

# Dimension des espaces vectoriels

---

## Table des matières

<b>1 Familles libres, génératrices, bases</b>	<b>2</b>
1.1 Familles génératrices . . . . .	2
1.2 Familles libres . . . . .	3
1.3 Bases . . . . .	4
1.4 Bases et applications linéaires . . . . .	5
<b>2 Dimension d'un espace vectoriel</b>	<b>6</b>
2.1 Existence d'une base . . . . .	7
2.2 Dimension . . . . .	7
2.3 Théorème de la base incomplète . . . . .	9
2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels . . . . .	9
<b>3 Relation entre les dimensions</b>	<b>10</b>
3.1 Dimension et isomorphisme . . . . .	10
3.2 Dimension d'un produit de sous-espaces vectoriels . . . . .	11
3.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	11
<b>4 Rang</b>	<b>13</b>
4.1 Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire . . . . .	13
4.2 Théorème du rang . . . . .	13
4.3 Caractérisation des isomorphismes . . . . .	15
4.4 Hyperplans et formes linéaires . . . . .	15

# 1 Familles libres, génératrices, bases

Dans cette section,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## 1.1 Familles génératrices

### Définition 3.1.1 Famille génératrice

Une famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est dite **génératrice** de  $E$  si

$$E = \text{Vect}\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

c'est-à-dire si tout élément de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ou encore :

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Dans ce cas on dit aussi que la famille engendre  $E$

EXEMPLES :

- $(1, i)$  est une famille génératrice du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .  
En effet, pour tout  $z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad z = a + ib$
- Soit  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (1, 1)$ . La famille  $(e_1, e_2)$  est génératrice de  $E$ . En effet, soit  $u = (x, y) \in E$ ,  
 $u = (x - y, 0) + (y, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1) = (x - y)e_1 + ye_2$ . Donc  $E = \text{Vect}\{(e_1, e_2)\}$
- D'une manière générale, deux vecteurs non colinéaires du plan forment une famille génératrice du plan, et trois vecteurs non coplanaires de l'espace forment une famille génératrice de l'espace.
- $(1, X, \dots, X^n)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ , car  $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$

### Propriété 3.1.2 Sur-famille d'une famille génératrice

Soit  $\mathcal{F}$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{G}$  une famille qui contient  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . Alors  $\mathcal{G}$  est génératrice de  $E$ .

DÉMONSTRATION

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{G} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ . Puisque  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ , et que  $\mathcal{G}$  contient tous les éléments de  $\mathcal{F}$ , tout élément de  $E$  est combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{F}$  et donc d'éléments de  $\mathcal{G}$ .  $\mathcal{G}$  est donc génératrice de  $E$ .

### Propriété 3.1.3 Caractérisation des familles génératrices

Soit  $\mathcal{F}$  une famille génératrice de  $E$ . Une famille  $\mathcal{G}$  est génératrice de  $E$  si, et seulement si, tout élément de  $\mathcal{F}$  est combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{G}$

DÉMONSTRATION

- $\Rightarrow$  Si  $\mathcal{G}$  est génératrice de  $E$  alors tout élément de  $E$  est combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{G}$ , et donc tout élément de  $\mathcal{F}$  est aussi combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{G}$
- $\Leftarrow$  Réciproquement, supposons que tout élément de  $\mathcal{F}$  est combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F} \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$ , espace vectoriel contenant  $\mathcal{F}$ . Puisque  $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$  est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $\mathcal{F}$ , on en déduit  $E = \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$ , ce qui prouve que  $\mathcal{G}$  est génératrice

REMARQUE :

- Pour montrer que  $\mathcal{F}$  est génératrice il suffit de montrer que les éléments d'une famille génératrice connue sont atteints par des combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{F}$ .
- C'est une propriété très utile pour déterminer l'image d'une application linéaire. En effet si on prouve qu'une certaine famille génératrice  $\mathcal{B}$  de  $F$  est dans l'image de  $f$  application linéaire de  $E$  dans  $F$ , c'est-à-dire  $\mathcal{B} \subset \text{Im}(f)$ , alors on en déduit  $\text{Im}(f) = F$

EXEMPLES :

- Si  $j = e^{2i\pi/3}$  alors  $(1, j)$  est génératrice de  $\mathbb{C}$  puisque  $(1, i)$  est génératrice et que 1 et  $i$  sont combinaisons linéaires de 1 et  $j$ . Pour 1 c'est clair, pour  $i$  on peut écrire  $i = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}j$

2. Soit  $E = \mathbb{R}^2$ , tout élément de  $E$  s'écrit  $u = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ , donc  $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$  est génératrice. Montrons que  $\mathcal{G} = ((1, 0), (1, 1))$  l'est aussi.  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  ont en commun  $(0, 1)$  et  $(0, 1) = (1, 1) - (1, 0)$  donc les éléments de  $\mathcal{F}$  génératrice sont des combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{G}$ , donc  $\mathcal{G}$  est également génératrice.
3. Soit  $E = \mathbb{R}^2$  et  $u$  l'endomorphisme  $u : (x, y) \mapsto (2x - y, -x + y)$ . On a  $u(1, 1) = (1, 0)$  et  $u(1, 2) = (0, 1)$ , donc  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  famille génératrice de  $E$  est incluse dans  $\text{Im}(u)$ , on en déduit  $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^2$

## 1.2 Familles libres

### Définition 3.1.4 Famille libre, famille liée

Soit  $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille finie de  $n$  éléments de  $E$

- On dit que  $\mathcal{F}$  est une **famille libre** ou que les vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont **linéairement indépendants** si pour tout  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ , on a

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \right) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

- Dans le cas contraire, si l'on peut trouver des  $\lambda_i$  non tous nuls vérifiant  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$  on dit que la famille est **liée** ou que les vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont **linéairement dépendants**.

EXEMPLES :

1. Une famille à un élément  $x$  est libre si, et seulement si,  $x$  est non nul. En effet
  - si  $x = 0_E$  alors  $1x = 0_E$  donc  $(x)$  forme une famille liée
  - si  $x \neq 0_E$  alors  $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ , donc  $(x)$  forme une famille libre
2. Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , la famille  $(1, i)$  est libre en effet puisque pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  on a :  $a + ib = 0 \Rightarrow a = b = 0$
3. Dans  $E = \mathbb{R}^2$  la famille  $\mathcal{F} = \{(1, 0), (1, 1), (4, 5)\}$  est liée. En effet,  $(4, 5) = -(1, 0) + 5(1, 1)$  et donc  $-1(1, 0) + 5(1, 1) - (4, 5) = (0, 0)$  ce qui montre que les éléments de la famille sont linéairement liés.

