高等数学(I)讲义

巴黎居里工程师学院　　姜恺[1]

December 18, 2023

[1]Email: kai.jiang@mail.buct.edu.cn

Contents

Chapter 4

函数的连续性

在数学中，连续是函数的一种属性。直观上来说，连续的函数就是当输入值的变化足够小的时候，输出的变化也会随之足够小的函数。如果输入值的某种微小的变化会产生输出值的一个突然的跳跃甚至无法定义，则这个函数被称为是不连续的函数（或者说具有不连续性）。 古典物理学中有一句格言："自然界中，一切都是连续的。"根据直观的经验，人们在很长一段时间内一直认为，函数连续等价于其图像可以用"一笔画"绘制出来。虽然这些说法用现在严格的观点看并不正确（可以"一笔画"的一定是连续函数，而连续函数不一定可以"一笔画"，比如股票走势图、心电图等），但仍然有助于形象的认识函数的连续性。

下面是不连续函数的一个例子。如果用$M(t)$表述在时间t的时候银行账户上的钱币金额，那么这个函数无论在存钱或者取钱的时候都会有跳跃，因此函数$M(t)$是不连续的。

4.1 实值连续函数的定义

最基本也是最常见的连续函数是定义域为实数集的某个子集、取值也是实数的连续函数。这类函数的连续性可以用直角坐标系中的图像来近似表示。一个这样的函数是连续的，如果粗略地说，它的图像为一个单一的不破的曲线，并且没有间断、跳跃或无限逼近的振荡。

定义Définition 4.1: 函数在一点连续

def:Continuity

设f是一个从实数集中的区间$I \subset \mathbb{R}$射到$J \subset \mathbb{R}$的函数：$f : I \longrightarrow J$。假设a是f的定义域中的元素。函数f被称为是在**一点**a处连续（continue）当且仅当以下条件成立：对于任意的正实数$\varepsilon > 0$，存在一个正实数$\delta > 0$使得对于任意定义域中的$x \in I$，只要x满足$a - \delta < x < a + \delta$，就有$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$成立。

这种定义连续性的方法称为"$\varepsilon - \delta$方法，首先由柯西(Cauchy)给出。

uityViaSequence

定义Définition 4.2: 函数在一点连续（Heine归结原理）

设f是一个从实数集中的区间$I\subset\mathbb{R}$射到$J\subset\mathbb{R}$的函数：$f:I\longrightarrow J$。设a是f的定义域中的元素。f在点a处被称为是连续的，当且仅当对I中**任何**收敛到a的(柯西)序列(x_n)，都有$(f(x_n)$是收敛于$f(a)$的(柯西)序列。简言之，连续函数将收敛的序列变成收敛的序列。

这是使用“序列”定义连续性的方法。

注意到上述连续性的两个定义分别与极限的定义??以及定理??有很多重合之处，所以我们可以用极限的语言定义连续性。

tinuityViaLimit

定义Définition 4.3: 函数在一点连续

设f是一个从实数集中的区间$I\subset\mathbb{R}$射到$J\subset\mathbb{R}$的函数：$f:I\longrightarrow J$。设a是f的定义域中的元素。如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，也就是说$f(x)$在$x\to a$时有极限且极限值恰好等于$f$在点$a$处的函数值$f(x)$，那么称$f$在点$a$处是连续的。
我们还可以定义单侧连续：

- 如果$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$，我们称$f$在$a$点左连续（continue à gauche en a）；
- 如果$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，我们称$f$在$a$点右连续（continue à droite en a）。

注释Remarque 4.4. 以上三种定义方式是等价的。并且注意到I可以是$\mathbb{R}$的任意一个子集。

ntinousFunction

定义Définition 4.5: 函数的连续性

我们称函数处处连续，或者简单的称为连续，如果它在其定义域区间I中的任意一点处都连续。用数学语言，$\forall a\in I,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in]a-\delta,a+\delta[,|f(x)-f(a)|<\varepsilon$。上面的$\delta$可以与$a$和$\varepsilon$都相关。

注意♠ 如果I含有端点(闭区间或半开半闭区间)，那么在端点处只要求对应的单侧连续即可。

所有在区间I上的（处处）连续函数组成的集合，记作$C^0(I)$。

小问题：有些同学见过用$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$说明$f(x)$连续。这和我们的定义是一致的吗?

