

# 高等数学(I)讲义

巴黎居里工程师学院 姜恺<sup>1</sup>

November 25, 2023

<sup>1</sup>Email: kai.jiang@mail.buct.edu.cn

# Contents

<b>3 极限 Limite</b>	<b>2</b>
3.1 极限的定义 . . . . .	2
3.1.1 自变量趋于有限值时函数的极限 . . . . .	2
3.1.2 极限不存在时的数学表达 . . . . .	5
3.2 极限的性质 . . . . .	7
3.2.1 局部性质 . . . . .	7
3.2.2 与四则运算的关系 . . . . .	7
3.2.3 与函数复合的关系 . . . . .	9
3.2.4 与序的关系 . . . . .	11
3.3 极限的计算 . . . . .	13
3.3.1 求极限 . . . . .	13
3.3.2 求极限的典型方法 . . . . .	13
3.3.3 需要记住的经典极限 . . . . .	14
3.3.4 练习题集训 . . . . .	17

# Chapter 3

## 极限 Limite

极限是现代数学特别是分析学中的基础概念之一。极限可以用来描述一个序列的指标愈来愈大时，数列中元素的性质变化的趋势，也可以描述函数的自变量接近某一个值的时候，相对应的函数值变化的趋势。作为微积分和数学分析的其他分支最基本的概念之一，连续和导数的概念都是通过极限来定义的。

高等数学比初等数学，主要是多了一个“运算”，叫做极限。大家刚开始学的时候，可以把极限看成是继加减乘除之后的第五种运算，运算的对象是一个函数，并且需要指定定义域中的一个点，在有意义的情况下(做除法时除数是零也没有意义！)，得到的结果一定是一个数。

### 3.1 极限的定义

#### 3.1.1 自变量趋于有限值时函数的极限

定义Définition 3.1: 趋向于某点时函数的极限，左、右极限

f:LimitFunction  
设 $I$ 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的某个区间，假设函数 $f(x)$ 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。如果存在常数 $A$ ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋向于 $x_0$ （用符号记作 $x \rightarrow x_0$ ）的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

假设函数 $f(x)$ 在开区间 $]a, x_0[$ 上有定义，如果存在常数 $A$ ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限，记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

假设函数 $f(x)$ 在开区间 $]x_0, b[$ 上有定义，如果存在常数 $A$ ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限，记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A$ 。

ityOfIdentity

**例子Exemple 3.2.** 函数 $f(x) = x$ 当 $x$ 趋近于 $x_0$ 时，极限值是 $x_0$ 。

任取 $\varepsilon > 0$ 。取 $\delta = \varepsilon$ ，那么当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ 。所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$ 。

ntialFunction

**命题Proposition 3.3.** 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ 。

**证明Démonstration:** 任给 $\varepsilon > 0$ 。根据指数函数的性质??，得到（对于 $\frac{1}{e^{x_0}}\varepsilon > 0$ ）存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， $|e^{x-x_0} - 1| < e^{-x_0}\varepsilon$ 。继续通过性质??可知，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

$$|e^x - e^{x_0}| = |e^{x_0}| \cdot |e^{x-x_0} - 1| = e^{x_0} |e^{x-x_0} - 1| < \frac{e^{x_0}}{e^{x_0}} \varepsilon < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ 。

□

thmicFunction

**命题Proposition 3.4.** 对任意正实数 $x_0$ ，都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ 。

**证明Démonstration:** 任给 $\varepsilon > 0$ 。我们取 $\delta = \min\{(e^\varepsilon - 1)x_0, (1 - e^{-\varepsilon})x_0\} > 0$ 。那么当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $(e^{-\varepsilon} - 1)x_0 < x - x_0 < (e^\varepsilon - 1)x_0$ ，所以 $e^{-\varepsilon}x_0 < x < e^\varepsilon x_0$ ，进而 $e^{-\varepsilon} < \frac{x}{x_0} = e^{\ln \frac{x}{x_0}} < e^\varepsilon$ 。根据单调性可得， $-\varepsilon < \ln \frac{x}{x_0} = \ln x - \ln x_0 < \varepsilon$ 。我们用定义直接证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ 。

□

**注释Remarque 3.5.** 设 $I$ 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的某个区间，假设函数 $f(x)$ 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。如果存在常数 $A$ ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $0 < f(x) - A < \varepsilon$ ，根据极限定义有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。为了说明 $f(x)$ 始终大于 $A$ ，可以记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A^+$ 或 $f(x) \rightarrow A^+$ 。同样符号 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A^-$ 或 $f(x) \rightarrow A^-$ 代表始终有 $-A < f(x) - A < 0$ 。注意，如同左右极限，引入记号 $A^-, A^+$ ，只是为了说明当 $x$ 趋向于 $x_0$ 函数值分别从左边和右边靠近 $A$ ，它们的极限仍然是 $A$ 。

