

高等数学(I)讲义

巴黎居里工程师学院 姜恺¹

November 25, 2023

¹Email: kai.jiang@mail.buct.edu.cn

Contents

3 极限 Limite	2
3.1 极限的定义	2
3.1.1 自变量趋于有限值时函数的极限	2
3.1.2 极限不存在时的数学表达	5
3.2 极限的性质	7
3.2.1 局部性质	7
3.2.2 与四则运算的关系	7
3.2.3 与函数复合的关系	9
3.2.4 与序的关系	11
3.3 极限的计算	13
3.3.1 求极限	13
3.3.2 求极限的典型方法	13
3.3.3 需要记住的经典极限	14
3.3.4 练习题集训	17

Chapter 3

极限 Limite

极限是现代数学特别是分析学中的基础概念之一。极限可以用来描述一个序列的指标愈来愈大时，数列中元素的性质变化的趋势，也可以描述函数的自变量接近某一个值的时候，相对应的函数值变化的趋势。作为微积分和数学分析的其他分支最基本的概念之一，连续和导数的概念都是通过极限来定义的。

高等数学比初等数学，主要是多了一个“运算”，叫做极限。大家刚开始学的时候，可以把极限看成是继加减乘除之后的第五种运算，运算的对象是一个函数，并且需要指定定义域中的一个点，在有意义的情况下(做除法时除数是零也没有意义!)，得到的结果一定是一个数。

3.1 极限的定义

3.1.1 自变量趋于有限值时函数的极限

定义Définition 3.1: 趋向于某点时函数的极限，左、右极限

设 I 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的某个区间，假设函数 $f(x)$ 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。如果存在常数 A ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 x_0 (用符号记作 $x \rightarrow x_0$) 的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

假设函数 $f(x)$ 在开区间 $]a, x_0[$ 上有定义，如果存在常数 A ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限，记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

假设函数 $f(x)$ 在开区间 $]x_0, b[$ 上有定义，如果存在常数 A ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限，记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

例子Exemple 3.2. 函数 $f(x) = x$ 当 x 趋近于 x_0 时, 极限值是 x_0 。

任取 $\varepsilon > 0$ 。取 $\delta = \varepsilon$, 那么当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ 。所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$ 。

命题Proposition 3.3. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ 。

证明Démonstration: 任给 $\varepsilon > 0$ 。根据指数函数的性质??, 得到 (对于 $\frac{1}{e^{x_0}}\varepsilon > 0$) 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|e^{x-x_0} - 1| < e^{-x_0}\varepsilon$ 。继续通过性质??可知, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|e^x - e^{x_0}| = |e^{x_0}| \cdot |e^{x-x_0} - 1| = e^{x_0} |e^{x-x_0} - 1| < \frac{e^{x_0}}{e^{x_0}} \varepsilon < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ 。 □

命题Proposition 3.4. 对任意正实数 x_0 , 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ 。

证明Démonstration: 任给 $\varepsilon > 0$ 。我们取 $\delta = \min\{(e^\varepsilon - 1)x_0, (1 - e^{-\varepsilon})x_0\} > 0$ 。那么当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $(e^{-\varepsilon} - 1)x_0 < x - x_0 < (e^\varepsilon - 1)x_0$, 所以 $e^{-\varepsilon}x_0 < x < e^\varepsilon x_0$, 进而 $e^{-\varepsilon} < \frac{x}{x_0} = e^{\ln \frac{x}{x_0}} < e^\varepsilon$ 。根据单调性可得, $-\varepsilon < \ln \frac{x}{x_0} = \ln x - \ln x_0 < \varepsilon$ 。我们用定义直接证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ 。 □

注释Remarque 3.5. 设 I 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的某个区间, 假设函数 $f(x)$ 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。如果存在常数 A , 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $0 < f(x) - A < \varepsilon$, 根据极限定义有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。为了说明 $f(x)$ 始终大于 A , 可以记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A^+$ 或 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A^+$ 。同样符号 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A^-$ 或 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A^-$ 代表始终有 $-\varepsilon < f(x) - A < 0$ 。注意, 如同左右极限, 引入记号 A^-, A^+ , 只是为了说明当 x 趋向于 x_0 函数值分别从左边和边靠近 A , 它们的极限仍然是 A 。

