

高等数学(I)讲义

巴黎居里工程师学院 姜恺¹

February 23, 2024

¹Email: kai.jiang@mail.buct.edu.cn

Contents

7 L'intégration sur un segment 闭区间上的(黎曼)积分	2
7.0.1 Subdivision régulière	5
7.0.2 Unicité et Linéarité	7
7.1 Intégrabilité	10
7.2 Propriété des fonctions Riemann-intégrables.	14
7.3 Calculer l'intégral	20
7.3.1 Théorème fondamental du calcul intégral	20

Chapter 7

L'intégration sur un segment 闭区间 上的(黎曼)积分

Comment déterminer l'aire d'une figure plane? Cette question s'est posée, dès l'Antiquité, aux mathématiciens grecs. La figure la plus simple est le rectangle dont l'aire est le produit de la longueur par la largeur, puis le triangle rectangle, qui n'est que la moitié d'un rectangle; l'aire d'un triangle quelconque se calcule alors en le partageant, à l'aide d'une hauteur, en deux triangles rectangles. Nous arrivons ainsi, comme les Grecs, à calculer l'aire d'un polygone quelconque; il suffit de le décomposer en triangles, puis de faire la somme des aires de ces triangles.

Mais que faire si le contour de la figure est une courbe non rectiligne, par exemple un cercle? C'est Archimède qui répond partiellement à la question, en donnant une approximation de cette aire par le moyen d'un encadrement de celle-ci entre celles des polygones inscrits et circonscrits au cercle. En appliquant la même méthode, il calcule aussi l'aire sous l'arc d'une parabole, puis l'aire et le volume de la sphère.

Définitions et propriétés élémentaires

定义Définition 7.1: subdivision, pas

- Une subdivision (划分) σ d'un segment (线段) $[a, b]$ est une famille de points (x_0, \dots, x_n) croissante vérifiant $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit, elle est un ensemble fini $\sigma = \{x_i | 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+\}$ de points de $[a, b]$ vérifiant $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

- On dit que la subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est régulière ou de pas constant si $x_i - x_{i-1}$ est constant, et donc égal à $(b - a)/n$.
- Le pas (步长) d'une subdivision σ , noté $|\sigma|$, est la longueur maximale des petits segments $[x_{i-1}, x_i]$, c'est-à-dire que $|\sigma| = \max \{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$.

Avec les notions précédentes, on peut définir l'intégrabilité au sens de Riemann.

定义Définition 7.2: Riemann-intégrable

Une fonction de f est dite **Riemann-intégrable** (ou simplement intégrable) sur un segment $[a, b]$, si il existe un réel I , et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ marquée (x_0, \dots, x_n) du segment $[a, b]$ de pas inférieur à δ et pour tout $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, l'inégalité suivante est vraie

$$\left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) - I \right| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, le réel I est appelé l'intégrale de f , notée par $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_a^b f(x) dx$.

Par convention, on note $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^a f(t) dt = 0$.

例子Exemple 7.3. Cohérence avec les aires de rectangles:

La fonction constante $f(x) = c$ est intégrable sur $[a, b]$: pour toute fonction constante de valeur $c \in \mathbf{R}$, on a $\int_a^b c dt = c(b - a)$ par définition.

例子Exemple 7.4. Cohérence avec les aires de trapèze:

La fonction $f(x) = x$ est intégrable sur $[a, b]$: pour tout réel $\varepsilon > 0$, on prend le réel

$\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$, et alors, pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ du segment $[a, b]$ de pas

inférieur à δ et pour tout $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} - \delta\right) &\leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \delta\right) \\ \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} - \delta\right) &\leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \delta\right) \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) - \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \delta &\leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \delta \\ \frac{1}{2} (b^2 - a^2) - (b - a) \delta &\leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \leqslant \frac{1}{2} (b^2 - a^2) + (b - a) \delta \\ \frac{1}{2} (b^2 - a^2) - \varepsilon &\leqslant \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \leqslant \frac{1}{2} (b^2 - a^2) + \varepsilon \end{aligned}$$

Donc on a

$$\left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) - \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \right| < \varepsilon.$$

练习 Exercice 7.5

Donner la négation de l'énoncé que f est intégrable.

