

Dimension des espaces vectoriels

Table des matières

1 Familles libres, génératrices, bases	2
1.1 Familles génératrices	2
1.2 Familles libres	3
1.3 Bases	4
1.4 Bases et applications linéaires	5
2 Dimension d'un espace vectoriel	6
2.1 Existence d'une base	7
2.2 Dimension	7
2.3 Théorème de la base incomplète	9
2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels	9
3 Relation entre les dimensions	10
3.1 Dimension et isomorphisme	10
3.2 Dimension d'un produit de sous-espaces vectoriels	11
3.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels	11
4 Rang	13
4.1 Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire	13
4.2 Théorème du rang	13
4.3 Caractérisation des isomorphismes	15
4.4 Hyperplans et formes linéaires	15

1 Familles libres, génératrices, bases

Dans cette section, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.1 Familles génératrices

Définition 3.1.1 Famille génératrice

Une famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est dite **génératrice** de E si

$$E = \text{Vect}\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

c'est-à-dire si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire des éléments x_1, x_2, \dots, x_n ou encore :

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Dans ce cas on dit aussi que la famille engendre E

EXEMPLES :

1. (1, i) est une famille génératrice du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad z = a + ib$

2. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (1, 1)$. La famille (e_1, e_2) est génératrice de E . En effet, soit $u = (x, y) \in E$, $u = (x - y, 0) + (y, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1) = (x - y)e_1 + ye_2$. Donc $E = \text{Vect}\{(e_1, e_2)\}$

3. D'une manière générale, deux vecteurs non colinéaires du plan forment un famille génératrice du plan, et trois vecteurs non coplanaires de l'espace forment un famille génératrice de l'espace.

4. $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, car $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$

Propriété 3.1.2 Sur-famille d'une famille génératrice

Soit \mathcal{F} une famille génératrice de E et \mathcal{G} une famille qui contient \mathcal{F} , c'est-à-dire $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Alors \mathcal{G} est génératrice de E .

DÉMONSTRATION

Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E et $\mathcal{G} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$. Puisque \mathcal{F} est génératrice de E , et que \mathcal{G} contient tous les éléments de \mathcal{F} , tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de \mathcal{F} et donc d'éléments de \mathcal{G} . \mathcal{G} est donc génératrice de E .

Propriété 3.1.3 Caractérisation des familles génératrices

Soit \mathcal{F} une famille génératrice de E . Une famille \mathcal{G} est génératrice de E si, et seulement si, tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de \mathcal{G}

DÉMONSTRATION

- \Rightarrow Si \mathcal{G} est génératrice de E alors tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de \mathcal{G} , et donc tout élément de \mathcal{F} est aussi combinaison linéaire des éléments de \mathcal{G}
- \Leftarrow Réciproquement, supposons que tout élément de E est combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{G} , c'est-à-dire $\mathcal{F} \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$, espace vectoriel contenant \mathcal{F} . Puisque $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant \mathcal{F} , on en déduit $E = \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$, ce qui prouve que \mathcal{G} est génératrice

REMARQUE :

1. Pour montrer que \mathcal{F} est génératrice il suffit de montrer que les éléments d'une famille génératrice connue sont atteints par des combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{F} .
2. C'est une propriété très utile pour déterminer l'image d'une application linéaire. En effet si on prouve qu'une certaine famille génératrice \mathcal{B} de F est dans l'image de f application linéaire de E dans F , c'est-à-dire $\mathcal{B} \subset \text{Im}(f)$, alors on en déduit $\text{Im}(f) = F$

EXEMPLES :

1. Si $j = e^{2i\pi/3}$ alors $(1, j)$ est génératrice de \mathbb{C} puisque $(1, i)$ est génératrice et que 1 et i sont combinaisons linéaires de 1 et j . Pour 1 c'est clair, pour i on peut écrire $i = \frac{1}{\sqrt{3}}1 + \frac{2}{\sqrt{3}}j$

2. Soit $E = \mathbb{R}^2$, tout élément de E s'écrit $u = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, donc $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$ est génératrice. Montrons que $\mathcal{G} = ((1, 0), (1, 1))$ l'est aussi. \mathcal{F} et \mathcal{G} ont en commun $(0, 1)$ et $(0, 1) = (1, 1) - (1, 0)$ donc les éléments de \mathcal{F} génératrice sont des combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{G} , donc \mathcal{G} est également génératrice.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme $u : (x, y) \mapsto (2x - y, -x + y)$. On a $u(1, 1) = (1, 0)$ et $u(1, 2) = (0, 1)$, donc $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ famille génératrice de E est incluse dans $\text{Im}(u)$, on en déduit $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^2$

1.2 Familles libres

Définition 3.1.4 Famille libre, famille liée

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de n éléments de E

- On dit que \mathcal{F} est une **famille libre** ou que les vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n sont **linéairement indépendants** si pour tout $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \right) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

- Dans le cas contraire, si l'on peut trouver des λ_i non tous nuls vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$ on dit que la famille est **liée** ou que les vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n sont **linéairement dépendants**.

EXEMPLES :

1. Une famille à un élément x est libre si, et seulement si, x est non nul. En effet
 - si $x = 0_E$ alors $1x = 0_E$ donc (x) forme une famille liée
 - si $x \neq 0_E$ alors $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$, donc (x) forme une famille libre
2. Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , la famille $(1, i)$ est libre en effet puisque pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a : $a + ib = 0 \Rightarrow a = b = 0$
3. Dans $E = \mathbb{R}^2$ la famille $\mathcal{F}\{(1, 0), (1, 1), (4, 5)\}$ est liée. En effet, $(4, 5) = -(1, 0) + 5(1, 1)$ et donc $-1(1, 0) + 5(1, 1) - (4, 5) = (0, 0)$ ce qui montre que les éléments de la familles sont linéairement liés.