直观地说，函数 $f(x)$ 在 $x$ 趋向于 $x_0$ 时极限存在，就是说函数定义域中的元素 $x$ 越靠近 $x_0$ ，其函数值 $f(x)$ 越靠近某个常数 $A$ ，这个常数 $A$ 就是极限值。所谓的“靠近”，是使用绝对值（距离）来刻画的。这并不是说一个距离 $x_0$ 更近的元素 $x_1$ 的函数值 $f(x_1)$ ，一定比“距离 $x_0$ 稍微远一点点的元素 $x_2$ 的函数值 $f(x_2)$ 更靠近 $A$ ，参见下面的例子。

**例子Exemple 3.6.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{如果 } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**命题Proposition 3.7.** 如果一个函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时的极限存在，那么这个极限是唯一的。也就是说，如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_1$ 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_2$ ，那么 $A_1 = A_2$ 。

**证明 Démonstration:** (反证法) 假设  $A_1 \neq A_2$ , 不妨进一步假设  $A_1 < A_2$ 。我们取  $\varepsilon = \frac{A_2 - A_1}{2} > 0$ 。那么由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_1$ , 所以存在  $\delta_1$  使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时,  $|f(x) - A_1| < \varepsilon = \frac{A_2 - A_1}{2}$ , 得到  $f(x) < \frac{A_1 + A_2}{2}$ 。由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A_2$ , 所以存在  $\delta_2$  使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时,  $|f(x) - A_2| < \varepsilon = \frac{A_2 - A_1}{2}$ , 得到  $f(x) > \frac{A_1 + A_2}{2}$ 。那么当  $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$  时, 同时有  $\frac{A_1 + A_2}{2} < f(x) < \frac{A_1 + A_2}{2}$ , 产生矛盾。所以假设不成立, 也就是必须有  $A_1 = A_2$ 。  $\square$

极限的唯一性, 从某种意义上说明“极限”这个运算是良定的。

“考察关于实数的一元二次方程  $x^2 + 3x + 2 = 0$ 。如果存在一个实数  $x_0 = -1$  使得  $x_0^2 + 3x_0 + 2 = 0$ , 那么称  $x_0$  是该方程的一个解。”

### 练习 Exercice 3.8

通过  $\varepsilon - \delta$  语言证明如下等式:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

## 自变量趋于无穷大时函数的极限

### 定义 Définition 3.9: 自变量趋于正、负无穷时函数的极限

设函数  $f(x)$  当  $x$  大于某一正数时有定义。如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 必存在  $X > 0$ , 使得当  $x > X$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  或  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} A$ 。

设函数  $f(x)$  当  $x$  小于某一正数时有定义。如果存在常数  $A$ , 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 必存在  $X < 0$ , 使得当  $x < X$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称常数  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow -\infty$  时的极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$  或  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} A$ 。

### 练习 Exercice 3.10

如果一个函数  $f(x)$  当  $x$  趋于  $+\infty$  时的极限存在, 那么这个极限是唯一的。也就是说, 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A_1$  并且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A_2$ , 那么  $A_1 = A_2$ 。

## 序列的极限

当“自变量趋于无穷大时函数的极限”中函数的定义域为自然数集合 $\mathbb{N}$ 时，稍加改动就可以得到（实数）序列极限的概念。

### 定义Définition 3.11: 序列的极限

设 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是一个实数序列。如果存在常数 $A$ ，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在 $N \in \mathbb{N}$ ，使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n - A| < \varepsilon$ ，则称常数 $A$ 为实数序列 $(a_n)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限，记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 或 $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ 。

序列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛到 $A$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ 实际上是一回事。根据柯西收敛准则??，序列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时极限存在的充要条件是 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是柯西序列。

### 3.1.2 极限不存在时的数学表达

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在，或者 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ ，当且仅当，存在一个实数 $\varepsilon_0 > 0$ ，对任意 $\delta > 0$ ，存在 $x$ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 但 $|f(x) - A| > \varepsilon_0$ 。

#### 例子Exemple 3.12. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{如果 } x \neq 0, \\ 1 & \text{如果 } x = 0. \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 的极限一定不是0(可能是不存在)：取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ，任取 $\delta > 0$ ，我们总能找到某个 $x_N = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2N\pi}$ 满足 $x_N < \delta$ ，但 $f(x_N) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2N\pi) = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$ 。

**注释Remarque 3.13.** 对于自变量趋于有限值时函数的极限、自变量趋于无穷大时函数的极限、序列的极限：如果对于任意给定的实数 $A > 0$ ，必存在 $\delta > 0$ （存在 $X > 0$ ；存在正整数 $N$ ），使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时（当 $x > X$ 时，当 $n > N$ 时），有 $f(x) > A$ 。由于 $\pm\infty$ 不是实数，所以根据定义，上述情况是极限不存在，但是为了方便，可以说当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时（当 $x$ 趋向于 $+\infty$ 时，当 $n$ 趋向于 $\infty$ 时），函数（序列）趋向于 $+\infty$ ，并沿用极限的符号。