用更高级的观点，可以使用拓扑学的语言描述连续的定义。对拓扑空间X与Y，函数$f:X\to Y$是连续的当且仅当任何开集$V\subset Y$的逆像$f^{-1}(V)$是X中的开集。特别对于实数集$\mathbb{R}$中的子集，可以取“欧式拓扑”：任何开集都是一些（有限或无限个）开区间的并集。

4.2 连续函数的例子

4.2.1 连续函数的基本性质

根据极限的性质??和定理??，可以看到四则运算、函数复合等操作，在一定条件下可以保持函数的连续性性质。

sOfArithmetic

命题Proposition 4.6.

- 连续函数的加法、数乘、乘法、除法（如果有意义）也是连续函数：
如果两个函数f和g在a点是连续的，λ为一个实数，那么$f+g$，λf和fg在点a处都是连续的。如果对于定义域内的所有x，都有$g(x)\neq 0$，那么$\frac{f}{g}$在a点也是连续的。

- 设函数f在点a处连续，且在该点的函数值$f(a)$在函数g的定义域中，又假设g在点$f(a)$处连续，那么复合函数$g\circ f$在点a处是连续的。

练习Exercice 4.7

证明上述命题。

4.2.2 一些初等函数的连续性

- 根据命题??，由定义4.3可知指数函数在定义域中的每一点都是连续的。所以可以说指数函数是连续函数。

- 根据命题??，由定义4.3可知对数函数在定义域中的每一点都是连续的。所以可以说对数函数是连续函数。

- 对于幂函数$f(x)=x^a$。

- 当a是自然数时，由于$\mathrm{Id}(x)=x$在定义域$\mathbb{R}$内每一点都是连续的(??)，所以Id是连续函数，又因为连续函数相乘仍为连续函数，所以对于任意正整数n都有$f(x)=x^n$是连续函数。（当$n=0$时，为了方便一般追加定义$0^0=1$。）
- 当a是负整数时，$f(x)$的定义域是$\mathbb{R}\backslash\{0\}$。常值函数与正整数次幂函数都是连续的，所以它们的商是连续的。所以对于任意正整数n都有$f(x)=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$是连续函数。
- 设$a=\frac{p}{q}$是有理数，并且$q>0$为偶数，若$p>0$则$f(x)$的定义域是$\{x|x\geqslant 0\}$，若$p<0$则$f(x)$的定义域是$\{x|x>0\}$。当$x>0$时，$f(x)=x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$，我们已经证明了对数函数$\ln x$（以及与常值函数$a$的乘积）和指数函数$\mathrm{e}^x$是连续函数，所以$f(x)$在$\mathbb{R}^+$上连续。$a>0$时可验证$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=f(0)$，此$f(x)$在0点右连续。
- 设$a=\frac{p}{q}$是有理数，并且$q>0$为奇数，若$p>0$则$f(x)$的定义域是$\mathbb{R}$，若$p<0$则$f(x)$的定义域是$\mathbb{R}\backslash\{0\}$。(我们定义过负数的有理次方吗？该如何定义一个负数b的$\frac{p}{q}$次方？）

  用上面方法可证$x\geqslant 0(x>0)$时$f(x)$连续，通过$f(x)$的奇偶性可得当$x<0$时$f(x)$也连续。
- 当a是无理数时，$f(x)$的定义域是$\{x|x>0\}$。（为什么？）由$f(x)=x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$，得到复合函数$f(x)$在定义域内是连续函数。

• 对于三角函数。考虑正弦函数$\sin x$。对于任意一点$x_0\in\mathbb{R}$，我们有

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{y\to 0}\sin(y+x_0)=\lim_{y\to 0}(\sin y\cos x_0+\cos y\sin x_0)=\sin x_0.$$