Propriété 3.1.5 Sur-famille et sous-famille

- Si \mathcal{F} est une famille libre, alors toute famille $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est libre.
- Si \mathcal{F} est une famille liée, alors toute famille \mathcal{G} qui contient \mathcal{F} , c'est-à-dire $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, est liée.

DÉMONSTRATION

- Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre. Prenons une sous-famille \mathcal{G} à p vecteurs, quitte à permuter les x_i on peut supposer que cette famille est $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_p)$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$$

En posant $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$, on obtient $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$ et comme la famille $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc en particulier $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots, \lambda_p = 0$ ce qui prouve que x_1, x_2, \dots, x_p sont linéairement indépendants, c'est-à-dire que \mathcal{G} est libre.

- La deuxième affirmation est la contraposée de la première, mais nous la démontrons tout de même. Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille liée et $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ une sur-famille. Puisque la famille est liée on peut trouver $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$$

en prenant $\lambda_{n+1} = 0$ on obtient ainsi $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0_E$ avec des λ_i non tous nuls, ce qui prouve que la famille $\mathcal{G} = (x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est liée.

EXAMPLE :

1. La famille (0_E) étant liée, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
2. Une famille libre ne peut pas contenir deux vecteurs colinéaires, ou deux vecteurs égaux.

1.3 Bases

Définition 3.1.6 Base d'un espace vectoriel

Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est une **base** de E si c'est une famille libre et génératrice de E

EXEMPLES

1. Nous avons montré que $(1, i)$ est une famille libre et génératrice dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , c'est donc une base.
2. Dans $E = \mathbb{R}^n$, la famille $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ définie par

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

est une base de \mathbb{K}^n car l'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ prouve que tout vecteur de \mathbb{K}^n s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} et qu'une telle combinaison linéaire ne peut être nulle que si tous les λ_i sont nuls.

Cette base « naturelle » est appelée **base canonique** de \mathbb{K}^n

3. $(1, X, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$, elle est appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$

Propriété 3.1.7 Coordonnées dans une base

Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E si, et seulement si, pour tout vecteur de $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

La famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ est alors appelée **coordonnées (ou composantes)** de x dans \mathcal{B}

DÉMONSTRATION

➤ Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base alors elle est génératrice, donc x s'écrit comme combinaison linéaires des vecteurs de \mathcal{B} . Considérons deux décompositions de x :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E$$

et puisque la base \mathcal{B} est libre, tous les $\lambda_i - \mu_i = 0$ ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

➤ Réciproquement :

- l'existence de la décomposition pour tout $x \in E$ prouve que \mathcal{B} est génératrice
- Supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$, puisque $0_E = \sum_{i=1}^n 0 e_i$, l'unicité de la décomposition prouve que tous les λ_i sont nuls et donc \mathcal{B} est libre.

EXEMPLES :

1. Les composantes de $z = a + ib$ dans la base $(1, i)$ sont $a = \mathcal{R}e(z)$ (partie réelle) et $b = \mathcal{I}m(z)$ (partie imaginaire)
2. Dans $E = \mathbb{R}^2$, dans la base $\mathcal{F} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ les coordonnées de $(4, 5)$ sont -1 et 5 . En effet $(4, 5) = -(1, 0) + 5(1, 1)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, dans la base canonique $\{(1, 0), (0, 1)\}$, les coordonnées de $(4, 5)$ sont 4 et 5 .
4. Les composantes du polynôme $\sum_{p=0}^n a_p X^p$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ sont les coefficients du polynôme, c'est-à-dire les scalaires a_1, \dots, a_p

Propriété 3.1.8

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E et l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow E \\ (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} & \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{cases}$$

Alors :

- φ est une application linéaire
- φ est injective si, et seulement si, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre
- φ est surjective si, et seulement si, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice
- φ est bijective si, et seulement si, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E

DÉMONSTRATION

Cette propriété est la conséquence des propriétés précédentes, mais elle a la force de la concision.

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, deux familles $\Lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{M} = (\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{K}^n et $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$. Alors

$$\varphi(\alpha\Lambda + \beta\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i)x_i = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \alpha\varphi(\Lambda) + \beta\varphi(\mathcal{M})$$

donc φ est linéaire

- φ injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Leftrightarrow (\varphi(\Lambda) = 0_E \Rightarrow \Lambda = 0_{\mathbb{K}^n})$
 $\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_i = 0)$
La dernière équivalence imposant la liberté de la famille $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$
- φ surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(\varphi) = E \Leftrightarrow \text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ c'est-à-dire que \mathcal{F} est génératrice
- Conséquence des deux points précédents.

1.4 Bases et applications linéaires

Propriété 3.1.9 Caractérisation des applications linéaires

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et une famille $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$$

DÉMONSTRATION

- **Unicité** : Soit u une telle application linéaire, et $x \in E$. On a $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, et par linéarité de u on a

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

Donc u est complètement déterminée et par suite unique.

- **Existence** : Puisque \mathcal{B} est une base, tout élément x de E s'écrit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. En posant $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$, on définit une application de E dans F .

- Montrons qu'elle est linéaire. Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ et deux scalaires α, β . On a :

$$\begin{aligned} u(\alpha x + \beta y) &= u \left(\sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) e_i \right) = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) f_i = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n \mu_i f_i \right) \\ &= \alpha u(x) + \beta u(y) \end{aligned}$$

- Enfin, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$ puisque les composantes de e_i dans la base \mathcal{B} sont nulles sauf $\lambda_i = 1$

REMARQUE : On énonce le résultat précédent en disant qu'une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base.

