Mathématique Avencée IV
高等数学 IV
(AA1-AA3)

B.LAUGEOIS,X.HE

Pris par F.YANG

如有问题联系作者

Email：2023100038@mail.buct.edu.cn

AA1 ESPACES VECTORIELS ET APPLICATION LINÉAIRE

向量空间和线性映射

1. 基本代数结构之三：群（Groupe）、域（Corpe）和向量空间（Espace Vectoriels, EV）

代数结构(Structure d'Algebra)指的是数学中由非空集合上定义若干运算的抽象系统，下面简单概述三个在数学和化学中相当经典且重要的代数结构，这里从群先开始。

1.1 内运算与稳定性（Loi de composition interne et Stabilité）

***Def.*(du *Loi de composition interne*)**：设存在一个集合E，如果定义运算·（习惯上称为乘法），使得：

$$E^2 \to E$$

$$(a,b) \mapsto a{\cdot}b$$

那么我们说这个称这个运算为对E集合的**内运算**，反之，称为**外运算**。

***Def.*(du *Partie stable*)**：对于E上的一个子集F，如果有：

$$\forall (a,b) \in F^2 \setminus a{\cdot}b \in F$$

则称集合E在F部分对于运算·是部分稳定的。

***Def.*(du *Commutativité et Associativité*)**：下面给出交换律和结合律的定义：

$$\begin{cases} \text{Commutativité: } \forall (\mathrm{a,b}) \in \mathrm{E}^2 \setminus \mathrm{a{\cdot}b = b{\cdot}a} \\ \text{Associativité: } \forall (\mathrm{a,b}) \in \mathrm{E}^2 \setminus \mathrm{a{\cdot}(b{\cdot}c) = a{\cdot}(b{\cdot}c)} \end{cases}$$

1.2 幺元、逆元与群结构（Élement neutre ou inversible et le Groupe）

***Def.*(du *Élement neutre ou inversible*)**：

如果对于一个二元运算*对于集合 E 存在一个$e \in E$，对于任意$a \in E$都有：$e * a = a$，这时我们称e为这个集合 E 的**左幺元**，如果对于任何$a \in E$都有：$a * e = a$，这时我们称e为这个集合的**右幺元**。当这个运算无分左右时，我们称e为**幺元（Élement neutre）**。

如果已知一个集合的幺元为e，对于任意a存在一个a'使得$a'{\cdot}a = e$，则称 a'是a的**左逆元**，如果a'使得$a{\cdot}a' = e$，则称a'是a的**右逆元**，如果这个运算无分左右，

则称a'是a的**逆元（Élement inversible）**，记作a^{-1}。

***Def.**(du **Groupe**)*：如果G是一个集合，如果在G中存在一个运算$\cdot$，则记$(G,\cdot)$是一个**原群**，如果该原群中运算满足结合律，则称$(G,\cdot)$为**半群**，如果一个半群存在幺元，则称这个半群为**幺半群**，如果这个幺半群中具有逆元，则称该幺半群为**群**。

因此，对于一个集合G和一个二元运算$\cdot$，要成为群，需要至少满足下面三个条件：

（1）G 具有一个幺元。

（2）$\forall g \in G, \exists g^{-1} \setminus g\cdot g^{-1} = e$

（3）运算·对于 G 是满足结合律的

如果$(G,\cdot)$还满足交换律，那么称这个群为 **Abel 群（Groupe Abelien）**也叫做**交换群**。

1.3 域和向量空间（le Corpe et l'Espace Vectoriel）

***Def.**(du **Corpe**)*：如果对于一个群 K 来说其存在对于第二个二元运算（习惯上称为加法）也满足下面情况：

（1）$(K,+)$是一个 Abel 群

（2）$(K\setminus\{0\},\cdot)$是一个 Abel 群，其中 0 作为 K 域的零元。

（3）两种运算之间存在分配律(Disbutivité)，即$(a+b)c = ac+bc$。

则称$(K,\cdot,+)$为一个域。

***Def.**(du **Espace Vectoriel**)*：设存在一个域$\mathbb{K}$。在集合 E 上定义了一个内运算，称为**加法**（+）：

$$\forall(\alpha,\beta)\in E^2, \exists!\, \gamma \in E \setminus \gamma = \alpha+\beta$$

在域 K 和集合 E 之间定义一个外运算，称为数乘（·）：

$$\forall \alpha \in E, k \in \mathbb{K}\ \exists!\, \delta \in E \setminus \delta = \alpha\cdot k$$