### Propriété 3.1.5 Sur-famille et sous-famille

- Si  $\mathcal{F}$  est une famille libre, alors toute famille  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  est libre.
- Si  $\mathcal{F}$  est une famille liée, alors toute famille  $\mathcal{G}$  qui contient  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ , est liée.

DÉMONSTRATION

- Soit  $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille libre. Prenons une sous-famille  $\mathcal{G}$  à  $p$  vecteurs, quitte à permuter les  $x_i$  on peut supposer que cette famille est  $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_p)$ . Soit  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$  tel que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E$$

En posant  $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$ , on obtient  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E$  et comme la famille  $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est libre on a  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  et donc en particulier  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots, \lambda_p = 0$  ce qui prouve que  $x_1, x_2, \dots, x_p$  sont linéairement indépendants, c'est-à-dire que  $\mathcal{G}$  est libre.

- La deuxième affirmation est la contraposée de la première, mais nous la démontrons tout de même. Soit  $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille liée et  $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  une sur-famille. Puisque la famille est liée on peut trouver  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$$

en prenant  $\lambda_{n+1} = 0$  on obtient ainsi  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0_E$  avec des  $\lambda_i$  non tous nuls, ce qui prouve que la famille  $\mathcal{G} = (x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  est liée.

EXEMPLE :

1. La famille  $(0_E)$  étant liée, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
2. Une famille libre ne peut pas contenir deux vecteurs colinéaires, ou deux vecteurs égaux.

### 1.3 Bases

#### Définition 3.1.6 Base d'un espace vectoriel

Une famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de vecteurs de  $E$  est une **base** de  $E$  si c'est une famille libre et génératrice de  $E$

#### EXEMPLES

1. Nous avons montré que  $(1, i)$  est une famille libre et génératrice dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , c'est donc une base.
2. Dans  $E = \mathbb{R}^n$ , la famille  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  définie par

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

est une base de  $\mathbb{K}^n$  car l'égalité  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  prouve que tout vecteur de  $\mathbb{K}^n$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}$  et qu'une telle combinaison linéaire ne peut être nulle que si tous les  $\lambda_i$  sont nuls.

Cette base « naturelle » est appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$

3.  $(1, X, \dots, X^n)$  forme une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ , elle est appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}_n[X]$

#### Propriété 3.1.7 Coordonnées dans une base

Une famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$  si, et seulement si, pour tout vecteur de  $x \in E$ , il existe une unique famille  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$  telle que :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

La famille  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  est alors appelée **coordonnées** (ou **composantes**) de  $x$  dans  $\mathcal{B}$

#### DÉMONSTRATION

- Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base alors elle est génératrice, donc  $x$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}$ . Considérons deux décompositions de  $x$  :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E$$

et puisque la base  $\mathcal{B}$  est libre, tous les  $\lambda_i - \mu_i = 0$  ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

- Réciproquement :

- l'existence de la décomposition pour tout  $x \in E$  prouve que  $\mathcal{B}$  est génératrice
- Supposons  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$ , puisque  $0_E = \sum_{i=1}^n 0 e_i$ , l'unicité de la décomposition prouve que tous les  $\lambda_i$  sont nuls et donc  $\mathcal{B}$  est libre.

#### EXEMPLES :

1. Les composantes de  $z = a + ib$  dans la base  $(1, i)$  sont  $a = \mathcal{R}e(z)$  (partie réelle) et  $b = \mathcal{I}m(z)$  (partie imaginaire)
2. Dans  $E = \mathbb{R}^2$ , dans la base  $\mathcal{F} = \{(1, 0), (1, 1)\}$  les coordonnées de  $(4, 5)$  sont  $-1$  et  $5$ . En effet  $(4, 5) = -(1, 0) + 5(1, 1)$ .
3. Dans  $E = \mathbb{R}^2$ , dans la base canonique  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ , les coordonnées de  $(4, 5)$  sont  $4$  et  $5$ .
4. Les composantes du polynôme  $\sum_{p=0}^n a_p X^p$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$  sont les coefficients du polynôme, c'est-à-dire les scalaires  $a_1, \dots, a_p$

**Propriété 3.1.8**

Soit  $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de vecteurs de  $E$  et l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow E \\ (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} & \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{cases}$$

Alors :

- $\varphi$  est une application linéaire
- $\varphi$  est injective si, et seulement si,  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre
- $\varphi$  est surjective si, et seulement si,  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est génératrice
- $\varphi$  est bijjective si, et seulement si,  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$

**DÉMONSTRATION**

Cette propriété est la conséquence des propriétés précédente, mais elle a la force de la concision.

- Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , deux familles  $\Lambda = (\lambda)_{1 \leq i \leq n}$  et  $\mathcal{M} = (\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{K}^n$  et  $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$ . Alors

$$\varphi(\alpha\Lambda + \beta\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i)x_i = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \beta \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \alpha\varphi(\Lambda) + \beta\varphi(\mathcal{M})$$

donc  $\varphi$  est linéaire

- $\varphi$  injective  $\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Leftrightarrow (\varphi(\Lambda) = 0_E \Rightarrow \Lambda = 0_{\mathbb{K}^n})$   
 $\Leftrightarrow (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_i = 0)$

La dernière équivalence imposant la liberté de la famille  $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$

- $\varphi$  surjective  $\Leftrightarrow \text{Im}(\varphi) = E \Leftrightarrow \text{Vect}(\mathcal{F}) = E$  c'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  est génératrice
- Conséquence des deux points précédents.

**1.4 Bases et applications linéaires****Propriété 3.1.9 Caractérisation des applications linéaires**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et une famille  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, il existe une unique application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$$

**DÉMONSTRATION**

- **Unicité** : Soit  $u$  une telle application linéaire, et  $x \in E$ . On a  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ , et par linéarité de  $u$  on a

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

Donc  $u$  est complètement déterminée et par suite unique.

- **Existence** : Puisque  $\mathcal{B}$  est une base, tout élément  $x$  de  $E$  s'écrit  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ . En posant  $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ , on définit une application de  $E$  dans  $F$ .