直观地说, 函数 $f(x)$ 在 x 趋向于 x_0 时极限存在, 就是说函数定义域中的元素 x 越靠近 x_0 , 其函数值 $f(x)$ 越靠近某个常数 A , 这个常数 A 就是极限值。所谓的“靠近”, 是使用绝对值 (距离) 来刻画的。这并不是说一个距离 x_0 更近的元素 x_1 的函数值 $f(x_1)$, 一定比“距离 x_0 稍微远一点点的元素 x_2 的函数值 $f(x_2)$ 更靠近 A , 参见下面的例子。

例子Exemple 3.6.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{如果 } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

命题Proposition 3.7. 如果一个函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 x_0 时的极限存在, 那么这个极限是唯一的。也就是说, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_1$ 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_2$, 那么 $A_1 = A_2$ 。

证明Démonstration: (反证法) 假设 $A_1 \neq A_2$, 不妨进一步假设 $A_1 < A_2$ 。我们取 $\varepsilon = \frac{A_2 - A_1}{2} > 0$ 。那么由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_1$, 所以存在 δ_1 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, $|f(x) - A_1| < \varepsilon = \frac{A_2 - A_1}{2}$, 得到 $f(x) < \frac{A_1 + A_2}{2}$ 。由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_2$, 所以存在 δ_2 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, $|f(x) - A_2| < \varepsilon = \frac{A_2 - A_1}{2}$, 得到 $f(x) > \frac{A_1 + A_2}{2}$ 。那么当 $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时, 同时有 $\frac{A_1 + A_2}{2} < f(x) < \frac{A_1 + A_2}{2}$, 产生矛盾。所以假设不成立, 也就是必须有 $A_1 = A_2$ 。 \square

极限的唯一性, 从某种意义上说明“极限”这个运算是良定的。

“考察关于实数的一元二次方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 。如果存在一个实数 $x_0 = -1$ 使得 $x_0^2 + 3x_0 + 2 = 0$, 那么称 x_0 是该方程的一个解。”

练习 Exercise 3.8

通过 $\varepsilon - \delta$ 语言证明如下等式:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义Définition 3.9: 自变量趋于正、负无穷时函数的极限

设函数 $f(x)$ 当 x 大于某一正数时有定义。如果存在常数 A , 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $X > 0$, 使得当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

设函数 $f(x)$ 当 x 小于某一正数时有定义。如果存在常数 A , 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $X < 0$, 使得当 $x < X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

练习 Exercise 3.10

如果一个函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 $+\infty$ 时的极限存在, 那么这个极限是唯一的。也就是说, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A_1$ 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A_2$, 那么 $A_1 = A_2$ 。

序列的极限

当“自变量趋于无穷大时函数的极限”中函数的定义域为自然数集合 \mathbb{N} 时，稍加改动就可以得到（实数）序列极限的概念。

定义Définition 3.11: 序列的极限

设 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个实数序列。如果存在常数 A ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $N \in \mathbb{N}$ ，使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n - A| < \varepsilon$ ，则称常数 A 为实数序列 (a_n) 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限，记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 或 $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ 。

序列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛到 A 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ 实际上是一回事。根据柯西收敛准则??，序列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时极限存在的充要条件是 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是柯西序列。

3.1.2 极限不存在时的数学表达

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在，或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ ，当且仅当，存在一个实数 $\varepsilon_0 > 0$ ，对任意 $\delta > 0$ ，存在 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 但 $|f(x) - A| > \varepsilon_0$ 。

例子Exemple 3.12. 定义在 \mathbb{R} 上的函数

eg: $\sin(1/x)$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{如果 } x \neq 0, \\ 1 & \text{如果 } x = 0. \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 的极限一定不是0(可能是不存在)：取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ，任取 $\delta > 0$ ，我们总能找到某个 $x_N = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2N\pi}$ 满足 $x_N < \delta$ ，但 $f(x_N) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2N\pi) = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$ 。

注释Remarque 3.13. 对于自变量趋于有限值时函数的极限、自变量趋于无穷大时函数的极限、序列的极限：如果对于任意给定的实数 $A > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ （存在 $X > 0$ ；存在正整数 N ），使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时（当 $x > X$ 时，当 $n > N$ 时），有 $f(x) > A$ 。由于 $\pm\infty$ 不是实数，所以根据定义，上述情况是极限不存在，但是为了方便，可以说当 x 趋向于 x_0 时（当 x 趋向于 $+\infty$ 时，当 n 趋向于 ∞ 时），函数（序列）趋向于 $+\infty$ ，并沿用极限的符号。

