Étude locale

∗ ∗ ∗

Relations de comparaison

Exercice 1 – ★ *Fonctions dominées*

1. Donner la définition de « f est dominée par g au voisinage de a »
2. Montrer que $x^2 \underset{0}{=} \mathcal{O}(x)$
3. Montrer que $x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(x^2\right)$
4. Soit f continue en a, montrer que $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$.

Correction

1. $\exists u, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[, f = gu$ avec u fonction bornée sur $]a-\alpha, a+\alpha[$.
2. Soit $u : x \mapsto x$, et $\alpha > 0$, alors $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, x^2 = xu$ et $\forall x \in]-\alpha, \alpha[, |u| < \alpha$. Donc $x^2 \underset{0}{=} \mathcal{O}(x)$
3. Soit $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\alpha > 0$, alors $\forall x \in]\alpha, +\infty[, x = x^2 u$ avec $\forall x \in]\alpha, +\infty[, |u| < \frac{1}{\alpha}$. Donc $x \underset{0}{=} \mathcal{O}\left(x^2\right)$
4. f est continue en a donc pour $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a-\delta, a+\delta[, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ donc $\forall \in]a-\delta, a+\delta[, |f(x)| \leq |f(a)| + \varepsilon$. Donc f est bornée au voisinage de a. Ainsi $f = 1 \times f$ avec f bornée au voisinage de a, donc $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$.

Exercice 2 – ★ *Fonctions négligeables*

1. Montrer que $x \sin x \underset{0}{=} o(\sin x)$
2. Montrer que $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$

Correction

1. En posant $u : x \mapsto x$, $x \sin x = u \sin x$ avec $\lim\limits_{x \to 0} u = 0$ donc $x \sin x \underset{0}{=} o(\sin x)$.
2. On pose $u = x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ pour $x > 0$ et alors $\forall x > 0, \ln x = ux$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} u = 0$ donc $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$.

Exercice 3 – ★ *Compatibilité avec la multiplication*

1. Soit $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ et $\lambda \neq 0$, montrer que $\lambda f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$
2. Soit $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$, montrer que $f_1 f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1\varphi_2)$
3. Soit $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ et $\lambda \neq 0$, montrer que $\lambda f \underset{a}{=} o(\varphi)$
4. Soit $f_1 \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(\varphi_2)$, montrer que $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(\varphi_1\varphi_2)$

Correction

1. $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ donc il existe u bornée au voisinage de a telle que $f = \varphi u$ donc $\lambda f = \lambda\varphi u$ au voisinage de a. On pose $v = \lambda u$, donc $|v| = |\lambda||u|$ bornée au voisinage de a, et $f = \varphi v$, donc $\lambda f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$.
2. Il existe u, v bornées au voisinage de a telles que $f_1 = \varphi_1 u$ et $f_2 = \varphi_2 v$ donc $f_1 f_2 = \varphi_1\varphi_2 uv$ avec $|uv| = |u||v|$ donc uv est bornée. Ainsi $f_1 f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1\varphi_2)$

Exercice 4 – ★ *Compatibilité avec la composition*

1. Soit $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$
2. Soit $f \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} o(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$
3. Soit $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} o(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$
4. Soit $f \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$

Correction

1. On a $f \underset{a}{=} \varphi_1 u$ avec u bornée au voisinage de a et $\varphi_1 \underset{a}{=} \varphi_2 v$ avec v bornée au voisinage de a , donc $f \underset{a}{=} \varphi_2 uv$ avec uv bornée au voisinage de a, donc $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$
2. On a $f \underset{a}{=} \varphi_1\varepsilon_1$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x) = 0$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \varphi_2\varepsilon_2$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0$. Ainsi $f \underset{a}{=} \varphi_2\varepsilon_1\varepsilon_2$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) = 0$ donc $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$
3. On a $f \underset{a}{=} \varphi_1 u$ avec u bornée au voisinage de a et $\varphi_1 \underset{a}{=} \varphi_2\varepsilon$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. Donc $f \underset{a}{=} \varphi_2 u\varepsilon$ avec $\lim\limits_{x\to a} u(x)\varepsilon(x) = 0$, donc $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$
4. On a $f \underset{a}{=} \varphi_1\varepsilon$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \varphi_2 v$ avec v bornée au voisinage de a, donc $f \underset{a}{=} \varphi_2 v\varepsilon$ avec $\lim\limits_{x\to a} v(x)\varepsilon(x) = 0$ donc $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$

Exercice 5 – ★ *Équivalent simple*

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

a. $1+x+\ln x$ en 0 et $+\infty$

b. $\cosh(\sqrt{x})$ en 0 et $+\infty$

c. $\sin(\cos x)$ en 0 et en $\frac{\pi}{2}$

d. $\tan(2x)$ en 0 et $\frac{\pi}{4}$

e. $\ln(\sin x)$ en 0 et $\frac{\pi}{2}$

f. $\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}$ en 0

Correction

a. <u>En 0</u> : $1+x \underset{0}{=} o(\ln(x))$ car $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$, donc $1+x+\ln(x)\underset{0}{=}\ln(x)+o(\ln(x)))$

Ainsi $\boxed{1+x+\ln(x)\underset{0}{\sim}\ln(x)}$

<u>En $+\infty$</u> : $1+\ln(x)\underset{+\infty}{=}o(x)$, donc $1+x+\ln(x)\underset{+\infty}{=}x+o(x)$

Ainsi $\boxed{1+x+\ln(x)\underset{0}{\sim}x}$

b. <u>En 0</u> : $\lim\limits_{x\to 0}\cosh(\sqrt{x})=1$ donc $\boxed{\cosh(\sqrt{x})\underset{0}{\sim}1}$

<u>En $+\infty$</u> : $\cosh(\sqrt{x})=\dfrac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}$ et $e^{-\sqrt{x}}\underset{0}{=}o\left(e^{\sqrt{x}}\right)$, donc $\boxed{\cosh(\sqrt{\mathrm{x}})\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2}}$

c. <u>En 0</u> : $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\cos x)=\sin(1)$ donc $\boxed{\sin(\cos x)\underset{0}{\sim}\sin(1)}$

<u>En $\frac{\pi}{2}$</u> : On sait que $\sin(u)\underset{0}{\sim}u$ or $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ donc on pose $u=\cos x$ et $\sin(\cos x)=\sin u\underset{0}{\sim}u=\cos x$

On pose $t=\frac{\pi}{2}-x$, on a alors $\cos(x)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(t)\underset{0}{\sim}t=\frac{\pi}{2}-x$

En conclusion, $\boxed{\sin(\cos(x))\underset{\frac{\pi}{2}}{\sim}\frac{\pi}{2}-x}$

d. <u>En 0</u> : $\tan(2x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\underset{0}{\sim}\dfrac{2x}{1}=2x$, donc $\boxed{\tan 2x\underset{0}{\sim}2x}$

<u>En $\frac{\pi}{4}$</u> : On pose $t=\frac{\pi}{4}-x$, alors $\tan(2x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)=\dfrac{1}{\tan 2t}\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-2x}$

Donc $\boxed{\tan(2x)\underset{\frac{\pi}{4}}{\sim}\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-2x}}$

e. <u>En 0</u> : $\ln(\sin x)=\ln\left(x\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln(x)+\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$ or $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$

donc $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\underset{0}{=}o(\ln(x))$, ainsi $\ln(\sin x)\underset{0}{=}\ln(x)+o(\ln(x))$ et donc $\boxed{\ln(\sin x)\underset{0}{\sim}\ln(x)}$

