Chapitre 1

Étude locale

Table des matières

1 Relations de comparaison

1.1 Fonctions dominées, fonctions négligeables

1.1.1 Définitions, exemples

RAPPELS :

1. Si $a \in \mathbb{R}$, un voisinage de a est un intervalle du type $[a-\alpha, a+\alpha]$ ou $]a-\alpha, a+\alpha[$
2. Si $a = +\infty$, un voisinage de a est un intervalle du type $[\alpha, +\infty[$ ou $]\alpha, +\infty[$
3. Si $a = -\infty$, un voisinage de a est un intervalle du type $]-\infty, \alpha]$ ou $]-\infty, \alpha[$

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie une propriété sur un voisinage V de a, si la fonction vérifie la propriété sur $\mathcal{D} \cap V$. En pratique :

- Si $a \in \mathcal{D}$ alors $\mathcal{D} \cap V = [a-\alpha, a+\alpha]$ ou $\mathcal{D} \cap V = [a, a+\alpha]$
- Si $a \notin \mathcal{D}$ alors $\mathcal{D} \cap V = [a-\alpha, a[\cup]a, a+\alpha]$ ou $\mathcal{D} \cap V =]a, a+\alpha]$

Dans la suite, on considère des fonctions définies sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et si $a \in \mathcal{D}$, alors on considère que **les fonctions sont continues en a.**

Définition 1.1.1 Fonctions dominées
Soit f et φ deux fonctions définies sur une partie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On dit que f est **dominée** par φ **au voisinage** de a s'il existe une fonction u **bornée au voisinage** de a telle que $f = \varphi u$ au voisinage de a.
Dans ce cas on note $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$, on dit « f égale grand O de φ ».

EXEMPLES :

1. $x^2 \sin \frac{1}{x} \underset{0}{=} \mathcal{O}(x^2)$, en effet $\forall x \in [-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$, $\sin \frac{1}{x}$ est bornée par 1.

   Dans ce cas $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} = \varphi(x) u(x) \underset{0}{=} \mathcal{O}(\varphi(x))$
2. $\ln x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(x)$, en effet $\forall x \in [e, +\infty[, \quad \ln x = x \cdot \frac{\ln x}{x}$ et $\left|\frac{\ln x}{x}\right| \leq \frac{1}{e}$

REMARQUES :

1. Une fonction est **bornée au voisinage** de a si et seulement elle est dominée par une fonction constante, c'est-à-dire : $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(1) \iff f$ **bornée**.
2. Comme $f = f \times 1$, $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$

Définition 1.1.2 Fonctions négligeables
Soit f et φ deux fonctions définies sur une partie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On dit que f est **négligeable** devant φ **au voisinage** de a s'il existe une fonction ε telle que $f = \varphi\varepsilon$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$
Dans ce cas on note $f \underset{a}{=} o(\varphi)$, on dit « f égale petit o de φ ».

EXEMPLES :

1. $x^2 \underset{0}{=} o(\sin x)$, en effet sur $[-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$, $\quad \varepsilon(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x} = 0$
2. $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$, en effet $\forall x \in [\alpha, +\infty[, \quad \varepsilon(x) = \frac{x}{e^x}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

REMARQUE : Une fonction tend vers 0 en a si et seulement si elle est négligeable devant 1, c'est-à-dire : $f \underset{a}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

1.1.2 Propriétés

Propriété 1.1.3 $o(\varphi) \Longrightarrow \mathcal{O}(\varphi)$
Si f est **négligeable** devant φ en a alors elle est **dominée** par φ : $f \underset{a}{=} o(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$

DÉMONSTRATION

Soit $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ donc $\forall x \in \mathcal{D} \cap [a-\alpha, a+\alpha], \quad f(x) = \varphi(x)\varepsilon(x)$.
Puisque $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, ε est bornée au voisinage de a. Ainsi $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$.

Propriété 1.1.4 Compatibilité avec $\times$

$\mathcal{O}()$ est **compatible** avec la multiplication :

- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ et $\lambda \neq 0 \implies \lambda f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$: $\lambda\mathcal{O}(\varphi) = \mathcal{O}(\lambda\varphi) = \mathcal{O}(\varphi)$
- $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2) \implies f_1 f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1\varphi_2)$: $\mathcal{O}(\varphi_1) \times \mathcal{O}(\varphi_2) = \mathcal{O}(\varphi_1\varphi_2)$

$o()$ est **compatible** avec la multiplication : :

- $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ et $\lambda \neq 0 \implies \lambda f \underset{a}{=} o(\varphi)$: $\lambda o(\varphi) = o(\lambda\varphi) = o(\varphi)$
- $f_1 \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(\varphi_2) \implies f_1 f_2 \underset{a}{=} o(\varphi_1\varphi_2)$: $o(\varphi_1) \times o(\varphi_2) = o(\varphi_1\varphi_2)$

Démonstration

La démonstration sera faite en exercice.

Remarques :

1. Si $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_2 f_1 = f_2\varphi u$ donc $f_2 f_1 \underset{a}{=} f_2 \times \mathcal{O}(\varphi) \underset{a}{=} \mathcal{O}(f_2\varphi)$
2. Si $f_1 \underset{a}{=} o(\varphi)$ alors $f_2 f_1 = f_2\varphi\varepsilon$ donc $f_2 f_1 \underset{a}{=} f_2 \times o(\varphi) \underset{a}{=} o(f_2\varphi)$
3. Si $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi) + \mathcal{O}(\varphi) \underset{a}{=} 2\mathcal{O}(\varphi) \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$
4. Si $f_1 \underset{a}{=} o(\varphi)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(\varphi)$ alors $f_1 + f_2 \underset{a}{=} o(\varphi) + o(\varphi) \underset{a}{=} 2o(\varphi) \underset{a}{=} o(\varphi)$
5. <u>Attention</u> : $\mathcal{O}(\varphi_1) + \mathcal{O}(\varphi_2) \neq \mathcal{O}(\varphi_1 + \varphi_2)$
6. <u>Attention</u> : $o(\varphi_1) + o(\varphi_2) \neq o(\varphi_1 + \varphi_2)$

Exemples :

$\mathcal{O}()$

1. $3\sin x \underset{0}{=} 3\mathcal{O}(x) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x)$
2. $5x + 3\sin x \underset{0}{=} \mathcal{O}(5x) + \mathcal{O}(3x) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x)$
3. $x\sin x \underset{0}{=} \mathcal{O}\left(x^2\right)$
4. $\dfrac{\sin x}{x} \underset{0}{=} \mathcal{O}(1)$
5. $\sin x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$
6. $1 - x \underset{1}{=} \mathcal{O}(1)$

$o()$

1. $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$
2. $10x^2 \underset{0}{=} 10o(x) \underset{0}{=} o(x)$
3. $x + x^2 \underset{0}{=} o(1) + o(x) \underset{0}{=} o(1)$
4. $1 + x \underset{+\infty}{=} o\left(x^2\right)$
5. $\sin x \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{x})$
6. $1 - x \underset{1}{=} o(1)$

Propriété 1.1.5 Transitivité et composition

$\mathcal{O}()$ et $o()$ sont **transitifs** :

- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2) \implies f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$: $\mathcal{O}(\mathcal{O}(\varphi_2)) = \mathcal{O}(\varphi_2)$
- $f \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} o(\varphi_2) \implies f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$: $o(o(\varphi_2)) = o(\varphi_2)$

$\mathcal{O}()$ et $o()$ sont compatibles avec la **compositions** :

- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} o(\varphi_2) \implies f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$: $\mathcal{O}(o(\varphi_2)) = o(\varphi_2)$
- $f \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2) \implies f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$: $o(\mathcal{O}(\varphi_2)) = o(\varphi_2)$

Démonstration

La démonstration sera faite en exercice.