Propriété 3.1.10 Image d'une base

Soit u une application linéaire de E dans un espace vectoriel F , et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E :

- La famille $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $\text{Im}(u)$
- u est surjective si, et seulement si, $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de F
- u est injective si, et seulement si, $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de F
- u est bijective si, et seulement si, $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F

DÉMONSTRATION

➢ Soit $y \in \text{Im}(u)$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de E , $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, donc et par linéarité de u ,

$$y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$$

ce qui montre que $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$

➢ u est surjective si et seulement si $\text{Im}(u) = F$, c'est-à-dire, si et seulement si $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de F

➢ Supposons u injective. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0_F$, comme u est linéaire, on a $u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F$, donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(u)$. Puisque u est injective, $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$ et comme $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, tous les λ_i sont nuls, ce qui prouve que $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est libre

Supposons la famille $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ libre. Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ un vecteur de $\text{Ker}(u)$ on a

$\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = u(x) = 0_F$. Comme $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est libre, on en déduit que tous les λ_i sont nuls et donc $x = 0_E$, ainsi $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$, c'est-à-dire que u est injective.

➢ Conséquence des deux points précédents.

REMARQUE : On retient : u bijective \iff l'image d'une base est une base.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 3.2.11 Dimension finie

On dit que E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire on dit que E est de **dimension infinie**.

EXEMPLES

1. On a vu que $(1, i)$ était une famille génératrice du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , donc \mathbb{C} est de dimension finie.
2. On a vu que $\mathcal{F} = ((1, 0), (1, 1))$ était une famille génératrice de \mathbb{R}^2 , donc \mathbb{R}^2 est de dimension finie.
3. On a vu que $(1, X, \dots, X^n)$ était une base (donc génératrice) de $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est un espace vectoriel de dimension finie
4. En revanche $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes est un espace vectoriel de dimension infinie, il contient la famille libre infinie $(1, X, \dots, X^n, \dots)$
5. De même l'espace des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie (il contient l'espace des polynômes)

2.1 Existence d'une base

Propriété 3.2.12 Existence d'une base - Théorème de la base extraite

Soit \mathcal{G} une famille génératrice de E de dimension finie. Toute famille libre contenue dans \mathcal{G} peut être complétée en une **base de E** avec des éléments de \mathcal{G} . Autrement dit, on peut **extraire une base de E de toute famille génératrice**.

DÉMONSTRATION

Soit $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ un famille génératrice de E , et $\mathcal{L} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ une famille libre contenue dans \mathcal{G} .

Soit S l'ensemble des cardinaux des sous-familles libres de \mathcal{G} . Cet ensemble est non vide ($p \in S$) et est majoré par n , il possède donc un plus grand élément r . Il existe donc une sous-famille libre \mathcal{B} de \mathcal{G} de cardinal r . Soit $I \subset [1, n]$ tel que $\mathcal{B} = (g_i)_{i \in I}$.

Montrons que \mathcal{B} est une base de E .

- \mathcal{B} est libre par hypothèse
- Montrons quelle est génératrice. Pour cela il suffit de montrer que tous les éléments de \mathcal{G} sont une combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B} . Soit $i \in [1, n]$
 - Si $i \in I$, dans ce cas $g_i \in \mathcal{B}$, et g_i est évidemment combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B}
 - Si $i \notin I$, on pose $I' = I \cup \{i\}$, alors $\text{card}(I') > r$ et $I' \subset [1, n]$ donc la sous-famille $(g_i)_{i \in I'}$ n'est pas libre. Dans ce cas, on note $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_r)$ et $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_r, g_i)$. Ainsi il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha$ tels que :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k x_k + \alpha g_i = 0$$

avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha) \neq (0, 0, \dots, 0)$. $\alpha \neq 0$ car sinon puisque \mathcal{B} est libre tous les λ_k seraient nuls.
Ainsi,

$$g_i = \sum_{k=1}^r -\frac{\lambda_k}{\alpha} x_k$$

ce qui prouve que g_i est combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B}

Ainsi \mathcal{B} est génératrice.

En conclusion \mathcal{B} est une famille libre et génératrice de E .

2.2 Dimension

Propriété 3.2.13

Soit \mathcal{G} une famille à n vecteurs de E . Toute famille à $n+1$ éléments de E dont les vecteurs sont combinaisons des éléments de \mathcal{G} est une famille liée.

DÉMONSTRATION

Soit (H_n) la propriété à démontrer.

- H_0 est vraie car une combinaison linéaire de 0 vecteur est le vecteur nul, et la famille (0_E) est liée. On peut vérifier aussi que H_1 est vraie car la famille est alors $(x, \alpha x)$ elle est composée de deux vecteurs colinéaires, elle est donc liée.
- On suppose H_{n-1} vraie, $\mathcal{G} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille à n éléments de E et $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille à $n+1$ éléments de E . On suppose que pour tout $k \in [0, n]$, le vecteur x_k est combinaison linéaire des e_i , on a $x_k = \lambda_{1,k} e_1 + \lambda_{2,k} e_2 + \dots + \lambda_{n-1,k} e_{n-1} + \alpha_k e_n$

- Si tous les α_k sont nuls alors la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est une famille de n vecteurs combinaisons linéaires de $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ donc est liée d'après H_{n-1} et donc (x_0, x_1, \dots, x_n) est liée.

- Si un des α_k est non nul, quitte à permuter les indices, on peut supposer $\alpha_0 \neq 0$ et on pose :

$$y_k = x_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} x_0 = \left(\lambda_{1,k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \lambda_{1,0} \right) e_1 + \dots + \left(\lambda_{n-1,k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \lambda_{n-1,0} \right) e_{n-1} + \underbrace{\left(\alpha_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \alpha_0 \right)}_{=0} e_n$$

La famille (y_1, y_2, \dots, y_n) est une famille de n vecteurs combinaisons linéaires de e_1, e_2, \dots, e_{n-1} , donc d'après H_{n-1} elle est liée. Ainsi il existe des β_k non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^n \beta_k y_k = 0 = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \alpha_k}{\alpha_0} \right) x_0 = \sum_{k=0}^n \beta_k x_k$$

avec $\beta_0 = -\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \alpha_k}{\alpha_0}$ et ainsi la famille (x_0, x_1, \dots, x_n) est liée, donc (H_n) est vraie.

