Chapitre 2

Espaces vectoriels et applications linéaires

Table des matières

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1 Espaces vectoriels

1.1 Rappels sur les groupes

Définition 2.1.1 Loi de composition interne
Soit E un ensemble, on appelle **loi de composition interne** dans E une application de $E \times E$ dans E notée :

$$\begin{array}{rl} E \times E & \longrightarrow E \\ (a, b) & \longmapsto a * b \end{array}$$

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}$, les lois $+$ et $\times$ sont des lois de composition interne.
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, les lois $+$ et $\times$ sont des lois de composition interne
3. La multiplication entre un réel et un élément de $\mathbb{R}^2$ par exemple $3 \times (2, -1) = (6, -3)$ n'est pas une loi de composition interne car elle agit sur deux ensembles différents.

Définition 2.1.2 Partie stable
Une partie F de E est dite **stable** par la loi $*$ si :

$$\forall (a, b) \in F^2, \qquad a * b \in F$$

Exemples :

1. $\mathbb{R}_-$ est stable par $+$
2. $\mathbb{R}_+$ est stable par $\times$
3. $\mathbb{R}_-$ n'est pas stable par $\times$

Définition 2.1.3 Commutativité, associativité
Une loi de composition interne d'un ensemble E est dite :

- **commutative** si $\forall (a, b) \in E^2 \quad a * b = b * a$
- **associative** si $\forall (a, b, c) \in E^3 \quad a * (b * c) = (a * b) * c$

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}$ l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives. En effet
   commutativité : $x + y = y + x \qquad x \times y = y \times x$
   associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z \qquad x \times (y \times z) = (x \times y)z$
2. Dans $\mathbb{R}$ la loi $-$ n'est ni commutative ni associative, en effet $a - b \neq b - a$ et $a - (b - c) \neq (a - b) - c$

Définition 2.1.4 Élément neutre, inversible
Un élément $e \in E$ est dit **élément neutre** si

$$\forall a \in E \qquad a * e = e * a = a$$

Si E possède un élément neutre e, un élément a de E est dit **inversible** si

$$\exists a' \in E \quad a * a' = a' * a = e$$

a' est appelé **inverse** ou **symétrique** de a

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition $+$, 0 est élément neutre, en effet $a + 0 = 0 + a = a$
2. Dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition $+$, a est un élément inversible, en effet, en posant $a' = -a$, on a $a + a' = a' + a = 0$. $-a$ est le symétrique de a
3. Dans $\mathbb{R}$ muni de la multiplication $\times$, 1 est élément neutre.

Définition 2.1.5 Structure de groupe
On appelle **groupe** un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ telle que :

- ➢ G possède un **élément neutre** e
- ➢ Tous les éléments de G sont **inversibles**
- ➢ La loi $*$ est **associative**

Si de plus, la loi $*$ est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien

Exemples :

1. $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes abélien
2. $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car les éléments de $\mathbb{N}$ n'ont pas de symétriques (sauf 0)
3. $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'est pas inversible
4. $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe abélien

1.2 Définition, propriétés, exemples

Définition 2.1.6 Espace vectoriel
Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe notée $\cdot$
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$, ou $\mathbb{K}-$espace vectoriel si

- ➢ $(E, +)$ est un groupe commutatif (aussi dit abélien)
- ➢ pour tout $(x, y) \in E^2$, et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a

(a) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ (c) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
(b) $1 \cdot x = x$ (d) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

On appelle alors **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Remarque :

- Si α est un scalaire et x un vecteur, on écrit aussi αx au lieu de $\alpha \cdot x$
- $+$ est dite interne car elle agit sur deux éléments d'un même ensemble, $\cdot$ est dite externe car elle agit sur un élément de E et un élément de $\mathbb{K}$

Exemple :

1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
2. De même, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.
3. Plus généralement $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel avec les lois suivantes :
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$
4. L'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel pour les opérations suivantes :
$$f + g : t \mapsto f(t) + g(t) \qquad \alpha f : t \mapsto \alpha f(t)$$
5. L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Propriété 2.1.7 Vecteur nul
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, il contient un **vecteur nul**, noté 0_E tel que pour tout x de E :

(a) $0_E + x = x$ (b) $x + (-x) = 0_E$

En notant $0_{\mathbb{K}}$ **l'élément nul** de $\mathbb{K}$ on a de plus pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et que pour tout x de E :

(a) $0_{\mathbb{K}} x = 0_E$ et $\alpha 0_E = 0_E$ (b) $-(\alpha x) = \alpha(-x) = (-\alpha)x$

Remarque : $0_{\mathbb{K}}$ est le zéro usuel et pourra être noté 0.

Exemples :

1. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ est $(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$

2. Le vecteur nul de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est la fonction nulle ($f(x) = 0$)

Propriété 2.1.8 Produit nul
Si E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, alors pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ on a :

$$\alpha x = 0_E \Rightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$$

1.3 Combinaisons linéaires

Définition 2.1.9 Combinaisons linéaires
Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des vecteurs. On appelle **combinaisons linéaires** des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tout vecteur de la forme :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$ le vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$
2. Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$, tout complexe est combinaison linéaire de 1 et i.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, le polynôme $X^2 - 2X + 7$ est combinaison linéaire de $(X^2, X, 1)$
4. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ la fonction $x \mapsto -\cos(x) + 5\sin(x)$ est combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus.