结合“广义实数系”中的内容， $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty$ ，指的是序列 $(n)$ 和 $(n + 1)$ 都趋向于 $+\infty$ ，不能由此得出 $+\infty = +\infty - 1$ 。

### 练习 Exercice 3.14

用数学语言描述定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时极限不存在。如果 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时极限不存在，那么 $f(x)$ 一定无界吗？如果一定无界，请给出证明，如果不一定无界，请举出反例并证明。

### 定理 Théorème 3.15: 海涅 (Heine) 归结原理：用序列刻画极限

设 $I$ 是包含 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的某个区间，假设函数 $f(x)$ 在集合 $I \setminus \{x_0\}$ 上有定义。 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 当且仅当对每个收敛到 $x_0$ 且满足 $t_n \in I \setminus \{x_0\}$ 的序列 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，序列 $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛到 $A$ 。

**证明 Démonstration:** “必要性  $\Rightarrow$ ”：

假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，那么任给  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得只要  $x$  满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，总有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

对任何一个收敛到  $x_0$  且满足  $t_n \in I \setminus \{x_0\}$  的序列  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，对于上面的  $\delta > 0$ ，存在正整数  $N$  使得当  $n > N$  时， $0 < |t_n - x_0| < \delta$ 。

于是得到当  $n > N$  时  $|f(t_n) - A| < \varepsilon$ 。

“充分性  $\Leftarrow$ ”：(反证法)

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在，或者  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A$ ，那么存在一个实数  $\varepsilon_0 > 0$ ，对每个  $\delta_n := \frac{1}{n} > 0$ ，存在  $t_n$  满足  $0 < |t_n - x_0| < \delta_n$  但  $|f(t_n) - A| > \varepsilon_0$ 。

那么可以直接验证序列  $(t_n)$  收敛到  $x_0$  (任给  $\varepsilon > 0$ ，存在正整数  $N$  满足  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ ，当  $n > N$  时  $|t_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ )，但是序列  $(f(t_n))$  不收敛到  $A$ 。

这与题设矛盾。于是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。  $\square$

**注释 Remarque 3.16.** 因为不可能验证“每个序列”都满足收敛性质，所以这个定理一般只用来判定极限不存在。

在例子 3.12 中， $f(x)$  当  $x \rightarrow 0$  的极限实际上是不存在的。我们可以找到一个收敛到 0 的序列  $(t_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi})_{n \in \mathbb{N}}$  和另一个收敛到 0 的序列  $(s_n = \frac{1}{2N\pi})_{n \in \mathbb{N}}$ ，但是  $f(t_n) \equiv 1$ ,  $f(s_n) \equiv 0$ 。根据上面定理，假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在，设它是  $A$ ，得到  $1 = A = 0$ ，矛盾。

### 练习 Exercice 3.17

仿照定理 3.15 给出实数序列极限存在的充要条件，并给出证明。

### 练习 Exercice 3.18: 用序列语言描述极限不存在的等价条件

设  $I$  是包含  $x_0 \in \mathbb{R}$  的某个区间，假设函数  $f(x)$  在集合  $I \setminus \{x_0\}$  上有定义。证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在 当且仅当 存在一个每一项都在  $I \setminus \{x_0\}$  中且收敛到  $x_0$  的序列  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ，使得极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$  不存在。

## 3.2 极限的性质

### 3.2.1 局部性质

极限存在函数在一点  $x_0$  周围的局部性质。

**命题 Proposition 3.19.** 如果当  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限存在，那么  $f(x)$  在局部有界。换句话说，存在正实数  $M$ ，存在包含  $x_0$  的区间  $I$ ，使得  $f(x)$  在  $I \setminus \{x_0\}$  上满足  $|f(x)| < M$ 。如果更进一步函数  $f(x)$  在  $x_0$  点还有定义，那么  $f(x)$  在  $I$  上有界。

**证明 Démonstration:** 根据条件，设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。那么对于  $\varepsilon = 1$ ，存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时， $|f(x) - A| < 1$ ，也就是  $A - 1 < f(x) < A + 1$ 。这时取  $I$  为开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ， $M = |A| + 1$  即可。如果  $f(x)$  在  $x_0$  点有定义，那么重新取  $M = \max\{|A| + 1, f(x_0)\}$  即可。□

**命题 Proposition 3.20.** 如果当  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限存在不为零，那么  $f(x)$  在局部保号。换句话说，假设极限值为正（负），存在包含  $x_0$  的区间  $I$ ，使得  $f(x)$  在  $I \setminus \{x_0\}$  上  $f(x)$  为正（负）。