- Montrons qu'elle est linéaire. Soit  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$  et deux scalaires  $\alpha, \beta$ . On a :

$$\begin{aligned} u(\alpha x + \beta y) &= u\left(\sum_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i) f_i = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right) + \beta \left(\sum_{i=1}^n \mu_i f_i\right) \\ &= \alpha u(x) + \beta u(y) \end{aligned}$$

- Enfin,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$  puisque les composantes de  $e_i$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont nulles sauf  $\lambda_i = 1$

REMARQUE : On énonce le résultat précédent en disant qu'une application linéaire est caractérisée par l'image d'une base.

### Propriété 3.1.10 Image d'une base

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans un espace vectoriel  $F$ , et  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  :

- La famille  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est génératrice de  $\text{Im}(u)$
- $u$  est surjective si, et seulement si,  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une famille génératrice de  $F$
- $u$  est injective si, et seulement si,  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $F$
- $u$  est bijjective si, et seulement si,  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $F$

### DÉMONSTRATION

- Soit  $y \in \text{Im}(u)$ , donc il existe  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ . Comme  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille génératrice de  $E$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , donc et par linéarité de  $u$ ,

$$y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$$

ce qui montre que  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$

- $u$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(u) = F$ , c'est-à-dire, si et seulement si  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est génératrice de  $F$

- Supposons  $u$  injective. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0_F$ , comme  $u$  est linéaire, on a

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F, \text{ donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(u). \text{ Puisque } u \text{ est injective, } \text{Ker}(u) = \{0_E\}, \text{ donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \text{ et comme } (e_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est libre, tous les } \lambda_i \text{ sont nuls, ce qui prouve que } (u(e_i))_{1 \leq i \leq n} \text{ est libre}$$

Supposons la famille  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  libre. Soit  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  un vecteur de  $\text{Ker}(u)$  on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = u(x) = 0_F. \text{ Comme } (u(e_i))_{1 \leq i \leq n} \text{ est libre, on en déduit que tous les } \lambda_i \text{ sont nuls et donc } x = 0_E, \text{ ainsi } \text{Ker}(u) = \{0_E\}, \text{ c'est-à-dire que } u \text{ est injective.}$$

- Conséquence des deux points précédents.

REMARQUE : On retient :  $u$  **bijjective**  $\iff$  **l'image d'une base est une base**.

## 2 Dimension d'un espace vectoriel

### Définition 3.2.11 Dimension finie

On dit que  $E$  est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire on dit que  $E$  est de **dimension infinie**.

### EXEMPLES

1. On a vu que  $(1, i)$  était une famille génératrice du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , donc  $\mathbb{C}$  est de dimension finie.
2. On a vu que  $\mathcal{F} = ((1, 0), (1, 1))$  était une famille génératrice de  $\mathbb{R}^2$ , donc  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie.
3. On a vu que  $(1, X, \dots, X^n)$  était une base (donc génératrice) de  $\mathbb{R}_n[X]$  donc c'est un espace vectoriel de dimension finie
4. En revanche  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes est un espace vectoriel de dimension infinie, il contient la famille libre infinie  $(1, X, \dots, X^n, \dots)$
5. De même l'espace des fonctions  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel de dimension infinie (il contient l'espace des polynômes)

## 2.1 Existence d'une base

### Propriété 3.2.12 Existence d'une base - Théorème de la base extraite

Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de  $E$  de dimension finie. Toute famille libre contenue dans  $\mathcal{G}$  peut être complétée en une base de  $E$  avec des éléments de  $\mathcal{G}$ . Autrement dit, on peut **extraire une base** de  $E$  de toute famille génératrice.

#### DÉMONSTRATION

Soit  $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  un famille génératrice de  $E$ , et  $\mathcal{L} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$  une famille libre contenue dans  $\mathcal{G}$ .

Soit  $S$  l'ensemble des cardinaux des sous-familles libres de  $\mathcal{G}$ . Cet ensemble est non vide ( $p \in S$ ) et est majoré par  $n$ , il possède donc un plus grand élément  $r$ . Il existe donc une sous-famille libre  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{G}$  de cardinal  $r$ . Soit  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\mathcal{B} = (g_i)_{i \in I}$ .

Montrons que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

➤  $\mathcal{B}$  est libre par hypothèse

➤ Montrons quelle est génératrice. Pour cela il suffit de montrer que tous les éléments de  $\mathcal{G}$  sont une combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{B}$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

- Si  $i \in I$ , dans ce cas  $g_i \in \mathcal{B}$ , et  $g_i$  est évidemment combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{B}$
- Si  $i \notin I$ , on pose  $I' = I \cup \{i\}$ , alors  $\text{card}(I') > r$  et  $I' \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  donc la sous-famille  $(g_i)_{i \in I'}$  n'est pas libre. Dans ce cas, on note  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_r)$  et  $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_r, g_i)$ . Ainsi il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha$  tels que :

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k x_k + \alpha g_i = 0$$

avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha) \neq (0, 0, \dots, 0)$ .  $\alpha \neq 0$  car sinon puisque  $\mathcal{B}$  est libre tous les  $\lambda_k$  seraient nuls. Ainsi,

$$g_i = \sum_{k=1}^r -\frac{\lambda_k}{\alpha} x_k$$

ce qui prouve que  $g_i$  est combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{B}$

Ainsi  $\mathcal{B}$  est génératrice.

En conclusion  $\mathcal{B}$  est une famille libre et génératrice de  $E$ .

## 2.2 Dimension

### Propriété 3.2.13

Soit  $\mathcal{G}$  une famille à  $n$  vecteurs de  $E$ . Toute famille à  $n+1$  éléments de  $E$  dont les vecteurs sont combinaisons des éléments de  $\mathcal{G}$  est une famille liée.

#### DÉMONSTRATION

Soit  $(H_n)$  la propriété à démontrer.

➤  $H_0$  est vraie car une combinaison linéaire de 0 vecteur est le vecteur nul, et la famille  $(0_E)$  est liée. On peut vérifier aussi que  $H_1$  est vraie car la famille est alors  $(x, \alpha x)$  elle est composée de deux vecteurs colinéaires, elle est donc liée.