1.4 Produits d'espaces vectoriels

Propriété 2.1.10 Produit d'espace vectoriel
Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, l'ensemble $E \times F$ muni des lois suivantes :

- l'addition : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- la loi externe : $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel appelé **espace produit**

Exemples :

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
2. $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Dans cette partie $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

Définition 2.2.11 Sous-espaces vectoriels
On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- $F \subset E$
- $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Exemples :

1. $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{K}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E

Propriété 2.2.12 Caractérisation des sous-espaces vectoriels
Soit F une partie de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- F est non vide ($0_E \in F$)
- F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \alpha x + \beta y \in F$

Remarque : Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel, ainsi pour démontrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel, on montre que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Exemples :

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet $(0, 0) \in D$ de plus pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et u, v deux vecteurs de D, on a $\alpha u + \beta v = \alpha(x, y) + \beta(x', y') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = w$. Vérifions que $w \in D$, $2(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') = \alpha \underbrace{(2x + y)}_{0} + \beta \underbrace{(2x' + y')}_{0} = 0$ donc $w \in D$
2. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x + 2y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car $(0, 0) \notin G$
3. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y^2 = 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel car il n'est pas stable par addition. Soit $u = (\frac{1}{2}, 1) \in H$, $u + u \notin H$ car $u + u = (1, 2)$ mais $2 - 2^2 \neq 0$.
4. $I = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$ est un sous-espace vectoriel des suites réelles.
5. L'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel des fonctions réelles.
6. L'ensemble $F = \{f \in \mathcal{C}^0(R) \mid f(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel des fonctions continues. En effet si $f, g \in F$ alors $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 2$ donc $f + g \notin F$.

2.2 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie

Propriété 2.2.13 Intersection de sous-espace vectoriels
Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

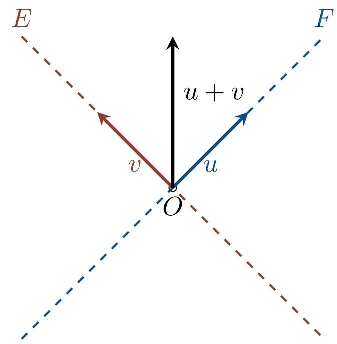
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E et $H = F \cap G$.

- Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E \in F \cap G = H$
- Soit $x, y \in H = F \cap G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. $x, y \in F$, donc $\alpha x + \beta y \in F$ car F est un espace vectoriel. De même $x, y \in G$ donc $\alpha x + \beta y \in G$ car G est un espace vectoriel. Donc $\alpha x + \beta y \in F \cap G = H$.

Donc H est non vide et est stable par combinaisons linéaires, c'est donc un sous-espace vectoriel.

Exemple : L'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ d'équations $x = 0$ et $y = 0$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $(0, 0, 1)$ (les points sont du type $(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3$). On peut vérifier que l'ensemble de ces points est bien un sous-espace vectoriel.

Remarque : **L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel**.
Par exemple, soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 0\}$. $(0, 0) \in D$, en revanche D n'est pas stable par addition : $u = (1, 1) \in D$, $v = (-1, 1) \in D$ mais $u + v = (0, 2) \notin D$. Donc D n'est pas un sous-espace vectoriel.
On remarque que $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y = 0 \text{ ou } x - y = 0)$. En posant $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$ on a donc $D = E \cup F$ avec E et F deux sous-espaces vectoriels.



Propriété 2.2.14 Sous-espace vectoriel engendré
Soit A une partie de E, il existe un plus petit espace vectoriel qui contient A. On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A et on le note $\text{Vect}(A)$.

Propriété 2.2.15 Sous-espace vectoriel engendré par une partie finie
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ une partie finie à n éléments de E. Le **sous-espace vectoriel engendré par A** est l'ensemble des **combinaisons linéaires** des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\text{Vect}(A) = \left\{ y \in E \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right\}$$

Démonstration

Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ une partie finie de n vecteurs de E.

Soit $B = \text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$

Nous devons montrer trois choses : $A \subset B$, B est un espace vectoriel, B est le plus petit espace vectoriel contenant A

- $A \subset B$ car pour $1 \leq p \leq n$ tous les $a_p \in B$ (prendre tous les λ_i nuls sauf $\lambda_p = 1$)
- B est un sous-espace vectoriel de E car
  (a) Il est non vide car il contient A
  (b) Il est stable par combinaison linéaire car :

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i) a_i$$

Le membre de droite étant une combinaison linéaire des a_i il est contenu dans B et donc B est stable par combinaison linéaire.

- Enfin, tout espace vectoriel contenant A est stable par combinaison linéaire, il contient donc B, et B est ainsi le plus petit espace vectoriel contenant A.

Exemple :

1. Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, si $i = (1,0)$ alors $\text{Vect}(i) = \{(\lambda, 0) |\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ c'est l'axe des abscisses.
2. Si a est un vecteur non nul de E, le sous-espace vectoriel engendré par a est $\text{Vect}(a) = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$. On le note aussi $\mathbb{K}a$ et on l'appelle droite vectorielle engendrée par a
3. Si $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ alors tout élément de F s'écrit
$$(x,y,z) = (x,y,x-y) = x(1,0,1) + y(0,1,-1)$$
Donc $F = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,-1)$
4. $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Nous avons vu que la réunion de deux espaces vectoriels n'est pas en général un espace vectoriel.

Définition 2.2.16 Somme de sous-espaces vectoriels
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle **somme** de F et G l'espace vectoriel engendré par l'union de F et G :
$$F + G = \text{Vect}(F \cup G)$$

Propriété 2.2.17 Somme de sous-espaces vectoriels
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, la somme $F + G$ est l'ensemble des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Ainsi,
$$F + G = \{x + y \mid (x,y) \in F \times G\}$$

Démonstration

Soit $H = F + G$, il faut montrer que H est le plus petit espace vectoriel contenant F et G.