**证明 Démonstration:** 根据条件，不妨假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ 。那么对于  $\varepsilon = \frac{A}{2}$ ，存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时， $|f(x) - A| < \frac{A}{2}$ ，也就是  $\frac{A}{2} = -\frac{A}{2} + A < f(x) < A + \frac{A}{2} = \frac{3A}{2}$ 。这时取  $I$  为开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，则在  $I \setminus \{x_0\}$  上有  $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ 。□

### 练习 Exercice 3.21

设  $f(x)$  是从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}$  的函数。下面的命题是否为真？如果为真请证明，如果为假请给出反例。

对于任何  $x_0 \in \mathbb{R}$ ，当  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  的极限都存在，则  $f(x)$  有界。

### 3.2.2 与四则运算的关系

求极限可以看作一种运算，这个运算对函数的加减乘除有“分配律”。

**命题 Proposition 3.22.** 设  $f(x)$  和  $g(x)$  是两个函数， $\lambda$  是一个实数， $x_0$  是  $f(x)$  和  $g(x)$  定义域中的点。假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 那么

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \lambda g(x)) = A + \lambda B$  (我们说极限满足 **线性性质**);
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = AB$ ;
- 如果  $B \neq 0$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ .

### 证明 Démonstration:

- 如果  $\lambda = 0$ , 根据条件命题自然成立。现在假设  $\lambda \neq 0$ 。任给  $\varepsilon > 0$ 。由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 所以对  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 存在  $\delta_1 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时, 有  $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; 由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 所以对  $\frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时, 有  $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$ , 从而  $|\lambda g(x) - \lambda B| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。于是取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $|(f(x) + \lambda g(x)) - (A + \lambda B)| = |(f(x) - A) + (\lambda g(x) - \lambda B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 。
- 任给  $\varepsilon > 0$ , 不妨  $\varepsilon < 1$ 。由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 所以对  $\frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$ , 存在  $\delta_1 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时, 有  $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$ ; 由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 所以对  $\frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时, 有  $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}$ 。取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, (利用加一项减一项) 可以得到

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - AB| &= |(f(x) \cdot g(x) - f(x)B) + (f(x)B - AB)| \\ &= |f(x)(g(x) - B) + (f(x) - A)B| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |f(x) - A| \cdot |B| \\ &\leq (|A| + \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}) \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1} + \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1} |B| \\ &= \varepsilon \frac{|A| + |B| + \frac{\varepsilon}{|A|+|B|+1}}{|A| + |B| + 1} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

- 由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$ , 不妨假设  $B > 0$ 。对于  $\frac{B}{2}$ , 存在  $\delta_1 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时,  $|g(x) - B| < \frac{B}{2}$ , 也就是  $\frac{B}{2} < g(x) < \frac{3B}{2}$ , 更进一步  $\frac{2}{3B^2} < \frac{1}{g(x)B} < \frac{2}{B^2}$ 。现在任给  $\varepsilon > 0$ , 对于  $\frac{B^2}{2}\varepsilon$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时,  $|g(x) - B| < \frac{B^2}{2}\varepsilon$ 。取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x)B|} < \frac{B^2}{2}\varepsilon \cdot \frac{2}{B^2} = \varepsilon.$$

于是我们证明了  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ 。根据上条关于乘法的性质，我们有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x) \frac{1}{g(x)} \right) = A \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

□

**注释 Remarque 3.23.** 我们证明极限关于除法“分配律”时，没有直接去验证，而是把问题简化为上面已经证明了的关于乘法的“分配律”问题。这种**化未知为已知**的思想，是解决数学问题时，最常见最有效的指导方法。

### 练习 Exercice 3.24

写出实数序列极限关于加减乘除法的“分配律”性质。

### 3.2.3 与函数复合的关系

#### 定理 Théorème 3.25: 复合函数的极限

设  $I$  是包含  $x_0$  的一个区间， $f(x)$  在  $I \setminus \{x_0\}$  上有定义。假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，并且在  $I \setminus \{x_0\}$  上有  $f(x) \neq A$ ，并且  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ ，那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

**证明 Démonstration:** 任给  $\varepsilon > 0$ 。由于  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ ，所以存在  $\delta > 0$ ，使得当  $0 < |x - A| < \delta$  时，有  $|g(x) - B| < \varepsilon$ 。又由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，所以对于上述  $\delta > 0$  存在  $\gamma > 0$ ，使得  $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma) \subset I$  并且当  $0 < |x - x_0| < \gamma$  时，有  $|f(x) - A| < \delta$ ；在  $I \setminus \{x_0\}$  上  $f(x) \neq A$  可进一步得到  $0 < |f(x) - A| < \delta$ 。所以，当  $0 < |x - x_0| < \gamma$  时，有  $|g \circ f(x) - B| < \varepsilon$ ，从而  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。 □