➤ On suppose  $H_{n-1}$  vraie,  $\mathcal{G} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille à  $n$  éléments de  $E$  et  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  une famille à  $n+1$  éléments de  $E$ . On suppose que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le vecteur  $x_k$  est combinaison linéaire des  $e_i$ , on a  $x_k = \lambda_{1,k} e_1 + \lambda_{2,k} e_2 + \dots + \lambda_{n-1,k} e_{n-1} + \alpha_k e_n$

- Si tous les  $\alpha_k$  sont nuls alors la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une famille de  $n$  vecteurs combinaisons linéaires de  $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$  donc est liée d'après  $H_{n-1}$  et donc  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  est liée.
- Si un des  $\alpha_k$  est non nul, quitte à permuter les indices, on peut supposer  $\alpha_0 \neq 0$  et on pose :

$$y_k = x_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} x_0 = \left( \lambda_{1,k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \lambda_{1,0} \right) e_1 + \dots + \left( \lambda_{n-1,k} - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \lambda_{n-1,0} \right) e_{n-1} + \underbrace{\left( \alpha_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \alpha_0 \right)}_{=0} e_n$$

La famille  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  est une famille de  $n$  vecteurs combinaisons linéaires de  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ , donc d'après  $H_{n-1}$  elle est liée. Ainsi il existe des  $\beta_k$  non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^n \beta_k y_k = 0 = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k - \left( \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \alpha_k}{\alpha_0} \right) x_0 = \sum_{k=0}^n \beta_k x_k$$

avec  $\beta_0 = -\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \alpha_k}{\alpha_0}$  et ainsi la famille  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  est liée, donc  $(H_n)$  est vraie.

**Propriété 3.2.14**

Toute famille génératrice a au moins autant d'éléments que toute famille libre. C'est-à-dire que si  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est une famille libre de  $E$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_q)$  est une famille génératrice, alors  $p \leq q$

**DÉMONSTRATION**

Si  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $E$  à  $q$  éléments alors toute famille de  $E$  a ses éléments qui sont combinaisons linéaires des éléments de  $\mathcal{G}$  (car  $\mathcal{G}$  est génératrice). Ainsi, d'après la propriété précédente toute famille de  $E$  à  $q + 1$  éléments est liée. En conclusion toute famille libre a au plus  $q$  éléments.

**Propriété 3.2.15 Dimension**

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de  $E$  ont **le même nombre  $n$  d'éléments**. L'entier  $n$  est appelé **dimension** de  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , ou **dimension** de  $E$

**DÉMONSTRATION**

Si  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont deux bases de  $E$  alors  $\mathcal{B}_1$  est génératrice et  $\mathcal{B}_2$  libre, donc  $\mathcal{B}_1$  a au moins autant d'éléments que  $\mathcal{B}_2$ . De même  $\mathcal{B}_2$  a au moins autant d'éléments que  $\mathcal{B}_1$ . En conclusion  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  ont le même nombre d'éléments.

**EXEMPLES :**

1. L'espace vectoriel  $\{0_E\}$  est de dimension 0, il admet pour base  $\emptyset$  qui a 0 élément.
2.  $\mathbb{K}$  qui est un corps est aussi un espace vectoriel de dimension 1 sur  $\mathbb{K}$
3.  $\mathbb{C}$  est de dimension 1 sur  $\mathbb{C}$  (tout nombre complexe non nul forme une base), mais de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$ , il admet  $(1, i)$  pour base (entre autres).
4.  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 2 car  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  est une base. On peut donc en déduire que toute famille à 3 éléments de  $\mathbb{R}^2$  est liée.
5. D'une manière générale,  $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ , il admet pour base la **base canonique** :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

6.  $K_n[X]$  est de dimension  $n + 1$ , il admet pour base  $(X^p)_{0 \leq p \leq n}$

**Propriété 3.2.16**

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ , alors :

- toute famille libre a **au maximum**  $n$  éléments :  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  libre  $\implies p \leq n$
- toute famille génératrice a **au minimum**  $n$  éléments :  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  génératrice  $\implies p \geq n$

**DÉMONSTRATION**

- Une famille libre a au maximum le même nombre d'éléments que n'importe quelle famille génératrice. Une base étant génératrice, une famille libre a au maximum le nombre d'éléments d'une base, c'est-à-dire  $n$  la dimension de  $E$ .
- Une famille génératrice a au minimum le même nombre d'éléments que n'importe quelle famille libre. Une base étant libre, une famille génératrice a au minimum le nombre d'éléments d'une base, c'est-à-dire  $n$  la dimension de  $E$ .

**Propriété 3.2.17**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  une famille de  $p$  éléments de  $E$ , alors :

- Si  $p > n$  la **famille est liée**
- Si  $p < n$  la **famille n'est pas génératrice**

**DÉMONSTRATION**

- D'après la propriété précédente, si  $p > n$  alors la famille n'est pas libre, elle est donc liée
- D'après la propriété précédente, si  $p < n$  alors la famille n'est pas génératrice

## 2.3 Théorème de la base incomplète

### Propriété 3.2.18 Théorème de la base incomplète

Toute famille libre d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie peut être **complétée en une base** de  $E$

#### DÉMONSTRATION

Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{L}$  une famille libre. Soit  $\mathcal{G}'$  l'union des deux familles (elle contient  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{G}$ ),  $\mathcal{G}'$  est alors génératrice de  $E$  et contient une famille libre ( $\mathcal{L}$ ). Ainsi d'après la proposition d'existence d'une base, on peut ajouter des éléments de  $\mathcal{G}'$  à  $\mathcal{L}$  pour obtenir une base de  $E$ .

### Propriété 3.2.19

Soit  $\mathcal{B}$  une famille d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathcal{B}$  est une base
- (ii)  $\mathcal{B}$  est une famille libre à  $n$  éléments
- (iii)  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice à  $n$  éléments

#### DÉMONSTRATION

(i)  $\Rightarrow$  (ii) et (iii), car une base est une famille libre et génératrice à  $n$  éléments.  
(ii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $\mathcal{B}$  est une famille libre à  $n$  éléments, on peut la compléter en une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  qui est une famille à  $n$  éléments. Donc  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont identiques, donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$   
(iii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice à  $n$  éléments, on peut en extraire une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  qui est donc une famille à  $n$  éléments, donc les familles  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont identiques donc  $\mathcal{B}$  est une base.

REMARQUE : Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace de dimension  $n$ , on montre que c'est une famille libre à  $n$  éléments.

#### EXEMPLES :

- Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , la famille  $(1, w)$  est libre (donc une base), si et seulement si,  $w$  n'est pas réel.
- Dans  $\mathbb{R}^2$ , qui est de dimension 2, deux vecteurs non colinéaires forment une base.
- Dans  $\mathbb{R}_1[X]$ , la famille  $(1 - X, 1 + X)$  est une base. En effet soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que :  $\alpha(1 - X) + \beta(1 + X) = 0$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne  $\alpha = \beta = 0$  donc la famille est libre. Or  $\mathbb{R}_1[X]$  est de dimension 2, donc cette famille est une base.