- $\forall x \in F, x = x + 0_E$ avec $0_E \in G$ donc $x \in H$ donc $F \subset H$. De même $G \subset H$
- H est non vide d'après le premier point, il est aussi stable par combinaison linéaire car si $(u_1, u_2) \in H^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ on peut écrire :
$$\underbrace{u_1}_{\in H} = \underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{y_1}_{\in G} \quad \text{et} \quad \underbrace{u_2}_{\in H} = \underbrace{x_2}_{\in F} + \underbrace{y_2}_{\in G}$$
On a : $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1(x_1 + y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2) = \underbrace{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}_{\in F} + \underbrace{(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}_{\in G}$
Donc $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in H$. Donc H est un sous-espace vectoriel de E
- Soit H' un sous espace vectoriel de E contenant F et G. Pour tout $u \in H$, on peut écrire $u = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in G}$. Puisque $x \in H'$ et $y \in H'$ on a $u \in H'$ et ainsi $H \subset H$.

Donc H est le plus petit espace vectoriel contenant F et G

Exemples :

1. Si $E = \mathbb{R}^2$ alors $E = \text{Vect}\{(1,0)\} + \text{Vect}\{(1,0)\}$, en effet tout élément $u = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire $u = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$. Le plan $\mathbb{R}^2$ est la somme de deux droites.

2.4 Sous-espace vectoriels supplémentaires

Définition 2.2.18 Sous-espaces vectoriels supplémentaires
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que F et G sont **supplémentaires** si :

$$F + G = E \qquad \text{et} \qquad F \cap G = \{0_E\}$$

Dans ce cas on note $E = F \oplus G$ et on dit que F et G sont en **somme directe**

Propriété 2.2.19 Décomposition sur une somme directe
F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cela signifie que :

$$\forall u \in E, \exists!\ (x, y) \in F \times G \mid u = x + y$$

Démonstration

- On suppose $E = F \oplus G$, alors pour tout $u \in E$, il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $u = x + y$. Montrons que cette décomposition est unique.
  Supposons $u = x + y = x' + y'$ avec $(x, x') \in F^2$ et $(y, y') \in G^2$. On a donc $\underbrace{x - x'}_{\in F} = \underbrace{y' - y}_{\in G}$. Ainsi $x - x' \in G$ et donc $x - x' \in F \cap G$, de même $y' - y \in F \cap G$. Puisque $F \cap G = \{0_E\}$ on obtient $x = x'$ et $y = y'$, donc la décomposition est unique.
- Réciproquement, si tout tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et de G, alors on a $E = E + G$.
  De plus, soit $x \in F \cap G$, alors $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, et comme la décomposition est unique, on a $x = 0_E$, ainsi $F \cap G = \{0_E\}$ et donc $E = F \oplus G$

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$ les espaces vectoriels $F = \text{Vect}\{(1,0)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0,1)\}$ sont supplémentaires. On a déjà montré $\mathbb{R}^2 = F + G$, montrons $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Soit $u \in F \cap G$. $u \in F$ donc $u = \alpha(1,0) = (\alpha, 0)$. De plus $u \in G$ donc $u = \beta(0,1) = (0, \beta)$. Ainsi $(\alpha, 0) = (0, \beta)$ ce qui implique $\alpha = \beta = 0$ et donc $u = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$, en conclusion $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
2. Dans $\mathbb{R}^2$ les espaces vectoriels $F = \text{Vect}\{(1,0)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,1)\}$ sont supplémentaires.
   (a) Montrons $\mathbb{R}^2 = F + G$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $u = \underbrace{(x - y, 0)}_{\in F} + \underbrace{(y, y)}_{\in G} \in F + G$
   (b) Soit $u \in F \cap G$, donc $u = (x, 0) \in F$ et $u = (y, y) \in G$, donc $(x, 0) = (y, y)$. On en déduit $y = 0$ puis $x = y = 0$ donc $u = (0,0)$, c'est-à-dire $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $F = \text{Vect}\{(1, X)\}$ et $G = \text{Vect}\{(X + X^2)\}$ sont supplémentaires. En effet :
   (a) Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $P = \underbrace{a_0 + (a_1 - a_2)X}_{\in F} + \underbrace{a_2(X + X^2)}_{\in G} \in F + G$ donc $\mathbb{R}_2[X] = F + G$
   (b) Soit $P \in F \cap G$ donc $P = \underbrace{a_0 + a_1X}_{\in F} = \underbrace{a_2(X + X^2)}_{\in G}$ cela implique $a_2 = 0$ et donc $P = 0$ et donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$
4. Dans $\mathbb{R}_1[X]$, les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}\{(1, X)\}$ et $G = \text{Vect}\{(2 + 3X)\}$ ne sont pas supplémentaires. En effet soit $P \in F \cap G$ donc $P = \underbrace{a_0 + a_1X}_{\in F} = \underbrace{a_2(2 + 3X)}_{\in G}$. Si $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1$ alors $P = \underbrace{2 + 3X}_{\in F} = \underbrace{2 + 3X}_{\in G} \in F \cap G$ donc $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}_1[X]}\}$

3 Applications linéaires

Soit E, F, G des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels

3.1 Définition, caractérisation

Définition 2.3.20 Application linéaire
Une application $f : E \longrightarrow F$ est une **application linéaire** si

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

- Si $E = F$ on dit que f est un **endomorphisme**
- Si f est bijective on dit que f est un **isomorphisme**
- Si f est bijective et si $E = F$ on dit que f est un **automorphisme**