<u>En $\frac{\pi}{2}$</u> : On pose $t=\frac{\pi}{2}-x$, donc $\ln(\sin x)=\ln(\cos t)=\ln(1+\cos(t)-1)$

On pose $u=\cos(t)-1$, et on a $\ln(1+u)\underset{0}{\sim}u$ donc $\ln(1+\cos(t)-1)\underset{0}{\sim}\cos(t)-1$

$\cos(t)=1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et donc $\cos(t)-1=-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\underset{0}{\sim}-\dfrac{t^2}{2}$

En conclusion $\boxed{\ln(\sin(x))\underset{\frac{\pi}{2}}{\sim}-\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{2}}$

f. $\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}\underset{0}{\sim}\dfrac{x\ln(1+x^2)}{x\times x}=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

En outre $\ln(1+u)\underset{0}{\sim}u$, d'où $\ln(1+x^2)\underset{0}{\sim}x^2$

Et ainsi $\boxed{\dfrac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2}{x}=x}$

Exercice 6 – ★ *Équivalent d'un polynôme*

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. Soit p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$.

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} P(x)$
2. Déterminer un équivalent de P en 0
3. Déterminer un équivalent de P en $+\infty$

Correction

1. $\lim_{x\to 0} P(x) = a_0$
2. $P(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$
3. $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$

Exercice 7 – ★ *Exponentielle et équivalent*

1. Est-ce que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Longrightarrow e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)}$? Justifier.
2. Montrer que $e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)} \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$

Correction

1. Non, par exemple $x \underset{+\infty}{\sim} 1 + x$ mais $\dfrac{e^x}{e^{1+x}} = \dfrac{1}{e} \neq 1$ donc e^x et e^{1+x} ne sont pas équivalentes en $+\infty$
2. $e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)} \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} e^{f(x)-g(x)} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$

Exercice 8 – ★ *Logarithme et équivalent*

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g strictement positives telles que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si $L \neq 1$ alors $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.
2. Montrer que si $L = 1$ et $f'(a) = g'(a) \neq 0$ alors $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.

Correction

1. $\ln(f(x)) = \ln\left(g(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \ln(g(x)) + \ln\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$

   Puisque $f \underset{a}{\sim} g$, $\ln\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, de plus $\ln(g) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$ avec $L \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$, donc $\ln\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) \underset{a}{=} o(\ln(g(x)))$

   On en déduit $\ln(f(x)) \underset{a}{=} \ln(g(x)) + o(\ln(g(x)))$, d'où $\boxed{\ln(f) \underset{a}{\sim} \ln(g)}$

2. On rappelle que $\ln(1+u) \underset{o}{\sim} u$ donc $\ln(1+u) \underset{0}{=} u + o(u)$

   $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$ donc $f(x) - 1 \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a) = g'(a)(x-a)$

   Donc $f(x) = 1 + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, de même $g(x) = 1 + g'(a)(x-a) + o(x-a)$

   Ainsi $\ln(f(x)) \underset{a}{=} \ln(1 + f'(a)(x-a) + o(x-a)) \underset{a}{=} f'(a)(x-a) + o(x-a)$ et donc $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$

   De même $\ln(g(x)) \underset{a}{\sim} g'(a)(x-a)$, et puisque $f'(a) = g'(a)$, on a $\boxed{\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))}$

Exercice 9 – ★ *Exponentielle et négligeabilité*

Soit f, g deux fonctions avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1. Est-ce que $e^{g(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{f(x)}\right) \Longrightarrow g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$? Justifier.
2. Est-ce que $g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x)) \Longrightarrow e^{g(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{f(x)}\right)$? Justifier.

Correction

1. Soit f, g telles que $e^{g(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{f(x)}\right)$ ce qui est équivalent à $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}} = 0$ ce qui est équivalent à $\lim_{x\to+\infty} e^{g(x)-f(x)} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) - f(x) = -\infty$.

   On peut alors chercher un contre-exemple, c'est-à-dire des fonctions f, g telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x) - f(x) = -\infty$ mais avec g qui n'est pas négligeable devant f.

   Prenons $f(x) = x$ et $g(x) = x - \sqrt{x}$ alors $g(x) - f(x) = -\sqrt{x}$ qui tend bien vers $-\infty$, en revanche $f \underset{+\infty}{\sim} g$ donc on n'a pas $g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$, $\boxed{\text{l'implication est donc fausse.}}$

2. Soit f, g telles que $g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$ donc $g(x) \underset{+\infty}{=} f(x)\varepsilon(x)$.

   $\dfrac{e^{g(x)}}{e^{f(x)}} = e^{g(x)-f(x)} = e^{f(x)(\varepsilon(x)-1)}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)(\varepsilon(x)-1) = \lim_{x\to+\infty}(-f(x)) = -\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{g(x)-f(x)} = 0$ et ainsi $e^{g(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{f(x)}\right)$, $\boxed{\text{l'implication est donc vraie.}}$

Exercice 10 – ★ *Équivalent simple*

Déterminer un équivalent simple des suites :

1. $n\sin\dfrac{1}{n^2}$
2. $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$
3. $n^{\frac{1}{n}}-1$
4. $\ln(1+n)-\ln(n)$
5. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)$
6. $\tan^n\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)$

Correction

1. $n\sin\dfrac{1}{n^2}\sim\dfrac{1}{n}$
2. $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n+1-(n-1)}{n^2-1}=\dfrac{2}{n^2-1}\sim\dfrac{2}{n^2}$
3. $n^{\frac{1}{n}}-1=e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\dfrac{\ln n}{n}$
4. $\ln(1+n)-\ln(n)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$
5. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{\tan\frac{1}{n}}\sim n$
6. $\tan a+b=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+\tan\frac{1}{n}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}}$

   - $\left(\sqrt{3}+\tan\frac{1}{n}\right)^n=\sqrt{3}^n\left(1+\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}\right)^n$

   $\left(1+\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}\right)\right)$ or $n\ln\left(1+\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}\right)\sim n\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   Donc $\lim\left[n\ln\left(1+\dfrac{\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}\right)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et donc $\lim\left[\exp\left(n\ln\left(1+\frac{\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]=e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

   Donc $\boxed{\left(\sqrt{3}+\tan\frac{1}{n}\right)^n\sim\sqrt{3}^ne^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$

   - $\left(1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}\right)\right)$

   or $n\ln\left(1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}\right)\sim-n\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}\sim-\sqrt{3}$ donc $\boxed{\left(1-\sqrt{3}\tan\frac{1}{n}\right)^n\sim e^{-\sqrt{3}}}$

   Ainsi $\boxed{\tan^n\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)\sim\sqrt{3}^ne^{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}}$

Exercice 11 – ★★ *Équivalent simple*

Déterminer un équivalent simple en 0 de :

a. $\cos(ax)-\cos(bx)$

b. $a^x-b^x\quad(a,b>0)$

c. $\tan\dfrac{\pi}{2x+1}$

d. $\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[3]{8+x}$

e. $\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}$

f. $\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$

Correction

a. $\cos(p+q)=\cos p\cos q-\sin p\sin q$ on pose alors $p+q=ax$ et $p-q=bx$ donc $p=\frac{a+b}{2}x$ et $q=\frac{a-b}{2}x$

