Mathématique Avencée III
高等数学 III
(AR8)

B.LAUGEOIS,X.HE

Pris par F.YANG

如有问题联系作者

Email：2023100038@mail.buct.edu.cn

AR8 ANALYSE ASYMPTOTIQUE
渐进分析

1. 数列、函数的渐进行为（À partie d'un certain rang, la suite...）

1.1 数列、函数的阶与 Landau 记号（Notation de Landau）

设存在两个定义在$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$的数列$(u_n)_n$，$(v_n)_n$。如果：

（1）$(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$**不高于**$(\boldsymbol{v_n})_{\boldsymbol{n}}$**的阶**（$(u_n)_n$主导于$(v_n)_n$，**dominée par**）：

$$\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}_+, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (sup \left|\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n\right|) < \infty,$$

$$noté: (u_n)_n = \underset{n\to+\infty}{O} ((v_n)_n)$$

（2）$(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$**严格低于**$(\boldsymbol{v_n})_{\boldsymbol{n}}$**的阶**（$(u_n)_n$对于$(v_n)_n$可忽略，**négligeable de**）：

$$\Longrightarrow \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}_+, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n = 0\,,$$

$$noté: (u_n)_n = \underset{n\to+\infty}{o} ((v_n)_n)$$

（3）$(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$**不低于**$(\boldsymbol{v_n})_{\boldsymbol{n}}$**的阶**：

$$\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}_+, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (inf \left|\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n\right|) > 0,,$$

$$noté: (u_n)_n = \underset{n\to+\infty}{\Omega} ((v_n)_n)$$

（3）$(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n}}$**等价于**$(\boldsymbol{v_n})_{\boldsymbol{n}}$：

$$\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R}_+, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n = 1\,,$$

$$noté: (u_n)_n \sim (v_n)_n$$

1.2 渐进阶基本关系

$$(u_n)_n = \underset{n\to+\infty}{o} ((v_n)_n) \Rightarrow (u_n)_n = \underset{n\to+\infty}{O} ((v_n)_n)$$

$$(u_n)_n \sim (v_n)_n \Rightarrow (u_n)_n = \underset{n\to+\infty}{O} ((v_n)_n) + \underset{n\to+\infty}{o} ((v_n)_n)$$

$$(u_n)_n \sim (v_n)_n \Leftrightarrow (u_n)_n - (v_n)_n = \underset{n\to+\infty}{o} ((v_n)_n) \Leftrightarrow (u_n)_n - (v_n)_n = \underset{n\to+\infty}{o} ((u_n)_n)$$

1.3 Landau 等价-乘法相容性

如果有 Landau 等价，那么两个数列的积数列仍然等价：

$$\begin{cases}(u_n)_n \sim (v_n)_n \\ (a_n)_n \sim (b_n)_n\end{cases} \Rightarrow (u_n)_n.(a_n)_n \sim (v_n)_n.(b_n)_n$$

1.4 Landau 等价的性质

Landau 等价是一种等价性质，这意味着：

（1）自反性：$(u_n)_n \sim (u_n)_n$

（2）对称性：$(u_n)_n \sim (v_n)_n \Leftrightarrow (v_n)_n \sim (u_n)_n$

（3）传递性：$(u_n)_n \sim (v_n)_n, (v_n)_n \sim (w_n)_n \Longrightarrow (u_n)_n \sim (w_n)_n$

那么对于其他 Landau 记号就有：

记号	自反性（Réflexivité）	对称性（Symétrie）	对称性（Transitivité）	有界性（Bornitude）
$O(\cdot)$	√	×	√	√
$\Omega(\cdot)$	√	×	√	√
$o(\cdot)$	×	×	√	×
$\sim$	√	√	√	√

1.5 渐进偏序列

$$\frac{1}{n!} \lesssim \frac{1}{k^n} \lesssim \frac{1}{n^k} \lesssim \frac{1}{ln^{\beta}(n)} \lesssim 1 \lesssim ln^{\beta}(n) \lesssim n^k \lesssim k^n \lesssim n!$$

1.6 渐进线性运算

（1）加法：

$$u_n = o(w_n); v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n + v_n = o(w_n)$$

（2）乘法：

$$u_n = o(x_n); v_n = o(y_n) \Rightarrow u_n.v_n = o(x_n.y_n)$$

$$u_n = o(x_n); v_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow u_n.v_n = o(x_n.v_n)$$

$$u_n = o(\lambda.v_n), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow u_n = o(v_n)$$