结合“广义实数系”中的内容， $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty$ ，指的是序列 (n) 和 $(n + 1)$ 都趋向于 $+\infty$ ，不能由此得出 $+\infty = +\infty - 1$ 。

练习 Exercice 3.14

用数学语言描述定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时极限不存在。如果 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时极限不存在，那么 $f(x)$ 一定无界吗？如果一定无界，请给出证明，如果不一定无界，请举出反例并证明。

定理 Théorème 3.15: 海涅 (Heine) 归结原理：用序列刻画极限

设 I 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的某个区间，假设函数 $f(x)$ 在集合 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 当且仅当对每个收敛到 x_0 且满足 $t_n \in I \setminus \{x_0\}$ 的序列 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，序列 $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛到 A 。

证明 Démonstration: “必要性 \implies ”:

假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，那么任给 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得只要 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

对任何一个收敛到 x_0 且满足 $t_n \in I \setminus \{x_0\}$ 的序列 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，对于上面的 $\delta > 0$ ，存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时， $0 < |t_n - x_0| < \delta$ 。

于是得到当 $n > N$ 时 $|f(t_n) - A| < \varepsilon$ 。

“充分性 \impliedby ”: (反证法)

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在，或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ ，那么存在一个实数 $\varepsilon_0 > 0$ ，对每个 $\delta_n := \frac{1}{n} > 0$ ，存在 t_n 满足 $0 < |t_n - x_0| < \delta_n$ 但 $|f(t_n) - A| > \varepsilon_0$ 。

那么可以直接验证序列 (t_n) 收敛到 x_0 （任给 $\varepsilon > 0$ ，存在正整数 N 满足 $\frac{1}{N} < \varepsilon$ ，当 $n > N$ 时 $|t_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ ），但是序列 $(f(t_n))$ 不收敛到 A 。

这与题设矛盾。于是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。 \square

注释 Remarque 3.16. 因为不可能验证“每个序列”都满足收敛性质，所以这个定理一般只用来判定极限不存在。

在例子3.12中， $f(x)$ 当 $x \rightarrow 0$ 的极限实际上是不存在的。我们可以找到一个收敛到0的序列 $(t_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi})_{n \in \mathbb{N}}$ 和另一个收敛到0的序列 $(s_n = \frac{1}{2N\pi})_{n \in \mathbb{N}}$ ，但是 $f(t_n) \equiv 1$ ， $f(s_n) \equiv 0$ 。根据上面定理，假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，设它是 A ，得到 $1 = A = 0$ ，矛盾。

练习 Exercice 3.17

仿照定理3.15给出实数序列极限存在的充要条件，并给出证明。

练习 Exercice 3.18: 用序列语言描述极限不存在的等价条件

设 I 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的某个区间, 假设函数 $f(x)$ 在集合 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在 当且仅当 存在一个每一项都在 $I \setminus \{x_0\}$ 中且收敛到 x_0 的序列 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 使得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$ 不存在。

3.2 极限的性质

3.2.1 局部性质

极限存在函数在一点 x_0 周围的局部性质。

命题 Proposition 3.19. 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在, 那么 $f(x)$ 在局部有界。换句话说, 存在正实数 M , 存在包含 x_0 的区间 I , 使得 $f(x)$ 在 $I \setminus \{0\}$ 上满足 $|f(x)| < M$ 。如果更进一步函数 $f(x)$ 在 x_0 点还有定义, 那么 $f(x)$ 在 I 上有界。

证明 Démonstration: 根据条件, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。那么对于 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$,

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < 1$, 也就是 $A - 1 < f(x) < A + 1$ 。这时取 I 为开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $M = |A| + 1$ 即可。如果 $f(x)$ 在 x_0 点有定义, 那么重新取 $M = \max\{|A| + 1, f(x_0)\}$ 即可。 \square

命题 Proposition 3.20. 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在不为零, 那么 $f(x)$ 在局部保号。换句话说, 假设极限值为正 (负), 存在包含 x_0 的区间 I , 使得 $f(x)$ 在 $I \setminus \{0\}$ 上 $f(x)$ 为正 (负)。

证明 Démonstration: 根据条件, 不妨假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ 。那么对于 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \frac{A}{2}$, 也就是 $\frac{A}{2} = -\frac{A}{2} + A < f(x) < A + \frac{A}{2} = \frac{3A}{2}$ 。这时取 I 为开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 则在 $I \setminus \{0\}$ 上有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ 。 \square

