高等数学(I)讲义

巴黎居里工程师学院　　姜恺[1]

February 23, 2024

[1]Email: kai.jiang@mail.buct.edu.cn

Contents

Chapter 6

不定积分与原函数

6.1 定义

如同四则运算中，减法可以作为加法的逆运算，除法可以作为乘法的逆运算，对于区间上的可导函数，求导数这一操作同样有对应的逆运算，我们称之为求“原函数”。

定义Définition 6.1: 原函数（Primitive）

设F和f为定义在区间I上的两个函数。如果F在I上可微并且满足$F'(x) = f(x)$，则称F为f在I上的原函数。

定义Définition 6.2: 不定积分（antiderivative）

设f在区间I上有原函数。由 f 的全体原函数组成的集合，称为f在I上的不定积分，常记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $\int$ 称为积分符号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x称为积分变量。

注意♠，与求导数不同，求不定积分不是逐点进行的，而是对整个函数f而言。

如果 F 是 f 的一个原函数, 那么对任何常数 c, 因为有 $(F(x)+c)' = F'(x)+c' = f(x)$, 可知 $F+c$ 也是 f 的原函数。另一方面，如果 F 与 G 都是 f 在I上的原函数，那么由$(F(x)-G(x))' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$，可以得出 $F-G$ 必是一个常数。于是，如果找到了 f 的一个原函数 F, 那么集合 $\{F+c : c \in \mathbf{R}\}$ 就是由 f 的全体原函数组成的，并且常写成

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F+c : c \in \mathbf{R}\} = F(x)+c.$$

注释Remarque 6.3. 上述不定积分公式与等式$F'(x) = f(x)$本质上是一样的，最后面的$F(x)+c$是等号前面的集合的简写（也只有在求不定积分时才这样简写），不是指一个函数。

6.1.1 一些初等函数的不定积分

和求导类似，不是每个函数都有原函数的（举个例子？），即使原函数存在，它们的具体表达形式也不一定能够显示的表示出来。但是，对于一些基本初等函数，是可以求出不定积分的。

- 对于常值函数$f(x)=\lambda$，因为λx的导数是λ，所以$\displaystyle\int \lambda \, \mathrm{d}x = \lambda x + c$
- 对于区间$(0,+\infty)$上的幂函数，当$\lambda \neq -1$时，因为$\dfrac{1}{1+\lambda}x^{\lambda+1}$的导数是$x^{\lambda}$，所以$\displaystyle\int x^{\lambda} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1+\lambda}x^{\lambda+1}+c$；而因为$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$，所以$\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x + c$
- 因为指数函数e^x的导数是其本身，所以$\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$
- 因为$(x\ln x - x)' = \ln x$，所以$\displaystyle\int \ln x \, \mathrm{d}x = x\ln x - x + c,$
- 对于部分三角函数，我们有$\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c, \quad \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c,$
以及$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\cot x + c,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + c.$

6.2 不定积分的计算

首先明确一点：一般来说，求反问题通常比正问题困难的多，就好像若干个质数相乘不难计算出它们的积，但是先给定一个较大的正整数，进行质因子分解，虽然理论上不难但实际操作起来却十分困难。计算不定积积分也一样，很多时候找不到原函数的具体表达式, 例如

$$\int \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x, \int \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x, \int \sin x^2 \, \mathrm{d}x.$$

但是，我们仍然有一些较为通用的方法。

6.2.1 化成已知函数的和

因为导数满足线性性质 $(f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$，所以如果$F$和$G$分别是$f$和$g$的一个原函数，$\lambda$是一个常数，那么$F+\lambda G$是$f+\lambda g$的一个原函数。于是

$$\int (f+\lambda g)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x + \lambda \int g\mathrm{d}x.$$

上式右边两个集合相加，是“向量空间”的相加，目前可以理解成由 前面集合中的一个元素（函数）与后面集合中的一个元素（函数）相加得到的所有可能的函数组成的集合。

例子Exemple 6.4.

计算$\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x.$

解：因为$\displaystyle\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$，所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x &= \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-3}\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}x = -\ln(x-1) + 2\ln(x-3) + C\end{aligned}$$

上面的表达式如何更严格的表示?

6.2.2 分部积分法 l’ intégration par parties (IPP)

利用Leibniz公式$(fg)' = f'g + fg'$，移项可得$fg' = (fg)' - f'g$，左右两端的函数具有相同的不定积分，所以

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int (fg)'(x) - (f'g)(x)\mathrm{d}x = (fg)(x) - \int (f'g)(x)\mathrm{d}x.}$$

例子Exemple 6.5.

计算$\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解：把被积函数看成fg'的形式，其中$f(x)=x$，$g'(x)=\mathrm{e}^x$, 所以由分部积分法得

$$\begin{aligned}\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \int x\left(\mathrm{e}^x\right)'\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int (x)'\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\end{aligned}$$

例子Exemple 6.6.

计算 $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ ， 其中 $n \in \mathrm{N}^+$.