则，如果$(E,\cdot,+)$满足：

（1）$(E,\cdot)$构成 Abel 群；

（2）任何$(x,y)\in E^2, (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$都有：

$$\begin{cases} \alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x \\ 1\cdot x = x \\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x \\ \alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \beta\cdot y \end{cases}$$

此时称$(E,\cdot,+)$为一个$\mathbb{K}$上的向量空间（un Espace Vectoriel sur $\mathbb{K}$），或者称 E 是$\mathbb{K}$-向量空间的（$\mathbb{K}$-espace vectoriel）。

E 中的元素称为**向量（Vecteurs）**，$\mathbb{K}$中的元素称为**标量（Scalaire）**。

***Def.**(du **Vecteur nul, Élement nul**)*：如果 E 是$\mathbb{K}$-向量空间的，它必须包含这样一个元素 0_E 使得对于任何 E 中的元素 x：

$$\begin{cases} 0_E + x = x \\ x + (-x) = 0_E \end{cases}$$

则称这个元素为**零向量**。

相似地，在标量域$\mathbb{K}$中也存在这样的量$0_{\mathbb{K}}$，我们把这个量称为零元，即满足任意$\alpha \in \mathbb{K}$都有：

$$\begin{cases} 0_{\mathbb{K}}\cdot\alpha = 0 \\ 0_E\cdot x = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

1.4 线性组合（Combinaison Linéaire）

若 E 是$\mathbb{K}$-向量空间的，有$(x_1,\cdots,x_n) \in E$我们说对$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$的线性组合如下：

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

1.5 线性空间的直积（Produit d’EV）

若 E，F 都是$\mathbb{K}$-向量空间的，定义 E，F 的直积为：

$$E \times F = \{(v_1, v_2) | v_1 \in E, v_2 \in F\}$$

2. 子空间（Sous-Espaces Vectoriels, SEV）

当 F 满足下面的条件时，说 F 是 E 的子空间（E 是$\mathbb{K}$-向量空间的）：

$$\begin{cases} F \subset E \\ (F,+,\cdot)\ est\ EV \end{cases}$$

或者说 F 非空且 F 对线性组合是稳定的：

$$\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (x,y) \in F^2 \setminus \alpha x + \beta y \in F \end{cases}$$

2.1 张成空间（SEV Engendré par une partie）

2.1.1 子空间的交（Intersection de SEV）

假设 F，G 是 E 的子空间，H 是两者的交：

$$\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \Rightarrow \begin{cases} 0_E \in F, 0_E \in G, 0_E \in H \\ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, (x,y) \in H^2 \setminus \alpha x + \beta y \in H, F, G \end{cases}$$

或者说 H 是 E，F，G 的子空间。

2.1.2 张成空间（SEV Engendré）

若 A 是 E 的某一部分（即一个向量组）称由 A 中所有元素线性组合得到的 E 的子空间被称为 A 的**张成空间**有下面两个记号：

$$\mathrm{Vect(A)} \ = \mathrm{Span(A)} \triangleq \{y \in E|(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, A = \{x_1,\cdots,x_n\}, y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\}$$