练习 Exercice 3.21

设 $f(x)$ 是从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的函数。下面的命题是否为真? 如果为真请证明, 如果为假请给出反例。

对于任何 $x_0 \in \mathbb{R}$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限都存在, 则 $f(x)$ 有界。

3.2.2 与四则运算的关系

求极限可以看作一种运算, 这个运算对函数的加减乘除有“分配律”。

命题 Proposition 3.22. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个函数, λ 是一个实数, x_0 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义域中的点。假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 那么

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \lambda g(x)) = A + \lambda B$ (我们说极限满足 **线性性质**);
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = AB$;
- 如果 $B \neq 0$, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

证明 Démonstration:

- 如果 $\lambda = 0$, 根据条件命题自然成立。现在假设 $\lambda \neq 0$ 。任给 $\varepsilon > 0$ 。由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以对 $\frac{\varepsilon}{2}$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$; 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 所以对 $\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$, 从而 $|\lambda g(x) - \lambda B| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。于是取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|(f(x) + \lambda g(x)) - (A + \lambda B)| = |(f(x) - A) + (\lambda g(x) - \lambda B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 。
- 任给 $\varepsilon > 0$, 不妨 $\varepsilon < 1$ 。由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以对 $\frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$; 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 所以对 $\frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$ 。取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, (利用加一项减一项) 可以得到

$$\begin{aligned}
 |f(x) \cdot g(x) - AB| &= |(f(x) \cdot g(x) - f(x)B) + (f(x)B - AB)| \\
 &= |f(x)(g(x) - B) + (f(x) - A)B| \\
 &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |f(x) - A| \cdot |B| \\
 &\leq \left(|A| + \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}\right) \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1} + \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1} |B| \\
 &= \varepsilon \frac{|A|+|B|+\frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}}{|A|+|B|+1} \\
 &\leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

- 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$, 不妨假设 $B > 0$ 。对于 $\frac{B}{2}$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, $|g(x) - B| < \frac{B}{2}$, 也就是 $\frac{B}{2} < g(x) < \frac{3B}{2}$, 更进一步 $\frac{2}{3B^2} < \frac{1}{g(x)B} < \frac{2}{B^2}$ 。现在任给 $\varepsilon > 0$, 对于 $\frac{B^2}{2}\varepsilon$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, $|g(x) - B| < \frac{B^2}{2}\varepsilon$ 。取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x)B|} < \frac{B^2}{2}\varepsilon \cdot \frac{2}{B^2} = \varepsilon.$$

于是我们证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ 。根据上条关于乘法的性质，我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right) = A \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

□

注释Remarque 3.23. 我们证明极限关于除法“分配律”时，没有直接去验证，而是把问题简化为上面已经证明了的关于乘法的“分配律”问题。这种化未知为已知的思想，是解决数学问题时，最常见最有效的指导方法。

练习 Exercice 3.24

写出实数序列极限关于加减乘除法的“分配律”性质。

3.2.3 与函数复合的关系

定理Théorème 3.25: 复合函数的极限

itOfComposition

设 I 是包含 x_0 的一个区间， $f(x)$ 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，并且在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有 $f(x) \neq A$ ，并且 $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ ，那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

证明Démonstration: 任给 $\varepsilon > 0$ 。由于 $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ ，所以存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - A| < \delta$ 时，有 $|g(x) - B| < \varepsilon$ 。又由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，所以对于上述 $\delta > 0$ 存在 $\gamma > 0$ ，使得 $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma) \subset I$ 并且当 $0 < |x - x_0| < \gamma$ 时，有 $|f(x) - A| < \delta$ ；在 $I \setminus \{x_0\}$ 上 $f(x) \neq A$ 可进一步得到 $0 < |f(x) - A| < \delta$ 。所以，当 $0 < |x - x_0| < \gamma$ 时，有 $|g \circ f(x) - B| < \varepsilon$ ，从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。 □

思考题Problème 3.26. 下面关于复合函数极限的命题是否为真？如果为真请证明，如果为假请举出反例。

- 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 并且 $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ ，那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。
- 设 I 是包含 x_0 的一个区间。假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 并且 $f(x)$ 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上满足 $f(x) \neq A$ ，那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow A} g(x)$ 。