Exemples

1. $\sin(x^2 + x) \underset{0}{=} \mathcal{O}\left(x^2 + x\right) \underset{0}{=} \mathcal{O}(x)$
2. $\sin x^2 \underset{0}{=} o(x) \underset{0}{=} o(1)$

Propriété 1.1.6 Conséquence de la comparaison

- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ avec φ bornée $\implies$ f est bornée sur un voisinage de a.
- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0 \implies \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ avec φ bornée $\implies \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Démonstration

Ce sont des conséquences directes de la définition et des propriétés précédentes :

- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ avec φ bornée $\Longrightarrow$ $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ avec $\varphi \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$ $\Longrightarrow$ $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\mathcal{O}(1)) \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$ $\Longrightarrow$ f est bornée sur un voisinage de a.
- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ $\Longrightarrow$ $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ avec $\varphi \underset{a}{=} o(1)$ $\Longrightarrow$ $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(o(1)) \underset{a}{=} o(1)$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ avec φ bornée $\Longrightarrow$ $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ avec $\varphi \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$ $\Longrightarrow$ $f \underset{a}{=} o(\mathcal{O}(1)) \underset{a}{=} o(1)$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Fonction φ non nulle sur $\mathcal{D}\setminus\{a\}$

Dans beaucoup de cas la fonction dans $\mathcal{O}()$ ou $o()$ est non nulle sur $\mathcal{D}\setminus\{a\}$, ce qui permet une définition équivalente de $\mathcal{O}()$ et $o()$.

Propriété 1.1.7 Définitions équivalentes de $\mathcal{O}()$ et $o()$

On suppose que $\forall x \in \mathcal{D}\setminus\{a\}, \quad \varphi(x) \neq 0$ alors :

- $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi) \iff \dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}\setminus\{a\} \cap V_a \ \left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leq M$
- $f \underset{a}{=} o(\varphi) \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$

Démonstration

- $\boxed{\Rightarrow}$ Si $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ alors $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$, donc $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a

  $\boxed{\Leftarrow}$ si $a \notin \mathcal{D}$, alors si $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a on a $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$ et donc $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$.

  Dans le cas où $a \in \mathcal{D}$, si $\varphi(a) \neq 0$, le raisonnement reste valable, si $\varphi(a) = 0$, alors puisque $\dfrac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a et que f est continue en a, $f(a) = 0$ et donc $f = \varphi u$ sur $\mathcal{D}$ avec u bornée.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Si $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ alors $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{=} o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$

  $\boxed{\Leftarrow}$ Si $a \notin \mathcal{D}$ alors si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ on a $\dfrac{f}{\varphi} \underset{a}{=} o(1)$ et donc $f \underset{a}{=} o(\varphi)$

  Si $a \in \mathcal{D}$, alors sur $\mathcal{D}\setminus\{a\}$ on a $\dfrac{f}{\varphi} = \varepsilon$ et comme f et φ sont continues en a, $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)\varepsilon(x) = \varphi(a) \lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, donc on pose $\varepsilon(a) = 0$ et alors $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) = \varphi(x)\varepsilon(x)$.

Remarque : en pratique nous utiliserons cette proposition en tant que définition de $\mathcal{O}()$ et $o()$.

1.1.3 Croissances comparées

En $a = 0$

1. $0 < n < m \implies x^m \underset{0}{=} o(x^n)$ donc $x^2 \underset{0}{=} o(x)$ et $x^3 \underset{0}{=} o(x^2)$
2. $0 < n < m \implies \dfrac{1}{x^n} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^m}\right)$ donc $\dfrac{1}{x} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $\dfrac{1}{x^2} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$
3. $\ln x \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en effet $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$

En $a = +\infty$

1. $0 < n < m \implies x^n \underset{0}{=} o(x^m)$ donc $x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^3)$
2. $0 < n < m \implies \dfrac{1}{x^m} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ donc $\dfrac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{x^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
3. $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ en effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
4. $0 < n \implies x^n \underset{+\infty}{=} o(e^x)$
5. $0 < n \implies e^{-x} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$

1.2 Fonctions équivalentes

1.2.1 Définitions

Définition 1.1.8 Fonctions équivalentes
Soit f, g définies sur $\mathcal{D}$, on dit que f est **équivalente à** g en a si au voisinage de a $f = gh$ avec $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$.
Dans ce cas on note $f \underset{a}{\sim} g$ on dit « f équivalente à g ».

Propriété 1.1.9 Lien entre $\sim$ et $\mathcal{o}\,()$

$$f \underset{a}{\sim} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad f - g \underset{a}{=} \mathcal{o}\,(g)$$

Démonstration

$f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement il existe ε fonction qui tend vers 0 telle que $f = (1+\varepsilon)g$, si et seulement si $f - g = \varepsilon g \underset{a}{=} \mathcal{o}\,(g)$

Exemples :

1. On peut écrire $f \underset{a}{=} g + \mathcal{o}\,(g)$ et alors dans ce cas $f \underset{a}{\sim} g$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$ donc $\cos x - 1 \underset{0}{=} \mathcal{o}\,(1)$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1$

Propriété 1.1.10 $\sim$ est une relation d'équivalence
On a :

- **Réflexivité** : $f \underset{a}{\sim} f$
- **Symétrie** : $f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$
- **Transitivité** : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \quad\Longrightarrow\quad f \underset{a}{\sim} h$

Démonstration

- **Réflexivité** $f = f \times 1$ donc $f \underset{a}{\sim} f$
- **Symétrie** Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors sur un voisinage de a, $f = gu$ avec u qui tend vers 1, elle est donc non nulle sur un voisinage V_a de a. Sur $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap V_a$ on a $g = \dfrac{1}{u} f$ avec $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{u(x)} = 1$ donc $g \underset{a}{\sim} f$.
- **Transitivité** : On a sur un voisinage de a $f = gu_1$ et $g = hu_2$ ainsi $f = hu_1u_2$ avec u_1u_2 qui tend vers 1.

Exemple : $\cos x \underset{0}{\sim} 1 \underset{0}{\sim} 1 + x$ donc $\cos \underset{0}{\sim} 1 + x$ mais on a aussi $\cos x \underset{0}{\sim} 1 - x^2$

Fonction g qui ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \setminus \{a\}$

Propriété 1.1.11 Définition équivalente de $\sim$
Si $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{a\},\ g(x) \neq 0$ alors :

$$f \underset{a}{\sim} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f}{g} = 1$$

Démonstration

f est équivalent à g si et seulement si $f - g \underset{a}{=} \mathcal{o}\,(g)$, si et seulement si $\dfrac{f-g}{g} = \dfrac{f}{g} - 1$ tend vers 0, c'est-à-dire $\dfrac{f}{g}$ tend vers 1.

Remarque : En pratique on utilise cette définition.