Remarques :

- Si f est linéaire de E dans F, on a $f(0_E) = 0_F$ puisque :

$$f(0_E) = f(0_\mathbb{K} 0_E) = 0_\mathbb{K} f(0_E) = 0_F$$

- Si f est linéaire de E dans F alors pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Exemples :

1. Les applications $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto kx \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont linéaires.
   En effet $f(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y) = \alpha kx + \beta ky = \alpha f(x) + \beta f(y)$
   Ce sont des endomorphismes de $\mathbb{R}$. Lorsque $k \neq 0$ ce sont des automorphismes de $\mathbb{R}$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $x \mapsto \lambda x$ de E dans E est une application linéaire (appelée homothétie de rapport λ). Dans le cas où $\lambda = 1$, l'application $x \mapsto x$ de E dans E est appelée **Identité** et est notée Id_E
3. Pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, l'application $\left\{\begin{array}{ll} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (ax+by, cx+dy) \end{array}\right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^2$
4. La dérivation est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $D : \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto f' \end{array}\right.$.
   En effet $D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g)$
5. Les application $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x + 4$ ne sont pas linéaires

Définition 2.3.21 Forme linéaire
On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans K. C'est donc une application linéaire qui à tout vecteur de E associe un scalaire de $\mathbb{K}$

Exemples :

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, l'application $f : \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto ax+by \end{array}\right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$. En effet $f(\alpha(x,y)+\beta(x',y')) = f(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y') = a(\alpha x+\beta x')+b(\alpha y+\beta y') = \alpha(ax+by)+\beta(ax'+by') = \alpha f(x,y) + \beta f(x',y')$
2. L'intégrale sur le segment $I = [a,b]$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$: $\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{C}^0(I) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \int_a^b f(t)dt \end{array}\right.$
3. Pour $a \in \mathbb{K}$, l'application $P \longmapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$

3.2 Noyau, image d'une application linéaire

Rappels : Si f est une application de E dans F alors :

- l'image (ou image directe) par f d'une partie E' de E est :

$$f(E') = \{f(x) \mid x \in E'\} = \{y \in F \mid \exists x \in E', y = f(x)\}$$

- l'image réciproque par f d'une partie F' de F est :

$$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$$

Exemples :

- L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction sinus est $[0, 1]$
- L'image de $[1, 25]$ par la fonction racine carrée est $[1, 5]$
- L'image réciproque de $[0, 10]$ par la fonction carrée est $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$
- L'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction cosinus est $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Propriété 2.3.22 Image d'un sous-espace vectoriel
Soit f une application linéaire de E dans F

➢ Si E' est un sous-espace vectoriel de E alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F

➢ Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

➢ Soit E' un sous-espace vectoriel de E et $G = f(E')$. On a $G \subset F$
- Puisque $0_E \in E'$, on a $0_F = f(0_E) \in G$. G est donc non vide.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $(y, y') \in G^2$. On peut donc trouver $(x, x') \in E'^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ et donc

$$\alpha y + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(x') = f(\underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in E'}) \in G$$

Ainsi G est stable par combinaison linéaire

En conclusion G est un sous-espace vectoriel de F

➢ Soit F' un sous-espace vectoriel de F et $G = f^{-1}(F') \subset E$
- Puisque $f(0_E) = 0_F \in F'$ donc $0_E \in G$, donc G est non vide
- Soit $(x, x') \in G^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors $f(x) \in F'$ et $f(x') \in F'$ et on a :

$$f(\alpha x + \beta x') = \alpha f(x) + \beta f(x') \in F'$$

puisque F' est un sous-espace vectoriel, et donc $\alpha x + \beta x' \in G$, donc G est stable par combinaison linéaire.

En conclusion G est un sous-espace vectoriel de E

Exemples :

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x, 2x + 3y) \end{cases}$ une application. Vérifions que f est linéaire.

   Soit (x, y) et (x', y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (\alpha x + \beta x', 2(\alpha x + \beta x') + 3(\alpha y + \beta y')) \\ &= \alpha \underbrace{(x, 2x + 3y)}_{f(x,y)} + \beta \underbrace{(x', 2x' + 3y')}_{f(x',y')} \end{aligned}$$

   f est donc bien une application linéaire

   (a) Soit $E = \text{Vect}\{(2, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. La propriété nous dit que $f(E) = \{(2\lambda, 4\lambda + 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On peut vérifier qu'il s'agit de $\text{Vect}\{(2, 7)\}$

   (b) De même $f(\mathbb{R}^2) = \{(\lambda, 2\lambda + 3\mu) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas ce n'est pas très intéressant car il s'agit en fait de $\mathbb{R}^2$ lui-même.

   (c) Soit $G = \{(\lambda, -\frac{2}{3}\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque par f de $\text{Vect}\{(1, 0)\}$. En effet $f(\lambda, -\frac{2}{3}\lambda) = (\lambda, 0) \in \text{Vect}\{(1, 0)\}$. On peut vérifier que $G = \text{Vect}\{(3, -2)\}$, c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Définition 2.3.23 Noyau, image
Soit f une application linéaire de E dans F, on appelle

➢ **noyau** de f, le sous-espace vectoriel de E :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

➢ **image** de f, le sous-espace vectoriel de F :

$$\text{Im}(f) = f(E)$$

Remarque : Le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels d'après la propriété précédente. Ainsi pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel on peut montrer que c'est le noyau d'une application linéaire (à déterminer).