定理Théorème 3.27: 变量替换

changeOfVariable

设 I 是包含 x_0 的一个区间, J 是包含 y_0 的一个区间。假设函数 $y = f(x)$ 是从 $I \setminus \{x_0\}$ 到 $J \setminus \{y_0\}$ 的**双射**, 并且有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, 其反函数 f^{-1} 有 $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ 。那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x)$ 与 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$ 要么同时不存在, 要么同时存在且相等。

证明Démonstration: 假设 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = B$ 。

如果 $f(x)$ 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上都满足 $f(x) \neq y_0$, 那么加上条件 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, 直接根据复合函数极限的定理3.25, 可以得到 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

如果存在某个 $x_1 \in I \setminus \{x_0\}$ 满足 $f(x_1) = y_0$, 那么由于 $f(x)$ 是双射, 所以存在 $\delta > 0$, 使得 $x_1 \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\} \subset I$, 于是 $f(x)$ 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ 上满足 $f(x) \neq y_0$, 此时又可以使用复合函数极限的定理3.25得到 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

如果 $f^{-1}(y)$ 在 $J \setminus \{y_0\}$ 上都满足 $f^{-1}(y) \neq x_0$, 那么加上条件 $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$, 直接根据复合函数极限的定理3.25, 可以得到 $\lim_{y \rightarrow y_0} g \circ f(f^{-1}(y)) = B$, 也就是 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = B$ 。

如果存在某个 $y_1 \in J \setminus \{y_0\}$ 满足 $f^{-1}(y_1) = x_0$, 那么由于 $f^{-1}(y)$ 是双射, 所以存在 $\delta > 0$, 使得 $y_1 \notin [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \setminus \{y_0\} \subset J$, 于是 $f^{-1}(y)$ 在 $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \setminus \{y_0\}$ 上满足 $f^{-1}(y) \neq x_0$, 此时又可以使用复合函数极限的定理3.25得到 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} g \circ f(f^{-1}(y)) = B$ 。□

例子Exemple 3.28. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ 。

考虑变量替换 $y = f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, 函数 f 显然是双射, 并且容易得到 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$ 以及 $\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}$ 。令 $g(x) = \sin x$, 则 $g \circ f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

练习Exercise 3.29

下面的命题是真是假? 如果为真请证明, 如果为假请举出反例。

- 设 f 是从 \mathbb{R} 中的一个包含 x_0 的开区间到一个包含 y_0 的开区间的双射。如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, 那么 $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$;

- 设 f 是从 \mathbb{R} 中的一个包含 x_0 的开区间到一个包含 y_0 的开区间的严格单调函数。如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, 那么 $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ 。

思考题Problème 3.30. 把上述定理3.27中的“双射”条件改为“单射”或者满射。此时, 定理还成立吗? 若成立给出证明, 若不成立给出反例。

例子Exemple 3.31.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{如果 } x \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \\ \frac{1}{n} & \text{如果 } x = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{如果 } x = \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \neq \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{如果 } x = \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 不存在, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x) = 1$ 。

例子Exemple 3.32.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{如果 } x \neq 0 \\ 1 & \text{如果 } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x)$ 不存在。

练习Exercice 3.33

定理3.27可以扩展到 $x_0 = \pm\infty$ 或(且) $y_0 = \pm\infty$ 的情形, 以及序列极限的情形。请写出相应的版本。

3.2.4 与序的关系

定理Théorème 3.34: 极限存在则一定保序

设 I 为包含某点 x_0 的区间, f, g 为定义在 $I \setminus \{x_0\}$ 上的函数。如果对于所有属于 I 而不等于 x_0 的 x 满足 $f(x) < g(x)$ 或 $f(x) \leq g(x)$, 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。

证明Démonstration: (用反证法) 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。那么根据极限与四则运算的关系, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0.$$

再根据局部保号性质 3.20, 得知存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) - g(x) > 0$ 。这与题设矛盾。 \square

定理 Théorème 3.35: 夹逼定理 Théorème des gendarmes

:SqueezeTheorem

设 I 为包含某点 x_0 的区间, f, g, h 为定义在 $I \setminus \{x_0\}$ 上的函数。如果对于所有属于 I 而不等于 x_0 的 x 满足:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x); \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L;$$

那么, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 。

对于 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 以及 $n \rightarrow \infty$ 的情形, 结论依然成立。