1.2.2 Résultats fondamentaux

Propriété 1.1.12 Équivalent et limite

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = L}$
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} L$

Démonstration

- Puisque $f = gh$ avec $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$ on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{L} = 1$ donc $f \underset{a}{\sim} L$

Remarques :

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ **on a pas** $f \underset{a}{\sim} 0$ (sauf si $f = 0$ au voisinage de a).
   En pratique on retient que $\boxed{\cancel{f \underset{a}{\sim} 0}}$, on n'a **jamais** f équivalente à 0.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ **on a pas toujours** $f \underset{a}{\sim} g$. Par exemple $\boxed{\cancel{x \underset{0}{\sim} x^2}}$
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ **on a pas toujours** $f \underset{a}{\sim} g$. Par exemple $\boxed{\cancel{x \underset{+\infty}{\sim} x^2}}$

Exemples :

1. $\cos x \underset{0}{\sim} 1$
2. $e^x \underset{0}{\sim} 1$
3. $1 + x \underset{0}{\sim} 1$
4. $e^x \underset{0}{\sim} \cos x$
5. $\frac{1}{1+x} \underset{0}{\sim} 1$
6. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \underset{0}{\sim} 2$

Propriété 1.1.13 Liens entre $\mathcal{O}()$, $o()$ et $\sim$

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\mathcal{O}(f) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $o(f) \underset{a}{=} o(g)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$

Démonstration

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f - g \underset{a}{=} o(g)$ donc $f \underset{a}{=} g + o(g) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(g) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.
  On peut aussi dire que si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f = gh$ avec h qui tend vers 1 donc bornée sur un voisinage de a, donc $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ donc $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(f)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ donc $\mathcal{O}(f) \underset{a}{=} \mathcal{O}(\mathcal{O}(g)) \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ donc $o(f) \underset{a}{=} o(\mathcal{O}(g)) \underset{a}{=} o(g)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$ il existe deux fonctions, u qui tend vers 1 et v bornée au voisinage de a, telles que $f \underset{a}{=} gu$ et $g \underset{a}{=} hv$ donc $f \underset{a}{=} huv$ avec uv bornée au voisinage de a, donc $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(h)$
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ il existe deux fonctions, u qui tend vers 1 et ε qui tend vers 0 , telles que $f \underset{a}{=} gu$ et $g \underset{a}{=} h\varepsilon$ donc $f \underset{a}{=} hu\varepsilon$ avec $u\varepsilon$ qui tend vers 0, donc $f \underset{a}{=} o(h)$

1.2.3 Équivalents et dérivée

Propriété 1.1.14 Équivalents et dérivée
Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) \neq 0$ alors :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

Démonstration

$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a) \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} = 1 \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)} = f'(a)$ et $f'(a) \neq 0$

Remarques :

1. On a dans ce cas :$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$
2. Si $f'(a) = 0$ alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(x-a)$

Exemples :

1. $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$
3. $\ln 1 + x \underset{0}{\sim} x$ donc $\ln 1 + x \underset{0}{=} x + o(x)$
4. $\cos x \underset{0}{=} 1 + o(x)$
5. $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x$ donc $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
6. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$
7. $\cos x \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ donc $\cos x \underset{\frac{\pi}{2}}{=} \frac{\pi}{2} - x + o\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

1.2.4 Opération sur les équivalents

Propriété 1.1.15 Substitution
Soit f, g deux fonctions équivalentes en a. Si u est une fonction telle que $\lim_{t \to b} u(t) = a$, alors $f(u) \underset{b}{\sim} g(u)$

Démonstration

Soit h une fonction qui tend vers 1 telle que $f = gh$ au voisinage de a.
Au voisinage de b : $f(u(t)) \underset{b}{=} g(u(t))h(u(t))$ avec $\lim_{t \to b} h(u(t)) = 1$.

Remarques : Dans la plupart des cas pratiques on fera :

1. une substitution avec $a = b$,
2. une substitution affine : $x = t - c$, le nouvel équivalent sera donc en $a + c$

Exemples :

1. $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $\sin 2t \underset{0}{\sim} 2t$
2. $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $e^{\sin t} - 1 \underset{0}{\sim} \sin t$
3. $\ln 1 + x \underset{0}{\sim} x$ donc $\ln \cos t \underset{0}{\sim} \cos t - 1$
4. On sait que $\ln \underbrace{1+x}_{t} \underset{0}{\sim} \underbrace{x}_{t-1}$, quand $x \to 0$ on a $t \to 1$, donc le nouvel équivalent est en 1 : $\ln t \underset{1}{\sim} t - 1$

Attention : Si $f \underset{a}{\sim} g$, on **ne peut pas dire** $u(f) \underset{a}{\sim} u(g)$: $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$ donc $\cancel{e^{x+1} \underset{+\infty}{\sim} e^x}$

Propriété 1.1.16 Compatibilité avec $\times$
$\sim$ est **compatible** avec la multiplication : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \implies f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$

Démonstration

Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{a}{=} g_1 h_1 g_2 h_2 \underset{a}{=} (g_1 g_2)(h_1 h_2)$ et $\lim_{x \to a} h_1 h_2 = 1$

Remarque : On a donc si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ avec α **fixe**.

Exemples :

1. $(2x^2 - \sqrt{x}) \underset{0}{\sim} -\sqrt{x}$ donc $(2x^2 - \sqrt{x})(e^x - 1) \underset{0}{\sim} -x\sqrt{x}$
2. $3 + x + 2x^2 \underset{0}{\sim} 3$ et $2x^2 - x^3 \underset{0}{\sim} 2x^2$ donc $\frac{3 + x + 2x^2}{2x^2 - x^3} \underset{0}{\sim} \frac{3}{2x^2}$
3. $-1 + 4x + x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $x + 2x^3 \underset{+\infty}{\sim} 2x^3$ donc $\frac{-1 + 4x + x^2}{x + 2x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$
4. $\sin \frac{t}{2} \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$ et $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ ainsi $\cos t - 1 \underset{0}{\sim} -2\left(\frac{t}{2}\right)^2 = -\frac{t^2}{2}$
5. $1 - \cos t \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, en posant $t = \arccos u$, on a $\cos t = u$ et quand $t \to 0$ on a $u \to 1$ ainsi : $1 - u \underset{1}{\sim} \frac{\arccos^2 u}{2}$ et donc $\arccos u \underset{1}{\sim} \sqrt{2(1-u)}$, puis avec $u = 1 - x$ on obtient $\arccos(1-x) \underset{0}{\sim} \sqrt{2x}$

1.2.5 Les équivalents et l'addition

$\sim$ N'EST PAS COMPATIBLE AVEC + :

si $f \underset{a}{\sim} g$ **on n'écrit pas** : $\cancel{1+f \underset{a}{\sim} 1+g}$ si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ **on n'écrit pas** $\cancel{f_1+f_2 \underset{a}{\sim} g_1+g_2}$

Exemples :

1. $x+x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ **mais** $\cancel{x \underset{+\infty}{\sim} x^2-x^2}$
2. $\cos x \underset{0}{\sim} 1$ et $1+x \underset{0}{\sim} 1$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1+x$ **mais** $\cancel{\cos x - 1 \underset{0}{\sim} x}$

Lorsqu'on doit faire un calcul avec des + et des −, on peut **factoriser** : par exemple :
On cherche un équivalent en 0 de $\sin 2x + \ln 1 + x$. On écrit :

$$\sin 2x + \ln(1+x) = x\left(\underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{\longrightarrow 2} + \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\longrightarrow 1}\right)$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \ln(1+x)}{3x} = 1$ donc $\sin 2x + \ln(1+x) \underset{0}{\sim} 3x$

Propriété 1.1.17 Équivalent et +
Si f et g sont deux fonctions telles que $g \underset{a}{=} o(f)$ alors $f+g \underset{a}{\sim} f$: on a $f+o(f) \underset{a}{\sim} f$

Démonstration

$f+g \underset{a}{\sim} f \iff f+g-f \underset{a}{=} o(f) \iff g \underset{a}{=} o(f)$

Remarque :
Cette propriété permet de trouver certains équivalents de somme, mais il faut faire **très attention**.