Propriété 3.2.14

Toute famille génératrice a au moins autant d'élément que toute famille libre. C'est-à-dire que si (x_1, x_2, \dots, x_p) est une famille libre de E et (y_1, y_2, \dots, y_q) est une famille génératrice, alors $p \leq q$

DÉMONSTRATION

Si \mathcal{G} est une famille génératrice de E à q éléments alors toute famille de E a ses éléments qui sont combinaisons linéaires des éléments de \mathcal{G} (car \mathcal{G} est génératrice). Ainsi, d'après la propriété précédente toute famille de E à $q+1$ éléments est liée. En conclusion toute famille libre à au plus q éléments.

Propriété 3.2.15 Dimension

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments. L'entier n est appelé **dimension** de E sur \mathbb{K} , ou **dimension** de E

DÉMONSTRATION

Si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de E alors \mathcal{B}_1 est génératrice et \mathcal{B}_2 libre, donc \mathcal{B}_1 a au moins autant d'éléments que \mathcal{B}_2 . De même \mathcal{B}_2 a au moins autant d'éléments que \mathcal{B}_1 . En conclusion \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 ont le même nombre d'éléments.

EXEMPLES :

1. L'espace vectoriel $\{0_E\}$ est de dimension 0, il admet pour base \emptyset qui a 0 élément.
2. \mathbb{K} qui est un corps est aussi un espace vectoriel de dimension 1 sur \mathbb{K}
3. \mathbb{C} est de dimension 1 sur \mathbb{C} (tout nombre complexe non nul forme une base), mais de dimension 2 sur \mathbb{R} , il admet $(1, i)$ pour base (entre autres).
4. \mathbb{R}^2 est de dimension 2 car $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est une base. On peut donc en déduire que toute famille à 3 éléments de \mathbb{R}^2 est liée.
5. D'une manière générale, \mathbb{K}^n est de dimension n , il admet pour base la **base canonique** :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

6. $K_n[X]$ est de dimension $n+1$, il admet pour base $(X^p)_{0 \leq p \leq n}$

Propriété 3.2.16

Si E est un espace vectoriel de dimension n , alors :

- toute famille libre a **au maximum** n éléments : $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ libre $\implies p \leq n$
- toute famille génératrice a **au minimum** n éléments : $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ génératrice $\implies p \geq n$

DÉMONSTRATION

- Une famille libre a au maximum le même nombre d'éléments que n'importe qu'elle famille génératrice. Une base étant génératrice, une famille libre a au maximum le nombre d'élément d'une base, c'est-à-dire n la dimension de E .
- Une famille génératrice a au minimum le même nombre d'éléments que n'importe qu'elle famille libre. Une base étant libre, une famille génératrice a au minimum le nombre d'élément d'une base, c'est-à-dire n la dimension de E .

Propriété 3.2.17

Soit E un espace vectoriel de dimension n et (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille de p éléments de E , alors :

- Si $p > n$ la **famille est liée**
- Si $p < n$ la **famille n'est pas génératrice**

DÉMONSTRATION

- D'après la propriété précédente, si $p > n$ alors la famille n'est pas libre, elle est donc liée
- D'après la propriété précédente, si $p < n$ alors la famille n'est pas génératrice

2.3 Théorème de la base incomplète

Propriété 3.2.18 Théorème de la base incomplète

Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être **complétée en une base de E**

DÉMONSTRATION

Soit \mathcal{G} un famille génératrice de E et \mathcal{L} une famille libre. Soit \mathcal{G}' l'union des deux familles (elle contient \mathcal{L} et \mathcal{G}), \mathcal{G}' est alors génératrice de E et contient une famille libre (\mathcal{L}). Ainsi d'après la proposition d'existence d'une base, on peut ajouter des éléments de \mathcal{G}' à \mathcal{L} pour obtenir une base de E .

Propriété 3.2.19

Soit \mathcal{B} une famille d'un espace vectoriel E de dimension n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathcal{B} est une base
- (ii) \mathcal{B} est une famille libre à n éléments
- (iii) \mathcal{B} est une famille génératrice à n éléments

DÉMONSTRATION

(i) \Rightarrow (ii) et (iii), car une base est une famille libre et génératrice à n éléments.

(ii) \Rightarrow (i) Si \mathcal{B} est une famille libre à n éléments, on peut la compléter en une base \mathcal{B}' de E qui est une famille à n éléments. Donc \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont identiques, donc \mathcal{B} est une base de E

(iii) \Rightarrow (i) Si \mathcal{B} est une famille génératrice à n éléments, on peut en extraire une base \mathcal{B}' de E qui est donc une famille à n éléments, donc les familles \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont identiques donc \mathcal{B} est une base.

REMARQUE : Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace de dimension n , on montre que c'est un famille libre à n éléments.

EXEMPLES :

1. Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , la famille $(1, w)$ est libre (donc une base), si et seulement si, w n'est pas réel.
2. Dans \mathbb{R}^2 , qui est de dimension 2, deux vecteurs non colinéaires forment une base.
3. Dans $\mathbb{R}_1[X]$, la famille $(1 - X, 1 + X)$ est une base. En effet soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha(1 - X) + \beta(1 + X) = 0$
Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne $\alpha = \beta = 0$ donc la famille est libre. Or $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension 2, donc cette famille est une base.