**思考题 Problème 3.26.** 下面关于复合函数极限的命题是否为真？如果为真请证明，如果为假请举出反例。

- 假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  并且  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ ，那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。
- 设  $I$  是包含  $x_0$  的一个区间。假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  并且  $f(x)$  在  $I \setminus \{x_0\}$  上满足  $f(x) \neq A$ ，那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow A} g(x)$ 。

### 定理 Théorème 3.27: 变量替换

设  $I$  是包含  $x_0$  的一个区间， $J$  是包含  $y_0$  的一个区间。假设函数  $y = f(x)$  是从  $I \setminus \{x_0\}$  到  $J \setminus \{y_0\}$  的双射，并且有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ，其反函数  $f^{-1}$  有  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ 。那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x)$  与  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$  要么同时不存在，要么同时存在且相等。

**证明 Démonstration:** 假设  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = B$ 。

如果  $f(x)$  在  $I \setminus \{x_0\}$  上都满足  $f(x) \neq y_0$ ，那么加上条件  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ，直接根据复合函数极限的定理 3.25，可以得到  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

如果存在某个  $x_1 \in I \setminus \{x_0\}$  满足  $f(x_1) = y_0$ ，那么由于  $f(x)$  是双射，所以存在  $\delta > 0$ ，使得  $x_1 \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\} \subset I$ ，于是  $f(x)$  在  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$  上满足  $f(x) \neq y_0$ ，此时又可以使用复合函数极限的定理 3.25 得到  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

假设  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = B$ 。

如果  $f^{-1}(y)$  在  $J \setminus \{y_0\}$  上都满足  $f^{-1}(y) \neq x_0$ ，那么加上条件  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ ，直接根据复合函数极限的定理 3.25，可以得到  $\lim_{y \rightarrow y_0} g \circ f(f^{-1}(y)) = B$ ，也就是  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = B$ 。

如果存在某个  $y_1 \in J \setminus \{y_0\}$  满足  $f^{-1}(y_1) = x_0$ ，那么由于  $f^{-1}(y)$  是双射，所以存在  $\delta > 0$ ，使得  $y_1 \notin [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \setminus \{y_0\} \subset J$ ，于是  $f^{-1}(y)$  在  $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \setminus \{y_0\}$  上满足  $f^{-1}(y) \neq x_0$ ，此时又可以使用复合函数极限的定理 3.25 得到  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} g \circ f(f^{-1}(y)) = B$ 。□

**例子 Exemple 3.28.**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ 。

考虑变量替换  $y = f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ ，函数  $f$  显然时双射，并且容易得到  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$  以及  $\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}$ 。令  $g(x) = \sin x$ ，则  $g \circ f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ ，那么

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

### 练习 Exercice 3.29

下面的命题是真是假？如果为真请证明，如果为假请举出反例。

- 设  $f$  是从  $\mathbb{R}$  中的一个包含  $x_0$  的开区间到一个包含  $y_0$  的开区间的双射。如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ，那么  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ ；

- 设 $f$ 是从 $\mathbb{R}$ 中的一个包含 $x_0$ 的开区间到一个包含 $y_0$ 的开区间的严格单调函数。如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , 那么 $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$ 。

**思考题Problème 3.30.** 把上述定理3.27中的“双射”条件改为“单射”或者满射。此时, 定理还成立吗? 若成立给出证明, 若不成立给出反例。

**例子Exemple 3.31.**

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{如果 } x \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+ \\ \frac{1}{n} & \text{如果 } x = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{如果 } x = \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \neq \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{如果 } x = \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 不存在, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x) = 1$ 。

**例子Exemple 3.32.**

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{如果 } x \neq 0 \\ 1 & \text{如果 } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , 但是 $\lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x)$ 不存在。

### 练习Exercice 3.33

定理3.27可以扩展到 $x_0 = \pm\infty$ 或(且) $y_0 = \pm\infty$ 的情形, 以及序列极限的情形。请写出相应的版本。

### 3.2.4 与序的关系

#### 定理Théorème 3.34: 极限存在则一定保序

设 $I$ 为包含某点 $x_0$ 的区间,  $f, g$ 为定义在 $I \setminus \{x_0\}$ 上的函数。如果对于所有属于 $I$ 而不等于 $x_0$ 的 $x$ 满足 $f(x) < g(x)$ 或 $f(x) \leq g(x)$ , 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**证明Démonstration:** (用反证法) 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 。那么根据极限与四则运算的关系, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0.$$

再根据局部保号性质3.20, 得知存在 $\delta > 0$ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) - g(x) > 0$ 。这与题设矛盾。  $\square$