证明 Démonstration: 任给 $\varepsilon > 0$ 。由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$, 所以存在 $\delta_1 > 0$ 使得当 $0 < |x_0| < \delta_1$ 时, $|g(x) - L| < \varepsilon$, 进而得到 $L - \varepsilon < g(x)$; 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, 所以存在 $\delta_2 > 0$ 使得当 $0 < |x_0| < \delta_2$ 时, $|h(x) - L| < \varepsilon$, 进而得到 $h(x) < L + \varepsilon$ 。根据已知条件, 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 那么当 $0 < |x_0| < \delta$ 时, 得到 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, 也就是 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。 \square

t(x.sin(1/x))

例子 Exemple 3.36. 设函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 它在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上有定义。当 x 趋向于 0 时函数的极限存在, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

实际上, 由于正弦函数有界, 所以在 $x \neq 0$ 时有 $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$, 进而 $|x \sin \frac{1}{x}| < |x|$ 。取 $g(x) = -|x|, h(x) = |x|$ 得到 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 。我们已经指导 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, 由夹逼定理得到 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 。

思考题 Problème 3.37. 下面关于实数序列极限的命题是否为真? 如果为真请证明, 如果为假请举出反例。

- 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, 则 n 充分大时总有 $x_n > 0$ 。
- 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。如果 n 充分大时总有 $x_n > 0$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$ 。

3.3 极限的计算

3.3.1 求极限

一些简单的极限

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$;

练习 Exercise 3.38

验证上面的简单极限。

3.3.2 求极限的典型方法

用定义求解

先猜测，后验证。

例子 Exemple 3.39. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ 存在，极限值为 1。

当 $0 < |x| < 1$ 时，利用三角函数恒等式（二倍角公式）和不等式 $|\sin x| < |x|$ ，计算可得

$$|\cos x - 1| = |\cos(2\frac{x}{2}) - 1| = |(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) - 1| = 2|\sin^2 \frac{x}{2}| < \frac{x^2}{2}$$

于是，任给 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 满足 $\frac{\delta^2}{2} < \varepsilon$ ，比如取 $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ，当 $0 < |x| < \delta$ 时， $|\cos x - 1| < \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon$ 。所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。

命题 Proposition 3.40. 假设 I 为包含某点 x_0 的区间， f 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义，并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = e^A$ 。

我们把函数 f 取成 $f(x) = x$ ，那么这个命题可以看作是命题 3.3 的推广（所以只需要记住后面的就可以了）。需要注意的是不可以直接用定理 3.25，请对比所给条件的不同之处。

证明 Démonstration: 任给 $\varepsilon > 0$ 。根据上面定理 3.3，存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |x - A| < \delta$ 时， $|e^x - e^A| < \varepsilon$ 。又因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，所以存在 $\gamma > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \gamma$ 时，总有 $|f(x) - A| < \delta$ 。对于满足 $0 < |x - x_0| < \gamma$ 的点 x ，如果 $0 < |f(x) - A| < \delta$ ，则有 $|e^{f(x)} - e^A| < \varepsilon$ ；如果 $0 = |f(x) - A| < \delta$ ，那么自然有 $|e^{f(x)} - e^A| = |e^A - e^A| = 0 < \varepsilon$ 。总之，只要 x 满足 $0 < |x - x_0| < \gamma$ ，总有 $|e^{f(x)} - e^A| < \varepsilon$ 。所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = e^A$ 。□

用四则运算求解

化未知为已知

例子Exemple 3.41. 设 $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 是 \mathbb{R} 上的多项式函数。那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ 。这是因为，我们已经对 $f(x) = x$ 证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$ ，那么对函数 $a_k x^k$ 使用极限对乘法的“分配律”得到 $\lim_{x \rightarrow x_0} a_k x^k = a_k x_0^k$ ，再使用极限对加法的“分配律”得到 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ 。

例子Exemple 3.42. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n+3} = e^2$ 。实际上，由于 $(1 + \frac{1}{n})^{2n+3} = (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})^3$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^3 = 1$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n+3} = e^2$ 。

用变量替换

选取合适的变量替换

例子Exemple 3.43. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ 。

解：令 $x = \sin t$ ，函数 $x(t) = \sin t$ 在 0 点附近是双射，并且 $\sin t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ ，其反函数满足 $\arcsin x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ 。所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

注释Remarque 3.44. 如果已经知道 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ 存在，那么根据定理 3.25，只需要验证 $\sin t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ 且 $t \neq 0$ 时 $\sin t \neq 0$ 即可。