2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels

Propriété 3.2.20 Dimension des sous-espaces vectoriels

Si E est de dimension n , tout sous-espace vectoriel F de E est de **dimension finie** n . De plus

- $\dim F \leq \dim E$
- $\dim F = \dim E \Leftrightarrow E = F$

DÉMONSTRATION

- Soit $A = \{\text{cardinaux des familles libres de } F\}$, cet ensemble est non vide car il contient 0 (toute famille vide est libre), et est majoré par $n = \dim E$, il admet donc un plus grand élément $p \leq n$. En outre, soit \mathcal{L} une famille libre de F à p éléments, pour tout $x \in F$ la famille $\mathcal{L} \cup \{x\}$ est liée (par définition de p). On a alors déjà montré (propriété 12) que $x \in \text{Vect}(\mathcal{L})$ ce qui montre que \mathcal{L} est génératrice. Ainsi la famille \mathcal{L} est une base de F qui est de dimension $p \leq n$.
- Il est clair que si $E = F$ alors $\dim E = \dim F$. Réciproquement, si $\dim F = \dim E$ alors il existe une base \mathcal{B} de F à n éléments et c'est aussi un famille libre de E à n éléments et donc une base de E . On en déduit $F = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$

EXEMPLE :

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

On pose $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, -1)$ deux vecteurs de F . Ils forment une famille libre, en effet $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ils forment un famille génératrice car tout élément de F est de la forme

$(x_1, x_2, x_1 - x_2) = x_1 f_1 + x_2 f_2$. Donc F est un espace-vectoriel de dimension 2.

Propriété 3.2.21 Existence d'un sous-espace vectoriel supplémentaire

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire.

DÉMONSTRATION

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et F un sous-espace vectoriel de E . Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F , c'est donc une famille libre de E et d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une base de E de la forme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Soit G le sous-espace engendré par la famille $(e_i)_{p+1 \leq i \leq n}$. Vérifions que G est un supplémentaire de F :

- Tout vecteur x de E se décompose dans la base \mathcal{B} sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Si on pose $x_F = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ et $x_G = \sum_{i=p+1}^n x_i e_i$, on a alors $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, donc

$$E = F + G$$

- Si x est un vecteur de $F \cap G$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_{p+1}, \dots, \mu_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^n \mu_i e_i$$

on a donc

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^n -\mu_i e_i = 0_E$$

Puisque la famille (e_1, \dots, e_n) est libre, tous les coefficients sont nuls et donc les λ_i sont nuls. Ainsi, $x = 0_E$ et donc $F \cap G = \{0_E\}$

En conclusion, F et G sont supplémentaires.

3 Relation entre les dimensions

3.1 Dimension et isomorphisme

Propriété 3.3.22 Espaces isomorphes

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . On dit que F est **isomorphe** à E si et seulement il existe un **isomorphisme** de E dans F , dans ce cas $\dim F = \dim E = n$

DÉMONSTRATION

- S'il existe un isomorphisme u de E dans F et si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E alors $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F et donc F est de dimension n
- Si $\dim E = \dim F = n$, soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F . Il existe une unique application linéaire de E dans F telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_i) = f_i$$

Comme la famille $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F alors u est bijective, c'est donc un isomorphisme de E dans F .

Propriété 3.3.23

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n

DÉMONSTRATION

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E (de dimension n), on a alors pour tout $x \in E : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Soit φ l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

φ est un isomorphisme de E dans \mathbb{K}^n . Il est clair que pour tout $e_i \in E$, $\varphi(e_i) = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, et l'ensemble des $\varphi(e_i)$ forme la base canonique de \mathbb{K}^n . Donc φ est un isomorphisme.

EXEMPLES :

1. $\mathbb{R}_2[X]$ est isomorphe à \mathbb{R}^3 , en effet l'application $\varphi : P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^3
2. D'une manière générale $\mathbb{R}_n[X]$ est isomorphe à \mathbb{R}^{n+1}
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ est de dimension 2, en effet $F = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$. Donc F est isomorphe à \mathbb{R}^2

3.2 Dimension d'un produit de sous-espaces vectoriels

Propriété 3.3.24 Dimension d'un produit

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

DÉMONSTRATION

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F , montrons que

$$\mathcal{B} = ((e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$$

est une base de $E \times F$

➤ Si (x, y) est un élément de $E \times F$, les vecteurs x et y se décomposent dans les bases de E et F :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{i=1}^p y_i f_i$$

ainsi

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, 0 \right) + \left(0, \sum_{i=1}^p y_i f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (e_i, 0) + \sum_{i=1}^p y_i (0, f_i) \end{aligned}$$

Donc \mathcal{B} est bien une famille génératrice de $E \times F$

➤ Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{i=1}^p \mu_i (0, f_i) = (0_E, 0_F)$$

Cela implique

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \mu_i f_i = 0_F$$

Et comme les familles $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont libres, on en déduit que tous les λ_i et μ_i sont nuls donc \mathcal{B} est une famille libre

En conclusion, \mathcal{B} est une base à $n + p$ éléments de $E \times F$.

EXEMPLES :

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R}$, ainsi \mathbb{R}^2 est un espace vectoriel de dimension 2
2. On retrouve que $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ donc $\dim \mathbb{K}^n = \dim \mathbb{K} + \dim \mathbb{K} + \dots + \dim \mathbb{K} = n$

3.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Propriété 3.3.25 Somme de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , alors :

- $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$
- Si (e_1, e_2, \dots, e_p) est une base de E_1 et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ est une base de E_2 alors (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E . Une telle base est dite adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$

DÉMONSTRATION

➤ L'application φ :

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 &\longrightarrow E \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 + x_2 \end{aligned}$$

est linéaire. De plus elle est bijective puisque tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 . C'est donc un isomorphisme. Il en résulte :

$$\dim E = \dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

➤ Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base de E_2 . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, comme \mathcal{B} a n éléments et que $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 = n$, il suffit de vérifier qu'elle est génératrice. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, comme \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont des bases de E_1 et E_2 on a

$$x_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad x_2 = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$$

et donc

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

est bien une combinaison linéaire des éléments de \mathcal{B} , ainsi \mathcal{B} est génératrice.