Exemples :

1. On cherche un équivalent en 0 de $\sin 2x + \cos x - 1$. On a $\sin 2x \underset{0}{\sim} 2x$ et $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \underset{0}{=} o(2x)$
   Donc $\sin 2x + \cos x - 1 \underset{0}{=} \sin 2x + o(2x) \underset{0}{=} \sin 2x + o(\sin 2x)$
   Donc $\sin 2x + \cos x - 1 \underset{0}{\sim} \sin 2x \underset{0}{\sim} 2x$
2. $\ln(x) + x \underset{+\infty}{=} o(x) + x \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $\ln(x) + x \underset{+\infty}{\sim} x$
3. $\ln \sin x = \ln x + \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$ donc $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \underset{0}{=} o(\ln x)$
   Donc $\ln \sin x \underset{0}{=} \ln x + o(\ln x)$ donc $\ln \sin x \underset{0}{\sim} \ln x$

1.2.6 Équivalents classiques en 0

Ci-dessous quelques équivalents en 0 à connaitre :

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$\sin x \underset{0}{\sim} x$	$\arcsin x \underset{0}{\sim} x$
$\tan x \underset{0}{\sim} x$	$\arctan x \underset{0}{\sim} x$
$\sinh x \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{Argsh} x \underset{0}{\sim} x$
$\tanh x \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{Argth} x \underset{0}{\sim} x$
$\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$	$\cosh x - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
$\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$
$\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$	$\dfrac{1}{1-x} - 1 \underset{0}{\sim} x$

1.3 Comparaison des suites

Pour les suites, on a les mêmes définitions et les mêmes propriétés que pour les fonctions. Les comparaisons $o\left(\right), \mathcal{O}\left(\right), \sim$ sont toujours en $+\infty$.
On considère souvent des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \neq 0$$

1.3.1 Définitions

Définition 1.1.18 Comparaisons
Soit (u_n) et (v_n) deux suites, on dit que :

- (u_n) est **dominée** par (v_n) si il existe une **suite bornée** (w_n) telle que $u_n = v_n w_n$ à partir d'un certain rang. On note $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$.
- (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si il existe une **suite** (w_n) **qui tend vers 0** telle que $u_n = v_n w_n$ à partir d'un certain rang. On note $u_n = o\left(v_n\right)$.
- (u_n) est **équivalente** à (v_n) si il existe une **suite** (w_n) **qui tend vers 1** telle que $u_n = v_n w_n$ à partir d'un certain rang. On note $u_n \sim v_n$.

Propriété 1.1.19 Définitions équivalentes de $o\left(\right), \mathcal{O}\left(\right), \sim$
Si, à parti d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas, alors :

- (u_n) est **dominée** par (v_n) si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n}$ est **bornée**.
- (u_n) est **négligeable** devant (v_n) si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.
- (u_n) est **équivalente** à (v_n) si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.

Propriété 1.1.20 Lien entre $o\left(\right)$ et $\sim$

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o\left(v_n\right)$$
$$u_n + v_n \sim u_n \iff v_n = o\left(u_n\right)$$

Exemples :

1. $n^2 = o\left(n^3\right)$
2. $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. $\sin \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$
4. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) \sim \dfrac{1}{2n}$
5. $\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{\alpha} - 1 \sim \dfrac{3\alpha}{n}$
6. $\dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} \sim \dfrac{2}{n^2}$

1.3.2 Résultats fondamentaux et opérations

Propriété 1.1.21 Équivalents et limites

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \longrightarrow L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \longrightarrow L$
- Si $\lim u_n = \lim v_n = L \neq 0$ alors $u_n \sim v_n$

Exemples : 1. $\cos \dfrac{1}{n} \sim 1$ 2. $e^{\frac{1}{n^2}} \sim 1$

Propriété 1.1.22 Opérations

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$

Remarque : $u_n^{\alpha} \sim v_n^{\alpha}$ avec α **fixe**.

Exemples : 1. $e^{\frac{1}{2n}} \sin \dfrac{3}{n} \sim \dfrac{3}{n}$ 2. $\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)\left(\sin^2 \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right) \sim 2\left(\dfrac{2}{n}\right)^2 \sim \dfrac{8}{n^2}$

1.4 Calcul de limites grâce aux équivalents

Cette partie permet montre à travers l'exemple le calcul de limites grâce aux équivalents.

1.4.1 Limite d'une fonction

1. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
   - Attention il y a un $-$, on ne peut pas directement utiliser les équivalents.
   - $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$
   - On ne peut pas utiliser les équivalents de $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1-x}$, mais on sait que $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) = 2$

     Donc $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \underset{0}{\sim} 2$
   - Ainsi $\dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x}{x\times 2} = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1}$
2. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$
   - On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
   - Ainsi $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \sqrt{2}\dfrac{x}{|x|}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} = \sqrt{2} \text{ et } \lim\limits_{x\to 0^-} = -\sqrt{2}}$
3. Calcul de $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}$
   - Pour trouver un équivalent de cos on peut dire que $\cos x - \cos\frac{\pi}{2} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \cos'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}-x$
   - On a donc $\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} = 1}$
   - On peut aussi poser $t = \frac{\pi}{2}-x$, et donc $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2}-t) = \sin t$. Et quand $x \to \frac{\pi}{2}$, $t \to 0$, donc l'équivalent est en 0.
   - On a donc $\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} = \dfrac{t}{\sin t} \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} = 1}$

1.4.2 Limite d'une suite

1. Calcul de $\lim \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$
   - Il y a un $-$, on ne peut pas directement utiliser les équivalents.
   - $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{n^2+n+1-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}$
   - $\lim \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = 2$ donc $\dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} \sim \dfrac{2n}{n\times 2} = 1$

     Donc $\boxed{\lim \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} = 1}$
2. Calcul de $\lim n^{\frac{1}{\ln n}}$
   - En cas de puissance compliquée, on utilise ln
   - $\ln\left(n^{\frac{1}{\ln n}}\right) = \dfrac{1}{\ln n}\ln n = 1$ donc $\boxed{\lim n^{\frac{1}{\ln n}} = e}$
3. Calcul de $\lim \dfrac{\ln(1+n^2)}{n+1}$
   - $\ln(n^2+1) = \ln(n^2(1+\frac{1}{n^2})) = \ln n^2 + \ln(1+\frac{1}{n^2}) = \ln n^2 + o\left(\ln n^2\right) \sim \ln n^2 = 2\ln n$
   - $\dfrac{\ln(1+n^2)}{1+n} \sim \dfrac{2\ln n}{n} \to 0$ donc $\boxed{\lim \dfrac{\ln(1+n^2)}{n+1} = 0}$

2 Développements limités

2.1 Définitions

2.1.1 Développements limités en 0

Définition 1.2.23 Développements limités - DL
Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ admet un **développement limité à l'ordre n en 0** si :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^n + o(x^n)$$

Remarque : Dans ce cas on peut écrire $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Exemples :