用夹逼定理

参见例 3.36、3.45 和例 3.46。

用后续的洛必达法则，阶的估计，泰勒展开等

没有显示表达式的函数

先证明极限存在，利用极限是一个实数，解方程。

3.3.3 需要记住的经典极限

- 对任意正整数 n ，有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ；

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

命题 Proposition 3.45.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

证明 Démonstration: 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, 我们有不等式 $0 < \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. 从而得到 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 由于 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 在各自定义域内都是偶函数, 所以, 当 $-\frac{\pi}{4} < x < 0$ 时, 仍有 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 我们知道 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$,

故根据夹逼定理 3.35 得到, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. \square

命题 Proposition 3.46.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

证明 Démonstration: 我们用 $[x]$ 表示正实数 x 的整数部分, 即 $[x] = \sup\{a \in \mathbb{N} | a < x\}$. 由不等式 $[x] \leq x < [x] + 1$ 、幂函数的单调性和指数函数的单调性, 得到两个不等式

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &\leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}, \\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &> \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}. \end{aligned}$$

我们定义函数 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}$, $h(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$, 有 $g(x) < f(x) < h(x)$.

下面证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = e$.

任给 $\varepsilon > 0$. 我们知道序列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增收敛到 e , 所以存在正整数 N 使得 $n > N$ 时 $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon$. 所以当 $x > N + 1$ 时, $[x] \geq N + 1$, 此时 $\tilde{g}(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \geq \left(1 + \frac{1}{N+1}\right)^{N+1} > e - \varepsilon$, 可得 $0 < e - g(x) < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = e$.

发现 $g(x) = \tilde{g}(x) \frac{1}{1 + \frac{1}{[x]+1}}$ 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{[x]+1}} = 1$, 由极限对乘法的“分配律”得

到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e \times 1 = e$.

任给 $\varepsilon > 0$. 我们知道序列 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调递减收敛到 e , 所以存在正整数 N 使得 $n > N$ 时 $0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e < \varepsilon$. 所以当 $x > N + 1$ 时, $[x] \geq N + 1$, 此时 $h(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \leq \left(1 + \frac{1}{N+1}\right)^{N+2} < e + \varepsilon$, 可得 $0 < h(x) - e < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = e$.

综上, 由夹逼定理, 得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$. \square

练习 Exercice 3.47

利用变量替换证明

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$

命题 Proposition 3.48.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

证明 Démonstration: 令 $x = \ln(t+1)$ 且 $t \rightarrow 0$ 时 $x \rightarrow 0$, 其反函数为 $t = e^x - 1$ 且 $x \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$ 。所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} && \text{变量替换} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(t+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}. && \text{对数函数的性质??} \end{aligned}$$

由于 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ 以及 $\lim_{x \rightarrow e} \ln x = \ln e = 1$, 并且 0 点附近 $(1+t)^{\frac{1}{t}} \neq e$ (为什么?)。

所以, 根据复合函数的极限定理 3.25, 得到 $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1$, 进而 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = 1$ 。□

练习 Exercice 3.49

批改下列证法:

1. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x)^{\frac{1}{x}})^x - 1}{x} = 1$.

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = A$, 那么 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + Ax)$, 于是 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + Ax)^{\frac{1}{x}}$ 。所以 A 只能取为 1。

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x/(e^x)$

命题 Proposition 3.50.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

证明 Démonstration: 我们用 $[x]$ 表示正实数 x 的整数部分, 即 $[x] = \sup\{a \in \mathbb{N} | a \leq x\}$ 。我们讨论的是 $x \rightarrow +\infty$ 的情况, 所以不妨假定本证明中 $x > 2021$ 。根据指数函数的单调性, 从不等式 $[x] \leq x < [x] + 1$ 得到 $\frac{x}{e^x} < \frac{[x]}{e^{[x]+1}}$; 由于正实数的整数

次方保持序关系，从不等式 $e > 2$ 得到 $\frac{[x]}{e^{[x]+1}} < \frac{[x]}{2^{[x]+1}}$ 。又因为 $2^{[x]+1} > \frac{[x]([x]+1)}{2}$ ，所以 $\frac{[x]}{2^{[x]+1}} < \frac{2}{[x]+1}$ 。根据定义容易得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{[x]+1} = 0$ 。

最后，对不等式 $0 < \frac{x}{e^x} < \frac{2}{[x]+1}$ 使用夹逼定理3.35可得，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