所以正弦函数$\sin x$在x_0点处连续，根据x_0的任意性可知$f(x)$在定义域内连续。由于$\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$，$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$可以由复合函数及四则运算得到，故在各自定义域内连续。

• 反三角函数。反三角函数是三角函数在某一单调区间上的反函数。根据后面练习4.18的结论可以得出连续性。

eg:f(p/q)=1/q

例子Exemple 4.8. 下面的函数在$x=0$处连续。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & \text{如果}x=\dfrac{p}{q}\neq 0\text{ 是有理数},\\ 0 & \text{如果 }x=0\text{ 或者是无理数}.\end{cases}$$

任给$\varepsilon>0$。那么存在正整数N使得$\frac{1}{N}<\varepsilon$。那么在所有绝对值小于1的有理数中，只存在有限个$\frac{p_k}{q_k}$满足$q_k\leqslant N$。在这有限多个有理数中，可以选取绝对值最小的一个，设它是$\frac{p_0}{q_0}$。我们取$\delta=|\frac{p_0}{q_0}|$，那么当$|x|<\delta$时，如果它是有理数$\frac{p'}{q'}$，那么一定有$q'>N$，它的函数值为$\frac{1}{q'}<\frac{1}{N}<\varepsilon$；如果它是无理数，则自然有$f(x)=0<\varepsilon$。所以，当$|x|<\delta$时，总有$|f(x)-f(0)|=|f(x)|=f(x)<\varepsilon$。综上，$f(x)$在0点处连续。

eg:e^(-1/x^2)

例子Exemple 4.9. 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{如果}x\neq 0,\\ 0 & \text{如果}x=0.\end{cases}$$

当$x\neq 0$时，$f(x)$可以表示成一些连续函数的复合，所以连续。在$x=0$处，我们有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{y\to-\infty}\mathrm{e}^y=0=f(0)$。所以$f(x)$在0点处也连续。所以函数在整个$\mathbb{R}$上连续。

antorFunction

例子Exemple 4.10. 康托尔（Cantor）函数，又叫魔鬼的阶梯。
我们取 $f_0(x)=x$. 并且

$$f_{n+1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\times f_n(3x) & \text{if } 0\leqslant x<\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \text{if } \frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times f_n(3x-2) & \text{if } \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

对于每个固定x，可以证明$f_n(x)$收敛到一个实数，这样得到一个$[0,1]$上的函数$f(x)$。可以证明这个函数是连续的。

4.3 不连续的描述和不连续点的分类

4.3.1 不连续的数学描述

设f是一个从实数集中的区间$I\subset\mathbb{R}$射到$J\subset\mathbb{R}$的函数：$f:I\longrightarrow J$。假设a是f的定义域中的元素。以下命题等价；

- 函数f在点a处不连续
- 存在实数$\varepsilon_0>0$，使得对任意的$\delta>0$，都存在实数x满足$|x-a|<\delta$但是$|f(x)-f(a)|>\varepsilon_0$；
- 存在一个收敛于a的实数序列(x_n)，但序列$(f(x_n))$不收敛于$f(a)$。

4.3.2 不连续点的分类和例子

根据不同不连续点的性质，通常把不连续点分为两类：

1. 第一类不连续点（Discontinuité de première espèce）：
   - 可去不连续点（Discontinuité apparente）：函数不连续点x_0两侧函数的极限存在且相等（函数在x_0点没有定义，或者函数值与上述极限不相等）。

- 跳跃不连续点（Discontinuité de saut）：不连续点两侧函数的极限存在，但不相等。

2. 第二类不连续点（Discontinuité de deuxième espèce）：函数在该点的左极限不存在或右极限不存在。

例子Exemple 4.11. 考虑如下函数：

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{如果 } x<1 \\ 0 & \text{如果 } x=1 \\ 2-x & \text{如果 } x>1 \end{cases}$$

$x_0=1$是第一类间断点中的可去间断点。

例子Exemple 4.12. 考虑如下函数：

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{如果 } x<1 \\ 0 & \text{如果 } x=1 \\ 3-x & \text{如果 } x>1 \end{cases}$$

