高等数学(I)讲义

巴黎居里工程师学院　　姜恺[1]

February 23, 2024

[1]Email: kai.jiang@mail.buct.edu.cn

Contents

8 简单的常微分方程（EDO） **2**

8.1 Introduction 2

8.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre 4

8.2.1 Équation différentielle linéaire homogène 4

8.2.2 Équation différentielle linéaire avec second membre 5

8.3 Équation différentielle linéaire d'ordre deux 6

8.3.1 Équation différentielle linéaire homogène 7

8.3.2 Équation différentielle linéaire avec second membre 9

Chapter 8

简单的常微分方程（EDO）

8.1 Introduction

Une équation différentielle ordinaire (常微分方程 Notée simplement EDO) est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où F est une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+2}$, appelé domaine.

L'ordre de cette équation différentielle est l'ordre n de la plus haute dérivée y apparaissant. Soient y une fonction de x définie d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et $y', y", \cdots, y^{(n)}$ les dérivées successives de la fonction y. Cette fonction $y = f(x)$ est dite solution si elle est de classe C^n et si

$$\forall x \in I, \qquad F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

Résoudre une équation différentielle revient à trouver les fonctions solution y. Par exemple, l'équation différentielle $y" + y = 0$ a une solution générale de la forme : $y = f(x) = Acosx + Bsinx$, où A, B sont des constantes (qu'on peut déterminer si on ajoute des conditions initiales).

On peut avoir un système des équations différentielles, par exemple,

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 2xy_2 + x^2 \\ y_2' &= xy_1 - 2y_2. \end{cases}$$

定义Définition 8.1: Équations différentielles linéaires (线性常微分方程)

`def:LinearODE` On appelle équation différentielle linéaire, toute équation du type

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \gamma(x)$$

où $a_k(x)$, $k \in [\![0; n]\!]$ et $\gamma(x)$ sont les fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Résoudre l'équation sur I, c'est déterminer toutes les fonctions dérivables f telles que

$$a_n(x)f^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_2(x)f''(x)+a_1(x)f'(x)+a_0(x)f(x)=\gamma(x).$$

Les fonctions $a_k(x)$ sont les coefficients de l'équation et $\gamma(x)$ s'appelle le second membre de l'équation. Si $\gamma(x)=0$, elle est dite 、**l'équation homogène（齐次方程）**.

Lorsque le coefficient $a_n(x)$ ne s'annule pas sur I, léquation est équivalente à une forme $y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k(x)}{a_n(x)}y^{(k)}=\frac{\gamma(x)}{a_n(x)}$, dite léquation réduite. Sans perte de généralité, on peut toujours supposer que $a_n(x)=1$.

On dit que l'équation est "linéaire" parce que l'inconnue y apparait de manière linéaire, on va voir tout de suite.

定理Théorème 8.2: Structure des solutions des EDOs linéaires

utionsLinearODE

Soit $f_0(x)$ une **solution particulière（特解）** de l'équation différentielle linéaire

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=\gamma(x) \qquad (\textbf{Eq.1})$$

avec $\gamma(x)\neq 0$. Alors, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f_0(x)+g(x)$ où $g(x)$ est une **solution générale（通解）** de l'équation homogène (associée à **Eq.1**)

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0.$$

证明Démonstration: Supposons que f est une solution de **Eq.1**. C'est-à-dire,

$$f^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_2(x)f''(x)+a_1(x)f'(x)+a_0(x)f(x)=\gamma(x).$$

On sait par hypothesis que f_0 est une solution de **Eq.1**, alors,

$$f_0^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)f_0^{(n-1)}(x)+\cdots+a_2(x){f_0}''(x)+a_1(x){f_0}'(x)+a_0(x)f_0(x)=\gamma(x).$$

Prenons $g(x):=f(x)-f_0(x)$. Par une soustraction des deux équations précédentes, on peut justifier directement que $g(x)$ est une solution de l'équation homogène associée à **Eq.1**.

Donc on a $f(x)=f_0(x)+(f(x)-f_0(x))=f_0(x)+g(x)$. □

Pour l'équation homogène associée à **Eq.1** (lorsque $\gamma(x)=0$), une somme de deux solutions de l'équation est encore solution, ainsi que le produit d'une solution par une constante. L'ensemble des solutions est donc un espace vectoriel （向量空间）

et contient notamment une solution évidente, la fonction nulle. C'est pourquoi nous appelons **Eq.1** équation linéaire.

On fait un resume. Pour trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire qui possède un second membre (si $\gamma(x)$ est une fonction non nulle), il suffit de trouver une solution particulière $y = f_0(x)$ de l'équation et les solutions générales de l'équation homogène associée.