或者说 H 是 E，F，G 的子空间。

2.2 子空间的和与直和（Somme et Somme directe）

2.2.1 子空间的和

如果 F，G 是 E 的两个子空间，那么我们说 F，G 的和指的是：

$$F + G = Vect\{F \cup G\}$$

$$i.e.\ F + G = \{(x + y)|(x,y) \in F \times G\}$$

2.2.2 补空间和直和（SEV Suppliémentaire et Somme directe）

如果 F，G 是 E 的两个子空间，如果对于 F，G 有：

$$\begin{cases} F + G = E \\ F \cap F = \{0_E\} \end{cases}$$

则称 F 和 G 互为**补空间**，在此给出**直和**的定义：

$$F \oplus G = E : \begin{cases} F + G = E \\ F \cap F = \{0_E\} \end{cases}$$

2.2.3 直和分解（Décomposition par une Somme directe）

若 F，G 是互补的空间，且其满足对 E 的直和关系，那么：

$$\forall u \in E, \exists!\ (x,y) \in F \times G \setminus u = x + y$$

因此，直和是空间和的特殊情况，此时两个互补空间的维度是独立的。

3. 线性映射（Application linéaire）

假设存在一个映射 f:E→F，当满足下面情况的时候我们说它是一个线性映射：

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

-如果：E=F，称 f 为**自同态（Endomorphisme）**，E 的自同态集记$\mathcal{L}(E)$；

-如果：f 是双射，称 f 为**同构（Isomorphisme）**，E 到 F 的同构集记$\mathcal{L}(E,F)$；

-如果：f 是双射且 E=F 称 f 为**自同构（Automorphisme）**，E 到 F 的自同构集记$\mathcal{GL}(E)$。

因此对于一个线性映射 f，必然有：

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

4. 核与像（Noyaux et Image）

4.1 像与逆像（Image et Image réciproque）

像（像集），是指某映射 f 对于集合 E 的一部分 E'的映射集，用$f(E')$表示：

$$f(E') \triangleq \{f(x)|x\in E'\}$$

逆像（逆像集）是指某映射 f 对于集合 E 的一部分 E'的映射集，用$f^{-1}(F')$表示：

$$f^{-1}(F') \triangleq \{f^{-1}(y)|y\in F'\}$$

像空间，或者叫做列空间是指某映射 f 对于集合 E 的一部分 E'对应的子空间，以 $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Col}(f)=f(E)$表示。

4.2 向量空间的像与逆像

对于任何从 E 到 F 的映射，如果 f 是同构，那么必然有其逆像集是 E 的一部分，E 的像集应该是 F 的一部分。

4.3 核（Noyaux）

核也叫做**核空间**，其定义为$\{0_F\}$所对应的元素在 E 中的集合，记作 *Ker(f)*：

$$\mathrm{Ker}(f)=f^{-1}(\{0_F\})=\{x\in E|f(x)=0_F\}$$

4.4 单射-核唯一性

下面命题是真命题：

$$f(\cdot)\ \text{injective} \iff Ker(f)=\{0_E\}$$

证明略。

5. $(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$空间与线性映射的组合

5.1$(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$是向量空间（证明略）

5.2 线性映射的组合

对于两个同构有：

$$f\in\mathcal{L}(E,F), g\in\mathcal{L}(F,G)\Rightarrow g\circ f\in\mathcal{L}(E,G)$$

6. $(\mathcal{GL}(E),\cdot)$群结构

$(\mathcal{GL}(E),\cdot)$被称为**线性群**，在群表示论中被称为**对称群**，记为 Sym(E)，其子群被称为**置换群**。其幺元为：*f(·)=x*

7. 线性方程组(Système linéaire)与解的结构

线性方程指的是形如 $f(x)=b$，其中 $f(x)$是 E 上的一个线性映射，b 是 F 的一个向量

线性方程组指的是由多个线性方程构成的方程组，下面是一个例子：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

7.1 解的结构

对于一个线性方程组来说，其的解集一定是一个 p 维线性空间的子空间，因此可以通过空间核与像取进行刻画。

那么必然存在两类解：对应核的一种解（$\mathbf{S}x=0$），称为**通解**以及对应单独的仿射子空间（$\mathbf{S}x=b$），称为**特解**去进行刻画，因此标准解系应该是两者的和。

8. 投影 (Projecteur)与对称(Symétrie)

8.1 投影映射和其性质

Def.*(du* ***Projecteur****)*：若在 E 空间中可以存在两组互补的子空间 F，G，那么由直和分解唯一性可以给出任何 E 中元素 x 都可以被分解为$x = x_F + x_G$，其中$x_F \in F, x_G \in G$那么定义下面的映射：

$$p(x) = x_F \ ou \ p(x) = x_G$$

这个映射被称为投影。

投影有下面性质（设$p(x) = x_F$）：

（1）是自同构

（2）如果$x \in F$，则$p(x) = x$;

（3）如果$x \in G$，则$p(x) = 0_F$;

（4）$Ker(p) = G$;

（5）$Im(p) = F$;

（6）复合等价性：$p \circ p = p \Leftrightarrow p$是投影。

8.2 对称映射和其性质

Def.*(du* ***Symétrie****)*：若在 E 空间中可以存在两组互补的子空间 F，G，那么由直和分解唯一性可以给出任何 E 中元素 x 都可以被分解为$x = x_F + x_G$，其中$x_F \in F, x_G \in G$那么定义下面的映射：

$$s(x) = x_F - x_G$$

这个映射被称为对 F（=Ker(s-Id_E)），平行于 G（=Ker(s+Id_E)）的对称。

对称有下面性质（设$p(x) = x_F$）：

（1）是自同构

（2）如果$x \in F$，则$s(x) = x$；

（3）如果$x \in G$，则$s(x) =- x$；

（4）$Ker(s) = 0_E;$

（5）$Im(s) = E;$

（6）复合恒等性：$s \circ s = Id_E \Leftrightarrow s$是对称。

AA2 DIMENSION DES ESPACES VECTORIELS

向量空间的维数

1. 线性无关组和张成向量组（Famille libre et Famille génératrice）

1.1 张成向量组（Famille génératrice）

***Def**.(du **Famille génératrice**)*：给出一个向量组$(x_1, \cdots x_n)$如果这个向量组的张成空间可以使得任意在 E 中的一个向量 *x* 都属于其张成空间，那么我们说这个向量组是空间 E 的**张成向量组（张成组）**：

$$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{x} \in \mathrm{Vect}\{x_1, \cdots, x_n\}$$