$x_0=1$是第一类间断点中的跳跃间断点。

例子Exemple 4.13. 例子??中的函数

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{如果} \quad x\neq 0, \\ 1 & \text{如果} \quad x=0. \end{cases}$$

在0点出是第二类间断点。

定理Théorème 4.14: 单调函数不存在第二类间断点

ndDiscontinuity

设函数f在区间I上是单调的，那么f没有第二类间断点。

证明Démonstration: 不妨假设f单调递增。并且只需要证明I中任意非端点的点x_0处的左右极限都存在。我们考察集合$A=\{f(x): x\in I, x<x_0\}$。如果$x_0$不是$I$的左端点，那么集合$A$非空；由于$f$单调递增，所以$A$有上界。根据上确界存在定理??，$A$的上确界$M=\sup A$存在。我们下面证明$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=M$。

任给$\varepsilon>0$。由于M是最小上界，所以$M-\varepsilon$不是A的上界，也就是说，存在$a\in A$满足$a>M-\varepsilon$；由于M是A的上界，所以$a<M$。所以$|a-M|=M-a<\varepsilon$。根据集合A的定义，存在$t_0\in I$且$t_0<x_0$使得$f(t_0)=a$。我们取$\delta=x_0-t_0>0$。当$0<x_0-x<\delta$时，由单调性可得$f(t_0)\leqslant f(x)\leqslant M$，也就是$|f(x)-M|<\leqslant |f(t_0)-M|=|a-M|<\varepsilon$。于是$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=M$。

同理，可以利用下确界证明，如果x_0不是I的右端点，那么$f(x)$点x_0处的右极限存在。

所以，$f(x)$的不连续点只可能是第一类间断点。 □

4.4 连续函数的重要性质

- 连续函数的加法、数乘、乘法、除法（如果有意义）也是连续函数：
如果两个函数f和g是连续的，λ为一个实数，那么$f+g$，λf和fg都是连续的。
如果对于定义域内的所有x，都有$g(x)\neq 0$，那么$\frac{f}{g}$也是连续的。

- 设f和g是两个连续函数，g的值域包含在f的定义域中，那么复合函数$f\circ g$也是连续函数。

- 介值定理（Théorème des valeurs intermédiaires）：
如果实函数f在**闭**区间$[a,b]$内连续，且u是某个$f(a)$和$f(b)$之间的数，那么存在某个$[a,b]$内的c，使得$f(c)=u$。(如果一个小孩在五岁到十岁之间身高从1米增长到了1.5米，那么期间一定有某一个时刻的身高正好是1.3米。)

- 极值定理（Théorème des valeurs extrêmes）：
如果函数f在闭区间$[a,b]$内连续，则它一定取得最大值，也就是说，总存在$c\in[a,b]$，使得对于所有的$x\in[a,b]$，有$f(c)\geqslant f(x)$。同样地，函数也一定有最小值。（在某气象站一年的观测中，总有某个时刻达到最高温，某个时刻达到最低温。）

- 海涅-康托定理（Théorème de Heine-Cantor）：
:Heine-Cantor
如果函数f在闭区间$[a,b]$内连续，，那么它在$[a,b]$上是一致连续的，即δ的选取与$[a,b]$中点的选取无关。（具体严格定义见后面定义4.21）

这些性质都可以用所谓的勒贝格方法证明。亨利·勒贝格（Henri Léon Lebesgue，1875–1941），法国著名数学家，在函数的微积分理论中做出了重要贡献。勒贝格方法是使用确界定理，找到满足某个性质的最大满足区间。具体地，考虑闭区间$[a,x]$，并令x从a运动到b. 如果存在一个临界点$c\in[a,b]$，使得在c之前都具有某性质P，在c之后就失去这个性质。打个比方，我们找一段光滑（性质P）的绳子，我们的办法就是从一个端点捋顺过去，一直遇到一个疙瘩（临界点c）为止。

用数学语言描述，令

$$S=\{x\in[a,b]\mid 在[a,x]上具有性质\ P\}.$$

首先验证S是否为空集，一般通过$a\in S$验证。若$S\neq\emptyset$，记$c=\sup S$，则c是具有（失去）性质P的临界点。进一步，若$\xi\in(a,b)$，则ξ满足:

- $\forall c'\in[a,c]$, 在区间$[a,c']$（整体）上具有性质P;
- $\forall\varepsilon>0$，在区间$[a,c+\epsilon]$（整体）上不具有性质P.