## 2.4 Dimension des sous-espaces vectoriels

### Propriété 3.2.20 Dimension des sous-espaces vectoriels

Si  $E$  est de dimension  $n$ , tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est de **dimension finie**  $n$ . De plus

- $\dim F \leq \dim E$
- $\dim F = \dim E \Leftrightarrow E = F$

#### DÉMONSTRATION

- Soit  $A = \{\text{cardinaux des familles libres de } F\}$ , cet ensemble est non vide car il contient 0 (toute famille vide est libre), et est majoré par  $n = \dim E$ , il admet donc un plus grand élément  $p \leq n$ . En outre, soit  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $F$  à  $p$  éléments, pour tout  $x \in F$  la famille  $\mathcal{L} \cup \{x\}$  est liée (par définition de  $p$ ). On a alors déjà montré (propriété 12) que  $x \in \text{Vect}(\mathcal{L})$  ce qui montre que  $\mathcal{L}$  est génératrice. Ainsi la famille  $\mathcal{L}$  est une base de  $F$  qui est de dimension  $p \leq n$ .
- Il est clair que si  $E = F$  alors  $\dim E = \dim F$ . Réciproquement, si  $\dim F = \dim E$  alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $F$  à  $n$  éléments et c'est aussi une famille libre de  $E$  à  $n$  éléments et donc une base de  $E$ . On en déduit  $F = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$

#### EXEMPLE :

- Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

On pose  $f_1 = (1, 0, -1)$ ,  $f_2 = (0, 1, -1)$  deux vecteurs de  $F$ . Ils forment une famille libre, en effet  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Ils forment une famille génératrice car tout élément de  $F$  est de la forme

$(x_1, x_2, x_1 - x_2) = x_1 f_1 + x_2 f_2$ . Donc  $F$  est un espace-vectoriel de dimension 2.

**Propriété 3.2.21 Existence d'un sous-espace vectoriel supplémentaire**

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire.

**DÉMONSTRATION**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $F$ , c'est donc une famille libre de  $E$  et d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une base de  $E$  de la forme  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ . Soit  $G$  le sous-espace engendré par la famille  $(e_i)_{p+1 \leq i \leq n}$ . Vérifions que  $G$  est un supplémentaire de  $F$  :

- Tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose dans la base  $\mathcal{B}$  sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Si on pose  $x_F = \sum_{i=1}^p x_i e_i$  et  $x_G = \sum_{i=p+1}^n x_i e_i$ , on a alors  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ , donc

$$E = F + G$$

- Si  $x$  est un vecteur de  $F \cap G$ , il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_{p+1}, \dots, \mu_n$  tels que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^n \mu_i e_i$$

on a donc

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=p+1}^n -\mu_i e_i = 0_E$$

Puisque la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, tous les coefficients sont nuls et donc les  $\lambda_i$  sont nuls. Ainsi,  $x = 0_E$  et donc  $F \cap G = \{0_E\}$

En conclusion,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

### 3 Relation entre les dimensions

#### 3.1 Dimension et isomorphisme

**Propriété 3.3.22 Espaces isomorphes**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On dit que  $F$  est **isomorphe** à  $E$  si et seulement il existe un **isomorphisme** de  $E$  dans  $F$ , dans ce cas  $\dim F = \dim E = n$

**DÉMONSTRATION**

- S'il existe un isomorphisme  $u$  de  $E$  dans  $F$  et si  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$  alors  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $F$  et donc  $F$  est de dimension  $n$
- Si  $\dim E = \dim F = n$ , soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $F$ . Il existe une unique application linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_i) = f_i$$

Comme la famille  $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $F$  alors  $u$  est bijective, c'est donc un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

**Propriété 3.3.23**

Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$

**DÉMONSTRATION**

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  (de dimension  $n$ ), on a alors pour tout  $x \in E$  :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Soit  $\varphi$  l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

$\varphi$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{K}^n$ . Il est clair que pour tout  $e_i \in E$ ,  $\varphi(e_i) = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , et l'ensemble des  $\varphi(e_i)$  forme la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Donc  $\varphi$  est un isomorphisme.

EXEMPLES :

1.  $\mathbb{R}_2[X]$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ , en effet l'application  $\varphi : P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \mapsto (a_0, a_1, a_2)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}^3$
2. D'une manière générale  $\mathbb{R}_n[X]$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{n+1}$
3.  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$  est de dimension 2, en effet  $F = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ . Donc  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$

### 3.2 Dimension d'un produit de sous-espaces vectoriels

#### Propriété 3.3.24 Dimension d'un produit

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors  $E \times F$  est de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

DÉMONSTRATION

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$  une base de  $F$ , montrons que

$$\mathcal{B} = ((e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$$

est une base de  $E \times F$

➤ Si  $(x, y)$  est un élément de  $E \times F$ , les vecteurs  $x$  et  $y$  se décomposent dans les bases de  $E$  et  $F$  :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{i=1}^p y_i f_i$$

ainsi

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, 0 \right) + \left( 0, \sum_{i=1}^p y_i f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (e_i, 0) + \sum_{i=1}^p y_i (0, f_i) \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{B}$  est bien une famille génératrice de  $E \times F$

➤ Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{i=1}^p \mu_i (0, f_i) = (0_E, 0_F)$$

Cela implique

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \mu_i f_i = 0_F$$

Et comme les familles  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont libres, on en déduit que tous les  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  sont nuls donc  $\mathcal{B}$  est une famille libre

En conclusion,  $\mathcal{B}$  est une base à  $n + p$  éléments de  $E \times F$ .

EXEMPLES :

1.  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , donc  $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R}$ , ainsi  $\mathbb{R}^2$  est un espace vectoriel de dimension 2
2. On retrouve que  $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$  donc  $\dim \mathbb{K}^n = \dim \mathbb{K} + \dim \mathbb{K} + \dots + \dim \mathbb{K} = n$

### 3.3 Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

#### Propriété 3.3.25 Somme de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires** de  $E$ , alors :

➤  $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$

➤ Si  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $E_1$  et  $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$  est une base de  $E_2$  alors  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Une telle base est dite adaptée à la décomposition  $E = E_1 \oplus E_2$

## DÉMONSTRATION

➤ L'application  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 &\longrightarrow E \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 + x_2 \end{aligned}$$

est linéaire. De plus elle est bijective puisque tout élément de  $E$  s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de  $E_1$  et d'un élément de  $E_2$ . C'est donc un isomorphisme. Il en résulte :

$$\dim E = \dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

➤ Soit  $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E_1$  et  $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$  une base de  $E_2$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ , comme  $\mathcal{B}$  a  $n$  éléments et que  $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 = n$ , il suffit de vérifier qu'elle est génératrice. Soit  $x \in E$ , on peut écrire  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ , comme  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont des bases de  $E_1$  et  $E_2$  on a

$$x_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad x_2 = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i$$

et donc

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

est bien une combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{B}$ , ainsi  $\mathcal{B}$  est génératrice.