例子 Exemple 7.6. Fonction de Dirichlet n'est pas intégrable sur $[a, b]$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7.0.1 Subdivision régulière

En général, il est très difficile de trouver l'intégral I par définition. Mais si nous savons que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$, nous pouvons évidemment prendre la subdivision régulière. Dans ce cas on a $|\sigma| = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ pour tout $i = 0, \dots, n$.

定理 Théorème 7.7:

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. On prend une suite des subdivisions régulières $\sigma_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$. Alors, la suite des sommes $(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n})_{n \in \mathbb{N}^+}$ converge vers l'intégrale de f sur $[a, b]$, où $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dépendant de n . C'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx.$$

证明 Démonstration: Puisque f est intégrable sur $[a, b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ marquée (x_0, \dots, x_n) du segment $[a, b]$ de pas inférieur à δ et pour tout $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) - I \right| < \varepsilon.$$

On prend $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{b-a}{N} < \delta$ et alors $\forall n > N$, $\frac{b-a}{n} < \delta$. Comme $\forall n > N$, le pas $|\sigma| = \frac{b-a}{n} < \delta$ de la subdivision régulière $\sigma_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ est inférieure à δ ,

on a

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n} - I \right| < \varepsilon.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx.$$

□

例子 Exemple 7.8.

Sachant que $f(x) = x^m$ avec $m \in \mathbb{N}^+$ est intégrable. Calculer $\int_a^b f(x) dx$.

On sais que $x_{i-1}^m < \frac{x_{i-1}^m + x_{i-1}^{m-1}x_i + \dots + x_i^m}{m+1} < x_i^m$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tel que $f(\eta_i) = \frac{x_{i-1}^m + x_{i-1}^{m-1}x_i + \dots + x_i^m}{m+1}$.

On prend une subdivision de pas constant et le point η_i dans chaque petit segment, et alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^m dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\eta_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1}^m + x_{i-1}^{m-1}x_i + \dots + x_i^m}{m+1} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{m+1} - x_{i-1}^{m+1}}{m+1} \\ &= \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} \end{aligned}$$

En plus d'une subdivision régulière, on peut prendre les points $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ comme nous voulons sous la condition que f est intégrable.

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ de pas constant. Alors, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $x_i = x_0 + i \frac{b-a}{n}$. On pose alors :

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

$S_n(f)$ est la n -ème **Somme de Riemann** (à droite) associée à f sur le segment $[a, b]$.

D'après le Théorème précédent, la suite des sommes de Riemann converge vers l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ si f est intégrable sur $[a, b]$. C'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

练习 Exercice 7.9

Sachant que $f(x) = e^x$ est intégrable, calculer $\int_a^b f(x)dx$.

7.0.2 Unicité et Linéarité

Les propositions suivantes sont des bons exemples pour comprendre la définition de l'intégrale. Elles nous disent deux propriétés élémentaires des fonctions intégrables.

性质 Propriété 7.10: Unicité

Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors, son intégrale I est unique. Autrement dit, si $\int_a^b f(t)dt = I_1$ et $\int_a^b f(x)dx = I_2$, alors $I_1 = I_2$.

证明 Démonstration: Comme f est intégrable sur $[a, b]$, en utilisant la somme de Riemann $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)dx = I_1.$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)dx = I_2.$$

Par la unicité de la limite, nous obtenons $I_1 = I_2$. □

性质 Propriété 7.11: Linéarité

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$

证明 Démonstration: Supposons que $\int_a^b f(t)dt = I_1$, $\int_a^b g(t)dt = I_2$. Pour tout $\varepsilon > 0$.

Puisque f est intégrable sur $[a, b]$, pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma_1 = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ_1 et pour tout $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque g est intégrable sur $[a, b]$, pour $\frac{\varepsilon}{2\lambda} > 0$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma_2 = (t_0, \dots, y_m)$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ_2 et pour tout $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, on a

$$\left| \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1})g(\eta_j) - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2\lambda}.$$

On prend $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, alors, pour toute subdivision $\sigma = (z_0, \dots, z_p)$ de $[a, b]$ de

pas inférieur à δ et pour tout $\zeta_k \in [z_{k-1}, z_k]$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^p (z_k - z_{k-1})(f + \lambda g)(\zeta_k) - (I_1 + \lambda I_2) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^p (z_k - z_{k-1})f(\zeta_k) - I_1 + \sum_{k=1}^p (z_k - z_{k-1})\lambda g(\zeta_k) - \lambda I_2 \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^p (z_k - z_{k-1})f(\zeta_k) - I_1 \right| + \left| \sum_{k=1}^p (z_k - z_{k-1})\lambda g(\zeta_k) - \lambda I_2 \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \lambda \frac{\varepsilon}{2\lambda} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, $f + \lambda g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

□

练习 Exercice 7.12

Prouver de nouveau la unicité par la définition de l'intégrale et prouver de nouveau la linéarité par la somme de Riemann.