定理Théorème 4.15: 介值定理Théorème des valeurs intermédiaires

termediateValue

假设$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$是连续函数，且实数$u$满足$f(a)<u<f(b)$或$f(a)>u>f(b)$，则存在$c\in(a,b)$使得$f(c)=u$。

证明Démonstration: 不妨假设$f(a)<u<f(b)$，因为另一种情况类似。

设S为$[a,b]$内所有满足$f(x)\leqslant u$的x组成的集合，即$S=\{[a,x]\mid \forall f(x)\leqslant u\}$。那么$S$一定是非空的，因为$a\in S$;并且$S$是有上界的，因为为$b$就是$S$的一个上界。于是，根据实数的完备性，定理**??**，其上确界$c=\sup S$一定存在。

我们接下来用反证法证明$f(c)=u$。

假设$f(c)>u$。由于f是连续函数，那么取$\varepsilon=f(c)-u>0$，一定存在$\delta>0$，使得当$|x-c|<\delta$时，就有$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$。但是，这样一来，当$|x-c|<\delta$时，就有$f(x)>f(c)-\varepsilon=u$。也就是说，对于$]c-\delta,c+\delta[$内的x，都有$f(x)>u$。因此$c-\delta$是S的一个上界，与我们假设c是最小上界以及$c-\delta<c$矛盾。

假设$f(c)<u$。由于f是连续函数，那么取$\varepsilon=u-f(c)>0$，一定存在一个$\delta>0$，使得当$|x-c|<\delta$时，就有$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$。那么对于$(c-\delta,c+\delta)$内的x，都有$f(x)<f(c)+\varepsilon=u$，因此存在大于c的x，使得$f(x)<u$，也就是说c不是S的上界，这与c的定义矛盾。

根据三歧性，得到$f(c)=u$。

□

推论Corollaire 4.16. 如果f在$[a,b]$内连续，且$f(a)$和$f(b)$一正一负，则中间一定有某一个点c，使得$f(c)=0$。

练习Exercice 4.17

证明上述推论。

练习Exercice 4.18: 连续双射的反函数连续

tionIsContinous

设f是从区间I到区间J的连续双射。那么

- f在I上严格单调
- f把任意子区间$[a,b]\subset I$映射到子区间$[f(a),f(b)]\subset J$ (假定f单调递增)
- f^{-1}是J上的连续函数

证明Démonstration: 由于f是双射，所以只需要证明f单调就可以得到严格单调。现在假设f在I上不是单调下降的，那么存在I中的两个元素x,y满足$x<y$并且$f(x)<f(y)$。（我们用反证法证明f在区间$[x,y]$上单调递增。该结论记为*） 在区间$[x,y]$中，如果存在两个元素u,v满足$u<v$并且$f(u)>f(v)$，那么

- 若$f(u) > f(x)$
  - 若$f(u) > f(x) > f(v)$，对f在$[u, v]$上使用介值定理4.15会造成$f(x)$在I中的原像至少存在两个点；
  - 若$f(u) > f(v) > f(x)$，对f在$[x, u]$上使用介值定理会造成$f(v)$在I中的原像至少存在两个点；
- 若$f(u) < f(x)$，对f在$[u, y]$上使用介值定理会造成$f(x)$在I中的原像至少存在两个点。

以上情况均产生矛盾，所以不能存在满足上述条件的u, v。所以f在$[x, y]$上严格单调递增。

对于任意$z \in I$且$z > y$，一定有$f(z) > f(y)$，否则

- 若$f(z) < f(x) < f(y)$，对f在$[y, z]$上使用介值定理会造成$f(x)$在I中的原像至少存在两个点；
- 若$f(x) < f(z) < f(y)$，对f在$[x, y]$上使用介值定理会造成$f(z)$在I中的原像至少存在两个点。