8.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Considère l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, x(t))$$

avec la condition de Cauchy : $x(t_0) = x_0$, nous présentons ici le **théorème de Cauchy-Lipschitz** (une version simple, sans démonstrations, n'apparaîtra pas à l'examen)

Si la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable: s'il existe une constante L telle que pour tout $(t, x_1), (t, x_2)$ dans la domaine de définition de f,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|,$$

alors, il existe une et une seule solution respectant la condition de Cauchy.

L'objectif de cette partie est d'étudier un cas particulier des équations différentielles du premier ordre suivante :

$$y' + \lambda(x)y = \gamma(x).$$

avec la condition de Cauchy : $y(x_0) = y_0$.

8.2.1 Équation différentielle linéaire homogène

Tout d'abord, nous considérons l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants:

Ce sont les équations qui se ramènent à

$$y' + \lambda y = 0$$

où λ est un réel.

Les solutions d'une telle équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y = f(x) = Ce^{-\lambda x}$$

où C est un réel dont la valeur se détermine dès que sont connues les conditions initiales : si pour x_0 on a $f(x_0) = y_0$, alors $C = y_0 e^{\lambda x_0}$.

On rencontre ce type d'équations :

- avec λ positif dans la modélisation de la décroissance radioactive dans un milieu homogène et fermé ;
- avec λ négatif lors de la modélisation de la croissance exponentielle d'une population.

On peut voir ce résultat comme un cas particulier du ci-dessous, ou le démontrer directement.

Dans le cas général, l'équation différentielle linéaire homogène s'écrit

$$y' + \lambda(x)y = 0$$

Notée par $\Lambda(x)$ une primitive de la fonction $\lambda(x)$, en multipliant les deux côtés de l'équation par $\mathrm{e}^{\Lambda(x)}$, on obtient

$$(y\mathrm{e}^{\Lambda(x)})' = y'\mathrm{e}^{\Lambda(x)} + \mathrm{e}^{\Lambda(x)}\lambda(x)y = 0.$$

Alors, $\mathrm{e}^{\Lambda(x)}y$ est une constante et les solutions sur I sont les fonctions de la forme

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-\Lambda(x)}$$

où C est une constante. La valeur de C se détermine par la donnée des conditions initiales.

Le calcul de primitive $\Lambda(x)$ n'est pas toujours réalisable à l'aide des fonctions usuelles ; la solution peut donc n'avoir qu'une expression sous forme d'intégrale.

8.2.2 Équation différentielle linéaire avec second membre

Nous considérons

$$y' + \lambda(x)y = \gamma(x).$$

Par le même argument, supposons que $\Lambda(x)$ est encore une primitive de $\lambda(x)$. En multipliant les deux côtés de l'équation par $\mathrm{e}^{\Lambda(x)}$, on obtient

$$(y\mathrm{e}^{\Lambda(x)})' = \mathrm{e}^{\Lambda(x)}\gamma(x).$$

Cette équation implique que $y\mathrm{e}^{\Lambda(x)}$ est une primitive de $\mathrm{e}^{\Lambda(x)}\gamma(x)$. Autrement dit, $y\mathrm{e}^{\Lambda(x)}$ est une fonction dans $\int \mathrm{e}^{\Lambda(x)}\gamma(x)\mathrm{d}x$. On peut conclure:

定理Théorème 8.3: Solutions des EDOs linéaires du premier ordre

OrderLinearODEs

Les solutions de l'équation différentielle $y' + \lambda(x)y = \gamma(x)$ peuvent s'écrire simplement

$$y = f(x) = \mathrm{e}^{-\Lambda(x)} \int \mathrm{e}^{\Lambda(x)}\gamma(x)\mathrm{d}x,$$

où $\Lambda(x)$ est une primitive de $\lambda(x)$.

练习Exercice 8.4

Théorème 8.3 est pour ou contre Théorème 8.2? Pourquoi?

练习Exercice 8.5

Réactions monomoléculaire opposées

$$\begin{array}{cccc} \text{mol/L} & \text{A} & = & \text{B} \\ t=0 & a & & b \\ t & a-y & & b+y \end{array}$$

Chercher $y(t)$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_{-1}[B]$$

练习Exercice 8.6

Réactions successives

Les concentrations sont déterminées parle système d'équations différentielles suivant:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A]$$
$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B]$$
$$\frac{d[C]}{dt} = k_2[B]$$

Resoudre le système d'équations différentielles.

Si nous avons les conditions initiales $[\mathrm{A}]_0 = a; [\mathrm{B}]_0 = [\mathrm{C}]_0 = 0$, trouver la solution.