1. $$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
   Or $\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{0}{\sim} x^{n+1} \underset{0}{=} o(x^n)$, donc :
   $$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
2. En remplaçant x par $-x$ on obtient :
   $$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + o(x^n)$$

Remarques :

1. Soit $m \leq n$, si f admet un développement limité à l'ordre n, alors elle admet un développement limité à l'ordre m.
2. Si f admet un développement limité d'ordre 0, $f(x) \underset{0}{=} a_0 + o(1) \underset{0}{=} a_0 + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = a_0}$
3. Si f admet un développement limité d'ordre 1, $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + o(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
   On a donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = a_0}$, on peut donc prolonger f par continuité en 0 et
   $$\frac{f(x) - a_0}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{0}{=} a_1 + \varepsilon(x)$$
   Ainsi $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1$ donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = a_1}$

Propriété 1.2.24 Unicité du développement limité
Si une fonction admet un développement limité en 0 à l'ordre n, ce développement est **unique**. On a :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n) \quad \Longrightarrow \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n) = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$$

Démonstration

Si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k \underset{0}{=} o(x^n)$

On a donc $a_0 - b_0 \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) x^k + o(x^n) \underset{0}{=} o(1) \underset{0}{=} \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $a_0 - b_0 = 0$

On en déduit $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) x^k \underset{0}{=} o(x^n)$ et donc $(a_1 - b_1)x \underset{0}{=} -\sum_{k=2}^{n} (a_k - b_k) x^k + o(x^n) \underset{0}{=} o(x) \underset{0}{=} x\varepsilon(x)$
donc $a_1 - b_1 \underset{0}{=} \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $a_1 - b_1 = 0$
En répétant l'opération on montre que $\forall k \in [\![0, n]\!]\ a_k = b_k$

2.1.2 Développements limités en a

Définition 1.2.25 Développement limité en $a \in \mathbb{R}$
On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ admet un **développement limité à l'ordre n en** a si $h \mapsto f(a+h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o\left(h^n\right)$$

Remarque : Avec $x = a+h$, on a $f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$

Exemple : DL à l'ordre 3 en 2 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

On pose $x = 2+h$ et on a $f(2+h) = \dfrac{1}{2+h} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{h}{2}}$

On sait que $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)$, on pose alors $u = \dfrac{h}{2}$, et on a $o\left(u^3\right) \underset{0}{=} o\left(h^3\right)$

On a donc $\dfrac{1}{1+\frac{h}{2}} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{4} - \dfrac{h^3}{8} + o\left(h^3\right)$

Ainsi $f(2+h) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4} + \dfrac{h^2}{8} - \dfrac{h^3}{16} + o\left(h^3\right)$

Et avec $x = 2+h$, $h = x-2$, on a $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x-2}{4} + \dfrac{(x-2)^2}{8} - \dfrac{(x-2)^3}{16} + o\left((x-2)^3\right)}$

2.1.3 Formule de Taylor-Young

Propriété 1.2.26 Formule de Taylor-Young
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$ donné par :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$$

Démonstration

On démontre cette formule par récurrence : on pose $J = \{h \in \mathbb{R},\ a+h \in I\}$

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, toute fonction de classe $\mathcal{C}^0$ (ie continue) possède un développement limité d'ordre 0 :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$$

- **Hérédité** : On suppose la propriété vérifiée pour n. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc par hypothèse de récurrence, elle admet le développement limité :

$$f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$$

et avec $x = a+h$, $\qquad f'(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{h^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o\left(h^n\right)$

On pose $\varphi(h) = f'(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{h^k}{k!} f^{(k+1)}(a) \underset{0}{=} o\left(h^n\right)$

Ce qui montre que $\dfrac{\varphi(h)}{h^n} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall h \in J \quad |h| \leq \alpha \Rightarrow |\varphi(h)| \leq \varepsilon |h|^n$

Avec Φ telle que $\Phi' = \varphi$, et $\Phi(0) = 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis sur $[0,h]$:

$$|\Phi(h) - \Phi(0)| \leq \sup_{t \in [0,h]} |\varphi(t)|\ |h| \leq \varepsilon |h|^{n+1}$$

Donc $\Phi(h) \underset{0}{=} o\left(h^{n+1}\right)$. De plus par intégration de φ entre 0 et t :

$$\Phi(t) - \Phi(0) \underset{0}{=} f(a+t) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) \underset{0}{=} o\left(t^{n+1}\right)$$

On en déduit que $f(a+t) \underset{0}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + o\left(t^{n+1}\right)$ c'est-à-dire avec $x = a+t$:

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^k(a) + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.1.4 Développement limités usuels en 0

En appliquant la formule de Taylor-Young, on peut calculer les développements limités en 0 suivants :

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\cosh x \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sinh x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$$

2.1.5 Développements limités en ∞

Définition 1.2.27 Développement limité en ∞
La fonction f admet un développement limité en ∞ si :

$$f(x) \underset{\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Remarque : On pose $t = \frac{1}{x}$ et on fait un développement au voisinage de $t = 0$

Exemple : développement limité à l'ordre 2 en $+\infty$ de $f(x) = \frac{x}{x-1}$

On pose $t = \frac{1}{x}$ et on a $f\left(\frac{1}{t}\right) \underset{0}{=} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{1}{1-t} \underset{0}{=} 1 + t + t^2 + o\left(t^2\right)$ et ainsi :

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

2.2 Opérations sur les développements limités

2.2.1 Développement limité d'une somme

Propriété 1.2.28 Développement limité d'une somme
Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n en 0, alors $f+g$ admet pour développement limité :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \text{ et } g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n) \quad \Longrightarrow \quad f(x)+g(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k) x^k + o(x^n)$$

Exemples :

1. Développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sin x + \cos x$
   - $\sin x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$ et $\cos \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + 0x^3 + o\left(x^3\right)$
   - Ainsi $\boxed{\sin x + \cos x \underset{0}{=} 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}$
2. Développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - e^x$
   - $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$ et $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$
   - Ainsi $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{6} + o\left(x^3\right)}$
3. Somme de deux développements à des ordres différents
   - si $f(x) \underset{0}{=} 1 + 2x + o(x)$ et $g(x) \underset{0}{=} x - 3x^2 + o\left(x^2\right)$ alors

$$f(x)+g(x) \underset{0}{=} +3x \underbrace{-3x^2}_{=o(x)} + o(x) + \underbrace{o\left(x^2\right)}_{=o(x)} \underset{0}{=} 1 + 3x + o(x)$$

   - La somme d'un développement à l'ordre n et d'un développement à l'ordre m est d'ordre $\min(m,n)$.

2.2.2 Développement limité d'un produit

Propriété 1.2.29 Développement limité d'un produit
Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n en 0, alors $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n) \text{ et } g(x) \underset{0}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \times g(x) \underset{0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n)$$

Remarque :
Dans le produit il y a des termes en x^m avec $m > n$, dans ce cas on ne les écrit pas car $x^m \underset{0}{=} o(x^n)$

Exemples :

1. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^x(1+\sin x)$
   -

$$e^x(1+\sin x) \underset{0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} \left(1 + x - \tfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \left(x + x^2 \underbrace{- \frac{x^4}{6} + x o\left(x^3\right)}_{=o(x^3)}\right) + \left(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{2} \underbrace{- \frac{x^5}{12} + \frac{x^2}{2} o\left(x^3\right)}_{=o(x^3)}\right) + \left(\tfrac{x^3}{6} + \underbrace{\frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{36} - \frac{x^3}{6} o\left(x^3\right)}_{=o(x^3)}\right)$$

$$\underset{0}{=} \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \left(x + x^2 + o\left(x^3\right)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right) + \left(\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)$$

$$\boxed{\underset{0}{=} 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}$$

- On remarque que tout développer demande beaucoup de calculs. On peut faire ce calcul de manière plus efficace en faisant comme ci dessous :

$$(a+bx)(c+dx) = ac + (bc+ad)x + bdx^2$$

On calcule pour chaque puissance de x.