***Pro**.(du **Famille génératrice**)*：如果$\mathcal{F}$和$\mathcal{G}$都是 E 的一个张成组，那么两者可以互相线性示出，即：

$$\forall \mathrm{x} \in \mathcal{F}, \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (y_1, \cdots, y_n) \in \mathcal{G}^n \setminus x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$$

***Def**.(du **Colinéaire**)*：对于一个向量组，如果存在一组不全为 0 的标量$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$使得下面式子成立：

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

则称这个向量组是**共线**的。

***Def**.(du **Sur Famille, Sous Familles**)*：给出一个向量组$\mathcal{F}$，存在一个向量组$\mathcal{G}$使得$\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{\cdot\}$，则称组$\mathcal{G}$为组$\mathcal{F}$的**超组**。同理，如果存在向量组$\mathcal{E}$使得$\mathcal{E} = \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}$则称组$\mathcal{E}$是组$\mathcal{F}$的**子组。**

***Pro.**(du **Sur Famille, Sous Familles**)*：给对于一个张成组来说，它的超组必然是张成组。

1.2 线性无关组与相关组（Famille libre, Famille liée）

***Def**.(du **Famille libre, Famille liée**)*：如果对于某个向量组，其中没有任何一个向量可以用组内其他向量自由组合，则称这个向量组是**线性无关**的，这个组称为**线性无关组**；否则称该向量组是**线性相关**的，该组称为**线性相关组**。

***Pro.**(du **Famille libre, Famille liée**)*：无关组的子组是线性无关的，相关组的超组也是相关的。含有零元的组必然相关。

2. 基和极大线性无关组（Base, Famille libre et génératrice）

设有一个张成组$\mathcal{F}$，其同时也是线性无关的，那么我们说组$\mathcal{F}$是一个**极大线性无关组**，称$\mathcal{F}$是 E 空间的一组**基**。

⚠**Remarque**：最常见的一组基是正则基（Base Canonique）

2.1 坐标（Coordonées）

在一组基中，总存在一个有序数组$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$使得任意一个 E 中的向量 x 可以在基$\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$条件下线性示出：

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

这个有序数组被称为向量 x 在基$\mathcal{B}$下的坐标。

3. 线性映射与基的关系

如果有一个线性映射（记作 v），其如下定义：

$$v: \begin{cases} \mathbb{K}^n \to E \\ (x_1, \cdots x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{cases}$$

当且仅当：

$$v: \begin{cases} inj. \Leftrightarrow (x_1, \cdots x_n)\ libre \\ sur. \Leftrightarrow (x_1, \cdots x_n)\ engendré \\ bij. \Leftrightarrow (x_1, \cdots x_n)\ base \end{cases}$$

4. 基与线性映射的关系

设$\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$是空间的一组基，$\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$是空间的一个族，有且仅有一个线性映射 u 使得：

$$u(e_i) = f_i$$

$$u: \begin{cases} inj. \Leftrightarrow (x_1, \cdots x_n)\ libre \\ sur. \Leftrightarrow (x_1, \cdots x_n)\ engendré \\ bij. \Leftrightarrow (x_1, \cdots x_n)\ base \end{cases}$$

5. 向量空间的维度(Dimensions)

5.1 有限维度空间(Esapace de Dimension finie)

基是有限组的向量空间称为优先维度空间。

5.2 维度(Dimension)

在空间 E 中，其基或说任何一组极大线性无关组的势称为空间 E 的维度

$$\dim(E) = \#(\mathcal{B})$$

***Pro.**(du **Dimension**)*：

（1）不同标量域的选择可能导致同一个空间的不同维度；

（2）如果 E 是 n 维的向量空间，则无关组至多有 n 个元素；张成组之多有 n 个元素；

（3）基的存在性定理：如果 E 是一个有限维度空间，则 E 中必然存在一组基。

5.3 基不完备性定理

在一个向量空间 E 中，任意一个无关组可以被补为 E 的一组基。

即：如果$\mathcal{B}$是 E 的一组基，相当于$\mathcal{B}$是 n 势张成组同时也是 n 势无关组。

5.4 子空间的维度

如果 F 是 E 的一个子空间则存在：

$$\begin{cases} \dim(F) \leq \dim(E) \\ \dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow E = F \end{cases}$$