8.3 Équation différentielle linéaire d'ordre deux

Tout d'abord, il faut savoir qu'il n'est en général pas possible d'expliciter les solutions d'une équation différentielle de la forme:

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = \gamma(x).$$

En conséquence de quoi, nous considérons dans cette section les équations différentielles de type

$$y'' + by' + cy = \gamma(x).$$

avec les coefficients b et c constants:

L'équation différentielle de ce type est évidemment linéaire. D'après Théorème 8.2, nous chercherons les solutions générales de l'équation homogène associée.

8.3.1 Équation différentielle linéaire homogène

Un exemple: soit (u_n) une suite réelle satisfaisant $u_{n+2} + 5u_{n+1} + 4u_n = 0$ où a et b sont dans $\mathbb{R}$. si $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Comment calculer le terme général （通项，通项公式） de la suite?

Dans le même esprit, nous espérons qu'il existent deux réels u et v tel que l'équation $y''+by'+cy = 0$ peut s'écrire $(y'-uy)' = v(y'-uy)$, équivalente à $y''-(u+v)y'+uvy = 0$. Si on peut resoudre u et v par $b = -(u + v)$ et $c = uv$, en notant $z = y' - uy$ une nouvelle fonction de x, on obtient une équation homogène du premier ordre $z' - vz = 0$ dont les solutions générales sont $z(x) = C_1\mathrm{e}^{vx}$. Le problème est de resoudre l'équation $y' - uy = C_1\mathrm{e}^{vx}$ que on a appris.(Théorème 8.3)

$$y = \mathrm{e}^{ux} \int \mathrm{e}^{-ux} \left(C_1\mathrm{e}^{vx}\right) \mathrm{d}x = C_1\mathrm{e}^{ux} \int \mathrm{e}^{(v-u)x}\mathrm{d}x$$

Lorsque $u \neq v$, on a $\displaystyle\int \mathrm{e}^{(v-u)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{v-u}\mathrm{e}^{(v-u)x} + C_2$, donc

$$y = C_1\mathrm{e}^{ux} \int \mathrm{e}^{(v-u)x}\mathrm{d}x = C_1\frac{1}{v-u}\mathrm{e}^{vx} + C_1C_2\mathrm{e}^{ux} = C_3\mathrm{e}^{ux} + C_4\mathrm{e}^{vx}.$$

Lorsque $u = v$, on a $\displaystyle\int \mathrm{e}^{(v-u)x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C_5$, donc

$$y = C_1\mathrm{e}^{ux} \int \mathrm{e}^{(v-u)x}\mathrm{d}x = C_1(x + C_5)\mathrm{e}^{ux}.$$

Revenons en arrière et regardons sous quelle condition u et v exsitent.

Par les relations $b = -(u + v)$ et $c = uv$, on observe que u et v sont les deux racines（根） de l'équation

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique(特征方程)** de l'équation différentielle.

Donc, si le discriminant (判别式) $\Delta = b^2 - 4c$ est positif, on a deux racines différentes. Si le discriminant est nul, l'équation caractéristique a une solution double $u = v$。

Qu'est-ce qu'on peut faire si $\Delta < 0$?

Dans ce cas, l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées(共轭的) distinctes: $u = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\mathrm{i}$ et $v = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\mathrm{i}$.

Dans le même esprit comme la complétion du carré (配平方法) $\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda + \frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4}$, nous regardons la dérivée du second ordre de $z = \mathrm{e}^{\frac{b}{2}x}y$. Par le fomule de Leibniz , $z'' = \mathrm{e}^{\frac{b}{2}x}y'' + b\mathrm{e}^{\frac{b}{2}x}y' + \frac{b^2}{4}\mathrm{e}^{\frac{b}{2}x}y$, donc on a

$$z'' + \frac{4c-b^2}{4}z = 0.$$

En observant $(\cos \mu x)'' + \mu^2 \cos x = 0$ et $(\sin \mu x)'' + \mu^2 \sin x = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on sait que $z = \cos \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x$ et $z = \sin \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x$ sont deux solutions.

Les solutions générales de $y'' + by' + cy = 0$ avec $\Delta < 0$ sont alors les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y = y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\left(C_6 \cos \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x + C_7 \sin \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right)$$

où C_6 et C_7 sont deux réels quelconques.

On peut écrire aussi cette solution sous la forme :

$$y = y(x) = q\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x + r),$$

où q et r sont deux réels quelconques (cette forme est parfois plus pratique en physique).