Propriété 3.3.26 Somme de sous-espaces vectoriels quelconques

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, on a :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

DÉMONSTRATION

Soit E'_2 un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 , c'est-à-dire qu'on a $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$. Donc d'après la propriété précédente :

$$\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E'_2 \tag{1}$$

On va montrer que E_1 et E'_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de $E_1 + E_2$

- $E_1 \subset E_1 + E_2$ et $E'_2 \subset E_2$ donc $E'_2 \subset E_1 + E_2$ donc $E_1 + E'_2 \subset E_1 + E_2$
- Soit $x \in E_1 \cap E'_2$. Comme $E'_2 \subset E_2$, $x \in E_1 \cap E_2$, donc $x \in (E_1 \cap E_2) \cap E'_2$. Or $E_1 \cap E_2$ et E'_2 sont supplémentaires, donc $(E_1 \cap E_2) \cap E'_2 = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$, et ainsi $E_1 \cap E'_2 = \{0_E\}$
- Soit $x \in E_1 + E_2$. On peut alors trouver $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Comme $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$, il existe $x'_2 \in E'_2$ et $x''_2 \in E_1 \cap E_2$ tels que $x_2 = x'_2 + x''_2$. Ainsi :

$$x = x_1 + x_2 = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x''_2}_{\in E_1} + \underbrace{x'_2}_{\in E'_2} = \underbrace{x_1 + x''_2}_{\in E_1} + \underbrace{x'_2}_{\in E'_2}$$

Donc $E_1 + E_2 \subset E_1 + E'_2$ et ainsi $E_1 + E_2 = E_1 + E'_2$

En conclusion, $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E'_2$, donc $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \oplus E'_2) = \dim E_1 + \dim E'_2$ et ainsi d'après (1)

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

Propriété 3.3.27 Caractérisation des sous-espaces supplémentaires

Soit E de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E , alors

- $E = F \oplus G \iff \dim E = \dim F + \dim G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}$
- $E = F \oplus G \iff \dim E = \dim F + \dim G \quad \text{et} \quad F + G = E$

DÉMONSTRATION

- \Rightarrow D'après la définition d'une somme directe et la propriété précédente
 \Leftarrow Si $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, on a
 $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = \dim E$, donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E
de même dimension que E , donc égal à E . Donc $E = F + G$ et ainsi $E = F \oplus G$
- \Rightarrow D'après la définition d'une somme directe et la propriété précédente
 \Leftarrow Si $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F + G = E$, on a
 $\dim E = \dim(F + G) = \underbrace{\dim F + \dim G}_{=\dim E} - \dim(F \cap G)$ donc $\dim(F \cap G) = 0$.
Donc $F \cap G = \{0_E\}$ ainsi $E = F \oplus G$

4 Rang

4.1 Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

Définition 3.4.28 Rang d'une famille de vecteurs

Le **rang d'une famille** finie \mathcal{F} de vecteurs de E , noté $\text{rg}(\mathcal{F})$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} , c'est-à-dire $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$

REMARQUES : Si $\dim E = n$ et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

1. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ car \mathcal{F} est une famille génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$, et toute famille génératrice a plus d'éléments qu'une base. Donc les bases de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ont moins de p éléments.
2. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ car $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E
3. $\text{rg}(\mathcal{F}) = p \iff \mathcal{F}$ est une famille libre, car si $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = p$ alors \mathcal{F} est une famille génératrice à p éléments dans un espace de dimension p , c'est donc une base, elle est donc libre. Réciproquement si elle libre c'est une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ (car elle est génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ par définition), et donc $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = p$
4. $\text{rg}(\mathcal{F}) = n \iff \mathcal{F}$ est génératrice de E , car si $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = n$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous espace vectoriel de E de même dimension que E , donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$, c'est-à-dire que \mathcal{F} est génératrice de E . Réciproquement si \mathcal{F} est génératrice de E alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ donc $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = \dim E = n$

Définition 3.4.29 Rang d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F . On appelle **rang** de u , que l'on note $\text{rg}(u)$ la dimension de $\text{Im}(u)$ lorsqu'elle est finie. On a ainsi $\text{rg}(u) = \dim \text{Im}(u)$

Lorsque E est de dimension finie n , si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , alors

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) = \text{rg}(u(\mathcal{B})) = \dim \text{Vect}(u(\mathcal{B}))$$

REMARQUES : Soit E de dimension n et F deux espaces vectoriels, et u une application de E dans F , alors :

1. $\text{rg}(u) \leq \dim F$ car $\text{Im}(u) \subset F$
2. $\text{rg}(u) \leq \dim E$ car $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \leq n$ d'après la remarque précédente.
3. $\text{rg}(u) = \dim F \iff u$ est surjective. En effet si $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim F$ alors comme $\text{Im}(u) \subset F$, on a que $\text{Im}(u) = F$, c'est-à-dire que u est surjective. Réciproquement, si u est surjective alors $\text{Im}(u) = F$, donc $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim F$.
4. $\text{rg}(u) = \dim E \iff u$ est injective. En effet si $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) = n$ alors $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille libre d'après la remarque précédente, donc u est injective. Réciproquement, si u est injective $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille libre et alors $\text{rg}((u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))) = n = \dim E$. C'est un cas particulier d'un théorème essentiel, le théorème du rang.
5. Dans le cas $\dim E = \dim F = n$, $\boxed{\text{rg}(u) = n \iff u \text{ est bijective.}}$

4.2 Théorème du rang

Définition 3.4.30 Restriction d'une application

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On dit que v est la **restriction de u sur F** si $\forall x \in F, v(x) = u(x)$, c'est-à-dire :

$$v : \begin{cases} F & \longrightarrow \text{Im}(u) \\ x & \mapsto u(x) \end{cases}$$

On note parfois $v = u|_F$. On dit aussi que u induit l'**application** v sur F

EXEMPLES :

- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , et p le projecteur sur F parallèlement à G . On a alors $p|_F = Id_F$ et $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$
- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . On a alors $s|_F = Id_F$ et $s|_G = -Id_G$

Le théorème suivant est central en algèbre linéaire, c'est le plus important du chapitre.