Exemples

1. Soit D l'application dérivation sur l'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Le noyau de f est l'ensemble des fonctions dont la dérivée est nulle. C'est l'ensemble des fonctions constantes, et c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(R)$.
2. Soit $f(x, y) \longmapsto (x-y, x+y)$. Le noyau de f est l'ensemble $\text{Ker}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \quad \text{et} \quad x + y = 0\}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \text{Ker}(f)$ donc $\lambda - \mu = 0$, et ainsi $\lambda = \mu$. De plus $\lambda + \mu = \lambda + \lambda = 0$ donc $\lambda = \mu = 0$, donc $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Donc $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
3. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car c'est le noyau de l'application linéaire $(x, y) \longmapsto x + y$.
4. Soit $I = [a, b]$. L'ensemble des fonctions f telles que $\int_a^b f(t)dt = 0$ est un espace vectoriel car c'est le noyau de l'application linéaire $f \longmapsto \int_a^b f(t)dt$

Propriété 2.3.24 Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire
Soit f un application de E dans F. f est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul de E, c'est-à-dire f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$

Démonstration

- Supposons $f : E \longrightarrow F$ injective. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. $f(x) = 0_F = f(0_E)$, puisque f est injective $f(x) = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$, ce qui montre que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$
- Supposons $\ker(f) = \{0_E\}$. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$, alors :

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0_F$$

c'est-à-dire $x - y \in \text{Ker}(f)$, et donc $x - y = 0_E$, ce qui donne $x = y$. Donc f est injective.

Remarque : En pratique pour montrer qu'une application linéaire est injective, on montre que son noyau est réduit au vecteur nul.

Exemples :

1. On a montré que le noyau de l'application linéaire $(x, y) \longmapsto (x - y, x + y)$ était $\{(0, 0)\}$, c'est donc une application injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
2. Le noyau de l'application dérivation sur $\mathcal{C}^1(R)$ est l'ensemble des fonctions constantes, elle n'est donc pas injective. On vérifie qu'on peut avoir $f' = g'$ avec $f \neq g$.

3.3 Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

Notations :

- $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F
- $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E
- $\mathcal{GL}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E

Propriété 2.3.25 Structure d'espace vectoriel $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$
L'ensemble $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel

Démonstration

On montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$

- $\mathcal{L}(E, F)$ est non vide car l'application nulle est linéaire
- Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et montrons que $h = \lambda f + \mu g$ est linéaire.

$$\begin{aligned}
h(\alpha x + \beta y) &= (\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) \\
&= \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y) \\
&= \lambda(\alpha f(x) + \beta f(y)) + \mu(\alpha g(x) + \beta g(y)) \\
&= \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + \beta(\lambda f + \mu g)(y) \\
&= \alpha h(x) + \beta h(y)
\end{aligned}$$

Donc h est linéaire, et ainsi $\mathcal{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire.
En conclusion $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Propriété 2.3.26 Composition d'application linéaire

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$
- Si f est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ alors f^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{L}(F,E)$

Démonstration

- Soit $h = g \circ f$, montrons que h est linéaire.

$$\begin{array}{rcl} h(\alpha x+\beta y) & = & g\circ f(\alpha x+\beta y) \\ & = & g(f(\alpha x+\beta y)) \\ & = & g(\alpha f(x)+\beta f(y)) \\ & = & \alpha g(f(x))+\beta g(f(x)) \\ & = & \alpha (g\circ f)(x)+\beta (g\circ f)(y) \\ & = & \alpha h(x)+\beta h(y) \end{array}$$

  Donc h est linéaire.
- Si f est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ alors par définition il existe f^{-1} telle que $f\circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1}\circ f = Id_E$, donc f^{-1} est une application bijective de F dans E. Montrons qu'elle est linéaire.

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)) & = & \alpha f(f^{-1}(x))\beta f(f^{-1}(y)) \\ & = & \alpha x+\beta y \\ & = & f(f^{-1}(\alpha x+\beta y)) \end{array}$$

  Puisque f est injective on en déduit $\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y) = f^{-1}(\alpha x+\beta y)$ ce qui montre que f^{-1} est linéaire.

Propriété 2.3.27 Structure de groupe $(\mathcal{GL}(E), \circ)$
L'ensemble $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe. On l'appelle le **groupe linéaire**.

4 Équations linéaires

4.1 Définition

Définition 2.4.28 Équation linéaire
Une **équation linéaire** est une équation du type $u(x) = b$ où

- u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F
- b est un vecteur de F
- l'inconnue x est dans E

Le vecteur b est appelé **second membre** de l'équation.

Exemples :

1. Le système linéaire suivant :
$$\left\{\begin{array}{ll} 3x+2y & = 5 \\ -x+y & = -1 \end{array}\right.$$
est une équation linéaire.
On peut l'écrire sous la forme $u(x) = b$ avec $u : \left\{\begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto (3x+2y, -x+y) \end{array}\right.$ et $b = (5,-1)$
2. D'une manière générale, le système linéaire de n équations à p inconnues du type :
$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{np}x_p & = b_n \end{array}\right.$$

est une équation linéaire où les données sont les éléments a_{ij} et b_j de $\mathbb{K}$ et l'inconnue le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$

3. Une équation différentielle linéaire du premier ordre du type :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

est une équation linéaire où les données sont les fonctions a, b, c et où l'inconnue est la fonction y (c'est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I)$). L'application linéaire est :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto ay' + by \end{cases}$$

et le second membre est $c \in \mathcal{C}^0(I)$

4.2 Structure des solutions

Définition 2.4.29 Équation homogène
On considère l'équation linéaire :

$$u(x) = b \qquad (\mathcal{E})$$

On note S l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$
L'équation homogène (ou **équation sans second membre**) associée à $(\mathcal{E})$ est l'équation :

$$u(x) = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

On note S_0 l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$

Propriété 2.4.30 Structure des solutions
Avec les notations précédentes :

- S_0 est un sous-espace vectoriel de E
- Si $S \neq \emptyset$ et si x_0 est un élément de S, alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est :

$$S = \{x_0 + h \mid h \in S_0\}$$

Tout élément de S est appelée solution particulière.