5.5 补空间的存在性定理

对于一个有限维度空间，其任何一个子空间都有至少一个补空间，即对任何选定的子空间都可以进行一个直和分解。

6. 维度间关系

6.1 线性同构空间(Espace Isomorphisme)

如果 E，F 是$\mathbb{K}$-线性空间的，当且仅当满足下面情况时，我们称 F 是 E 的一个**线性同构空间**（即可以进行双射映射）：

$$\dim(E) = \dim(F)$$

***Pro.**(du **Espace Isomorphisme**)*：任意的线性同构空间和$\mathbb{K}^n$必然线性同构。

6.2 维度和空间直积的关系

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

6.3 维度和空间和的关系

（1）如果该和是空间直和

$$\dim(E \oplus \overline{E}) = \dim(E) + \dim(\overline{E})$$

（2）如果该和不是空间直和

$$\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

6.4 空间直和的维度判定

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{G}) + \dim(\mathrm{F}), \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{G}) + \dim(\mathrm{F}), \mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$$

7. 秩（Rang）

***Def.**(du **Rang de la famille**)*：一个组$\mathcal{F}$对于向量空间 E 的秩是其张成空间的维度，记作 rg($\mathcal{F}$)或者 rank($\mathcal{F}$)即：

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \triangleq \dim(\mathrm{Vect}\{\mathcal{F}\})$$

***Def.**(du **Rang de l'Application linéaire**)*：一个线性映射的秩指的是该线性映射的像的维度：

$$\mathrm{rg}(u) \triangleq \dim(\mathrm{Im}(u))$$

***Def.**(du **Rang de la Matrice**)*：后面我们会提到，矩阵是线性映射的一种格式，因此其本质是线性映射的秩，一个矩阵的秩指的是其非零行或列的个数，记作 r(A)：

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \triangleq \mathrm{N}(\mathrm{Col}(\cdot \neq 0)) = \mathrm{N}(\mathrm{Lin}(\cdot \neq 0))$$

8. 限制映射与诱导映射（Réstriction/Iduition d'une Application）

如果 E 是一个空间，F 是其子空间，那么映射 v 是 u 的一个限制映射：

$$u(\cdot) := E \to E$$
$$v(x) := \begin{cases} F \to Im(u) \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

显然，投影和对称都是一种限制映射，同时，给出 *u(·)*诱导（Induit）映射 v。

9. 秩-零度化定理（Théorème du rang）

若 E，F 是两个空间，存在一个线性同构 u（如下定义），E_0 为 Ker(u)的补，那么 u 必然诱导一个同构，这个同构是从 E_0 到 Im(u)的，当 E 是有限维时：

$$u(\cdot) := E \to F$$
$$\boxed{dim(E) = rg(u) + dim(Ker(u))}$$

上述定理被称为**秩-零度化定理。**

***Appl.**(du **Théorème du rang**)*：

（1）用于确定映射的像与像的维数；

（2）用于确定映射的核与核的维数；

（3）用于证明空间和的维数。

10.同构的判定与同构的复合

若 E，F 是同维空间，u 是从 E 到 F 的线性映射，那么 u 必然是双射。

特殊地，如果 F=E，则 u 必然为自同构。

10.1 同构的复合

如果 E，F，G 是三个有限维度空间，$u \in \mathcal{L}(E,F)$，$v \in \mathcal{L}(F,G)$，则有下面关系：

（1）保秩性：

$$\begin{cases} \mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(u) \\ \mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v) \end{cases}$$

（2）核扩大性：

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^n)$$

（3）像缩小性：

$$\mathrm{Im}(u) \supset \mathrm{Im}(u^n)$$

11.超平面（Hyperplans）与线性型（Forme Linéaire）

Def.*(du **Hyperplans**)*：对于任意有限维度空间 E，设其维度为 n，则所有(n-1)维的子空间是该空间的**超平面**。

Pro.1*(du **Hyperplans**)*：超平面的判定：

如果 H 是一个子空间，那么下面三个命题真等价：

（1）H 是一个超平面

（2）存在线向量 d 使得$H \oplus Vectd = E$

（3）存在非零的线性型 *f* 使得$H = Ker(f)$

Pro.1*(du **Hyperplans**)*：超平面的方程：

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

其中有标量组(λ_i)和基(e_i)。

Def.*(du **Forme Linéaire**)*：定义在空间 E 中的线性映射为 E 中的**线性型。**

Def.*(du **Forme Linéaire Proportionnelle**)*：若两个线性型成比例，称这对线性型构成**比例型。**

AA3 MATRICE

矩阵

1. 矩阵（Matrice）

***Def.**(de la **Matrice**)*：称 n 行（Ligne）p 列（Colonne）在$\mathbb{K}$中的映射为$[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$称 **np 矩阵。**