- $$\begin{aligned} e^x(1+\sin x) &\underset{0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{0}{=} \ldots + (\ldots)x + (\ldots)x^2 + (\ldots)x^3 + o\left(x^3\right) \\ &\underset{0}{=} 1+2x+\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3+o\left(x^3\right) \\ &\underset{0}{=} 1+2x+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

2. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \sqrt{1+x}\ \sin x$

- $$\begin{aligned} \sqrt{1+x}\ \sin x &\underset{0}{=} \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{8}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{0}{=} x+\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)x^3+o\left(x^3\right) \underset{0}{=} x+\frac{x^2}{2}-\frac{7x^3}{24}+o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

2.2.3 Développement limité d'une fonction composée

EXEMPLES :

1. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = e^{\sin x}$
   - **étape 1** : On pose $u = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc fait un développement en $u=0$ de e^u
   - **étape 2** : **Pour trouver l'ordre à calculer en u, on utilise un équivalent de u** :
     $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $u \underset{0}{\sim} x$ donc $o\left(u^3\right) = o\left(x^3\right)$, on doit donc calculer jusqu'à $o\left(u^3\right)$.
   - **étape 3** : $e^{\sin x} = e^u \underset{0}{=} 1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)$ on fait le calcul pour chaque puissance de u :

     $u = \sin x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$

     $u^2 = (\sin x)^2 \underset{0}{=} \left(x-\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} x^2 + o\left(x^3\right)$

     $u^3 = (\sin x)^3 \underset{0}{=} \left(x-\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^3 \underset{0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$

     Donc $e^{\sin x} \underset{0}{=} 1+x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right) \underset{0}{=} \boxed{1+x+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)}$

2. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$
   - **étape 1** : $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on pose donc $1+u = \dfrac{\sin x}{x}$, et on fait un développement en $u=0$ de $\ln(1+u)$
   - **étape 2** : On cherche un équivalent de u :

     $$u = \frac{\sin x}{x} - 1 \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) - 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{6}$$

     Donc $o\left(u^2\right) \underset{0}{=} o\left(x^4\right)$, on doit donc calculer jusqu'à $o\left(u^2\right)$.
   - **étape 3** : $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. On fait le calcul jusqu'à $o\left(x^4\right)$ pour chaque puissance de u :

     $u \underset{0}{=} \dfrac{1}{x}\left(x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right) - 1 \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)$

     $u^2 \underset{0}{=} \left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right)^2 = \dfrac{x^4}{36}+o\left(x^4\right)$

     Donc $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}-\dfrac{x^4}{72}+o\left(x^4\right) \underset{0}{=} \boxed{-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^4}{180}+o\left(x^4\right)}$

2.2.4 Développement limité d'un quotient

Méthode :
Si $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$, avec $a_0 \neq 0$, pour calculer le développement de $\dfrac{1}{f(x)}$ on fait :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{0}{=} \frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)} \underset{0}{=} \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{a_1}{a_0} x + \cdots + \frac{a_n}{a_0} x^n + o(x^n)}_{=u}} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1+u}$$

Ensuite, on utilise de développement de $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + \cdots + (-u)^n + o(u^n)$
Exemples :

1. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{\cos x}$
   - **étape 1** : $\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, dans ce cas, on va utiliser le développement de $\dfrac{1}{1+u}$. On pose donc $1+u = \cos x$
   - **étape 2** : On cherche un équivalent de u : $1 + u = \cos x \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $u \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

     Donc $u \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ donc $o(u^2) = o(x^4)$, donc on doit calculer jusqu'à $o(u^2)$.
   - **étape 3** : $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$, on calcule les puissances de u jusqu'à $o(x^4)$:

     $u = \cos x - 1 \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

     $u^2 = (\cos x - 1)^2 \underset{0}{=} \left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 \underset{0}{=} \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$

     Donc $\dfrac{1}{\cos x} \underset{0}{=} 1 - \left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}\right) + \dfrac{x^4}{4} + o(x^4) \underset{0}{=} \boxed{1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^4)}$
2. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$
   - **étape 1** : $1 + e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$, donc on pose $2(1+u) = 1 + e^x$ et donc $u = \dfrac{e^x - 1}{2}$, et on a $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{2(1+u)}$
   - **étape 2** : On cherche un équivalent de u. $u = \dfrac{e^x - 1}{2} \underset{0}{=} \dfrac{1 + x + o(x) - 1}{2} \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} + o(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

     Donc $o(u^3) \underset{0}{=} o(x^3)$ on doit donc calculer jusqu'à $o(u^3)$
   - **étape 3** : $\dfrac{1}{2(1+u)} \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{u}{2} + \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{2} + o(u^3)$ et on calcule jusqu'à $o(x^3)$:

     $u = \dfrac{e^x - 1}{2} \underset{0}{=} \dfrac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1}{2} \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$

     $u^2 = \left(\dfrac{e^x - 1}{2}\right)^2 \underset{0}{=} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$

     $u^3 = \left(\dfrac{e^x - 1}{2}\right)^3 \underset{0}{=} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3 \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$

     Donc $\dfrac{1}{1+e^x} \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \left(-\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16}\right) x^3 + o(x^3) \underset{0}{=} \boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)}$

2.2.5 Intégration des développements limités

Propriété 1.2.30 Intégration des développements limités
Si f a un développement limité à l'ordre n en a qui est : $f(a+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$, et si F est une primitive de f, alors elle admet le développement limité d'ordre $n+1$:

$$F(a+h) \underset{0}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + o\left(h^{n+1}\right)$$

Démonstration
Nous l'avons montré dans la démonstration de la formule de Taylor-Young

Exemples : On peut retrouver de nombreux développements limités :

1. En intégrant $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^n + o(x^n)$

   On obtient : $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} o\left(x^{n+1}\right)$

2. En intégrant $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$

   On obtient : $\arctan x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$

3. En intégrant $\dfrac{1}{1-x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$

   On obtient : $\mathrm{Argth} x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$

4. En intégrant $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right)$

   On obtient : $\arcsin x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)$

5. On peut calculer le développement limité de tan grâce à $\tan' = 1 + \tan^2$

   $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \underset{0}{\sim} x$ donc $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$ donc $\tan'(x) \underset{0}{=} 1 + (x + o(x))^2 \underset{0}{=} 1 + x^2 + o\left(x^2\right)$

   Par intégration on a : $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ donc :

$$\tan'(x) \underset{0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right)$$

   Donc par intégration : $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$

2.3 Application des développements limités

2.3.1 Calcul d'équivalents - Limites

Méthode : Lorsque f admet un développement limité en a : $f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$ alors f est équivalente au premier terme non nul. De plus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a_0$, on peut donc déterminer la limite de f en a à partir de son développement limité.