### 定理 Théorème 3.35: 夹逼定理 Théorème des gendarmes

设 $I$ 为包含某点 $x_0$ 的区间,  $f, g, h$ 为定义在 $I \setminus \{x_0\}$ 上的函数。如果对于所有属于 $I$ 而不等于 $x_0$ 的 $x$ 满足:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x); \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L;$$

那么,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 。

对于 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 以及 $n \rightarrow \infty$ 的情形, 结论依然成立。

**证明 Démonstration:** 任给 $\varepsilon > 0$ 。由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ , 所以存在 $\delta_1 > 0$ 使得当 $0 < |x_0| < \delta_1$ 时,  $|g(x) - L| < \varepsilon$ , 进而得到 $L - \varepsilon < g(x)$ ; 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ , 所以存在 $\delta_2 > 0$ 使得当 $0 < |x_0| < \delta_2$ 时,  $|h(x) - L| < \varepsilon$ , 进而得到 $h(x) < L + \varepsilon$ 。根据已知条件, 在 $I \setminus \{x_0\}$ 上有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 那么当 $0 < |x_0| < \delta$ 时, 得到 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ , 也就是 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。  $\square$

**例子 Exemple 3.36.** 设函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , 它在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上有定义。当 $x$ 趋向于0时函数的极限存在, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 。

实际上, 由于正弦函数有界, 所以在 $x \neq 0$ 时有 $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ , 进而 $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ 。取 $g(x) = -|x|$ ,  $h(x) = |x|$ 得到 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 。我们已经指导 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ , 由夹逼定理得到 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 。

**思考题 Problème 3.37.** 下面关于实数序列极限的命题是否为真? 如果为真请证明, 如果为假请举出反例。

- 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$ , 则 $n$ 充分大时总有 $x_n > 0$ 。
- 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。如果 $n$ 充分大时总有 $x_n > 0$ , 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$ 。

## 3.3 极限的计算

### 3.3.1 求极限

#### 一些简单的极限

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ ;

#### 练习 Exercice 3.38

验证上面的简单极限。

### 3.3.2 求极限的典型方法

#### 用定义求解

先猜测，后验证。

例子 Exemple 3.39. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$  存在，极限值为 1。

当  $0 < |x| < 1$  时，利用三角函数恒等式（二倍角公式）和不等式  $|\sin x| < |x|$ ，计算可得

$$|\cos x - 1| = |\cos(2 \cdot \frac{x}{2}) - 1| = |(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) - 1| = 2|\sin^2 \frac{x}{2}| < \frac{x^2}{2}$$

于是，任给  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$  满足  $\frac{\delta^2}{2} < \varepsilon$ ，比如取  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ，当  $0 < |x| < \delta$  时， $|\cos x - 1| < \frac{x^2}{2} < \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon$ 。所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 。

命题 Proposition 3.40. 假设  $I$  为包含某点  $x_0$  的区间， $f$  在  $I \setminus \{x_0\}$  上有定义，并且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = e^A$ 。

我们把函数  $f$  取成  $f(x) = x$ ，那么这个命题可以看作是命题 3.3 的推广（所以只需要记住后面的就可以了）。需要注意的是不可以直接用定理 3.25，请对比所给条件的不同之处。

证明 Démonstration: 任给  $\varepsilon > 0$ 。根据上面定理 3.3，存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < |x - A| < \delta$  时， $|e^x - e^A| < \varepsilon$ 。又因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ，所以存在  $\gamma > 0$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \gamma$  时，总有  $|f(x) - A| < \delta$ 。对于满足  $0 < |x - x_0| < \gamma$  的点  $x$ ，如果  $0 < |f(x) - A| < \delta$ ，则有  $|e^{f(x)} - e^A| < \varepsilon$ ；如果  $0 = |f(x) - A| < \delta$ ，那么自然有  $|e^{f(x)} - e^A| = |e^A - e^A| = 0 < \varepsilon$ 。总之，只要  $x$  满足  $0 < |x - x_0| < \gamma$ ，总有  $|e^{f(x)} - e^A| < \varepsilon$ 。所以  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} = e^A$ 。□

### 用四则运算求解

化未知为已知

**例子Exemple 3.41.** 设  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  是  $\mathbb{R}$  上的多项式函数。那么  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ 。这是因为，我们已经对  $f(x) = x$  证明了  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$ ，那么对函数  $a_k x^k$  使用极限对乘法的“分配律”得到  $\lim_{x \rightarrow x_0} a_k x^k = a_k x_0^k$ ，再使用极限对加法的“分配律”得到  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ 。

**例子Exemple 3.42.** 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n+3} = e^2$ 。实际上，由于  $(1 + \frac{1}{n})^{2n+3} = (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})^3$  并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^3 = 1$ ，所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{2n+3} = e^2$ 。