由此，一个矩阵 **A** 实质为下面映射：

$$\mathbf{A}=\begin{cases}[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]\to\mathbb{K}\\ \quad(i,j)\longmapsto a_{ij}\end{cases}$$

A 的展开形式：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$$

记其中的一项：**A(*i,j*)=*a*$_{ij}$**

记 **A** 本身：**A=(*a*$_{ij}$)**

1.2 列向量（Vecteur Colonne）和行向量（Vecteur Ligne）

-矩阵的第 *j* 列称**第 *j* 列向量（j**[e] **Vecteur colonne）**

$$\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$$

-矩阵的第 *i* 行称**第 *i* 列向量（i**[e] **Vecteur ligne）**

$$\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$$

1.3 方阵（Matrice Carrée）和三角矩阵（Matrice Triangulaire）

-**A** 中，当 ***n=p*** 时，**A** 为**方阵**

-**A** 中，当 **A** 为方阵时，且对角线上或对角线下的元素全为零，则 A 称为一个**三角矩阵**：

-上三角矩阵（**Matrice Triangnlaire Supérieure）：**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{pp}\end{pmatrix}$$

-下三角矩阵（**Matrice Triangulaire Inférieure）：**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

1.4 对角阵（Matrice Diagonale）

-A 为方阵且仅主对角线上元素非零的矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

记作 $\mathrm{Diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{pp})$

-对角线上的元素称为**对角元（Éléments Diagonaux）**

-数量矩阵（Matrice Scalaire）：$\mathrm{Diag}(a, a, \cdots, a)$

-单位矩阵（Matrice d'Identité）：$\mathrm{Diag}(1,1, \cdots, 1)$

1.5 记号

$\boldsymbol{M_{np}}(\mathbb{K})$：$\mathbb{K}$中的 n 行 p 列矩阵

$\boldsymbol{M_{n}}(\mathbb{K})$：$\mathbb{K}$中的 n 阶方阵

2. 矩阵是向量组

2.1 矩阵化向量

空间中有一组基$\mathcal{B}=(e_1, e_2, \dots, e_n)$时，若$x=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$，$x$ 可表述为：

$$x=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.2 矩阵化表述向量族

若存在一个向量族（有 p 个向量）$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_p})$，在空间$\mathbb{K}$中每个第 j 个元 x_j，可矩阵化表述为：

$$x_j=\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i$$

$$\boldsymbol{M_B}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_p})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

2.3 矩阵与线性型

2.3.1 用基的像表征线性型

任何矩阵都可以看作对基线性运算的 $p \to n$ 维映射从 E 的基到 F 的基$\mathcal{B}'$的映射，记作$\boldsymbol{M_{BB'}(f)}$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_{i'}$$

$$\boldsymbol{M_{BB'}(f)} = \boldsymbol{M_{B'}}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{M_{np}}(\mathbb{K})$$

（因此，矩阵实质上是对(1,0),(0,1),(…)的变换）

计算：$f(e_1)$，$f(e_2)$，⋯，$f(e_p)$再进行拼接。

2.3.2 矩阵与线性型

若 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$在基 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$下的表述：

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_1{}' = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_1{}' = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_{i'} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right) e_{i'}}_{y_i}$$

下面是一个例子：

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = 3f_1 + f_2$$

$$f(e_2) = 5f_1 + 4f_2$$

$$f(e_3) = f_1 + 6f_2$$

3. 矩阵计算

3.1 矩阵加法（Addition de Matrices）

矩阵的加法是每个位置的和：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1p}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2p}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}' & a_{n2}' & \cdots & a_{np}' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{11}' & a_{12} + a_{12}' & \cdots & a_{1p} + a_{1p}' \\ a_{21} + a_{21}' & a_{22} + a_{22}' & \cdots & a_{2p} + a_{2p}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + a_{n1}' & a_{n2} + a_{n2}' & \cdots & a_{np} + a_{np}' \end{pmatrix}$$