Exemples :

1. Équivalent de $f(x) = x(1 + \cos x) - 2\tan x$ en 0.
   - On remarque que $x(1+\cos x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $2\tan x \underset{0}{\sim} 2x$. Donc on doit faire un développement limité avec plus de termes.
   - $x(1+\cos x) \underset{0}{=} x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = 2x - \dfrac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$ et $-2\tan x \underset{0}{=} -2x - \dfrac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

     Donc $f(x) \underset{0}{=} -\dfrac{7x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ donc $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{7x^3}{6}}$

2. Équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \exp \dfrac{1}{x} - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2}$
   - On pose $u = \dfrac{1}{x}$ et on a : $f\left(\dfrac{1}{u}\right) = e^u - \dfrac{1+u}{1+u^2}$
   - On ne sait pas à quel ordre il faut effectuer les développements limités, il est conseillé de calculer 3 termes non nuls, ce qui sera suffisant dans la plupart des cas.

     On a alors $e^u \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$ et $\dfrac{1+u}{1+u^2} \underset{0}{=} (1+u)\left(1 - u^2 + o\left(u^2\right)\right) \underset{0}{=} 1 + u - u^2 + o\left(u^2\right)$

     Ainsi $e^u - \dfrac{1+u}{1+u^2} \underset{0}{=} \dfrac{3u^2}{2} + o\left(u^2\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{3u^2}{2}$

     Donc $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x^2}}$

3. Calcul de la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x}$

- On doit déterminer un équivalent du numérateur et du dénominateur.
  On sait déjà que $x(1+\cos x) - 2\tan x \underset{0}{\sim} -\dfrac{7x^3}{6}$
  On fait un développement limité à l'ordre 3 du dénominateur :
  $$2x - \sin x - \tan x \underset{0}{=} 2x - x + \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \underset{0}{=} -\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$
- Ainsi $\dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\frac{7x^3}{6}}{-\frac{x^3}{6}} = 7$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{2x - \sin x - \tan x} = 7}$

2.3.2 Étude en a - Tangentes

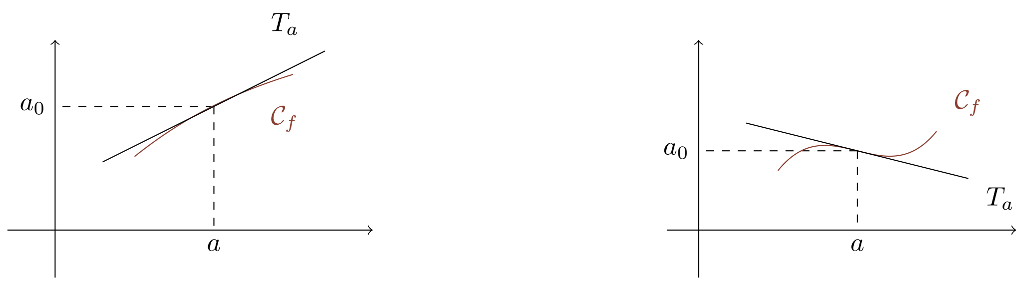
Nous allons utiliser les développements limités en $a \in \mathbb{R}$ pour déterminer :

1. **L'équation de la tangente** en a : $T_a : y = mx + p$.
2. La **position de la courbe** $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente T_a

MÉTHODE : Lorsque $f(a+h) \underset{0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \cdots + a_n h^n + o\left(h^n\right)$

1. **L'équation de la tangente** T_a est $y = a_0 + a_1 h$
2. **Position de** $\mathcal{C}_f$: si $f(a+h) - T_a(h) \geq 0$ au voisinage de 0 alors $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de T_a,
   sinon $f(a+h) - T_a(h) \leq 0$ c'est-à-dire $\mathcal{C}_f$ **en dessous** de T_a.
   - Si $a_2 \neq 0$ alors $f(a+h) - T_a(h) \underset{0}{\sim} a_2 h^2$ donc $\boxed{a_2 > 0 : \textbf{au-dessus}}$ et $\boxed{a_2 < 0 : \textbf{en-dessous}}$
   - Si $a_2 = 0$, et $a_3 \neq 0$ alors $f(a+h) - T_a(h) \underset{0}{\sim} a_3 h^3$. Si $a_3 > 0$ alors $a_3 h^3$ est du même signe que h donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_a à droite de a et en dessous à gauche. Si $a_3 < 0$ c'est le contraire.
   - Si $a_2 = a_3 = 0$ et $a_4 \neq 0$: pareil que $a_2 \neq 0$

ILLUSTRATION :



(a) $a_2 < 0$
$\mathcal{C}_f$ **en dessous** de la Tangente

(b) $a_2 = 0$ et $a_3 > 0$
$\mathcal{C}_f$ **en dessous** de T_a à gauche
$\mathcal{C}_f$ **au-dessus** de T_a à droite

EXEMPLES

1. Étude de arctan en 1 :
   - On fait un développement limité en 1. On va utiliser le développement limité en 1 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ puis intégrer
   - $1 + x^2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2$, donc on pose $2(1+u) = 1 + x^2$ et donc $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2(1+u)}$ On voudrait calculer jusqu'à $o\left((x-1)^2\right)$, après intégration on aura $o\left((x-1)^3\right)$ ce qui est probablement suffisant. On cherche un équivalent en 1 de $u = \dfrac{x^2-1}{2} = \dfrac{x+1}{2}(x-1) \underset{1}{\sim} (x-1)$ on doit donc calculer jusqu'à $o\left(u^2\right)$.
     $$\frac{1}{2(1+u)} \underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$$
     $$u = \frac{x^2-1}{2} = \frac{x+1}{2}(x-1) = \frac{(x-1)+2}{2}(x-1) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}$$
     $$u^2 = \left((x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}\right)^2 \underset{1}{=} (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$
     Donc $\boxed{\dfrac{1}{1+x^2} \underset{1}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-1)}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{4} + o\left((x-1)^2\right)}$

- Après intégration $\boxed{\arctan x \underset{1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} + o\left((x-1)^3\right)}$

  On peut aussi utiliser la formule de Taylor pour calculer directement ce développement limité.
- arctan **admet une tangente en** 1 dont l'équation est $T_1 : y = \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)}{2}$
- D'après le développement limité, $a_2 = -\frac{1}{4} < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est **en-dessous** de T_1 au voisinage de 1.

2. Étude de $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ au voisinage de 0.
   - $f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ on pose $u = x + \frac{x^2}{2}$, on a $u \underset{0}{\sim} x$, on veut calculer jusqu'à $o\left(x^3\right)$ donc on va calculer jusqu'à $o\left(u^3\right)$.
   - $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$.

     $u = x + \frac{x^2}{2}$

     $u^2 = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 \underset{0}{=} x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$

     $u^2 = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 \underset{0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$

     Ainsi $f(x) \underset{0}{=} \ln 2 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \underset{0}{=} \boxed{\ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}$
   - f **admet une tangente en** 0 dont l'équation est $T_0 : y = \ln 2 + x$
   - D'après le développement limité : $a_2 = 0$ et $a_3 < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de T_0 à gauche et **en-dessous** de T_0 à droite.

2.3.3 Étude en ∞ - Asymptotes et branches infinies

On fait une étude en $+\infty$, on peut adapter les résultats pour $-\infty$.