On a $\cos(ax)-\cos(bx)=\cos(p+q)-\cos(p-q)=-2\sin p\sin q=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)\underset{0}{\sim}-2\left(\frac{a+b}{2}x\right)\left(\frac{a-b}{2}x\right)=-\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)x^2$

Ainsi $\boxed{\cos(ax)-\cos(bx)\underset{0}{\sim}\dfrac{b^2-a^2}{2}x^2}$

b. $a^x-b^x=\exp(x\ln a)-\exp(x\ln b)=\exp(x\ln b)(\exp(x(\ln a-\ln b))-1)$

$\exp(x\ln b)\underset{0}{\sim}1$ et $\exp(x(\ln a-\ln b))-1\underset{0}{\sim}x(\ln a-\ln b)$

Donc $\boxed{a^x-b^x\underset{0}{\sim}x\ln\dfrac{a}{b}}$

c. $\tan\dfrac{\pi}{2x+1}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2x+1}-\pi\right)=\tan\left(-\dfrac{2x\pi}{2x+1}\right)\underset{0}{\sim}-\dfrac{2x\pi}{2x+1}\boxed{\underset{0}{\sim}2\pi x}$

d. $\sqrt[4]{16+x}=2\sqrt[4]{1+\frac{x}{16}}\underset{0}{=}2\left(1+\dfrac{x}{64}+o(x)\right)\underset{0}{=}2+\dfrac{x}{32}+o(x)$

$\sqrt[3]{8+x}=2\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}\underset{0}{=}2\left(1+\dfrac{x}{24}+o(x)\right)\underset{0}{=}2+\dfrac{x}{12}+o(x)$

Donc $\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[3]{8+x}\underset{0}{=}\dfrac{x}{32}-\dfrac{x}{12}+o(x)\underset{0}{=}-\dfrac{5}{96}x+o(x)$

Donc $\boxed{\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[3]{8+x}\underset{0}{\sim}-\dfrac{5}{96}x}$

e. $\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}=\dfrac{\sqrt[2]{1+x^2}-\sqrt[2]{1-x^2}}{\sqrt[4]{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^2}}\underset{0}{\sim}\dfrac{\sqrt[2]{1+x^2}-\sqrt[2]{1-x^2}}{2}$

$\dfrac{\sqrt[2]{1+x^2}-\sqrt[2]{1-x^2}}{2}=\dfrac{1+x^2-(1-x^2)}{2(\sqrt[2]{1+x^2}+\sqrt[2]{1-x^2})}\underset{0}{\sim}\dfrac{2x^2}{4}=\dfrac{x^2}{2}$

Donc $\boxed{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}}$

f. $\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}} = \dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2+3x}}{\sqrt{2+3x}\sqrt{2-3x}} \underset{0}{\sim} \dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2+3x}}{2}$

$\dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2+3x}}{2} = \dfrac{2-3x-(2+3x)}{2(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2+3x})} \underset{0}{\sim} \dfrac{-6x}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{3x}{2\sqrt{2}}$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}} \underset{0}{\sim} -\dfrac{3x}{2\sqrt{2}}}$

Exercice 12 – ★★ *Équivalent et puissance*

Soit $u_n, v_n > 0$.

1. Si $u_n \sim v_n$ est-ce que $u_n^n \sim v_n^n$? Justifier.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \longrightarrow 0$ est-ce que $u_n^n \sim v_n^n$? Justifier.
3. Montrer que si $u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\lim u_n = L \neq 0$ alors $u_n^n \sim v_n^n$

Correction

1. Non, par exemple $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim e \neq 1$
2. Non, même exemple.
3. $\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^n = n(\ln u_n - \ln v_n) \underset{+\infty}{=} n\left(\ln\left(v_n + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \ln v_n\right)$

   De plus $\ln\left(v_n + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln v_n + \ln\left(1 + o\left(\frac{1}{nv_n}\right)\right)$

   En outre $u_n \sim v_n$ donc $\lim v_n = \lim u_n = L \neq 0$

   On en déduit : $\ln v_n + \ln\left(1 + o\left(\frac{1}{nv_n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln v_n + \ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

   Or $\ln\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

   Ainsi $\boxed{\ln\left(v_n + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \ln v_n + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

   Et donc $\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^n \underset{+\infty}{=} n\left(\ln v_n + o\left(\frac{1}{n}\right) - \ln v_n\right) \underset{+\infty}{=} o(1)$

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^n = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^n = 1$ ce qui montre que $u_n^n \sim v_n^n$

Exercice 13 – ★ *Limites de fonctions*

Déterminer grâce à un équivalent les limites des fonctions suivantes :

1. $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$ en 0
2. $\dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x}$ en 0
3. $\tan x \tan 2x$ en $\dfrac{\pi}{2}$
4. $(2x^2-3x+1)\tan \pi x$ en $\dfrac{1}{2}$
5. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0
6. $(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$ en 0

Correction

1. $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} \underset{0}{\sim} 3x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} = 3\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}\cdot x}{x^2} = \dfrac{x}{2}$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x} = 0}$

3. $\tan x\tan 2x = \tan x\tan(2x-\pi) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\cos x}\cdot(2x-\pi) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{2x-\pi}{\frac{\pi}{2}-x} = -2$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x\tan 2x = -2}$

4. $(2x^2-3x+1)\tan\pi x = (2x-1)(x-1)\tan\pi x$

   $\tan\pi x = \dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\pi x)} \underset{\frac{1}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-\pi x} = \dfrac{1}{\pi(\frac{1}{2}-x)}$

   $(2x-1)(x-1) \underset{\frac{1}{2}}{\sim} -\dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{1}{2}-x$

   Ainsi $(2x^2-3x+1)\tan\pi x \underset{\frac{1}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\pi}$

   D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan\pi x = \dfrac{1}{\pi}}$

5. $\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\ln\cos x}{x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{\cos x-1}{x^2} \underset{0}{\sim} -\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$

6. $\ln(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}} = \dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\tan x}{\sin x} \underset{0}{\sim} 1$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}} = e}$

Exercice 14 – ★ *Limites de suites*

Déterminer grâce à un équivalent les limites des suites suivantes :

1. $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$
2. $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$
3. $\left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n$
4. $\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$

Correction

1. $\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) \sim n\cdot\frac{\alpha}{n} = \alpha$

   Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}}$

2. $\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \sim n\left(-\frac{2}{n+1}\right) \sim -2$

   Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2}}$

3. $\ln\left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n = n\ln\left(\frac{n}{n-\alpha}\right) = n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n-\alpha}\right) \sim n\left(\frac{\alpha}{n-\alpha}\right) \sim \alpha$

   Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-\alpha}\right)^n = e^{\alpha}}$

4. $\ln\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n = n\ln\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right) = n\ln\left(\frac{n^2-3n+7+8n-3}{n^2-3n+7}\right)$

   $= n\ln\left(1+\frac{8n-3}{n^2-3n+7}\right) \sim n\left(\frac{8n-3}{n^2-3n+7}\right) \sim n\cdot\frac{8n}{n^2} \sim 8$

   Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n = e^{8}}$

Exercice 15 – ★

Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$

1. Montrer que $u_{n-2} \underset{+\infty}{=} o(n!)$
2. Montrer que $u_n \sim n!$

Correction

1. $u_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} k! = n!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!} \leq n!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{n!} \leq n!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{(n-1)n} = n!\cdot\frac{n-1}{(n-1)n}$

   Donc $u_{n-2} \leq (n-1)!$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n-2}}{n!} = 0$ ainsi $\boxed{u_{n-2} \underset{+\infty}{=} o(n!)}$