Propriété 3.4.31 Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels, et u une application linéaire de E dans F . Si E_0 est supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , l'application u induit un **isomorphisme** de E_0 sur $\text{Im}(u)$.

De plus si E est de dimension finie on a :

$$\dim E = \text{rg}(u) + \dim \text{Ker}(u)$$

DÉMONSTRATION

- Soit E_0 un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , donc $E = \text{Ker}(u) \oplus E_0$. L'application v (restriction de u sur E_0) :

$$v : \begin{cases} E_0 & \longrightarrow \text{Im}(u) \\ x & \mapsto u(x) \end{cases}$$

est bien définie puisque $v(E_0) = u(E_0) \subset u(E) = \text{Im}(u)$, de plus v est linéaire car u est linéaire.

- Le noyau de v est

$$\text{Ker}(v) = \{x \in E_0 \mid u(x) = 0_F\} = E_0 \cap \text{Ker}(u)$$

Comme E_0 et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires, $E_0 \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\} = \text{Ker}(v)$ donc v est injective.

- Soit $y \in \text{Im}(u)$, il existe un vecteur x de E tel que $y = u(x)$ et puisque E_0 et $\text{Ker}(u)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E on peut écrire :

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{avec} \quad x_1 \in E_0 \text{ et } x_2 \in \text{Ker}(u)$$

et donc

$$y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) = v(x_1)$$

ce qui montre que v est surjective dans $\text{Im}(u)$.

En conclusion v est un isomorphisme de E_0 dans $\text{Im}(u)$

- Puisque l'application v est un isomorphisme, $\dim E_0 = \dim \text{Im}(u)$ et comme $E = \text{Ker}(u) \oplus E_0$ on a $\dim E = \dim(\text{Ker}(u) \oplus E_0) = \dim \text{Ker}(u) + \dim E_0 = \dim \text{Ker}(u) + \dim \text{Im}(u) = \dim \text{Ker}(u) + \text{rg}(u)$

EXEMPLES :

Suivant les cas il est plus facile de déterminer l'image ou le noyau d'une application linéaire. Le théorème du rang permet de déterminer l'un grâce à l'autre.

1. Déterminer l'image d'une application grâce à son noyau et le théorème du rang.

Soit f l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x - 3y, 3x + 5y) \end{aligned}$$

f est linéaire. On va voir qu'en déterminant le noyau de cette application, on peut en déduire son image grâce au théorème du rang. Soit $u = (x, y) \in \text{Ker}(f) \Rightarrow (x - 3y, 3x + 5y) = (0, 0)$. Ainsi $3y = x$ et $9x + 5y = 14y = 0$ donc $y = 0$ et ainsi $x = 0$ donc $u = 0_E$ ce qui montre que $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$. D'après le théorème du rang $\dim \mathbb{R}^2 = \underbrace{\dim \text{Ker}(u)}_{=0} + \dim \text{Im}(u) = \dim \text{Im}(u)$. Or $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}^2$, donc $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2

qui a la même dimension que \mathbb{R}^2 donc $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^2$

2. Déterminer le noyau d'une application linéaire grâce à son image et le théorème du rang

Soit f l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x + 2y - z \end{aligned}$$

Comme $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, $\dim \text{Im}(f) \leq 1$, de plus $f(1, 0, 0) = 1$, et $\{1\}$ est une famille libre à 1 élément dans un espace vectoriel de dimension 1 (\mathbb{R}), c'est donc une famille génératrice. Ainsi $f(1, 0, 0)$ engendre \mathbb{R} et donc f est surjective, c'est-à-dire que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ et donc $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f) = 1$.

Ainsi d'après le théorème du rang $\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker}(f) = 3$ donc $\dim \text{Ker}(f) = 2$. On en déduit que $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y - z = 0\}$ est de dimension 2. De plus $(1, 1, 3)$ et $(0, 1, 2)$ sont deux vecteurs de $\text{Ker}(f)$ qui forment une famille libre et donc une base de $\text{Ker}(f)$. En conclusion $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 3), (0, 1, 2))$.

3. Formule de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriel grâce au théorème du rang

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriel de E . Soit f l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_1 + E_2 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 + x_2 \end{aligned}$$

On a $\text{Im}(f) = E_1 + E_2$ et $\text{Ker}(f) = \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}$. Ce noyau est isomorphe à $E_1 \cap E_2$ par l'application $x \mapsto (x, -x)$, on a donc $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim \text{Ker}(f)$

Ainsi $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$

Et donc $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

4.3 Caractérisation des isomorphismes

Propriété 3.4.32 Caractérisation des isomorphismes

Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n et u une application linéaire de E dans F . On a alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}$$

En particulier, lorsque $E = F$, u est un endomorphisme, dans ce cas u est injective si et seulement si elle est surjective.