（3）指数：

$$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^{\alpha} \sim v_n^{\alpha}$$

2. 有限展开（Développements limités, DL）

2.1 在$U(0,\delta)$的n阶有限展开（DL à l’ordre n au voisinage de 0）

Def.*(de la* ***DL à l’ ordre n au voisinage de 0****)*：设$f \in \mathbb{R}^I, 0 \in I, n \in \mathbb{N}$，$f$在 0 邻域内的有限展开定义为：

$$\exists P_n(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus f(x) - P_n(x) = \underset{n\to 0}{o}(x^n)$$

Def.*(de la* ***Partie régulière****)*：上面式子中的$P_n(x)$被称为有限展开的 **n 阶正则部分**。记作：

$$P_n(x) = \langle f(x) \rangle_n$$

2.2 有限展开的正则唯一性

任何可以有限展开的函数的n阶正则部分都必然是唯一的：

$$\exists Q_n(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus f(x) = P_n(x) + \underset{n\to 0}{o}(x^n) = Q_n(x) + \underset{n\to 0}{o}(x^n) \Longrightarrow P_n(x) = Q_n(x)$$

2.3 有限展开的截断（Troncature du DL）

如果有下面的有限展开：

$$DL_n(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i + o(x^n)$$

可有$p(p < n)$阶截断：

$$DL_p(f) = \sum_{i=0}^{p} A_i x^i + o(x^p)$$

2.4 在零处展开：Maclaurin 级数（Série de Maclaurin）

当$x_0 = 0$时，我们将此时的 Taylor-Young 级数展开称为 Maclaurin 级数，下面给出常见的 Maclaurin 级数展开：

函数	Maclaurin 级数
$f(x) = e^x$	$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(x^n)$
$f(x) = \ln(1+x)$	$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$ $= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1} + o(x^{n+1})$
$f(x) = \frac{1}{1-x}$	$f(x) = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + o(x^n)$ $= \sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)$
$f(x) = \frac{1}{1+x}$	$f(x) = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ $= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i + o(x^n)$

$f(x)=(1+x)^{\alpha}$	$f(x)=1+\alpha.x+\frac{\alpha.(\alpha-1)}{2!}x^{2}\cdots+\binom{\alpha}{n}x^{n}+o(x^{n})$ $=\sum_{i=0}^{n}\binom{\alpha}{n}x^{n}+o(x^{n})$
$f(x)=sinx$	$f(x)=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$ $=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}+o(x^{2n+2})$
$f(x)=cosx$	$f(x)=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$ $=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$
$f(x)=tanx$	$f(x)=1+\frac{x^{3}}{3}+\frac{2x^{5}}{15}+\frac{17x^{7}}{315}\cdots+\frac{B_{2n}(-4)^{n}(1-4^{n})x^{2n-1}}{(2n)!}$ $+o(x^{2n-1})$ $=\sum_{i=0}^{n}\frac{B_{2i}(-4)^{i}(1-4^{i})x^{2i-1}}{(2i)!}+o(x^{2n-1})$

2.5 在非 0 区间展开

（1）在a邻域展开：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}A_{i}(x-a)^{i}+o((x-a)^{n})$$

（2）在无穷邻域展开：

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}A_{i}(\frac{1}{x})^{i}+o((\frac{1}{x})^{n})$$

3. 同阶小量关系

（1）同阶小量和：

$$f(x)=\langle f(x)\rangle_{n}+o(x^{n});g(x)=\langle g(x)\rangle_{n}+o(x^{n})$$

$$\Rightarrow f(x)+g(x)=\langle f(x)\rangle_{n}+\langle g(x)\rangle_{n}+o(x^{n})$$

（2）同阶小量积：

$$f(x)=\langle f(x)\rangle_{n}+o(x^{n});g(x)=\langle g(x)\rangle_{n}+o(x^{n})$$

$$\Rightarrow f(x).g(x)=\langle f(x)\rangle_{n}.\langle g(x)\rangle_{n}+o(x^{n})$$

4. 可导与 DL 的关系

假设：

$$f(x) \in C^n(\cdot)$$

（1）$n = 0$ 时，$f(x)$有 0 处的 0 阶展开，即该函数连续；

（2）$n = 1$ 时，$f(x)$有 0 处的 1 阶展开，即该函数可导；

5. 0 处 DL 准则

如果，对于某个函数$f(x)$，存在一个多项式$P_n(x)$使得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = A$$

则该函数在 0 处n阶可展开。