2. $u_n = u_{n-2} + (n-1)! + n!$

   Or $u_{n-2} \underset{+\infty}{=} o(n!)$ et $(n-1)! \underset{+\infty}{=} o(n!)$

   Donc $u_n = n! + o(n!)$ donc $\boxed{u_n \sim n!}$

Exercice 16 – ★★

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
2. En déduire que $S_n \longrightarrow +\infty$
3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) est convergente.
4. En déduire un équivalent de S_n

Correction

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

   Donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq S_n = \sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

   Donc $\boxed{S_n \longrightarrow +\infty}$

3. On va montrer que (u_n) est **décroissante** et **minorée**.

   $u_n = S_n - 2\sqrt{n} \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 \geq -2$

   Donc $\boxed{(u_n) \text{ est minorée par } -2}$

   $u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

   Or $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$

   Donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$

   Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

   On en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

4. On sait que $\sqrt{n} \longrightarrow +\infty$ et que $u_n \longrightarrow L \in \mathbb{R}$ donc $u_n \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$

   Ainsi $S_n \underset{+\infty}{=} 2\sqrt{n} + u_n \underset{+\infty}{=} 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$

   Donc $\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}}$

Exercice 17 – ★★

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\dots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3
2. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$
3. Montrer que $u_{n+1} \leq n+1$
4. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\sqrt{n})$
5. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} o(n)$
6. En déduire un équivalent de u_n
7. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$

Correction !

1. $u_1 = 1 \qquad u_2 = \sqrt{2+\sqrt{1}} = \sqrt{3} \qquad u_3 = \sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}} = \sqrt{3+\sqrt{3}}$

2. $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\dots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}} \geq \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

   Donc $\boxed{u_n \longrightarrow +\infty}$

3. On le démontre par récurrence :

   Initialisation : $u_1 = 1 \leq 1$

   Hérédité : On suppose $u_n \leq n$

   $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \sqrt{2n+1} \leq \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$

   Donc $\boxed{u_{n+1} \leq n+1}$ donc $\boxed{\forall n \geq 1, u_{n+1} \leq n+1}$

4. $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}} \leq \sqrt{n+n-1} \leq \sqrt{2n}$

   Donc $0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}$ donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\sqrt{n})}$

5. On a ainsi $\frac{u_n}{n} \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$ (Grand O d'une fonction qui tend vers 0)

   Ainsi $\boxed{u_n \underset{+\infty}{=} o(n)}$

6. $u_{n+1}^2 = n+1+u_n \underset{+\infty}{=} n+1+o(n) \underset{+\infty}{=} n+o(n)$, donc $u_{n+1}^2 \sim n \sim n+1$

   Ainsi $u_{n+1} \sim \sqrt{n+1}$ et donc $\boxed{u_n \sim \sqrt{n} \sim \sqrt{n-1} \sim u_{n-1}}$

7. $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right)$ et puisque $u_n \underset{+\infty}{=} o(n)$ on a $u_{n-1} \underset{+\infty}{=} o(n-1) \underset{+\infty}{=} o(n)$ et donc $\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \sim \frac{u_{n-1}}{2n}$

Ainsi $u_n - \sqrt{n} \sim \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}}$

Exercice 18 – ★★

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ que l'on note u_n. Donc $u_n - \ln(u_n) = n$.
2. Montrer que $n \leq u_n \leq 2n$
3. En déduire que $u_n \sim n$
4. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

Correction !

1. Soit $f(x) = x - \ln x$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $\forall x > 1, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et pour $x \in [1, +\infty[, f'(x) = 0 \iff x = 1$ donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. De plus f est continue sur $[1, +\infty[$ et $f(1) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc f est bijective de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.
2. f est croissante et $f(n) = n - \ln n < n = f(u_n)$ donc $\boxed{n \leq u_n}$

   On pose pour $x \geq 1$, $g(x) = x - \ln 2x$, alors $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ et $g(1) = 1 - \ln 2 > 0$ donc $\forall x \geq 1, g(x) > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > \ln 2n$

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2n) = 2n - \ln 2n > n = f(u_n)$, donc $\boxed{u_n \leq 2n}$
3. On en déduit $n \leq u_n = n + \ln u_n \leq n + \ln 2n$

   Ainsi $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{\ln 2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où $\boxed{u_n \sim n}$
4. On pose $v_n = u_n - n$, on a alors $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(n \cdot \frac{u_n}{n}\right) = \ln n + \ln\left(\frac{u_n}{n}\right)$

   Or $u_n \sim n$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$, donc $\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) \underset{+\infty}{=} o(\ln n)$

   Donc $v_n \underset{+\infty}{=} \ln n + o(\ln n)$ donc $\boxed{v_n \sim \ln n}$ donc $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln n + o(\ln n)$ On pose

   $w_n = v_n - \ln n = \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(\frac{n + \ln n + o(\ln n)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$

   Et $\ln\left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

   Donc $w_n \underset{+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

   et $\boxed{u_n = n + v_n = n + \ln n + w_n \underset{+\infty}{=} n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$

Exercice 19 – ★★ *Relation de comparaison sur les séries divergentes*

Soit $(u_n),(v_n)$ deux suites, avec (v_n) positive et $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

1. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow U_n \underset{+\infty}{=} o(V_n)$
2. En déduire que si $u_n \sim v_n$ alors $U_n \sim V_n$

Correction

1. Soit (u_n) telle que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ on a alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq \varepsilon v_n$

   Donc $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \leq \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \varepsilon V_n$

   Or $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \sum_{k=1}^{n_0} u_k \leq \varepsilon V_n$

   On en déduit que $\forall n \geq \max(n_1, n_0), \quad U_n \leq 2\varepsilon V_n$

   Ce qui montre $\boxed{U_n \underset{+\infty}{=} o(V_n)}$

2. Soit $u_n \sim v_n$, donc $u_n - v_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ donc d'après la question 1, $U_n - V_n \underset{+\infty}{=} o(V_n)$

   Et ainsi $\boxed{U_n \sim V_n}$

Développements limités

Exercice 20 – ★ *Un premier développement limité en a*

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 3 de $f : x \mapsto \frac{3}{x}$.

Correction

On pose $x = 3 + t$, alors $f(x) = \frac{3}{3+t} = \frac{1}{1+\frac{t}{3}} \underset{0}{=} 1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27} + o\left(t^3\right)$

Donc $\boxed{f(x) \underset{3}{=} 1 - \frac{x-3}{3} + \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(x-3)^3}{27} + o\left((x-3)^3\right)}$

Exercice 21 – ★ *Un premier développement limité en* $+\infty$

Donner le développement limité à l'ordre 3 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$.

Correction

On pose $t = \dfrac{1}{x}$, donc $f(x) = \dfrac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t} - 2} = \dfrac{1}{1-2t} \underset{0}{=} 1 + 2t + (2t)^2 + (2t)^3 + o\left((2t)^3\right)$

Donc $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}$

Exercice 22 – ★ *Formule de Taylor-Young*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2_I$. Soit $x \in I$.

Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$.