**Propriété 3.3.26 Somme de sous-espaces vectoriels quelconques**

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension finie, on a :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

## DÉMONSTRATION

Soit  $E'_2$  un supplémentaire de  $E_1 \cap E_2$  dans  $E_2$ , c'est-à-dire qu'on a  $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$ . Donc d'après la propriété précédente :

$$\dim E_2 = \dim(E_1 \cap E_2) + \dim E'_2 \quad (1)$$

On va montrer que  $E_1$  et  $E'_2$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $E_1 + E_2$

- $E_1 \subset E_1 + E_2$  et  $E'_2 \subset E_2$  donc  $E'_2 \subset E_1 + E_2$  donc  $E_1 + E'_2 \subset E_1 + E_2$
- Soit  $x \in E_1 \cap E'_2$ . Comme  $E'_2 \subset E_2$ ,  $x \in E_1 \cap E_2$ , donc  $x \in (E_1 \cap E_2) \cap E'_2$ . Or  $E_1 \cap E_2$  et  $E'_2$  sont supplémentaires, donc  $(E_1 \cap E_2) \cap E'_2 = \{0_E\}$  donc  $x = 0_E$ , et ainsi  $E_1 \cap E'_2 = \{0_E\}$
- Soit  $x \in E_1 + E_2$ . On peut alors trouver  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$  tels que  $x = x_1 + x_2$ . Comme  $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus E'_2$ , il existe  $x'_2 \in E'_2$  et  $x''_2 \in E_1 \cap E_2$  tels que  $x_2 = x'_2 + x''_2$ . Ainsi :

$$x = x_1 + x_2 = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x''_2}_{\in E_1} + \underbrace{x'_2}_{\in E'_2} = \underbrace{x_1 + x''_2}_{\in E_1} + \underbrace{x'_2}_{\in E'_2}$$

Donc  $E_1 + E_2 \subset E_1 + E'_2$  et ainsi  $E_1 + E_2 = E_1 + E'_2$

En conclusion,  $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E'_2$ , donc  $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \oplus E'_2) = \dim E_1 + \dim E'_2$  et ainsi d'après (1)

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

**Propriété 3.3.27 Caractérisation des sous-espaces supplémentaires**

Soit  $E$  de dimension finie et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors

- $E = F \oplus G \iff \dim E = \dim F + \dim G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}$
- $E = F \oplus G \iff \dim E = \dim F + \dim G \quad \text{et} \quad F + G = E$

## DÉMONSTRATION

- $\Rightarrow$  D'après la définition d'une somme directe et la propriété précédente
- $\Leftarrow$  Si  $\dim E = \dim F + \dim G$  et  $F \cap G = \{0_E\}$ , on a
- $$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = \dim E, \text{ donc } F + G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$
- de même dimension que  $E$ , donc égal à  $E$ . Donc  $E = F + G$  et ainsi  $E = F \oplus G$
- $\Rightarrow$  D'après la définition d'une somme directe et la propriété précédente
- $\Leftarrow$  Si  $\dim E = \dim F + \dim G$  et  $F + G = E$ , on a
- $$\dim E = \dim(F + G) = \underbrace{\dim F + \dim G}_{=\dim E} - \dim(F \cap G) \text{ donc } \dim(F \cap G) = 0.$$
- Donc  $F \cap G = \{0_E\}$  ainsi  $E = F \oplus G$

## 4 Rang

### 4.1 Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire

#### Définition 3.4.28 Rang d'une famille de vecteurs

Le **rang d'une famille** finie  $\mathcal{F}$  de vecteurs de  $E$ , noté  $\text{rg}(\mathcal{F})$  est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$

REMARQUES : Si  $\dim E = n$  et  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

- $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$  car  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$ , et toute famille génératrice a plus d'éléments qu'une base. Donc les bases de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  ont moins de  $p$  éléments.
- $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$  car  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = p \iff \mathcal{F}$  est une famille libre, car si  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = p$  alors  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice à  $p$  éléments dans un espace de dimension  $p$ , c'est donc une base, elle est donc libre. Réciproquement si elle libre c'est une base de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  (car elle est génératrice de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  par définition), et donc  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = p$
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = n \iff \mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ , car si  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = n$  alors  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  est un sous espace vectoriel de  $E$  de même dimension que  $E$ , donc  $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ . Réciproquement si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$  alors  $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$  donc  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = \dim E = n$

#### Définition 3.4.29 Rang d'une application linéaire

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On appelle **rang** de  $u$ , que l'on note  $\text{rg}(u)$  la dimension de  $\text{Im}(u)$  lorsqu'elle est finie. On a ainsi  $\text{rg}(u) = \dim \text{Im}(u)$

Lorsque  $E$  est de dimension finie  $n$ , si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) = \text{rg}(u(\mathcal{B})) = \dim \text{Vect}(u(\mathcal{B}))$$

REMARQUES : Soit  $E$  de dimension  $n$  et  $F$  deux espaces vectoriels, et  $u$  une application de  $E$  dans  $F$ , alors :

- $\text{rg}(u) \leq \dim F$  car  $\text{Im}(u) \subset F$
- $\text{rg}(u) \leq \dim E$  car  $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \leq n$  d'après la remarque précédente.
- $\text{rg}(u) = \dim F \iff u$  est surjective. En effet si  $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim F$  alors comme  $\text{Im}(u) \subset F$ , on a que  $\text{Im}(u) = F$ , c'est-à-dire que  $u$  est surjective. Réciproquement, si  $u$  est surjective alors  $\text{Im}(u) = F$ , donc  $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim F$ .
- $\text{rg}(u) = \dim E \iff u$  est injective. En effet si  $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) = n$  alors  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une famille libre d'après la remarque précédente, donc  $u$  est injective. Réciproquement, si  $u$  est injective  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une famille libre et alors  $\text{rg}((u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))) = n = \dim E$ . C'est un cas particulier d'un théorème essentiel, le théorème du rang.
- Dans le cas  $\dim E = \dim F = n$ ,  $\boxed{\text{rg}(u) = n \iff u \text{ est bijective.}}$