解：利用$\cos^n x = \cos x \cos^{n-1} x = (\sin x)' \cos^{n-1} x$关系，可以使用分部积分法，

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \ \mathrm{d}x =& \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x \ \mathrm{d}x \\ =& \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \left(1-\cos^2 x\right) \mathrm{d}x \\ =& \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n x \ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是得到一个递推关系

$$\int \cos^n x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x.$$

如果$n=2m$是偶数，那么

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \ \mathrm{d}x =& \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{1}{n}\sin x \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3} x + \frac{1}{n}\sin x \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5} x + \cdots \\ & + \frac{1}{n}\sin x \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3}{(n-2)(n-4)\cdots 2}\cos x + \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\int \ \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{n}\sin x \sum_{k=1}^{m}\frac{(n-1)!!}{(n-2)!!}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cos^{2k-1} x + \frac{(n-1)!!}{n!!}x + C \\ =& \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\sin x \sum_{k=1}^{m}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cos^{2k-1} x + x\right) + C\end{aligned}$$

如果$n=2m+1$是奇数，那么

$$\begin{aligned}\int \cos^n x \ \mathrm{d}x =& \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-2}\sin x \cos^{n-3} x + \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{1}{n-4}\sin x \cos^{n-5} x + \cdots \\ & + \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\sin x \cos^2 x + \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\int \cos x \ \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{n}\sin x \sum_{k=1}^{m}\frac{(n-1)!!}{(n-2)!!}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cos^{2k} x + \frac{(n-1)!!}{n!!}\sin x + C \\ =& \frac{(n-1)!!}{n!!}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cos^{2k} x + 1\right)\sin x + C\end{aligned}$$

注：符号!!表示双阶乘，对任意正整数n，规定$n!!$为n乘$n-2$乘$n-4$直至乘到1（此时n为奇数）或2（此时n为偶数）,并约定$0!!=1$。

分部积分法是与求导运算中的乘积求导法则相对应的积分法则. 如果 被积函数中出现幂函数, 指数函数, 三角函数这三类函数中两类或两类以上函数 的乘积, 或者出现对数函数, 反三角函数, 都可以考虑用分部积分法. 应用分部积 分法, 最重要的是如何正确选择 $f(x)$ 与 $g(x)$。 有人总结出“反对常三指”五个字, 这里“反”、“对”、“幂”、三”、“指”依次是反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数和指数函数, 求不定积分时, 一般应将排列次序在后面的函数优先看成某个函数的导数，也就是公式中的g'。

6.2.3 第一换元法

假设函数f和u都可微，那么由链式法则，复合函数$f\circ u(x)$的导数是$f'(u(x))u'(x)$。所以

如果$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$, 并且$u=u(x)$ 可微, 那么$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=F(u(x))+C$.

这种换元法也称作**凑微分法**, 是因为在实际计算时, $u(x)$ 的形式是 "凑出来" 的, 目的是使得被积表达式可以看成为 $f(u)\mathrm{d}u$, 同时能积出来。

例子Exemple 6.7.

计算$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

解：设$f(u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$，于是$\int f(u)\mathrm{d}u=\arcsin(u)+C$。设$u(x)=\frac{1}{x}$，它是可微的，所以

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\int\frac{(\frac{1}{x})'\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=-\arcsin u(x)+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

例子Exemple 6.8.

计算$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

解：此时在换元公式中令$f(u)=\arctan u$，$u(x)=\sqrt{x^2-1}$，用同样的办法可得

$$I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2-1}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}=\arctan\sqrt{x^2-1}+C$$

6.2.4 第二换元法

定理Théorème 6.9: 第二换元法

设不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 存在, $x=x(t)$ 可微并且存在反函数 $t=t(x)$。如果 $\int f(x(t))x'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$, 那么

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(t(x))+C.$$

证明Démonstration: 已知 $f(x)$ 有原函数, 记为 $G(x)$, 则有 $G'(x)=f(x)$。

又已知 $F(t)$ 满足

$$F'(t)=f(x(t))x'(t).$$

从复合函数求导法则得到

$$\big(G(x(t))\big)' = G'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t) = F'(t).$$

于是可以推出 $G(x(t))$ 和 $F(t)$ 只相差一个常值函数

$$G(x(t)) = F(t) + C.$$

代入$t = t(x)$, 利用恒等式 $x(t(x)) \equiv x$, 于是就有

$$G(x(t(x))) = G(x) = F(t(x)) + C$$

所以,

$$\frac{\mathrm{d}F(t(x))}{\mathrm{d}x} = G'(x) = f(x)$$

$\square$

例子Exemple 6.10.

计算$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

解: 令 $x = \sec t$, 则 $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \ \mathrm{d}t$,

$$I = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t \tan t} \ \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C.$$

例子Exemple 6.11.

计算$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

解: 令 $\sqrt{x^2-1} = x - t$, 则可解出 $x = \frac{t^2+1}{2t}$, 并计算得到

$$\mathrm{d}x = \frac{t^2-1}{2t^2}\mathrm{d}t, \sqrt{x^2-1} = \frac{1-t^2}{2t}$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t \cdot 2t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)\left(1-t^2\right)2t^2} dt = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= -2\arctan t + C = -2\arctan\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + C \end{aligned}$$

♠ **不管用了什么方法求出了不定积分，一定要养成求导数验算的习惯。**

6.3 计算特训

计算下列不定积分

1. $\int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x$;

2. $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$；

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$，其中$a \neq 0$;

4. $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$，其中$a > 0$；

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}$；

7. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

8. $\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$

这里可以参考同济大学的《高等数学》中第四章中的大量习题。