Correction

D'après la formule de Taylor-Young, $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2} f''(x) + o\left(h^2\right)$

Ainsi $\dfrac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = \dfrac{h^2 f''(x) + o\left(h^2\right)}{h^2} = f''(x) + o(1)$

Donc $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = f''(x)}$

Exercice 23 – ★★ *Formule de Taylor-Young*

Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de $f'(x_0)$ et $f''(x_0)$?
2. Démontrer que $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$

Correction

1. $f \geq 0$ et $f(x_0) = 0$ donc x_0 est un minimum local, qui n'est pas une borne de l'intervalle de définition de f, donc $\boxed{f'(x_0) = 0}$

$$f(x_0 + h) \underset{0}{=} f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + o\left(h^2\right) = \frac{h^2}{2} f''(x_0) + o\left(h^2\right) \geq 0$$

Donc si $f''(x_0) \neq 0$, $f(x_0 + h) \underset{0}{\sim} \frac{h^2}{2} f''(x_0)$ donc $\frac{f(x_0 + h)}{h^2} \underset{0}{\sim} 2f''(x_0)$

Or $\frac{f(x_0 + h)}{h^2} \geq 0$ donc $\boxed{f''(x_0) \geq 0}$

2. **On ne peut pas directement utiliser** la dérivée d'une composée, en effet cela donnerait : $g'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{2\sqrt{f'(x_0)}}$, or $f'(x_0) = 0$, donc il y a division par 0.

Si $f''(x_0) > 0$ alors $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{x - x_0} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{2}(x - x_0)} \sqrt{f''(x_0)}$

Ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$

et $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$

Donc g n'est pas dérivable en x_0, on a montré $\boxed{g \text{ dérivable en } x_0 \Longrightarrow f''(x_0) = 0}$

Si $f''(x_0) = 0$ alors $f(x_0 + h) \underset{0}{=} o\left(h^2\right)$ donc $f(x) \underset{x_0}{=} o\left((x - x_0)^2\right)$

donc $\sqrt{f(x)} \underset{x_0}{=} o(x - x_0)$

Ainsi $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{x - x_0} \underset{x_0}{=} \dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0} \underset{x_0}{=} o(1)$ ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0$

Donc g est dérivable. On a montré $\boxed{f''(x_0) = 0 \Longrightarrow g \text{ est dérivable en } x_0}$

Exercice 24 – ★ *Somme et produit de développements limités en 0.*

Calculer les développements limités en 0 suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
2. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ à l'ordre 4.
3. $\sin x \cos 2x$ à l'ordre 6.
4. $\cos x \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
5. $(1 + x^3)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3.
6. $\ln^2(1+x)$ à l'ordre 4.

Correction

1. $$\frac{1}{1-x} - e^x \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} - e^x \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)}$$

2. $$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}\right) + o\left(x^4\right)$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{8} + o\left(x^4\right)}$$

3. $$\sin x \cos 2x \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)\right)\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)$$

$$\sin x \cos 2x \underset{0}{=} x + \left(-\frac{1}{6} - 2\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} + \frac{2}{6} + \frac{2}{3}\right)x^5 + o\left(x^6\right)$$

$$\boxed{\sin x \cos 2x \underset{0}{=} x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o\left(x^6\right)}$$

4. $$\cos x \ln(1+x) \underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right)$$

$$\boxed{\cos x \ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)}$$

5. $$(1 + x^3)\sqrt{1-x} \underset{0}{=} (1 + x^3)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o\left(x^3\right)$$

$$\boxed{(1 + x^3)\sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + o\left(x^3\right)}$$

6. $$\ln^2(1+x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)^2 \boxed{\underset{0}{=} x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o\left(x^4\right)}$$

Exercice 25 – ★ *Développements limités de fonctions composées en 0.*
Calculer les développements limités en 0 suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4.
2. $e^{\sin x}$ à l'ordre 4.
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5.
4. $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4.

Correction

1. On pose $u = \dfrac{\sin x}{x} - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $u(x) \underset{0}{=} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x} - 1 \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$

Donc $u \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{6}$ donc $o\left(u^2(x)\right) \underset{0}{=} o\left(x^4\right)$, on calcule donc jusqu'à $o\left(u^2\right)$

$\ln 1 + u \underset{0}{\sim} u - \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$.

$$u = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)$$

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)\right)^2 \underset{0}{=} \frac{x^4}{36} + o\left(x^4\right)$$

Donc $\boxed{\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} + o\left(x^4\right)}$

2. On pose $u = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc fait un développement en $u = 0$ de e^u

$\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $u \underset{0}{\sim} x$ donc $o\left(u^3\right) = o\left(x^3\right)$, on doit donc calculer jusqu'à $o\left(u^3\right)$.

$e^{\sin x} = e^u \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$ on fait le calcul pour chaque puissance de u :

$$u = \sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

$$u^2 = (\sin x)^2 \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} x^2 + o\left(x^3\right)$$

$$u^3 = (\sin x)^3 \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^3 \underset{0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$$

Donc $e^{\sin x} \underset{0}{=} 1 + x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \underset{0}{=} \boxed{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)}$

3. $(\cos x)^{\sin x} = \exp\left(\sin x \ln\cos x\right)$, on pose $u = \sin x \ln\cos x \underset{0}{\sim} x(\cos x - 1) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{2}$

Donc $u^2 \underset{0}{\sim} x^6 \underset{0}{=} o\left(x^5\right)$, donc on calcule jusqu'à $o\left(u\right)$

$e^u \underset{0}{=} 1 + u + o\left(u\right)$

$$u = \sin x \ln(\cos x) \underset{0}{=} \sin x \ln\left(1 \underbrace{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)}_{v}\right)$$

$v = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + o\left(x^5\right) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ donc $v^3 \underset{0}{\sim} x^6 \underset{0}{=} o\left(x^5\right)$ donc on calcule jusqu'à $o\left(v^2\right)$

$$\ln(1+v) \underset{0}{=} v - \frac{v^2}{2} + o\left(v^2\right)$$

$$v \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$$

$$v^2 \underset{0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)^2 \underset{0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right)$$

Donc $\ln(1+v) \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o\left(x^5\right) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

On a donc besoin de développer $\sin x$ jusqu'à $o\left(x^3\right)$ car $o\left(x^3\right) \cdot \dfrac{x^2}{2} \underset{0}{=} o\left(x^5\right)$

Donc $u \underset{0}{=} \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o\left(x^5\right)\right) = -\dfrac{x^3}{2} + o\left(x^5\right)$

Ainsi $\boxed{(\cos x)^{\sin x} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^3}{2} + o\left(x^5\right)}$

4. $(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\cosh x\right)$

On pose $u = \dfrac{1}{x}\ln\cosh x \underset{0}{=} \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \underbrace{\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)}_{v}\right)$

$v \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ donc $v^3 \underset{0}{\sim} x^6 \underset{0}{=} o\left(x^5\right)$ donc on calcule jusqu'à $o\left(v^2\right)$

$$\ln(1+v) \underset{0}{=} v - \frac{v^2}{2} + o\left(v^2\right)$$

$$v \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$$

$$v^2 \underset{0}{=} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)^2 \underset{0}{=} \frac{x^4}{4}$$

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^5\right)$$

d'où $u \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^4\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$

$e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$, on va multiplier par x ensuite, donc $o\left(u^3\right) \underset{0}{=} o\left(x^3\right)$ suffit.

$u \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^4\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$

$u^2 \underset{0}{=} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right)$

$u^3 \underset{0}{=} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$

$e^u \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$

Et ainsi $\boxed{x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} \underset{0}{=} xe^u \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o\left(x^4\right)}$

Exercice 26 – ★ *Développement limité d'un quotient en 0.*

Calculer les développements limités en 0 suivants :

1. $\frac{1}{1 + x + x^2}$ à l'ordre 4.
2. $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ à l'ordre 4.
3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2.
4. $\frac{\ln(1 + x)}{\sin x}$ à l'ordre 3.