### 4.2 Théorème du rang

#### Définition 3.4.30 Restriction d'une application

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $v$  est la **restriction de**  $u$  sur  $F$  si  $\forall x \in F, v(x) = u(x)$ , c'est-à-dire :

$$v : \begin{cases} F & \longrightarrow \text{Im}(u) \\ x & \longmapsto u(x) \end{cases}$$

On note parfois  $v = u|_F$ . On dit aussi que  $u$  **induit l'application**  $v$  sur  $F$

EXEMPLES :

1. Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , et  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ . On a alors  $p|_F = Id_F$  et  $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$
2. Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . On a alors  $s|_F = Id_F$  et  $s|_G = -Id_G$

Le théorème suivant est central en algèbre linéaire, c'est le plus important du chapitre.

### Propriété 3.4.31 Théorème du rang

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, et  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $E_0$  est supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$  dans  $E$ , l'application  $u$  induit un **isomorphisme** de  $E_0$  sur  $\text{Im}(u)$ .

De plus si  $E$  est de dimension finie on a :

$$\dim E = \text{rg}(u) + \dim \text{Ker}(u)$$

### DÉMONSTRATION

- Soit  $E_0$  un supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$  dans  $E$ , donc  $E = \text{Ker}(u) \oplus E_0$ . L'application  $v$  (restriction de  $u$  sur  $E_0$ ) :

$$v : \begin{cases} E_0 & \longrightarrow \text{Im}(u) \\ x & \longrightarrow u(x) \end{cases}$$

est bien définie puisque  $v(E_0) = u(E_0) \subset u(E) = \text{Im}(u)$ , de plus  $v$  est linéaire car  $u$  est linéaire.

- Le noyau de  $v$  est

$$\text{Ker}(v) = \{x \in E_0 \mid u(x) = 0_F\} = E_0 \cap \text{Ker}(u)$$

Comme  $E_0$  et  $\text{Ker}(u)$  sont supplémentaires,  $E_0 \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\} = \text{Ker}(v)$  donc  $v$  est injective.

- Soit  $y \in \text{Im}(u)$ , il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $y = u(x)$  et puisque  $E_0$  et  $\text{Ker}(u)$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $E$  on peut écrire :

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{avec} \quad x_1 \in E_0 \text{ et } x_2 \in \text{Ker}(u)$$

et donc

$$y = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_1) = v(x_1)$$

ce qui montre que  $v$  est surjective dans  $\text{Im}(u)$ .

En conclusion  $v$  est un isomorphisme de  $E_0$  dans  $\text{Im}(u)$

- Puisque l'application  $v$  est un isomorphisme,  $\dim E_0 = \dim \text{Im}(u)$  et comme  $E = \text{Ker}(u) \oplus E_0$  on a
- $$\dim E = \dim(\text{Ker}(u) \oplus E_0) = \dim \text{Ker}(u) + \dim E_0 = \dim \text{Ker}(u) + \dim \text{Im}(u) = \dim \text{Ker}(u) + \text{rg}(u)$$

### EXEMPLES :

Suivant les cas il est plus facile de déterminer l'image ou le noyau d'une application linéaire. Le théorème du rang permet de déterminer l'un grâce à l'autre.

1. **Déterminer l'image d'une application grâce à son noyau et le théorème du rang.**

Soit  $f$  l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x - 3y, 3x + 5y) \end{aligned}$$

$f$  est linéaire. On va voir qu'en déterminant le noyau de cette application, on peut en déduire son image grâce au théorème du rang. Soit  $u = (x, y) \in \text{Ker}(f) \Rightarrow (x - 3y, 3x + 5y) = (0, 0)$ . Ainsi  $3y = x$  et  $9x + 5y = 14y = 0$  donc  $y = 0$  et ainsi  $x = 0$  donc  $u = 0_E$  ce qui montre que  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$ . D'après le théorème du rang  $\dim \mathbb{R}^2 = \underbrace{\dim \text{Ker}(u)}_{=0} + \dim \text{Im}(u) = \dim \text{Im}(u)$ . Or  $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}^2$ , donc  $\text{Im}(u)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$

qui a la même dimension que  $\mathbb{R}^2$  donc  $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^2$

2. **Déterminer le noyau d'une application linéaire grâce à son image et le théorème du rang**

Soit  $f$  l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto x + 2y - z \end{aligned}$$

Comme  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ ,  $\dim \text{Im}(f) \leq 1$ , de plus  $f(1, 0, 0) = 1$ , et  $\{1\}$  est une famille libre à 1 élément dans un espace vectoriel de dimension 1 ( $\mathbb{R}$ ), c'est donc une famille génératrice. Ainsi  $f(1, 0, 0)$  engendre  $\mathbb{R}$  et donc  $f$  est surjective, c'est-à-dire que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$  et donc  $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f) = 1$ .

Ainsi d'après le théorème du rang  $\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker}(f) = 3$  donc  $\dim \text{Ker}(f) = 2$ . On en déduit que  $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in E \mid x + 2y - z = 0\}$  est de dimension 2. De plus  $(1, 1, 3)$  et  $(0, 1, 2)$  sont deux vecteurs de  $\text{Ker}(f)$  qui forment une famille libre et donc une base de  $\text{Ker}(f)$ . En conclusion  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 3), (0, 1, 2))$ .

### 3. Formule de la dimension d'une somme de sous-espaces vectoriel grâce au théorème du rang

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriel de  $E$ . Soit  $f$  l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 + E_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

On a  $\text{Im}(f) = E_1 + E_2$  et  $\text{Ker}(f) = \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}$ . Ce noyau est isomorphe à  $E_1 \cap E_2$  par l'application  $x \mapsto (x, -x)$ , on a donc  $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim \text{Ker}(f)$

Ainsi  $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$

Et donc  $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

### 4.3 Caractérisation des isomorphismes

#### Propriété 3.4.32 Caractérisation des isomorphismes

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de même dimension finie  $n$  et  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On a alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}$$

En particulier, lorsque  $E = F$ ,  $u$  est un endomorphisme, dans ce cas  $u$  est injective si et seulement si elle est surjective.

