qu'un polynôme $P(x)$ de degré n approxime une fonction f autour d'un point a . Lorsqu'on approxime une fonction "courbée" $y = f(x)$ par une fonction "droite" $y = Ax + B$ autour d'un point a , on doit avoir $A = f'(a)$, $B = f(a) - af'(a)$. De même, lorsqu'on approxime $f(x)$ par un polynôme $P(x)$, on exige que les dérivées k -ièmes de $P(x)$ en a soient égales aux dérivées k -ièmes de $f(x)$ en a , pour

$k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ainsi, si on pose $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k$, nous avons déjà calculé (exemple 5.15) que $P^{(k)}(a) = k!c_k$. En résolvant l'équation $k!c_k = f^{(k)}(a)$, on obtient $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Ainsi, le polynôme de degré n qui semble le plus approprié pour approximer la fonction originale est

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k.$$

Le théorème de Taylor nous dit que si on choisit ce polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k$ pour approximer $f(x)$, alors autour du point a , la différence $|f(x) - P(x)|$ est vraiment petite, et on peut contrôler qualitativement ou quantitativement la "petitesse" de cette différence. Le polynôme $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est appelé le développement de Taylor d'ordre n de f en a , noté $T_{f,a,n}(x)$ dans cette section.

定理 Théorème 5.65: Théorème de Taylor

Soit n un entier positif. Si une fonction f définie sur un intervalle I contenant a est n fois dérivable en a , alors pour tout x dans cet intervalle, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{f,a,n}(x) + R_{f,a,n}(x) \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{f,a,n}(x) \end{aligned}$$

où $R_{f,a,n}(x)$ est appelé le reste du développement de Taylor d'ordre n de f en a , et satisfait $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{f,a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0$. Selon l'expression du reste $R_{f,a,n}(x)$, la formule de Taylor porte des noms plus spécifiques :

- Si le reste $R_{f,a,n}(x)$ n'a pas d'expression spécifique, mais satisfait seulement

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{f,a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0$, on parle de formule de Taylor avec reste de Peano, appelée en France Formule de Taylor-Young. C'est la forme la plus simple de la formule de Taylor, signifiant que l'erreur entre le polynôme de Taylor et la fonction originale est beaucoup plus petite que $(x-a)^n$.

- Si f a une dérivée $(n+1)$ -ième sur $I \setminus \{a\}$, et si le reste s'écrit sous la forme :

$$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

où ξ est un nombre entre x et a (dépendant de x), alors on parle de formule de Taylor avec reste de Lagrange (Formule de Taylor-Lagrange). Cette forme est plus précise (bien que les conditions soient légèrement plus fortes), et peut être vue comme une généralisation du théorème des accroissements finis.

- Si f a une dérivée $(n+1)$ -ième sur $I \setminus \{a\}$, et si le reste s'écrit sous la forme :

$$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-a)(x-\xi)^n$$

où ξ est un nombre entre x et a (dépendant de x), alors on parle de formule de Taylor avec reste de Cauchy (Formule de Taylor-Cauchy). Les formules de Taylor avec reste de Lagrange et de Cauchy sont équivalentes. Elles ont des expressions explicites, permettant de quantifier l'erreur entre le polynôme et la fonction dans un certain intervalle.

证明 Démonstration: • Pour la formule de Taylor avec reste de Peano, nous procérons par récurrence sur n . Pour $n = 1$, puisque la fonction est différentiable sur I , la définition de la différentielle implique qu'il existe $R_{f,a,1}(x) = f(x) - f(0) - f'(a)(x-a)$ satisfaisant $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{f,a,1}(x)}{(x-a)} = 0$. Supposons que pour $n = k$, la formule de Taylor avec reste de Peano est vraie, alors pour $n = k+1$, $f(x) = T_{f,a,k+1}(x) + R_{f,a,k+1}(x)$ est toujours vraie, et nous devons prouver que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{f,a,k+1}(x)}{(x-a)^{k+1}} = 0.$$