Correction

1. $\frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{1}{1 + u}$, $u = x + x^2 \underset{0}{\sim} x$ donc on doit calculer jusqu'à u^4

   $u = x + x^2$

   $u^2 = \left(x + x^2\right)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$

   $u^3 = \left(x + x^2\right)^3 \underset{0}{=} x^3 + 3x^4 + o\left(x^4\right)$

   $u^4 = \left(x + x^2\right)^4 \underset{0}{=} x^4 + o\left(x^4\right)$

   $\frac{1}{1 + u} \underset{0}{=} -u + u^2 - u^3 + u^4 + o\left(u^4\right) \underset{0}{=} 1 - x + x^3 - x^4 + o\left(x^4\right)$

   Donc $\boxed{\frac{1}{1 + x + x^2} \underset{0}{=} 1 - x + x^3 - x^4 + o\left(x^4\right)}$

2. On doit calculer le DL de $\sin^2 x$ jusqu'à x^6 car on va diviser par x^2.

   $\sin^2 x \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)\right)^2 \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o\left(x^6\right)$

   Donc $\boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2} \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o\left(x^4\right)}$

3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} \underset{0}{=} \frac{x - 1 + o\left(x^2\right)}{2 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)} \underset{0}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 + x + o\left(x^2\right)}{1 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)}$

   $\underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(-1 + x + o\left(x^2\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right) \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$

4. $\frac{\ln(1 + x)}{\sin x} \underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)}{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)} \underset{0}{=} \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right)}{1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)}$

   $\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)\right)$

   $\boxed{\underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}$

Exercice 27 – ★ *Intégration de développement limités*

Calculer à l'aide d'intégrations les développements limités en 0 suivants :

1. $\tan x$ à l'ordre 7.
2. $\arccos x$ à l'ordre 5.
3. Argth x à l'ordre 5.
4. Argsh x à l'ordre 5.

Correction

1. $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$ donc $\tan' x = 1 + \tan^2 x \underset{0}{=} 1 + (x + o(x))^2 \underset{0}{=} 1 + x^2 + o\left(x^2\right)$

   Donc $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ donc

   $\tan' x = 1 + \tan^2 x \underset{0}{=} 1 + \left(x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} 1 + x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + o\left(x^4\right)$

   Donc $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$ donc

   $\tan' x = 1 + \tan^2 x \underset{0}{=} 1 + \left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)\right)^2 \underset{0}{=} 1 + x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + \dfrac{17x^6}{45} + o\left(x^6\right)$

   Donc $\boxed{\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o\left(x^7\right)}$

2. $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \underset{0}{=} -\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + o\left(x^5\right)\right)$

   Donc $\boxed{\arccos(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)}$

3. $\operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + x^4 + o\left(x^4\right)$

   Donc $\boxed{\operatorname{Argth}(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)}$

4. $\operatorname{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right)$

   Donc $\operatorname{Argsh}(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right)$

Exercice 28 – ★ *Développements limités en a*

Calculer les développements limités suivants :

1. e^x en 1 à l'ordre 3.
2. $\ln x$ en 2 à l'ordre 3.
3. $\cos x$ en $\dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.
4. $\sqrt{x}$ en 2 à l'ordre 3.
5. $\tan x$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.
6. $\arcsin x$ en $\dfrac{1}{2}$ à l'ordre 3.

Correction

1. On pose $x = 1 + t$ donc $e^x = e^{1+t} = e \cdot e^t \underset{0}{=} e \cdot \left(1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right)$

   Donc $\boxed{e^u \underset{1}{=} e + e(x-1) + \dfrac{e(t-1)^2}{2} + \dfrac{e(t-1)^3}{6} + o\left((x-1)^3\right)}$

2. On pose $x = 2 + 2t$, $\ln(x) = \ln 2 + \ln(1+t) \underset{0}{=} \ln 2 + t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)$

   Or $t = \dfrac{x-2}{2}$ donc $\boxed{\ln x \underset{2}{=} \ln 2 + \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + \dfrac{(x-2)^3}{24} + o\left((x-2)^3\right)}$

3. On pose $t = x - \dfrac{\pi}{3}$, $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + t\right) = \dfrac{\cos t}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\sin t}{2}$

   $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + t\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{t^2}{2} + o\left(t^3\right)\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \dfrac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right)$

   $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + t\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}t}{2} - \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{\sqrt{3}t^3}{12} + o\left(t^3\right)$

   Donc $\boxed{\cos x \underset{\frac{\pi}{3}}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{3})}{2} - \dfrac{(x-\frac{\pi}{3})^2}{4} + \dfrac{\sqrt{3}(x-\frac{\pi}{3})^3}{12} + o\left((x-\tfrac{\pi}{3})^3\right)}$

4. On pose $t = x - 2$, $\sqrt{x} = \sqrt{2+t} = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{t}{4} - \dfrac{t^2}{32} + \dfrac{t^3}{128} + o\left(t^3\right)\right)$

   Donc $\boxed{\sqrt{x} \underset{2}{=} \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}(x-2)}{4} - \dfrac{\sqrt{2}(x-2)^2}{32} + \dfrac{\sqrt{2}(x-2)^3}{128} + o\left((x-2)^3\right)}$

5. On pose $t = x - \dfrac{\pi}{4}$, $\tan x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right) = \dfrac{1+\tan t}{1-\tan t}$

   On pose $u = \tan t \underset{0}{\sim} t$, $\dfrac{1+\tan t}{1-\tan t} = \dfrac{1+u}{1-u} \underset{0}{=} (1+u)\left(1 + u + u^2 + u^3 + o\left(u^3\right)\right)$

   $\dfrac{1+u}{1-u} \underset{0}{=} 1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + o\left(u^3\right)$

$$u = \tan t \underset{0}{=} t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)$$

$$u^2 \underset{0}{=} \left(t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} t^2 + o\left(t^3\right)$$

$$u^3 \underset{0}{=} \left(t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)\right)^3 \underset{0}{=} t^3 + o\left(t^3\right)$$

Donc $\dfrac{1+\tan t}{1-\tan t} \underset{0}{=} 1 + 2t + 2t^2 + \dfrac{8t^3}{3} + o\left(t^3\right)$

Donc $\boxed{\tan x \underset{\frac{\pi}{4}}{=} 1 + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)}$

6. On pose $t = x - \dfrac{1}{2}$, $\arcsin'(x) = \arcsin'\left(t+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(t+\frac{1}{2})^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(t+\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}-t-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{4}{3}(t+t^2)}}$$

On pose $u = \dfrac{4}{3}(t+t^2) \underset{0}{\sim} \dfrac{4t}{3}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{4}{3}(t+t^2)}} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{1-u}} \underset{0}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o\left(u^2\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{u}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}u^2}{4} + o\left(u^2\right)$$

$$u = \frac{4}{3}(t+t^2)$$

$$u^2 = \left(\frac{4}{3}(t+t^2)\right)^2 \underset{0}{=} \frac{16}{9}t^2 + \frac{32}{9}t^3 + o\left(t^3\right)$$

Donc $\arcsin'\left(t+\dfrac{1}{2}\right) \underset{0}{=} \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{4t}{3\sqrt{3}} + \dfrac{4t^2}{3\sqrt{3}} + \dfrac{4t^2}{3\sqrt{3}} + o\left(t^2\right)$

$$\underset{0}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4t}{3\sqrt{3}} + \frac{8t^2}{3\sqrt{3}} + o\left(t^2\right)$$