练习 Exercice 7.13

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soient p_1, p_2, \dots, p_N N points dans $[a, b]$.

Supposons g est une fonction sur $[a, b]$ donnée par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq p_k, k = 1, 2, \dots, N \\ P_k & \text{si } x = p_k \end{cases}$$

où P_k ($k = 1, 2, \dots, N$) sont N réels quelconques. Montrer que g est intégrable

sur $[a, b]$ et $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

7.1 Intégrabilité

Comme le concept de limite, il est très difficile de vérifier si une fonction est intégrable ou pas par la définition. Nous espérons que nous avons un bon outil comme le Théorème des gendarmes.

Definition 7.14: Somme de Darboux

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On considère une subdivision $\sigma = \{x_i\}$ de $[a, b]$.

On pose pour $i = 1, 2, \dots, n$.

$$m_i(f, \sigma) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

et

$$M_i(f, \sigma) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

On appelle

- somme de Darboux inférieure associée à f et σ le nombre

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n m_i(f, \sigma) (x_i - x_{i-1}).$$

- somme de Darboux supérieure associée à f et σ le nombre

$$S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n M_i(f, \sigma) (x_i - x_{i-1}).$$

On a alors évidemment

$$s(f, \sigma) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f, \sigma)$$

定义 Définition 7.15: subdivision plus fine

Étant donnée une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$. Une autre subdivision $\sigma' = (y_0, \dots, y_m)$ du segment $[a, b]$ est dite plus fine (加细) que la subdivision σ , si $\{x_i | 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+\}$ est un sous-ensemble de la subdivision $\{y_j | 0 \leq j \leq m, m \in \mathbb{N}^+\}$.

On peut justifier que

$$s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma') \leq S(f, \sigma)$$

定理 Théorème 7.16: Une définition équivalente

Une fonction de f est Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$, si et seulement si f est bornée , et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ du segment $[a, b]$ telle que

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = \left| \sum_{i=1}^n (M_i(f, \sigma) - m_i(f, \sigma))(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

定理 Théorème 7.17: une fonction Lipschitz continue est intégrable

Soit f une fonction Lipschitz continue sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe un réel positif L tel que, $\forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$.

证明 Démonstration: Comme f est continue sur $[a, b]$, f est bornée et atteint ses bornes sur tout petit segment dans $[a, b]$ par le Théorème des valeurs extrêmes. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on prend la subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ du segment $[a, b]$ à pas inférieur à $\frac{\varepsilon}{|L|(b-a)}$, on note $f(x_i^+) = M_i(f, \sigma) = \max\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ et $f(x_i^-) = m_i(f, \sigma) = \min\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &= \left| \sum_{i=1}^n (M_i(f, \sigma) - m_i(f, \sigma))(x_i - x_{i-1}) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i^+) - f(x_i^-))(x_i - x_{i-1}) \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^n |L| \cdot |x_i^+ - x_i^-| (x_i - x_{i-1}) \right| \\
&\leq |L| \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \right| \\
&< |L| \left| \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{L(b-a)} (x_i - x_{i-1}) \right| \\
&= |L| \frac{\varepsilon}{L(b-a)} \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \right| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

定理 Théorème 7.18: une fonction monotone est intégrable

Soit f une fonction monotone sur le segment $[a, b]$. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$.

证明 Démonstration: Sans perte de généralité, on suppose f croissante sur $[a, b]$ et $f(a) < f(b)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on prend une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de pas inférieur à $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Alors,

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &= \sum_{i=1}^n (M_i(f, \sigma) - m_i(f, \sigma))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n (M_i(f, \sigma) - m_i(f, \sigma))\delta = \delta \sum_{i=1}^n (M_i(f, \sigma) - m_i(f, \sigma)) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

例子 Exemple 7.19.