D'un autre point de vue, considérons une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ associée x à $y = y_1(x) + y_2(x)\mathrm{i}$. Sa dérivée est définie par $y' = y_1'(x) + y_2'(x)\mathrm{i}$. Alors, si y satisfait l'équation $y'' + by' + cy = 0$, on deduit que sa partie réelle y_1 et sa partie imaginaire y_2 sont deux solutions aussi. Lorsque le discriminant Δ est négatif, on peut justifier directement que la fonction (dont la valeur est complexe)

$$\begin{aligned} y &= C_3\mathrm{e}^{ux} + C_4\mathrm{e}^{vx} = C_3\mathrm{e}^{(-\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\mathrm{i})x} + C_4\mathrm{e}^{(-\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\mathrm{i})x} \\ &= (C_3 + C_4)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\cos \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x + \mathrm{i}\,(C_3 - C_4)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\sin \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x \end{aligned}$$

satisfait $y'' + by' + cy = 0$ par formule d'Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta$.

La partie réelle $y_1 = (C_3 + C_4)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\cos \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x$ et la partie imaginaire $y_2 = (C_3 - C_4)\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\sin \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x$ sont deux solutions. Donc les solutions générale de $y''+by'+cy = 0$ s'écrivent

$$y = C_6\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\cos \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x + C_7\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\sin \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x.$$

En plus, si les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$ sont bien données， on peut obtenir une seule solution de l'équation satisfaisant les conditions initiales.

8.3.2 Équation différentielle linéaire avec second membre

练习Exercice 8.7: 一个重要例子：简谐振子

一个弹簧挂着一个重物，当其从平衡位置位移，会感受到一个恢复力F正比于位移x，并遵守胡克定律：$F = -kx$, $k > 0$.

Un système masse-ressort est un système mécanique à un degré de liberté. Il est constitué par une masse accrochée à un ressort contrainte de se déplacer. Un tel système est traité par la Loi de Hooke. 利用牛顿第二定律$F = ma = -kx$, 则加速度a等于是x的二次微分导数：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

Resoudre cette équation.

练习Exercice 8.8: 另一个重要例子：RLC电路

RLC电路是一种由电阻（R）、电感（L）、电容（C）组成的电路结构。 En électrocinétique, un circuit RLC est un circuit linéaire contenant une résistance électrique, une bobine (inductance) et un condensateur (capacité).

RLC电路也被称为二阶电路，电路中的电压或者电流是一个二阶微分方程的解，而其系数是由电路结构决定。下面是两个简单的例子； on obtient l'équation différentielle du second ordre :

$$f'' + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}} f' + \omega_0^2 f = \omega_0^2 f_{\mathrm{eq}}$$

où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \quad \mathrm{f_{eq}} = \mathrm{E}$$

Vous la rencontrerez dans les cours de physiques en deuxième année . Resoudre l'équation **homogène** associée.

常数变易法(Méthode de variation des constantes) 假设有以下的微分方程：

$$y'' + by' + cy = \gamma(x)$$

我们首先求出对应的齐次方程的通解$y = C_1y_1 + C_2y_2$，其中C_1, C_2是常数，y_1, y_2是x的函数。然后把齐次方程的通解中的常数换成函数$C_1(x), C_2(x)$。设

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \qquad (1)$$

是方程的一个特解。两边求导数，可得：

$$y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2.$$

我们把函数$C_1(x), C_2(x)$人为地加上一条限制：

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \qquad (2)$$

于是

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'. \qquad (3)$$

并两边再求导数，可得：

$$y'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''. \qquad (4)$$

把(1)、(3)、(4)代入原微分方程中，可得：

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + bC_1(x)y_1' + bC_2(x)y_2' + cC_1(x)y_1 + cC_2(x)y_2 = \gamma(x).$$

整理，得：

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)\left(y_1'' + by_1' + cy_1\right) + C_2(x)\left(y_2'' + by_2' + cy_2\right) = \gamma(x).$$

由于y_1和y_2都是齐次方程的通解，因此有$y_1'' + by_1' + cy_1 = 0$和$y_2'' + by_2' + cy_2 = 0$。所以，

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \gamma(x). \qquad (5)$$

把(2)和(5)联立起来，便得到了一个$C_1'(x)$和$C_2'(x)$的方程组，可以解出它们的表达式；再积分得到$C_1(x)$和$C_2(x)$的表达式。

练习Exercice 8.9

Resoudre l'équation différentielle

$$L\,C\,\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + R_t\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

练习Exercice 8.10: 受驱的有阻尼的谐振子

多数谐振子，可以近似的对应以下的微分方程模型：

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = A_0\cos(\omega t)$$

其中t是时间，b是阻尼常数，ω_0是本征角频率，$A_0\cos(\omega t)$代表驱动系统的某种事物，其中振幅A_0、角频率ω是可以被测量的量。x可以是位置、电流或其他任何可能的物理量。