同理可得，对于任意$w \in I$且$w < x$，一定有$f(w) < f(x)$。

所以在区间$[w, z]$上，有$f(w) < f(x) < f(y) < f(z)$，所以可以重复前面关于（*）的论证，得到$f$在$[w, z]$上单调递增。任取$a \in I$, $b \in I$满足$a < b$，由于w和z的任意性，可以取得$[w, z] \supset [a, b]$，所以$f(a) < f(b)$。从而得到f在I上是单调递增的。

以下不妨假设函数f在I上是单调递增的。我们**下面证明**区间$[a, b]$在f下的像是区间$[f(a), f(b)]$。根据单调性，对于$[a, b]$中任意元素x有$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$。所以$f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$。有因为$f$在$[a, b]$上连续，所以根据介值定理4.15，可知任意$y \in [f(a), f(b)]$，存在原像$x \in [a, b]$，所以$[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$。

任取$y_0 \in J$，由于f是双射，所以存在唯一的$x_0 \in I$使得$f(x_0) = y_0$。我们、textbf下面证明f^{-1}在y_0点处连续。不妨假设y_0不是端点（是端点时证明方法类似）。任取$\varepsilon > 0$满足$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$。我们取$\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\} > 0$。由于我们已经证得$f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$，那么当$|y - y_0| < \delta$时，有$f^{-1}(y) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$，也就是$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$。所以$f^{-1}$在$y_0$点处连续。 □

定理Théorème 4.19: 有界性定理théorème des bornes

thm:Boundedness

假设$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$是连续函数，那么$f$的像集是有界的。也就是说，存在实数$m$和$M$，使得：$m \leqslant f(x) \leqslant M$对于所有$x \in [a, b]$成立。

证明Démonstration: 我们使用反证法和区间套定理??来证明。假设f在$[a,b]$上无界，那么在两个区间$[a,\frac{a+b}{2}]$和$[\frac{a+b}{2},b]$中，必然在至少其中一个上无界，我们选取这个区间并记作$[a_1,b_1]$。由于f在$[a_1,b_1]$上无界，那么在两个区间$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$中，必然在至少其中一个上无界，我们选取这个区间并记作$[a_2,b_2]$。继续做下去，可以得到一列闭区间$[a_n,b_n]$使得$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，由$b_n-a_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})=\frac{1}{2^n}(b-a)$可以得到$b_{n+1}-a_{n+1}$趋向于0，并且$f$在构造的这列闭区间$[a_n,b_n]$上都无界。

根据区间套定理，存在唯一实数c落在所有闭区间$[a_n,b_n]$中。注意$f(c)$是一个固定的值。由于f在c点连续，那么对于$\varepsilon=1$，存在$\delta>0$，使得当定域中的x满足$c-\delta<x<c+\delta$时，$f(c)-1<f(c)<f(c)+1$。另一方面，存在$N\in\mathbb{N}$，使得$b_N-a_N=\frac{1}{2^N}(b-a)<\delta$，于是$[a_N,b_N]\subset]c-\delta,c+\delta[$，于是$f$在$[a_N,b_N]$上有界。这与"$f$在闭区间$[a_n,b_n]$上都无界"矛盾。

□

定理Théorème 4.20: 极值定理Théorème des valeurs extrêmes

hm:ExtremeValue

如果实函数f在闭区间$[a,b]$上是连续函数，则它一定取得最大值和最小值。也就是说，存在$[a,b]$内的c和d，使得：$f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)$对于所有$x\in[a,b]$成立。