D'après les théorèmes précédents, on sait maintenant que les fonctions usuelles suivantes sont intégrables sur un segment quelconque.

- la fonction exponentielle $f(x) = e^x$
- la fonction logarithmique $f(x) = \ln x$
- les fonctions puissances $f(x) = x^a$
- les fonctions trigonométriques $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ si les fonctions sont bien définies sur le segment.

练习 Exercice 7.20

La fonction suivante est-elle intégrable sur $[0,1]$?

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

思考题 Problème 7.21. Fonction de Riemann?? est intégrable sur $[a,b]$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ et } p \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

练习 Exercice 7.22

- Montrer que fg est intégrable sur $[a,b]$ si f et g sont intégrables sur $[a,b]$.
- Montrer que $\frac{1}{g}$ est intégrable sur $[a,b]$ si g est intégrables sur $[a,b]$ et de plus $g \neq 0$ et $\frac{1}{g}$ est bornée .
- (bonus) Donner un exemple que f et g sont intégrables mais $g \circ f$ n'est pas intégrable.

7.2 Propriété des fonctions Riemann-intégrables.

Dans cette section, on suppose que les fonctions sont intégrables sur segment $[a,b]$.

1. f est bornée.

2. Unicité:

Si $\int_a^b f(t)dt = I_1$ et $\int_a^b f(x)dx = I_2$, alors $I_1 = I_2$

3. Linéarité

$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$

4. Positivité

Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

5. Additivité (relation de Chasles)

$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

性质 Propriété 7.23: Positivité

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

证明 Démonstration: Puisque f est intégrable sur $[a, b]$, la suite des sommes de

Riemann converge vers l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. C'est à dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

Alors, comme $f(a + i \frac{b-a}{n}) > 0$ pour tout i , on a $S_n(f) > 0$ pour tout n et on peut deduire que sa limite $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. □

推论Corollaire 7.24. Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si $f \geq g$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt.$$

思考题Problème 7.25. Montrer que: soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Si $f > 0$, alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

性质 Propriété 7.26: Relation de Chasles

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Pour tout petit segment $[a', b'] \subset [a, b]$, f

est intégrable sur $[a', b']$. Et pour tout $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

证明Démonstration: Puisque f est intégrable sur $[a, b]$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\sigma = (x_0 = a, x_1, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$. Considerons une subdivision $\sigma' = \sigma \cup \{a', b'\}$ plus fine, on a

$$s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma') \leq S(f, \sigma).$$

Notons par $\sigma'_{[a', b']} = \sigma' \cap [a', b']$ la subdivision de $[a', b']$, et d'après la définition de la somme de Darboux, on a

$$S(f, \sigma'_{[a', b']}) - s(f, \sigma'_{[a', b']}) \leq S(f, \sigma') - s(f, \sigma').$$

Donc, $S(f, \sigma'_{[a', b']}) - s(f, \sigma'_{[a', b']}) < \varepsilon$. cela implique que f est intégrable sur $[a', b']$.

Supposons que $a < c < b$ et maintenant σ' devient $\sigma \cup \{c\}$. Rappelez-vous que

$$s(f, \sigma') \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f, \sigma'),$$

nous avons

$$0 \leq \int_a^b f(t)dt - s(f, \sigma') \leq S(f, \sigma') - s(f, \sigma') < \varepsilon,$$

De même, nous avons

$$0 \leq \int_a^c f(t)dt - s(f, \sigma'_{[a,c]}) < \varepsilon, \quad 0 \leq \int_c^b f(t)dt - s(f, \sigma'_{[c,b]}) < \varepsilon$$

Vu que $s(f, \sigma') = s(f, \sigma'_{[a,c]}) + s(f, \sigma'_{[c,b]})$

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t)dt - \left(\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \right) \right| \\ &= \left| \int_a^b f(t)dt - s(f, \sigma') + s(f, \sigma'_{[a,c]}) + s(f, \sigma'_{[c,b]}) - \int_a^c f(t)dt - \int_c^b f(t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(t)dt - s(f, \sigma') \right| + \left| s(f, \sigma'_{[a,c]}) - \int_a^c f(t)dt \right| + \left| s(f, \sigma'_{[c,b]}) - \int_c^b f(t)dt \right| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut de cette inégalité que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. □

练习 Exercice 7.27

Soient a, b, c trois réels avec $a < b < c$. On suppose que f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Montrer que f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Est-ce qu'on peut obtenir ce résultat directement par la relation de Chasles?