Démonstration

- $S_0 = \mathrm{Ker(u)}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de E
- Soit $x_0 \in S$, on doit montrer que $x_0 + h \in S$ et que toutes les solutions sont de la forme $x_0 + h$
  - Si $h \in S_0$ alors $u(h) = 0$ donc $u(x_0 + h) = u(x_0) + u(h) = b + 0 = b$ et $x_0 + h \in S$
  - Soit $x \in S$, alors $u(x) = b = u(x_0)$, donc $u(x - x_0) = 0$ donc $h = x - x_0 \in S_0$, on a ainsi $x = x_0 + h$ avec $h \in S_0$

Exemples :

1. On considère le système suivant :

$$(\mathcal{E}) : \begin{cases} 3x + y + 2z & = 11 \\ -5x + 3y - z & = -16 \end{cases}$$

L'équation linéaire associée est $u(x) = b$ avec $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto (3x + y + 2z, -5x + 3y - z) \end{cases}$ et $b = (11, -16)$

Pour résoudre ce système, nous allons chercher les solutions du système homogène, puis une solution particulière

- Le système homogène associé est :

$$(\mathcal{E}_0) : \begin{cases} 3x + y + 2z & = 0 \\ -5x + 3y - z & = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $z = -5x + 3y$, et en injectant ce résultat dans la première équation, on a $3x + y - 10x + 6y = 0$. Ainsi $-7x + 7y = 0$ donc $x = y$, on en déduit $z = -2x$.
Les triplets du type $(x, x, -2x)$ sont solutions de $\mathcal{E}_0$, ce qui revient à dire que $S_0 = \mathrm{Vect}\{(1, 1, -2)\}$, c'est le noyau de u, $\mathrm{Ker}(u)$

- Cherchons une solution particulière. Une méthode possible est d'exprimer z en fonction de x, y puis y en fonction de x. La deuxième équation donne $\boxed{z = -5x + 3y + 16}$, en faisant la somme des deux équations on obtient $-2x + 4y + z = -5$ donc $\boxed{z = 2x - 4y - 5}$

  On peut donc écrire : $-5x + 3y + 16 = 2x - 4y - 5$ et ainsi $7y = 7x - 21$ donc $\boxed{y = x - 3}$

  Prenons $x = 3$, on obtient $y = 0$ et $z = 1$. Le triplet $(3, 0, 1)$ est solution particulière.

La propriété nous dit que l'ensemble S des solutions est

$$S = \{(3, 0, 1) + h \mid h \in \text{Vect}\{(1, 1, -2)\}\}$$

Les éléments de S sont du type $(3 + t, t, 1 - 2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Lorsqu'on cherche les solutions d'une équation différentielle linéaire, on résout d'abord l'équation homogène associée puis on cherche une solution particulière. Toute solution est alors la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Remarque : L'étude des systèmes linéaires est l'objet d'un chapitre ultérieur.

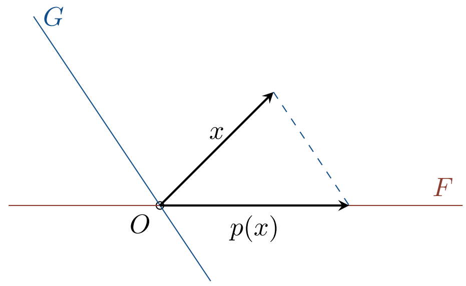
5 Projections, symétries

5.1 Projecteurs

Définition 2.5.31 Projecteur
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle **projection sur** F **parallèlement** à G l'application p de E dans E telle que $p(x) = x_F$. On dit aussi que p est un **projecteur**.

Exemples :

- Dans le plan, si F et G sont deux droites, la projection sur F parallèlement à G peut se représenter comme ci-contre.



- Dans $E = \mathbb{R}^2$ les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}\{(1, 0)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 1)\}$ sont supplémentaires (voir exemple précédent).
  Tout élément $u = (x, y)$ de E s'écrit $u = (x, y) = \underbrace{(x - y, 0)}_{\in F} + \underbrace{(y, y)}_{\in G} = u_F + u_G$.
  La projection p sur F parallèlement à G est l'application $p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x - y, 0) \end{cases}$
- Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ les sous-espaces vectoriels $F = \text{Vect}\{(1, X)\}$ et $G = \text{Vect}\{(X + X^2)\}$ sont supplémentaires (voir exemple précédent).
  Tout élément P de E s'écrit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 = \underbrace{a_0 + (a_1 - a_2)X}_{\in F} + \underbrace{a_2(X + X^2)}_{\in G} = P_F + P_G$
  La projection p sur F parallèlement à G est l'application $p : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ a_0 + a_1X + a_2X^2 & \longmapsto a_0 + (a_1 - a_2)X \end{cases}$

Propriété 2.5.32 Caractérisation du projeté
Avec les notations précédentes, en notant y le projeté de x sur F parallèlement à G on a :

$$y = p(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y = x - p(x) \in G \end{cases}$$

Démonstration

- Soit $x \in E$, et p la projection sur F parallèlement à G. Notons $y = p(x)$, et $x = x_F + x_G$ avec $p(x) = x_F$. p étant la projection sur F, par définition $y = p(x) = x_F \in F$.
  De plus on peut écrire $x - p(x) = x - x_F = x_G \in G$.
- Réciproquement, si $y \in F$ et $x - y \in G$ alors on peut écrire $x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{x - y}_{\in G}$.