Donc $\arcsin\left(t+\dfrac{1}{2}\right) \underset{0}{=} \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2t}{\sqrt{3}} + \dfrac{2t^2}{3\sqrt{3}} + \dfrac{8t^3}{9\sqrt{3}} + o\left(t^3\right)$

Donc $\boxed{\arcsin(x) \underset{\frac{1}{2}}{=} \frac{\pi}{6} + \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{3\sqrt{3}} + \frac{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}{9\sqrt{3}} + o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right)}$

Exercice 29 – ★ *Développement en* $+\infty$

Calculer les développements suivants en $+\infty$:

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3.
2. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln x$ à l'ordre 4.
3. $(x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 4.
4. $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$ à l'ordre 2

Correction

Dans tout l'exercice, $x > 0$

1. On pose $t = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{t}+2}}{\sqrt{\frac{1}{t}}} = \sqrt{2+t} \underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1+\dfrac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\underset{0}{=} \sqrt{2}\left(1 + \frac{t}{4} - \frac{t^2}{32} + \frac{t^3}{128} + o\left(t^3\right)\right)$$

Donc $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \underset{+\infty}{=} \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4x} - \dfrac{\sqrt{2}}{32x^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{128x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

2. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \ln x = \ln 2x + \ln\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2x}\right) - \ln x = \ln 2 + \ln\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right)$

$$\underset{+\infty}{=} \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{16x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$\underset{+\infty}{=} \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{16x^4} - \frac{1}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\boxed{\underset{+\infty}{=} \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

3. $(x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}} = x\left((1+x^{-2})^{\frac{1}{3}} - (1-x^{-2})^{\frac{1}{3}}\right)$

On pose $t = \dfrac{1}{x}$, $\qquad (1+t^2)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{t^2}{3} - \dfrac{t^4}{9} + o\left(t^5\right)$

$$(1-t^2)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1 - \frac{t^2}{3} - \frac{t^4}{9} + o\left(t^5\right)$$

Donc $\dfrac{1}{t}\left((1+t^2)^{\frac{1}{3}} - (1-t^2)^{\frac{1}{3}}\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{2t^2}{3} + o\left(t^5\right)\right) = \dfrac{2t}{3} + o\left(t^4\right)$

Donc $\boxed{(x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}} \underset{+\infty}{=} \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$

4. $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)=x\left(x\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}-x\sqrt{2}\right)$

$\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}\underset{+\infty}{=}\sqrt{1+1+\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)}\underset{+\infty}{=}\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$

$\underset{+\infty}{=}\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

Donc $\boxed{x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{\sqrt{2}}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

Exercice 30 – ★ *Développement limité à l'ordre 100 !*

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 100 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Correction

$\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}=e^x-\sum_{k=100}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\underset{0}{=}e^x-\frac{x^{100}}{100!}+o\left(x^{100}\right)$

$\ln\left(\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)\underset{0}{=}\ln\left(e^x-\frac{x^{100}}{100!}+o\left(x^{100}\right)\right)\underset{0}{=}x+\ln\left(1-\frac{x^{100}e^{-x}}{100!}+o\left(x^{100}e^{-x}\right)\right)$

$\underset{0}{=}x-\frac{x^{100}e^{-x}}{100!}+o\left(x^{100}e^{-x}\right)\underset{0}{=}x-\frac{x^{100}(1+o(1))}{100!}+o\left(x^{100}(1+o(1))\right)$

$\boxed{\underset{0}{=}x-\frac{x^{100}}{100!}+o\left(x^{100}\right)}$

Exercice 31 – ★★ *Développement limité d'une fonction réciproque*

Soit $f : x \longmapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.
3. On admet que $f^{-1}(y)$ admet un développement limité en $y = 0$ à l'ordre 4, quelle est sa forme générale ?
4. On pose $y = f(x)$, en utilisant $f^{-1}(y) = x$, déterminer le développement limité de $f^{-1}(y)$ en $y = 0$ à l'ordre 4 ?

Exercice 32 – ★★ *Un développement limité intéressant*

Soit $n \geq 1$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{\exp((n+1)x) - 1}{\exp(x) - 1}$, et $f(0) = a$, avec a tel que $f \in \mathcal{C}^0$

1. Déterminer a.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
3. Soit (a_p) la suite telle que $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + o\left(x^m\right)$. Déterminer a_p.

Exercice 33 – ★ *Calcul de limites grâce à un développement limité*

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sinh x - x\cosh x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Correction

1. $\dfrac{\sin x - x}{x^3} \underset{0}{=} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - x}{x^3} \underset{0}{=} -\dfrac{1}{6} + o(1)$

   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}}$

2. $\dfrac{1}{\sin^2 x} \underset{0}{=} \dfrac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^2} \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)^2}$

   $\underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)^2 \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2}\left(1 + \dfrac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3} + o(1)$

   D'où $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}}$

3. $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sinh x - x\cosh x} \underset{0}{=} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)}{x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - x\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)}$

   $\underset{0}{=} \dfrac{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)} \underset{0}{=} \dfrac{\frac{1}{3} + o(1)}{-\frac{1}{3} + o(1)} \underset{0}{=} \dfrac{-1 + o(1)}{1 + o(1)} \underset{0}{=} (-1 + o(1))(1 + o(1)) \underset{0}{=} -1 + o(1)$

   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sinh x - x\cosh x} = -1}$

4. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2}\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right) \underset{0}{=}$
   $-\dfrac{1}{6} + o(1)$

   Donc $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \underset{0}{=} e^{-\frac{1}{6}} \cdot e^{o(1)} \underset{0}{=} e^{-\frac{1}{6}}(1 + o(1)) \underset{0}{=} e^{-\frac{1}{6}} + o(1)$

   Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}}$

Exercice 34 – ★ *Tangente en a*

Dans chaque cas, donner l'équation de la tangente en a ainsi que la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente.

1. $f(x) = \ln(\cos x)$ en $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ en $a = 0$

Correction

1. $\ln(\cos x) \underset{0}{=} \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$

   Donc $T_0 : y = 0$ et $\mathcal{C}_f$ est au dessous de T_0 au voisinage de 0.

2. $\dfrac{1}{1+e^x} \underset{0}{=} \dfrac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)} \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)}$

   On pose $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$

   $u^2 \underset{0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{0}{=} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{4} + o\left(x^3\right)$

   $u^3 \underset{0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)^3 \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$

   Ainsi $\dfrac{1}{1+e^x} \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + o\left(x^3\right)$

   Donc $T_0 : y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$

   Au voisinage de 0, si $x < 0$ $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T_0 et si $x > 0$ $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_0

Exercice 35 – ★ *Asymptote en* ∞

Soit $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$

1. Donner l'équation de l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, notée $\mathcal{D}_{+\infty}$. Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_{+\infty}$?
2. Donner l'équation de l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$, notée $\mathcal{D}_{-\infty}$. Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_{-\infty}$?