#### DÉMONSTRATION

Il suffit de démontrer  $u$  injective  $\iff u$  surjective. D'après le théorème du rang on a :

$$\dim F = \dim E = \dim \text{Im}(u) + \dim \text{Ker}(u)$$

L'application  $u$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$  ce qui équivaut à  $\dim F = \dim \text{Im}(u)$  c'est-à-dire  $F = \text{Im}(u)$ , et ainsi à la surjectivité de  $u$ .

#### Propriété 3.4.33 Composition par un isomorphisme

Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$

➤ Si  $u$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$

➤ Si  $v$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$

Autrement dit composer par un **isomorphisme** conserve le rang.

#### DÉMONSTRATION

$$\text{Im}(v \circ u) = \{v(u(x)) \mid x \in E\} = \{v(y) \mid y \in \text{Im}(u)\} = v(\text{Im}(u))$$

➤ Si  $u$  est bijective, alors  $\text{Im}(u) = F$  et donc  $\text{Im}(v \circ u) = v(F) = \text{Im}(v)$  c'est-à-dire  $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$

➤ Si  $v$  est bijective alors  $v' : \begin{array}{ccc} \text{Im}(u) & \rightarrow & v(\text{Im}(u)) \\ y & \mapsto & v(y) \end{array}$  est un isomorphisme. Donc  $\dim \text{Im}(u) = \dim v(\text{Im}(u))$  c'est-à-dire  $\text{rg}(u) = \text{rg}(v \circ u)$

### 4.4 Hyperplans et formes linéaires

#### Définition 3.4.34 Hyperplan vectoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . On appelle **hyperplan vectoriel** tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$

#### EXEMPLES :

1. Dans  $E = \mathbb{R}^2$ , toute droite vectorielle (espace engendré par un vecteur non nul) est un hyperplan vectoriel.
2. Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , tout plan vectoriel est un hyperplan vectoriel.
3. Dans  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$  est un hyperplan de  $E$ , en effet  $\{(3, 0, 1), (0, 3, 2)\}$  est une base de  $F$  qui est donc de dimension 2. On peut aussi remarquer que  $F$  est le noyau d'une forme linéaire  $u$ , donc d'après le théorème du rang  $\dim E = \text{rg}(u) + \dim \text{Ker}(u) = 1 + \dim F = 3$ . On a en effet  $\text{rg}(u) = 1$  car  $u(1, 0, 0) = 1$  donc  $\text{Im}(u) = \mathbb{R}$ . Et ainsi on obtient que  $\dim F = 2$ .

#### Propriété 3.4.35 Caractérisation des hyperplans

Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $H$  est un **hyperplan**
- (ii) il existe une **droite vectorielle**  $D$  telle que  $E = H \oplus D$
- (iii) il existe une **forme linéaire non nulle**  $f$  telle que  $H = \text{Ker}(f)$

## DÉMONSTRATION

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Si le sous-espace  $H$  est de dimension  $n - 1$ , il admet dans  $E$  un supplémentaire  $D$  et on a

$$n = \dim E = \dim(H \oplus D) = \dim H + \dim D = n - 1 + \dim D$$

Ainsi  $\dim D = 1$ , c'est donc une droite vectorielle.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $p$  la projection de  $E$  sur  $D = \text{Vect}(d)$  ( $d \notin H$ ) parallèlement à  $H$ .

On définit  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  l'application telle que  $\forall x \in E, p(x) = f(x)d$ .  $f$  est linéaire car

$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, p(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y)d$  par définition et par linéarité de  $p$ ,

$p(\alpha x + \beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y) = \alpha f(x)d + \beta f(y)d = (\alpha f(x) + \beta f(y))d$  donc  $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ .

De plus,  $H = \text{Ker}(p) = \text{Ker}(f)$  car  $x \in \text{Ker}(p) \Leftrightarrow p(x) = 0_E = f(x)d \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(f)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) S'il existe une forme linéaire non nulle telle que  $H = \text{Ker}(f)$ , alors d'après le théorème du rang on a

$$\dim E = \dim \text{Im}(f) + \dim H$$

Comme  $f$  est une forme linéaire non nulle, son image est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{K}$  non réduit à  $\{0\}$  donc de dimension 1, ce qui donne

$$\dim H = \dim E - 1 = n - 1$$

**Propriété 3.4.36 Équation d'un hyperplan**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , une partie  $H$  de  $E$  est un hyperplan si et seulement si elle admet une équation dans  $\mathcal{B}$  du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

où  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  les composantes d'un vecteurs de  $H$  exprimées dans la base  $\mathcal{B}$

## DÉMONSTRATION

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $E$ , c'est-à-dire  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$  et  $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

On a donc pour tout  $x \in E, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Soit  $f$  une forme linéaire sur  $E$ ,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

On a noté  $a_i = f(e_i)$ . On sait que tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, ainsi  $H$  un

hyperplan peut s'écrire  $H = \text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = \{x \in E \mid \sum_{i=1}^n x_i a_i = 0\}$

Enfin, puisque  $f$  est non nulle on a  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

EXEMPLE : Dans  $\mathbb{R}^3$ , les hyperplans sont de la forme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, ax + by + cz = 0\}$ .

**Propriété 3.4.37 Formes linéaires proportionnelles**

Soit  $f$  et  $g$  deux formes linéaires non nulles telles que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$  alors il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f = \lambda g$ .

Cela veut dire que si  $F, G$  sont deux hyperplans de  $E$ , en posant  $f, g$  deux formes linéaires telles que  $F = \text{Ker}(f)$  et  $G = \text{Ker}(g)$ , qu'on a  $F = G \Leftrightarrow (f, g)$  est une famille liée.

## DÉMONSTRATION

Soit  $f$  et  $g$  deux formes linéaires non nulles telles que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ . Puisque  $H = \text{Ker}(f)$  est un hyperplan, il existe une droite vectorielle  $D$  telle que  $E = H \oplus D$ . Soit  $e_n \in D$  non nul. Puisque  $e_n \notin \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ ,  $f(e_n) \neq 0$  et  $g(e_n) \neq 0$ .

On a alors  $\forall x \in E, x = h + d = h + \alpha e_n$ , avec  $h \in H, d \in D$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Ainsi :

$$g(x) = g(h + \alpha e_n) = \alpha g(e_n)$$

$$f(x) = f(h + \alpha e_n) = \alpha f(e_n) = \alpha \frac{f(e_n)}{g(e_n)} g(e_n) = \underbrace{\frac{f(e_n)}{g(e_n)}}_{\lambda} g(x)$$

Donc  $f = \lambda g$