Or $x = x_F + x_G$ avec par définition $x_F = p(x)$. Par unicité de la décomposition, $y = x_F = p(x)$

Remarque : Un moyen de vérification du calcul du projeté est donc de vérifier que $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$. En reprenant l'exemple précédent pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, on a trouvé $p(P) = a_0 + (a_1 - a_2)X$. Il est clair que $p(P) \in F = \text{Vect}\{(1, X)\}$. Vérifions que $P - p(P) \in G = \text{Vect}\{(X + X^2)\}$. On a $P - p(P) = a_0 + a_1X + a_2X^2 - (a_0 + (a_1 - a_2)X) = a_2(X + X^2) \in G$

Propriété 2.5.33 Noyau et image d'une projection
Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, la projection sur F parallèlement à G est une **application linéaire**, c'est donc un endomorphisme. En outre :

- $\text{Ker}(p) = G$, son **noyau** est G
- $\begin{cases} \text{Im}(p) = F \\ x = p(x) \Leftrightarrow x \in F \end{cases}$ son **image** est l'ensemble des vecteurs invariants, et est égale à F.

Démonstration

- Soit $(x, y) \in E^2$, on peut écrire $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ on a : $\alpha x + \beta y = \underbrace{(\alpha x_F + \beta y_F)}_{\in F} + \underbrace{(\alpha x_G + \beta y_G)}_{\in G}$
  Ainsi
  $$p(\alpha x + \beta y) = \alpha x_F + \beta y_F = \alpha p(x) + \beta p(y)$$
  L'application p est donc linéaire
- Si $x \in G$ alors $x = \underbrace{0}_{\in F} + x_G$ donc $p(x) = 0$ donc $G \subset \text{Ker}(p)$
  Réciproquement si $p(x) = 0$ alors comme $x = p(x) + x_G = x_G$ on a $x \in G$ donc $\text{Ker}(p) \subset G$
  En conclusion $G = \text{Ker}(p)$
- Par définition de p, $\text{Im}(p) \subset F$, et donc si $x = p(x)$ alors $x \in F$.
  Réciproquement si $x \in F$ alors $x = x_F + \underbrace{0}_{\in G}$ donc $x = p(x) \in \text{Im}(p)$.
  En conclusion, $\text{Im}(p) = F = \{x \in E \mid p(x) = x\}$

Exemple

1. Reprenons l'exemple dans $\mathbb{R}^2$ de la projection sur $F = \text{Vect}\{(1, 0)\}$ parallèlement à $G = \text{Vect}\{(1, 1)\}$.
   La projection est dans ce cas l'application $p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x - y, 0) \end{cases}$
   Vérifions que $\text{Ker}(p) = G$. $u \in \text{Ker}(p) \Leftrightarrow p(u) = 0_G \Leftrightarrow (x - y, 0) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow u = (x, x) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}\{(1, 1)\} = G$. Donc $\text{Ker}(p) = G$
   Vérifions que F est l'ensemble des vecteurs invariants par p. Soit u un vecteur invariant, alors $u = p(u) \Leftrightarrow (x, y) = (x, 0) = x(1, 0) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}\{(1, 0)\} = F$

Propriété 2.5.34 Caractérisation des projecteurs
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si, et seulement si, $p \circ p = p$

Démonstration

- Si p est la projection sur F parallèlement à G alors pour tout élément x de E, on a $p(x) \in F$, donc $p(x)$ est invariant par p, ainsi $p(p(x)) = p(x)$. Par suite, $p \circ p = p$
- Supposons $p \circ p = p$, $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$ sont des sous-espaces vectoriels de E en tant qu'image et noyau de p. Montrons qu'ils sont supplémentaires.
  - Soit $y \in F \cap G$, comme $y \in \text{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Or $y \in G = \text{Ker}(p)$ donc $0 = p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$
  - Si $x \in E$, alors
    $$x = p(x) + (x - p(x))$$
    De plus
    $$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$$

Donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p) = G$, de plus $p(x) \in \mathrm{Im}(p) = F$, donc

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in G}$$

Ainsi $x \in F + G$ et donc $E = F + G$, et par suite $E = F \oplus G$. Enfin, la dernière relation montre que p est la projection sur F parallèlement à G.

Exemples

1. Reprenons encore la même application $p : (x, y) \longmapsto (x - y, 0)$. On utilise cette fois la propriété pour montrer que c'est une projection.
   (a) Soit $u \in E = \mathbb{R}^2$, $p(u) = (x - y, 0) = v = (x', y')$, avec $y' = 0$. Donc $p(p(u)) = p(v) = (x' - y', 0) = (x', 0) = v = p(u)$, ainsi $p \circ p = p$ donc p est une projection. Pour déterminer les sous-espaces F est G associés, il faut déterminer $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.
   (b) Ici $u \in \mathrm{Ker}(p) \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow u = (x, x) \Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}\{(1, 1)\} = G$.
   (c) Il est clair que $p(u) = (x - y, 0) \in \mathrm{Vect}\{(1, 0)\}$. Réciproquement, si $v = (x', 0) \in \mathrm{Vect}\{(1, 0)\}$ alors en prenant $y = x - x'$, on obtient $p(u) = (x - y, 0) = (x', 0) = v$. Donc tout élément de $\mathrm{Vect}\{(1, 0)\}$ est l'image d'un élément de E par p, par suite $F = \mathrm{Im}(p)$