MÉTHODE : On fait un développement limité en $+\infty$

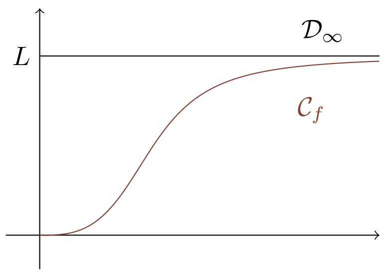
1. Si $f(x) \underset{+\infty}{=} L + o(1)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote** d'équation $\mathcal{D}_\infty : y = L$. On étudie **le signe** de $f(x) - L$ pour **déterminer la position** de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$
   (a) Si $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + o(x) \iff \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a_0$ alors :
      i. Si $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + a_1 + o(1) \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - a_0 x = a_1$ alors on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote** d'équation $\mathcal{D}_\infty : y = a_0 x + a_1$. On étudie **le signe** de $f(x) - (a_0 x + a_1)$ pour **déterminer la position** de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_\infty$.
      ii. Si $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + g(x)$ (avec g qui n'a **pas de limite finie**) $\iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - a_0 x \neq L \in \mathbb{R}$ on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie** de direction $\mathcal{B}_\infty : y = a_0 x$ (**branche infinie horizontale** si $a_0 = 0$)

   (b) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie verticale**.
3. Dans tous les autres cas, il n'y a pas de droite particulière.

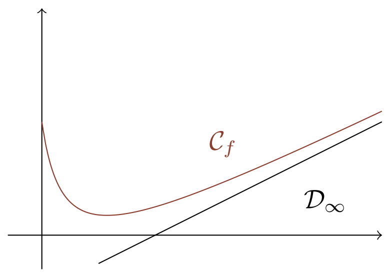
EXEMPLES CLASSIQUES :

1. Dans beaucoup de cas, on trouve un développement $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Dans ce cas $\mathcal{C}_f$ admet **une asymptote** d'équation $\mathcal{D}_\infty : y = a_0 x + a_1$. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_\infty$ est donnée par le signe de a_2.
2. Pour $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = \ln(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = a_0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - a_0 x = \infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet un **branche infinie horizontale**.
3. Si $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + a_1\sqrt{x} + o\left(\sqrt{x}\right)$ ou $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x + a_1 \ln x + o(\ln x)$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie** de direction $\mathcal{B}_\infty : y = a_0 x$
4. Si $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 e^x + o(e^x)$ ou $f(x) \underset{+\infty}{=} a_0 x^2 + o\left(x^2\right)$ et dans tous les cas où $x \underset{+\infty}{=} o(f(x))$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie verticale**.

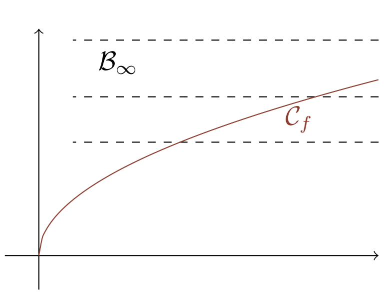
Illustration :



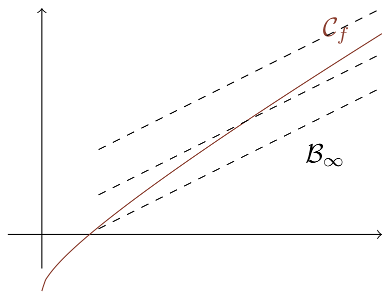
(a) Asymptote $\mathcal{D}_\infty : y = L$



(b) Asymptote $\mathcal{D}_\infty : y = mx + p$



(a) Branche infinie horizontale $\mathcal{B}_\infty$



(b) Branche infinie $\mathcal{B}_\infty : y = mx$

Exemples :

1. Étude en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 4}{x^2 + 7}$
   - $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$
   - $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = 3$
   - $f(x) - 3 = \dfrac{-x + 4}{x^2 + 7} < 0$ pour $x > 4$ donc au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est **en-dessous de son asymptote**.
   - On peut aussi faire un développement limité à l'ordre $\dfrac{1}{x}$: on pose $t = \dfrac{1}{x}$:

   $$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{3 - t + 4t^2}{1 + 7t^2} \underset{0}{=} (3 - t + 4t^2)\left(1 + o\left(t\right)\right) = 3 - t + o\left(t\right)$$

   Ainsi $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} 3 - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)}$, on en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = 3$, et $f(x) - 3 \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$, donc $\mathcal{C}_f$ est **en-dessous de son asymptote**.

2. Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 1}}$
   - On fait un développement limité de f en $+\infty$. On pose $x = \dfrac{1}{t}$ et on calcule jusqu'à $o\left(t\right)$:

   $$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{t^3}}{\frac{1}{t} - 1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2 - t^3}} = \frac{1}{|t|}\sqrt{\frac{1}{1 - t}} \underset{0^+}{=} \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o\left(t^2\right)\right) \underset{0^+}{=} \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \frac{3t}{8} + o\left(t\right)$$

   donc $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

   - On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet **une asymptote** en $+\infty$ d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$, et que $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de son asymptote car $\dfrac{3}{8x} > 0$ au voisinage de $+\infty$.

3. Étude en $+\infty$ de $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

- On fait un développent en $+\infty$. On pose $t = \dfrac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right) = \ln\frac{1}{t} + \ln\left(1+\sqrt{1+t^2}\right) \underset{0}{=} \ln\frac{1}{t} + \ln\left(1+1+\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} \ln\frac{1}{t} + \ln 2 + \ln\left(1+\frac{t^2}{4}+o\left(t^2\right)\right) \underset{0}{=} \ln\frac{2}{t} + \frac{t^2}{4} + o\left(t^2\right)$$

Ainsi $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} \ln(2x) + \dfrac{1}{4x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$

- On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie horizontale** en $+\infty$.

  On est dans le cas $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4. Étude en $+\infty$ de $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2 e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

- On fait un développement en $+\infty$. On pose $t = \dfrac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) \underset{0^+}{=} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}} + 1\right) e^t \underset{0^+}{=} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}} + 1\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)$$

$$\underset{0^+}{=} \frac{1}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}} + 2 + 2\sqrt{t} + \frac{3t}{2} + t\sqrt{t} + \frac{t^2}{2} + o\left(t\right) \underset{0^+}{=} \frac{1}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}} + 2 + 2\sqrt{t} + \frac{3t}{2} + o\left(t\right)$$

Ainsi $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} x + 2\sqrt{x} + 2 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$

- On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $f(x) - x \underset{+\infty}{=} 2\sqrt{x} + 2 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie** de direction $y = x$

5. Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^3+x^2+1}$ en $+\infty$

- On fait un développement en $+\infty$. On pose $t = \dfrac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) \underset{0^+}{=} \sqrt{\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} + 1} \underset{0^+}{=} \frac{1}{t\sqrt{t}}\sqrt{1+t+t^3} \underset{0}{=} \frac{1}{t\sqrt{t}}\left(1 + \frac{t+t^3}{2} - \frac{(t+t^3)^2}{8} + o\left((t+t^3)^2\right)\right)$$

$$\underset{0^+}{=} \frac{1}{t\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o\left(t^2\right)\right) \underset{0^+}{=} \frac{1}{t\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{8} + o\left(\sqrt{t}\right)$$

Donc $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} x\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{8\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$. $\mathcal{C}_f$ admet une **branche infinie verticale** en $+\infty$.

2.4 Formulaire

Développements usuels en 0 :

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cosh x \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sinh x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-x)^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o\left(x^3\right)$$

$$\arcsin x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)$$

$$\arctan x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$