性质 Propriété 7.28: théorème de la moyenne

Value4Integrals

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose que f est continue et $g > 0$. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, si $g = 1$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$. On appelle $f(c)$ **la valeur moyenne** de la fonction continue f sur $[a, b]$.

证明 Démonstration: Comme f est continue sur $[a, b]$, on nous permet de noter m la valeur minimale et M la valeur maximale de f sur $[a, b]$ respectivement, alors, on a $m \leq f(x) \leq M$ et puis $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ car $g(x) > 0$. Puisque f, g et puis fg sont intégrables, on a par la positivité

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

On a alors $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires??, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Donc,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

□

Lien entre la primitive et l'intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue (et alors intégrable) sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on peut considérer l'intégrale de f sur le sous-intervalle $[a, x]$. Cela nous

définit une nouvelle fonction que nous notons

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

定理 Théorème 7.29: Primitive d'une fonction continue

Soit f une fonction continue (et alors intégrable) sur un intervalle $[a, b]$. Alors, la

fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ sur $[a, b]$ est une primitive de $f(x)$.

证明 Démonstration: Par définition, la dérivée de F en $x_0 \in [a, b]$ est définie par la

$$\text{limite } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

D'après la relation de Chasles, $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

D'après le Théorème de la moyenne 7.28, on a $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(c)h$, où $c \in [x_0 - |h|, x_0 + |h|]$, et on peut écrire $c = x_0 + \theta_h h$ avec $-1 \leq \theta_h \leq 1$.

Puisque f est continue en x_0 , on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \theta_h h) = f\left(\lim_{h \rightarrow 0}(x_0 + \theta_h h)\right) = f(x_0)$.

Donc, on conclut pour tout $x_0 \in [a, b]$, on a

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \theta_h h) = f(x_0).$$

□

练习 Exercice 7.30

Soit f une fonction continue (et alors intégrable) sur $[a, b]$. Soient g, h deux

fonctions dérivables avec les images dans $[a, b]$. Montrer que

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)' = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

练习 Exercice 7.31

Soit $f = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Soit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Calculer $F'(x)$.

7.3 Calculer l'intégral

7.3.1 Théorème fondamental du calcul intégral

定理 Théorème 7.32: Théorème fondamental du calcul intégral.

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soit F une primitive quelconque de f sur $]a, b[$. Si F continue sur $[a, b]$, alors, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est donnée par

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Cette formule s'appelle la formule de Leibniz-Newton.

证明 Démonstration: Supposons que $\int_a^b f(x) dx = I$. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ du segment $[a, b]$ telle que pour tout $\xi_i \in$

$[x_{i-1}, x_i]$, on a

$$\left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) - I \right| < \varepsilon.$$

D'autre part, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, puisque F est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et dérivable sur $]x_{i-1}, x_i[$, par le Théorème des accroissements finis ??, il existe un point $\eta_i \in]x_{i-1}, x_i[\subset [x_{i-1}, x_i]$ tel que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\eta_i)(x_{i-1} - x_i) = f(\eta_i)(x_{i-1} - x_i).$$

Ensuite, on peut écrire

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_{i-1} - x_i).$$

Donc,

$$\left| F(b) - F(a) - I \right| < \varepsilon$$

ce qui implique $F(b) - F(a) = I$

□

例子 Exemple 7.33.

- $\int_a^b x^\lambda dx = \frac{1}{\lambda+1} (b^{\lambda+1} - a^{\lambda+1})$ si $\lambda \neq -1$; $\int_a^b x^{-1} dx = \ln |b| - \ln |a|$ ($ab > 0$).
- $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.
- $\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$, $\int_a^b \sin x dx = -\cos b + \cos a$.

定理 Théorème 7.34: Changement de variable

Soient f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ et g une fonction continue sur $f([a, b])$

et. Alors on a:

$$\int_a^b g(f(t))f'(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du.$$

L'intégrale est déduite par le changement de variable $u = f(t)$.

定理 Théorème 7.35: l' intégration par parties (IPP)

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

L'intégrale est déduite par la règle de Leibniz.

练习 Exercice 7.36

计算定积分

1. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$
2. $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^4} dx$
3. $\int_0^{3\pi/4} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$