DÉMONSTRATION

Il suffit de démontrer u injective $\iff u$ surjective . D'après le théorème du rang on a :

$$\dim F = \dim E = \dim \text{Im}(u) + \dim \text{Ker}(u)$$

L'application u est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ ce qui équivaut à $\dim F = \dim \text{Im}(u)$ c'est-à-dire $F = \text{Im}(u)$, et ainsi à la surjectivité de u .

Propriété 3.4.33 Composition par un isomorphisme

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$

➤ Si u est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$

➤ Si v est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$

Autrement dit composer par un **isomorphisme conserve le rang**.

DÉMONSTRATION

$$\text{Im}(v \circ u) = \{v(u(x)) \mid x \in E\} = \{v(y) \mid y \in \text{Im}(u)\} = v(\text{Im}(u))$$

➤ Si u est bijective, alors $\text{Im}(u) = E$ et donc $\text{Im}(v \circ u) = v(E) = \text{Im}(v)$ c'est-à-dire $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$

➤ Si v est bijective alors $v' : \begin{matrix} \text{Im}(u) & \rightarrow v(\text{Im}(u)) \\ y & \mapsto v(y) \end{matrix}$ est un isomorphisme. Donc $\dim \text{Im}(u) = \dim v(\text{Im}(u))$ c'est-à-dire $\text{rg}(u) = \text{rg}(v \circ u)$

4.4 Hyperplans et formes linéaires

Définition 3.4.34 Hyperplan vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension n . On appelle **hyperplan vectoriel** tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$

EXEMPLES :

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, toute droite vectorielle (espace engendré par un vecteur non nul) est un hyperplan vectoriel.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, tout plan vectoriel est un hyperplan vectoriel.
3. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ est un hyperplan de E , en effet $\{(3, 0, 1), (0, 3, 2)\}$ est une base de F qui est donc de dimension 2. On peut aussi remarquer que F est le noyau d'une forme linéaire u , donc d'après le théorème du rang $\dim E = \text{rg}(u) + \dim \text{Ker}(u) = 1 + \dim F = 3$. On a en effet $\text{rg}(u) = 1$ car $u(1, 0, 0) = 1$ donc $\text{Im}(u) = \mathbb{R}$. Et ainsi on obtient que $\dim F = 2$.

Propriété 3.4.35 Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) H est un **hyperplan**
- (ii) il existe une **droite vectorielle** D telle que $E = H \oplus D$
- (iii) il existe une **forme linéaire non nulle** f telle que $H = \text{Ker}(f)$

DÉMONSTRATION

(i) \Rightarrow (ii) Si le sous-espace H est de dimension $n - 1$, il admet dans E un supplémentaire D et on a

$$n = \dim E = \dim(H \oplus D) = \dim H + \dim D = n - 1 + \dim D$$

Ainsi $\dim D = 1$, c'est donc une droite vectorielle.

(ii) \Rightarrow (iii) Soit p la projection de E sur $D = \text{Vect}(d)$ ($d \notin H$) parallèlement à H .

On définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que $\forall x \in E, p(x) = f(x)d$. f est linéaire car

$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, p(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y)d$ par définition et par linéarité de p ,

$p(\alpha x + \beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y) = \alpha f(x)d + \beta f(y)d = (\alpha f(x) + \beta f(y))d$ donc $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

De plus, $H = \text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$ car $x \in \text{Ker}(p) \Leftrightarrow p(x) = 0_E = f(x)d \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(f)$.

(iii) \Rightarrow (i) S'il existe une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker}(f)$, alors d'après le théorème du rang on a

$$\dim E = \dim \text{Im}(f) + \dim H$$

Comme f est une forme linéaire non nulle, son image est un sous espace vectoriel de \mathbb{K} non réduit à $\{0\}$ donc de dimension 1, ce qui donne

$$\dim H = \dim E - 1 = n - 1$$

Propriété 3.4.36 Équation d'un hyperplan

Soit \mathcal{B} une base de E , une partie H de E est un hyperplan si et seulement si elle admet une équation dans \mathcal{B} du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

où $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ et (x_1, x_2, \dots, x_n) les composantes d'un vecteur de H exprimées dans la base \mathcal{B}

DÉMONSTRATION

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de E , c'est-à-dire $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ et $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

On a donc pour tout $x \in E, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Soit f une forme linéaire sur E ,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

On a noté $a_i = f(e_i)$. On sait que tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, ainsi H un

hyperplan peut s'écrire $H = \text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = \{x \in E \mid \sum_{i=1}^n x_i a_i = 0\}$

Enfin, puisque f est non nulle on a $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

EXEMPLE : Dans \mathbb{R}^3 , les hyperplans sont de la forme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$.

Propriété 3.4.37 Formes linéaires proportionnelles

Soit f et g deux formes linéaires non nulles telles que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda g$.

Cela veut dire que si F, G sont deux hyperplans de E , en posant f, g deux formes linéaires telles que $F = \text{Ker}(f)$ et $G = \text{Ker}(g)$, qu'on a $F = G \Leftrightarrow (f, g)$ est une famille liée.

DÉMONSTRATION

Soit f et g deux formes linéaires non nulles telles que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$. Puisque $H = \text{Ker}(f)$ est un hyperplan, il existe un droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$. Soit $e_n \in D$ non nul. Puisque $e_n \notin \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$, $f(e_n) \neq 0$ et $g(e_n) \neq 0$.

On a alors $\forall x \in E, x = h + d = h + \alpha e_n$, avec $h \in H, d \in D$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Ainsi :

$$g(x) = g(h + \alpha e_n) = \alpha g(e_n)$$

$$f(x) = f(h + \alpha e_n) = \alpha f(e_n) = \alpha \frac{f(e_n)}{g(e_n)} g(e_n) = \underbrace{\alpha}_{\lambda} \frac{f(e_n)}{g(e_n)} g(x)$$

Donc $f = \lambda g$