D'une part, en dérivant $f(x) = T_{f,a,k+1}(x) + R_{f,a,k+1}(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= T'_{f,a,k+1}(x) + R'_{f,a,k+1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \left(\frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \right)' + R'_{f,a,k+1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^k \left(\frac{f^{(i+1)}(a)}{i!} (x-a)^i \right)' + R'_{f,a,k+1}(x) \\ &= T'_{f,a,k}(x) + R'_{f,a,k+1}(x) \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $f(x)$ a une dérivée $(k+1)$ -ième sur I , $f'(x)$ a une dérivée k -ième sur I , donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence, ce qui donne

$$f'(x) = T_{f',a,k}(x) + R_{f',a,k}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{f',a,k}(x)}{(x-a)^k} = 0.$$

En comparant les deux équations, on obtient $R_{f',a,k}(x) = R'_{f,a,k+1}(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_{f,a,k+1}(x)}{(x-a)^k} = 0$.

Ainsi, la limite à calculer est de la forme $\frac{0}{0}$, et sur $I \setminus \{a\}$, les fonctions $R_{f,a,k+1}(x)$ et $(x-a)^{k+1}$ sont dérивables, avec la dérivée de cette dernière $(k+1)(x-a)^k \neq 0$. De plus, nous avons déjà $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_{f,a,k+1}(x)}{(x-a)^k} = 0$. Donc on peut appliquer la règle de L'Hôpital :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{f,a,k+1}(x)}{(x-a)^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R'_{f,a,k+1}(x)}{(k+1)(x-a)^k} = 0.$$

- Pour la formule de Taylor avec reste de Lagrange, nous utilisons la méthode des coefficients indéterminés. Pour tout $x > a$, posons λ comme un nombre réel satisfaisant

$$f(x) = T_{f,a,n} + \frac{\lambda}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

puis construisons la fonction auxiliaire

$$g(x) = f(x) - T_{f,a,n} - \frac{\lambda}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

On vérifie que $g(a) = g(x) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle 5.25, il existe $\xi_1 \in (a, x)$ tel que $g'(\xi_1) = 0$. On vérifie que $g'(a) = g'(\xi_1) = 0$, donc en appliquant à nouveau le théorème de Rolle, il existe $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ tel que $g''(\xi_2) = 0$. En continuant ainsi, on vérifie que pour $k = 2, 3, \dots, n$, on a $g^{(k)}(a) = 0$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle successivement, obtenant $\xi_{k+1} \in (a, \xi_k)$ tel que $g^{(k+1)}(\xi_{k+1}) = 0$. À la dernière étape $k = n$, en calculant explicitement la dérivée $(n+1)$ -ième de g , on obtient $g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) - \lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = f^{(n+1)}(\xi_{n+1})$. Ainsi, nous avons démontré que pour tout $x > a$, il existe $\xi_{n+1} \in (a, x)$ tel que

$$f(x) = T_{f,a,n} + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Le cas $x < a$ se démontre de manière similaire. Pour $x = a$, l'égalité est trivialement vraie.

- Pour la formule de Taylor avec reste de Cauchy, nous utilisons la méthode de "transformation statique-dynamique". Pour tout $x > a$, construisons la fonction auxiliaire

$$g(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right).$$

En calculant directement, on obtient

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à g sur l'intervalle $[a, x]$: puisque $g(a) = f(x) - T_{f,a,n}(x) = R_{f,a,n}(x)$, $g(x) = 0$, il existe $\xi \in]a, x[$ tel que

$$R_{f,a,n}(x) = g(a) - g(x) = g'(\xi)(a-x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

Le cas $x < a$ se démontre de manière similaire. Pour $x = a$, l'égalité est vraie. □

Il est important de noter que si une fonction f a une dérivée n -ième, alors f peut s'écrire sous la forme $f(x) = T(x) + R(x)$. Cependant, il existe des fonctions qui n'ont pas de dérivée (d'ordre élevé) en un point a , mais pour lesquelles il existe un polynôme $P(x)$ tel que le reste $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0$.