Correction

1. On prend $x \neq 0$ et on pose $t = \dfrac{1}{x}$,

   $\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 2x - 6} = \dfrac{1}{t}\left(1 + 3t - 2t^2 - 6t^3\right)^{\frac{1}{3}}$

   On pose $u = 3t - 2t^2 - 6t^3 \underset{0}{\sim} 3t$

   $u^2 = \left(3t - 2t^2 - 6t^3\right)^2 \underset{0}{=} 9t^2 - 12t^3 + o\left(t^3\right)$

   $u^3 = \left(3t - 2t^2 - 6t^3\right)^3 \underset{0}{=} 27t^3 + o\left(t^3\right)$

   $(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{u}{3} - \dfrac{u^2}{9} + \dfrac{5u^3}{81} + o\left(u^3\right)$

   Ainsi $\dfrac{1}{t}\left(1 + 3t - 2t^2 - 6t^3\right)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} \dfrac{1}{t}\left(1 + t + \left(-\dfrac{2}{3} - 1\right)t^2 + \left(-2 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{9}\right)t^3 + o\left(t^3\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \dfrac{1}{t} + 1 - \dfrac{5t}{3} - \dfrac{t^2}{9} + o\left(t^2\right)$

   Donc $\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} \underset{\infty}{=} x + 1 - \dfrac{5}{3x} - \dfrac{1}{9x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

   Donc $D_{+\infty} : y = 1 + x$ et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$

2. Le développement limité est le même et $+\infty$ et $-\infty$

   $D_{-\infty} : y = 1 + x$ et $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$, car $-\dfrac{5}{3x} > 0$

Exercice 36 – ★ *Branche infinie en* ∞

Soit $f(x) = \frac{1}{x}(2x^2-1)e^{\frac{1}{x}}$

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $+\infty$, notée $\mathcal{B}_{+\infty}$. Quelle est la direction de $\mathcal{B}_{+\infty}$?
2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $-\infty$, notée $\mathcal{B}_{-\infty}$. Quelle est la direction de $\mathcal{B}_{-\infty}$?

Correction

1. Pour $x \neq 0$, on pose $t = \frac{1}{x}$

   $\frac{1}{x}(2x^2-1)e^{\frac{1}{x}} = t\left(\frac{2}{t^2}-1\right)e^t \underset{0}{=} \left(\frac{2}{t}-t\right)\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o\left(t^3\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \frac{2}{t}+2-\frac{2t^2}{3}+o\left(t^2\right)$

   Donc $\frac{1}{x}(2x^2-1)e^{\frac{1}{x}} \underset{\infty}{=} 2x+2-\frac{2}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

   Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote (et non une branche infinie) d'équation $y = 2x+2$ et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$
2. L'asymptote en $-\infty$ est la même droite, et $\mathcal{C}_f$ est également en dessous au voisinage de $-\infty$

Exercice 37 – ★★ *Étude d'une fonction en* a *et en* $+\infty$

Soit $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

1. $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente en $a = 2$, notée T_2 ? Si oui, donner l'équation de T_2 et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_2.
2. $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote ou branche infinie en $+\infty$? En cas d'asymptote, donner l'équation de l'asymptote et la position de $\mathcal{C}_f$. En cas de branche infinie, donner la direction.

Correction

1. On pose $x = 2+u$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}} = (2+u)\sqrt{\frac{1+u}{7+3u}}$

   $= (2+u)(1+u)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{7}}\left(1+\frac{3}{7}u\right)^{-\frac{1}{2}}$

   $\underset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{7}}(2+u)\left(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o\left(u^2\right)\right)\left(1-\frac{3u}{14}+\frac{3}{8}\cdot\frac{9}{49}u^2+o\left(u^2\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{7}}\left((2+2u+\frac{u^2}{4}+o\left(u^2\right))\right)\left(1-\frac{3u}{14}+\frac{3}{8}\cdot\frac{9}{49}u^2+o\left(u^2\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{7}}\left(2+\left(2-\frac{3}{7}\right)u+\left(\frac{27}{196}-\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\right)u^2+o\left(u^2\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{11u}{7\sqrt{7}}-\frac{2}{49\sqrt{7}}u^2+o\left(u^2\right)$

   Donc $f(x) \underset{2}{=} \frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{11(x-2)}{7\sqrt{7}}-\frac{2(x-2)^2}{49\sqrt{7}}+o\left((x-2)^2\right)$

   $T_2 : y = \frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{11(x-2)}{7\sqrt{7}}$ et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de T_2 au voisinage de 2 car $-\frac{2(x-2)^2}{49\sqrt{7}} \leq 0$
2. Pour $x > 0$, on pose $t = \frac{1}{x}$ et alors

   $x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t}{3+t}}$

   $\underset{0}{=} \frac{1}{t}\left(1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{16}+o\left(t^3\right)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{t}{6}+\frac{t^2}{24}-\frac{5t^3}{27\cdot 16}+o\left(t^2\right)\right)$

   $\underset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{3}t}\left(1-\frac{2t}{3}+\frac{2t^3}{27}+o\left(t^2\right)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{3}t}-\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{2t^2}{27\sqrt{3}}+o\left(t^2\right)$

   Ainsi $x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}} \underset{+\infty}{=} \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3\sqrt{3}}+\frac{2}{27\sqrt{3}x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus au voisinage de l'infini car $\dfrac{2}{27\sqrt{3}x^2} > 0$

Exercice 38 – ★ *Autres développements*

1. Calculer un développement en $+\infty$ de $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
2. Calculer un développement en 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ à la précision $o\left(x^2\sqrt{x}\right)$

Correction

1. Pour $x > 0$, on pose $t = \dfrac{1}{x}$, $\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x = (1+t)^{\frac{1}{t}} = \exp\left(\dfrac{1}{t}\ln(1+t)\right)$

$$\underset{0}{=} \exp\left(\frac{1}{t}\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)\right)\right) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o\left(t^2\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} e \cdot \exp\left(-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o\left(t^2\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} e \cdot \left(1 + \left(-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o\left(t^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o\left(t^2\right)\right)^2 + o\left(t^2\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} e \cdot \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^2}{8} + o\left(t^2\right)\right) \underset{0}{=} e - \frac{e \cdot t}{2} + \frac{11e \cdot t^2}{24} + o\left(t^2\right)$$

Donc $\boxed{\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x \underset{+\infty}{=} e - \dfrac{e}{2x} + \dfrac{11e}{24x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$

2. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \underset{0}{=} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) \underset{0}{=} \sqrt{x} - \dfrac{x\sqrt{x}}{2} + \dfrac{x^2\sqrt{x}}{3} + o\left(x^2\sqrt{x}\right)$

Exercice 39 – ★★ *Développement limité d'une intégrale*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

Exercice 40 – ★★ *Développement limité d'une suite implicite*

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
2. Que vaut $\tan(x + n\pi)$?, en déduire que l'équation $\tan x = x$ admet une unique dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, notée x_n
3. Montrer que $x_n \sim n\pi$ puis que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$
4. Calculer un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$ et conclure que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 41 – ★★ *Équivalent d'une suite définie par une intégrale*

Soit la suite $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 42 – ★★ *Une limite de sinus*

Soit $u_n = \sin(\pi\sqrt{4n^2 + n})$. Calculer la limite de u_n.

Exercice 43 – ★★ *Étude d'une fonction définie par une intégrale*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan t dt$

1. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
2. Étudier $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$: asymptote, branche infinie, position de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 44 – ★★ *Encore une suite implicite*

On considère l'équation $\ln(x^n) + 1 = x$, pour $n \geq 2$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $]1, +\infty[$. On note x_n cette solution.
2. Donner un développement limité à trois terme de la suite (x_n).

Exercice 45 – ★★ *Équivalent d'une suite d'intégrale*

Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$