注意如果函数是定义在开区间或者半开半闭区间内，则它不一定有最大值和最小值，例如定义在开区间$]0,1[$内的函数$f(x)=\frac{1}{x}$无最大值。

Proof. 我们现在证明函数f在区间$[a,b]$内有最大值。根据有界性定理4.19，f有上界，因此，根据实数的完备性定理??，f的最小上界M存在。我们需要寻找$[a,b]$内的一个d，使得$M=f(d)$。对于任意正整数n，由于M是最小上界，$M-\frac{1}{n}$就不是f的上界。因此，存在$[a,b]$内的d_n，使得$M-\frac{1}{n}<f(d_n)$。我们构造了一个实数序列(d_n)。又由于M是f的一个上界，得到$M-\frac{1}{n}<f(d_n)\leqslant M$，对于所有的正整数$n$成立。因此，序列$f(d_n)$收敛于$M$。

由于(d_n)有界，根据聚点定理，可知存在一个子序列d_{n_k}，它收敛于某个$d\in[a,b]$。因为f在d处连续（考虑通过序列定义的连续），所以序列$f(d_{n_k})$收敛于$f(d)$。但$f(d_{n_k})$是$f(d_n)$的一个子序列，收敛于M，因此$M=f(d)$。也就是说，f在d处取得最大值M。

□

定义Définition 4.21: 一致连续(continuité uniforme)

iformContinuity 设f是定义在区间I上的实函数。我们称 f在I上是一致连续的，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall (x,y) \in I^2$满足$|x-y| < \delta$，总有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$。

注意对比与一般的区间上的连续性的定义4.5。一致连续也可以这样理解：$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0$，存在与$\varepsilon$有关但是与$a$无关的$\delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[, |f(x) - f(a)| < \varepsilon$。

定理Théorème 4.22: 海涅定理Théorème de Heine-Cantor

hm:Heine-Cantor 如果f是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则它在$[a,b]$上是一致连续的。

证明Démonstration: 使用反证法。假设f在$[a,b]$上不一致连续，那么$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists (x,y) \in [a,b]^2$满足$|x-y| < \delta$，使得$|f(x)-f(y)| > \varepsilon$.（这是命题“$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得对于$[a,b]$内的任意$x$和$y$，只要满足$|x-y| < \delta$，就有$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$”的否定。）

注意$\delta > 0$是任意的，所以对任意$\dfrac{1}{n}$（$n \in \mathbb{N}^+$），都存在对应的x_n和y_n满足$|x_n - y_n| < \delta$，使得$|f(x_n)-f(y_n)| > \varepsilon$。我们可以得到两个有界的序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$和$(y_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$。根据聚点定理（Bolzano-Weierstrass定理）??，存在两个收敛的子序列 $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$收敛于$x_0 \in [a,b]$，$(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$收敛于$y_0 \in [a,b]$。（为什么可以取到相同的下标$n_k$?）

对任意$k \in \mathbb{N}^+$，一方面有$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \dfrac{1}{n_k} < \dfrac{1}{k}$，所以两个子序列收敛到同一个点，也就是说$x_0 = y_0$；而另一方面有$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})| > \varepsilon$，从而序列$(f(x_{n_k}))$和$(f(y_{n_k}))$不可能收敛到同一个点。由Heine归结原理4.2，可知f在点$x_0 = y_0$处不连续，这与已知矛盾。 □

练习Exercice 4.23

上面证明中，哪里用到“闭区间”这个条件了？去掉这个条件命题是否依然成立？不成立的话，请举出反例。

4.5 连续函数的应用

求极限

t(f)=f(Limit) **命题Proposition 4.24.** 设函数$f(x)$在点a处连续。假设$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$，那么$\lim\limits_{x\to x_0} f \circ g(x) = f(a)$。

此命题的证明，可参考命题??的证明。并注意对比定理??中要求的条件。

例子Exemple 4.25. 求极限$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sqrt{2}}{x})^x$。通过简单的变量替换$x=\sqrt{2}t$，可得原式$=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\sqrt{2}t}=\lim_{t\to\infty}\left((1+\frac{1}{x})^t\right)^{\sqrt{2}}$。因为$\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{x})^t=\mathrm{e}$并且幂函数$y=x^{\sqrt{2}}$在e处连续，所以$\lim_{t\to\infty}\left((1+\frac{1}{x})^t\right)^{\sqrt{2}}=\left(\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{x})^t\right)^{\sqrt{2}}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$。