3.1.2 矩阵加法群($\boldsymbol{M_{np}}(\mathbb{K}), +$)的性质

（1）内运算：加法（+）

（2）幺元：零矩阵（$0_{M_{np}(\mathbb{K})}$）

（3）逆元：负矩阵（$-\boldsymbol{M_{np}}(\mathbb{K})$）

（4）为 Abel 群

3.2. 矩阵的数乘（Multiplication Scalaire）

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$$

$$\Rightarrow (b_{ij}) = \boldsymbol{\alpha}.(a_{ij})$$

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

3.2.2 数乘空间($\boldsymbol{M_{np}}(|\boldsymbol{K}), +, \cdot$)的性质

（1）$(M_{np}(|K), +)$为 Abél 群

（2）结合律：

$$\alpha(\beta \boldsymbol{A}) = \beta(\alpha \boldsymbol{A}) = \alpha\beta \boldsymbol{A}$$

（3）幺元：

$$1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot 1 = \boldsymbol{A}$$

（4）分配律：

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)\boldsymbol{A} + (\alpha + \beta)\boldsymbol{B} = \alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \beta(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$$

3.2.3 线性型与矩阵（$\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}), \boldsymbol{M_{np}}(\mathbb{K})$）

$$\varphi = \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \to \boldsymbol{M_{np}}(\mathbb{K}) \\ \quad f \to \boldsymbol{M_{BB'}}(f) \end{cases}$$

对矩阵的任意变换为**同构（线映＋双射证明）**

3.4 矩阵的基（Bases des Matrice）

3.4.1 基矩阵（Matrice Élémentaire）

在$M_{np}(\mathbb{K})$中，除 *ij* 为 1 其余全为 0 的矩阵称**基矩阵**，记作 $\boldsymbol{E_{ij}}$

例：$E_{23}\ de\ \boldsymbol{M_{45}}(\mathbb{K})$:

$$E_{23}^{45} = E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.2 矩阵的正则基（Base Canonique de Matrice）

$\mathcal{B} = \{E_{11}^{np}, \dots, E_{np}^{np}\}$称为$\boldsymbol{M_{np}}(\mathbb{K})$的正则基

3.4.3 $\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$的维度

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

（$\forall f \in L(E,F)$都可以表示为一个矩阵）

3.5 矩阵的积（Produit de Matrice）

3.5.1 行列积（内积，Produit Scalaire）

行列积，即内积是向量空间中的度规。

$$\boldsymbol{M_{B(x)}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{M_{B(\varphi)}} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_p) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{B(x)}} \times \boldsymbol{M_{B(\varphi)}} = \boldsymbol{M_B}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j$$

3.5.2 矩阵与列向量的积

矩阵与列向量的积的结果是线性映射 f 的像：

$$\boldsymbol{M_{BB'}}(\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{BB'}}(\boldsymbol{f}) \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + b_3 a_{13} \\ b_1 a_{21} + b_2 a_{22} + b_3 a_{23} \\ b_1 a_{31} + b_2 a_{32} + b_3 a_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$$

3.5.3 矩阵与矩阵的积（前映射在右，后映射在左）

$$\boldsymbol{M_{BB'}}(\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{BB'}(g)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{BB'}(f)} \times \boldsymbol{M_{BB'}(g)} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$$

-n_1p_1 矩阵与 p_1p_2 矩阵相乘，出 n_1 行 p_2 列矩阵，即矩阵的复合：

$$\boldsymbol{M_{n_1p_1}} \times \boldsymbol{M_{p_1p_2}} = \boldsymbol{M_{n_1p_2}}$$

⚠**Remarque**：映射方向与复合方向相反。

3.5.4 矩阵的复合与映射方向

$$\boldsymbol{M_{BE,BG}}(v \cdot u) = \boldsymbol{M_{BE,BG}}(v) \times \boldsymbol{M_{BE,BG}}(u)$$

3.6 积的分配律与结合律

分配律：

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C}) = \alpha\boldsymbol{AB} + \beta\boldsymbol{AC}$$

$$(\alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{AC} + \beta\boldsymbol{BC}$$

结合律：

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

3.7 方阵环（Anneau des Matrice Carrée）

***Def**.(de **l'Anneau**)*：设 R 是一个非空集合，在 R 上定义了两种运算（+和·），如果 R 满足下面情况，则称 R 是一个**环**：

（1）(R,+)是一个 Abel 群

（2）(R,·)是一个半群

（3）加法和乘法之间满足两侧分配律

（4）在此之外，如果：i.乘法满足交换律，则称该环为**交换环**（**Anneau Commutatif**）；ii.乘法存在幺元，称该环为**含幺环**（**Anneau Unitaire**）；iii.如果对乘法有$ab = 0 \nRightarrow a = 0 \; ou \; b = 0$，则称该环为**无零因子环**（**Anneau sans Diviseurs de Zéro**）；iv.如果对乘法满足上面三条，则称该环为**整环**（**Anneau Intègre**）