我们使用变量替换 $x = e^t$ 。验证函数 $f(t) = e^t$ 是双射， $f^{-1}(x) = \ln x$ ，并且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

□

练习 Exercise 3.51

er<<exponential

证明：对任意 $b > 1$, $a > 0$ ，都有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b \ln x}{x^a} = 0.$$

练习 Exercise 3.52

证明： $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$

limit(x^(1/x))

命题 Proposition 3.53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

证明 Démonstration: 由于 $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ ，并且前面例子3.50已经算出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 。根据命题3.40，我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1.$$

□

3.3.4 练习题集训

练习 Exercise 3.54

判断下列极限是否存在，如果存在，求解该极限(要求写出过程)；若不存在，说明理由。

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x}$$

练习 Exercice 3.55

判断下列极限是否存在，如果存在，求解该极限(要求写出过程)；若不存在，说明理由。

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{3}{x})^{3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} \quad (x_0 > 0)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{8x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{x}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^{50}(x+2)^{50}}{(x^2 - x + 3)^{100}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x^2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{2x}$$

等价无穷小(大)

在函数集合中，可以定义 $f(x) \sim g(x)$ 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ，容易验证这是一个等价关系。更进一步，如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ，那么说函数 f 与 g 当 x 趋近于 a 时为等价无穷小；如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ，那么说函数 f 与 g 当 x 趋近于 a 时为等价无穷大。

注释 Remarque 3.56.

- 在定义 $f(x) \sim g(x)$ 时， a 可以取 $\pm\infty$ ，而且没有要求 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 存在。
- 假设 $f(x) \sim g(x)$ ，等式 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$ 不一定成立，例如 $\sqrt{x^2 + x} \sim x$ 当 $x \rightarrow +\infty$ ，但是如果 $g(x)$ 有界，那么上述等式成立。
- 仅有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$ 成立，一般无法得到 $f(x) \sim g(x)$ ，例如 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ，但是 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ，但是 $x \not\sim x^2$ 显然不正确。

例子 Exemple 3.57.

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

定理Théorème 3.58: 乘除形式极限的等价替换

假设 $f_1(x) \sim_{x \rightarrow a} g_1(x)$, $f_2(x) \sim_{x \rightarrow a} g_2(x)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A$, 那么 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = A$ 。

证明Démonstration: 由题可知, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g_1(x)}{f_1(x)} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A \end{aligned}$$

□

注意♠: “等价替换”只能用于乘除,

- 一般情况下不能用于加减, 比如计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ 不能直接用 x 替换 $e^x - 1$;
- 一般情况下不能用于复合函数, 比如计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{\cos x}{x^2}}}$ 不能用 $\frac{1}{x^2}$ 替换 $\frac{\cos x}{x^2}$ 。

练习Exercice 3.59

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^{x^2} - 1}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan x) + \tan(\arcsin x)}{\arcsin(\sin x) + \arctan(\tan x)}$

(7) $\lim_{x \rightarrow +\infty}$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{\cos x}{x^2}}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\arctan 3x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) + \tan(\sin x)}{\sin(\sin x) + \tan(\tan x)}$

(6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

(8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\tan \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}}$

递归形式的序列极限

已知 $a_{n+1} = f(a_n)$ 以及 a_0 的值, 这里 f 通常是(后面学到的)连续函数。求 a_n 的极限, 一般使用如下的步骤:

第一步, 证明极限存在: (i) (归纳法) 证明有界 (ii) 序列单调;

第二步, 设序列的极限值为 A 。递推关系等号两边同取极限, 通过复合函数求极限的定理, 得到一个关于 A 的方程, 通常就是 $A = f(A)$;

第三步, 求解方程 $A = f(A)$, 根据 A 的范围, 舍去不合适的解

练习 Exercise 3.60

1. 已知 $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$, 并且对任意自然数 n 有 $u_{n+1} = \sin u_n$ 。求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 。
2. 已知 $x_0 = 1$ 并且对任意自然数 n 有 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ 。求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。
3. 已知 $x_0 > 1$ 并且对任意自然数 n 有 $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ 。求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

注意♠: 跳过第一步, 不首先证明极限的存在性, 是不正确的: 例如设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\pi = a$, 通过子列得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n\pi = a$, 通过二倍角公式得到方程 $a = 2a^2 - 1$, 得出 $a = 1$ 或 $a = -\frac{1}{2}$ 。事实上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\pi$ 不存在。