### 用变量替换

选取合适的变量替换

**例子Exemple 3.43.** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ 。

解：令  $x = \sin t$ ，函数  $x(t) = \sin t$  在 0 点附近是双射，并且  $\sin t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ ，其反函数满足  $\arctan x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ 。所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

**注释Remarque 3.44.** 如果已经知道  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$  存在，那么根据定理 3.25，只需要验证  $\sin t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  且  $t \neq 0$  时  $\sin t \neq 0$  即可。

### 用夹逼定理

参见例 3.36、3.45 和例 3.46。

用后续的洛必达法则，阶的估计，泰勒展开等

没有显示表达式的函数

先证明极限存在，利用极限是一个实数，解方程。

### 3.3.3 需要记住的经典极限

- 对任意正整数  $n$ ，有  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ；

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$  ;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .

**命题 Proposition 3.45.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**证明 Démonstration:** 当  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  时，我们有不等式  $0 < \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 。从而得到  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ 。由于  $\cos x$  和  $\frac{\sin x}{x}$  在各自定义域内都是偶函数，所以，当  $-\frac{\pi}{4} < x < 0$  时，仍有  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ 。我们知道  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  并且  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ，故根据夹逼定理 3.35 得到， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。□

**命题 Proposition 3.46.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

**证明 Démonstration:** 我们用  $[x]$  表示正实数  $x$  的整数部分，即  $[x] = \sup\{a \in \mathbb{N} | a < x\}$ 。由不等式  $[x] \leq x < [x] + 1$ 、幂函数的单调性和指数函数的单调性，得到两个不等式

$$(1 + \frac{1}{x})^x \leq (1 + \frac{1}{[x]})^x < (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

$$(1 + \frac{1}{x})^x > (1 + \frac{1}{[x]+1})^x \geq (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]}.$$

我们定义函数  $g(x) = (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]}$ ,  $h(x) = (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1}$ , 有  $g(x) < f(x) < h(x)$ 。

下面证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = e$ 。

任给  $\varepsilon > 0$ 。我们知道序列  $((1 + \frac{1}{n})^n)$  单调递增收敛到  $e$ ，所以存在正整数  $N$  使得  $n > N$  时  $0 < e - (1 + \frac{1}{n})^n < \varepsilon$ 。所以当  $x > N + 1$  时， $[x] \geq N + 1$ ，此时  $\tilde{g}(x) = (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} \geq (1 + \frac{1}{N+1})^{N+1} > e - \varepsilon$ ，可得  $0 < e - g(x) < \varepsilon$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = e$ 。发现  $g(x) = \tilde{g}(x) \frac{1}{1 + \frac{1}{[x]+1}}$  并且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{[x]+1}} = 1$ ，由极限对乘法的“分配律”得到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e \times 1 = e$ 。

任给  $\varepsilon > 0$ 。我们知道序列  $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$  单调递减收敛到  $e$ ，所以存在正整数  $N$  使得  $n > N$  时  $0 < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} - e < \varepsilon$ 。所以当  $x > N + 1$  时， $[x] \geq N + 1$ ，此时  $h(x) = (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1} \leq (1 + \frac{1}{N+1})^{N+2} < e + \varepsilon$ ，可得  $0 < h(x) - e < \varepsilon$ ，所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = e$ 。

综上，由夹逼定理，得到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$ 。□

**练习 Exercice 3.47**

利用变量替换证明

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

命题 Proposition 3.48.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

证明 Démonstration: 令  $x = \ln(t+1)$  且  $t \rightarrow 0$  时  $x \rightarrow 0$ , 其反函数为  $t = e^x - 1$  且  $x \rightarrow 0$  时  $t \rightarrow 0$ 。所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} && \text{变量替换} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(t+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}. && \text{对数函数的性质??} \end{aligned}$$

由于  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$  以及  $\lim_{x \rightarrow e} \ln x = \ln e = 1$ , 并且 0 点附近  $(1+t)^{\frac{1}{t}} \neq e$  (为什么?)。

所以, 根据复合函数的极限定理 3.25, 得到  $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1$ , 进而  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = 1$ 。□

### 练习 Exercice 3.49

批改下列证法:

1. 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+x)^{\frac{1}{x}})^x - 1}{x} = 1$ .

2. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = A$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+Ax)$ , 于是  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+Ax)^{\frac{1}{x}}$ 。所以  $A$  只能取为 1。

命题 Proposition 3.50.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

证明 Démonstration: 我们用  $[x]$  表示正实数  $x$  的整数部分, 即  $[x] = \sup\{a \in \mathbb{N} | a \leq x\}$ 。我们讨论的是  $x \rightarrow +\infty$  的情况, 所以不妨假定本证明中  $x > 2021$ 。根据指数函数的单调性, 从不等式  $[x] \leq x < [x] + 1$  得到  $\frac{x}{e^x} < \frac{[x]}{e^{[x]+1}}$ ; 由于正实数的整数

次方保持序关系，从不等式  $e > 2$  得到  $\frac{[x]}{e^{[x]+1}} < \frac{[x]}{2^{[x]+1}}$ 。又因为  $2^{[x]+1} > \frac{[x]([x]+1)}{2}$ ，所以  $\frac{[x]}{2^{[x]+1}} < \frac{2}{[x]+1}$ 。根据定义容易得到  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{[x]+1} = 0$ 。

最后，对不等式  $0 < \frac{x}{e^x} < \frac{2}{[x]+1}$  使用夹逼定理 3.35 可得，

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

我们使用变量替换  $x = e^t$ 。验证函数  $f(t) = e^t$  是双射， $f^{-1}(x) = \ln x$ ，并且  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ ，所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0.$$

□

### 练习 Exercice 3.51

证明：对任意  $b > 1, a > 0$ ，都有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b \ln x}{x^a} = 0.$$

### 练习 Exercice 3.52

证明： $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$

### 命题 Proposition 3.53.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

**证明 Démonstration:** 由于  $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ ，并且前面例子 3.50 已经算出  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 。根据命题 3.40，我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1.$$

□

### 3.3.4 练习题集训

#### 练习 Exercice 3.54

判断下列极限是否存在，如果存在，求解该极限（要求写出过程）；若不存在，说明理由。

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x}$$

### 练习 Exercice 3.55

判断下列极限是否存在，如果存在，求解该极限(要求写出过程)；若不存在，说明理由。

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{3x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} \quad (x_0 > 0)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{8x}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \frac{x}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^{50}(x+2)^{50}}{(x^2 - x + 3)^{100}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{2x}$$

### 等价无穷小(大)

在函数集合中，可以定义  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  当且仅当  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ，容易验证这是一个等价关系。更进一步，如果  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ，那么说函数  $f$  与  $g$  当  $x$  趋近于  $a$  时为等价无穷小；如果  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ，那么说函数  $f$  与  $g$  当  $x$  趋近于  $a$  时为等价无穷大。

### 注释 Remarque 3.56.

- 在定义  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  时， $a$  可以取  $\pm\infty$ ，而且没有要求  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  存在。
- 假设  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ，等式  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$  不一定成立，例如  $\sqrt{x^2 + x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ ，但是如果  $g(x)$  有界，那么上述等式成立。
- 仅有  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$  成立，一般无法得到  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ，例如  $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ，但是  $x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$  显然不正确。

### 例子 Exemple 3.57.

$$x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1 + x)$$

### 定理 Théorème 3.58: 乘除形式极限的等价替换

假设  $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ ,  $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$ , 如果  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = A$ 。

**证明 Démonstration:** 由题可知,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1$ , 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A\end{aligned}$$

□

注意 ♠: “等价替换”只能用于乘除,

- 一般情况下不能用于加减, 比如计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$  不能直接用  $x$  替换  $e^x - 1$ ;
- 一般情况下不能用于复合函数, 比如计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{\cos x}{x^2}}}$  不能用  $\frac{1}{x^2}$  替换  $\frac{\cos x}{x^2}$ 。

### 练习 Exercice 3.59

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\arctan 3x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^{x^2} - 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) + \tan(\sin x)}{\sin(\sin x) + \tan(\tan x)}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan x) + \tan(\arcsin x)}{\arcsin(\sin x) + \arctan(\tan x)}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\tan \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{\cos x}{x^2}}}$$

## 递归形式的序列极限

已知  $a_{n+1} = f(a_n)$  以及  $a_0$  的值，这里  $f$  通常是（后面学到的）连续函数。求  $a_n$  的极限，一般使用如下的步骤：

第一步，证明极限存在：(i) (归纳法) 证明有界 (ii) 序列单调；

第二步，设序列的极限值为  $A$ 。递推关系等号两边同取极限，通过复合函数求极限的定理，得到一个关于  $A$  的方程，通常就是  $A = f(A)$ ；

第三步，求解方程  $A = f(A)$ ，根据  $A$  的范围，舍去不适合的解

### 练习 Exercice 3.60

1. 已知  $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ ，并且对任意自然数  $n$  有  $u_{n+1} = \sin u_n$ 。求  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 。

2. 已知  $x_0 = 1$  并且对任意自然数  $n$  有  $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ 。求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

3. 已知  $x_0 > 1$  并且对任意自然数  $n$  有  $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ 。求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

注意♣：跳过第一步，不首先证明极限的存在性，是不正确的：例如设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\pi = a$ ，通过子列得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n\pi = a$ ，通过二倍角公式得到方程  $a = 2a^2 - 1$ ，得出  $a = 1$  或  $a = -\frac{1}{2}$ 。事实上， $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n\pi$  不存在。