由此定义，显然：$(\boldsymbol{M_n}(|\boldsymbol{K}), +, \times)$是一个含幺非交换的无零因子环

- $(\boldsymbol{M_n}(|\boldsymbol{K}), +)$是 Abél 群
- 对乘法稳定且可结合可分配

- 有幺元：I_n
- 乘法非交换：$(\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA})$
- 该环无零因子：$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0} \nRightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{or}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

3.7.1 对角阵与矩阵的积

设 $\boldsymbol{D}$ 为对角阵：$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

则：$\boldsymbol{DA}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的每行乘对角阵因子再展开

$\boldsymbol{AD}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的每列乘对角阵因子再展开

e.g.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

3.7.2 可逆性和逆矩阵：群$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

对任一矩阵：

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

则其逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$ 定义为：

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$$

所有可逆阵的群称$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$，即**自同构群**或称**线性群**。

3.7.3 双射的对应

对一个双射 u，其对应阵$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{BB}'}(\boldsymbol{u})$的逆是其逆的矩阵

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{BB}'}(\boldsymbol{u})^{-1} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{BB}'}(\boldsymbol{u}^{-1})$$

3.7.4 可逆准则（Critère d'Inversibilité）

（1）对$\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{K})$，则：

$$\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{n}}\text{：}\ \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

（2）若：$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 亦可逆

（3）设 E 为一个空间，有基$\mathcal{B} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$，当且仅当$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{nB}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$时 $\boldsymbol{M}$ 可逆（上述为基，或说 $\boldsymbol{M}$ 的秩为 n）

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. 基变换（Changement des Bases）

n 维空间中，若有两基$\mathcal{B}$与$\mathcal{B}'$,对于空间中的任意向量 x，可用两基表述：

$$dans\ \mathcal{B}：\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$dans\ \mathcal{B}'：\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$$

则有：$\boldsymbol{M_B}(x) = \boldsymbol{M_B}(\mathrm{Id_E}(x)) = \boldsymbol{M_{B'B}}(\mathrm{Id_E})\boldsymbol{M_{B'}}(x)$

记$\boldsymbol{M_{B'B}}(\mathrm{Id_E})$为$\boldsymbol{P_{B'B}}$，称为**转换矩阵（Matrice de Passage）**。

4.1 转换矩阵（Matrice de Passage）

用于将$\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$的基的矩阵称转换矩阵：

$$\boldsymbol{P_{BB'} = M_B(e_1', e_2', \ldots, e_n') = M_{B'B}(IdE)}$$

转换矩阵方向是$\boldsymbol{P_{B'B}}$是由$\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$的表达

$$\boldsymbol{x = P_{BB'}x'}$$

4.1.2 转换矩阵的可逆性

$$\boldsymbol{P_{BB'}{}^{-1} = P_{B'B}}$$

$$\boldsymbol{P_{BB'} \cdot P_{B'B} = M_{B'B}(IdE) \cdot M_{BB'}(IdE) = IdE|_{B' \to B'}}$$

4.2 转换矩阵的乘位

$\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$**（向量的线性变换）**

$$\boldsymbol{x_B = P_{B'B}x_A}$$

$\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ **（矩阵的复合）**

$$\boldsymbol{B = AP_{B'B}}$$

4.3 非自同态阵的基转化，矩阵的等价

$$\boldsymbol{A' = Q^{-1}AP}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{P = P_{BEBE'}}\text{（与}\mathbf{A}\text{等长）} \\ \boldsymbol{Q = P_{BFBF'}}\text{（与}\mathbf{A}\text{等高）} \\ \boldsymbol{A = M_{BEBF}(u)} \\ \boldsymbol{A' = M_{BE'BF'}(u)} \end{cases}$$

$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}'$互称**等价矩阵（Équivalante）**

4.4 自同态阵的基转化，矩阵的相似

$$A' = P^{-1}AP$$

$$\begin{cases} P = P_{BEBE'} \\ A = B_{BEBE}(u) \\ A' = B_{BE'BE'}(u) \end{cases}$$

A与A'互称**相似矩阵（Semblables）**

5. 转置（Tramsposition，${}^tA/A^T$）

矩阵的转置是矩阵关于其超对角线的对称操作

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!] \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

5.1 积的转置

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

5.2 逆的转置

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

6. 对称，反对称阵和酉矩阵（Matrice Symétrique, Antisymétrique et Unitaire）

对称阵：

$${}^tA = A$$

反对称阵：

$${}^tA = -A$$

酉矩阵（幺正矩阵）：

$$A^{\dagger} = (A)^{-1}$$