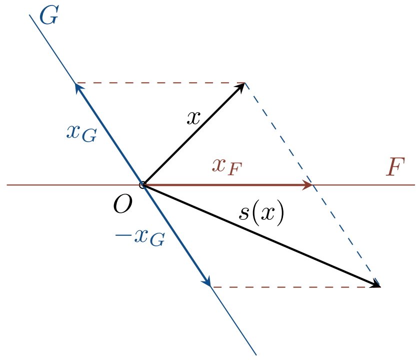
   En conclusion p est la projection sur $F = \mathrm{Vect}\{(1, 0)\}$ parallèlement à $G = \{(1, 1)\}$
2. Dans $E = \mathbb{R}^2[X]$, soit $p : P \longmapsto P(1)$. Nous avons déjà montré vu que c'était une application linéaire. Soit $P \in E$, $p(P) = P(1) = Q$, le polynôme constant $Q(X) = P(1)$. On a alors $p(p(P)) = P(Q) = Q(1) = P(1) = p(P)$, donc $p \circ p = p$ c'est donc une projection.

5.2 Symétries

Définition 2.5.35 Symétrie
Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle **symétrie par rapport à** F, **parallèlement** à G l'application de E dans E telle que si $x = x_F + x_G$ alors $s(x) = x_F - x_G$

Exemple :

- Dans le plan, si F et G sont deux droites, la symétrie par rapport à F parallèlement à G peut se représenter comme ci-contre.
  $x = x_F + x_G$ et $s(x) = x_F - x_G$



Propriété 2.5.36 Noyau et image d'une symétrie
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, la symétrie s par rapport à F parallèlement à G est une **application linéaire bijective**, c'est donc un automorphisme. On a ainsi :

- $\mathrm{Ker}(s) = \{0_E\}$, c'est-à-dire que s est injective
- $\mathrm{Im}(s) = E$, c'est-à-dire que s est surjective.

Démonstration

- Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et p la projection sur F parallèlement à G. On a pour pour tout x de E,
  $s(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = 2p(x) - x = 2p(x) - Id_E(x) = (2p - Id_E)(x)$
  Ainsi, $s = 2p - Id_E$ est une application linéaire car $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel.
- Si $x \in \mathrm{Ker}(s)$ alors $s(x) = 0_E \Rightarrow x_F - x_G = 0_E \Rightarrow x_F = x_G$. Ainsi $x_F \in F \cap G$, donc $x_F = 0_E$ et par suite $x_G = 0_E$, ce qui donne $x = 0_E$ et en conclusion $\mathrm{Ker}(s) = \{0_E\}$, donc s est injective
- Pour tout $x \in E$, $x = x_F + x_G = x_F - (-x_G) = s(x_F - x_G)$, donc $x \in \mathrm{Im}(s) = E$, donc s est surjective

En conclusion, s est un automorphisme de E

Propriété 2.5.37 Caractérisation des symétries
Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si, et seulement si, $s \circ s = Id_E$. On dit que s est une application involutive.
En outre si $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = Id_E$, c'est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(s + Id_E)$. Ainsi,

- $x \in F \Leftrightarrow s(x) = x$, F est l'ensemble des vecteurs invariants par s
- $x \in G \Leftrightarrow s(x) = -x$, G est l'ensemble des vecteurs dont l'image est égale à l'opposée.

Démonstration

- Soit $x \in E$ et s une symétrie de E,
  $s(s(x)) = s(x_F - x_G) = s(x_F + (-x_G)) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x$, donc $s \circ s = s$
- Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = Id_E$, en posant $p = \dfrac{s + Id_E}{2}$, on a $p \circ p = \dfrac{s + Id_E}{2} \circ \dfrac{s + Id_E}{2}$. Ainsi
  $p \circ p = \dfrac{s \circ s + 2s + Id_E}{4} = \dfrac{Id_E + 2s + Id_E}{4} = \dfrac{s + Id_E}{2} = p$
  Donc l'application p est la projection sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$. Ainsi $s = 2p - Id_E = x_F - x_G$ est la symétrie par rapport à F parallèle à G.
  En outre $G = \text{Ker}(p) = \text{Ker}(\frac{s+Id_E}{2}) = \text{Ker}(s + Id_E)$
  Enfin $F = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \text{Ker}(p - Id_E) = \text{Ker}(s - Id_E)$

Exemples :

1. Sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$, on considère l'application $s : z \longmapsto \overline{z}$.
   Pour tout $z \in \mathbb{C}, s \circ s(z) = s(\overline{z}) = \overline{\overline{z}} = z$, donc $s \circ s = Id_{\mathbb{C}}$, donc s est un symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(s - Id_{\mathbb{C}})$ et parallèlement à $G = \text{Ker}(s + Id_{\mathbb{C}})$.
   $x \in F \Leftrightarrow (s - Id_{\mathbb{C}})(x) = 0 \Leftrightarrow s(x) - x = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, donc $F = \mathbb{R}$
   $x \in G \Leftrightarrow (s + Id_{\mathbb{C}})(x) = 0 \Leftrightarrow s(x) = -x \Leftrightarrow \overline{x} = -x \Leftrightarrow x \in i\mathbb{R}$, donc $G = i\mathbb{R}$
2. Reprenons dans $E = \mathbb{R}^2$ les sous-espaces $F = \text{Vect}\{(1, 0)\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 1)\}$.
   Soit $u = (x, y) \in E, u = (x, y) = (x - y, 0) + (y, y)$. Posons $s(x, y) = (x - y, 0) - (y, y) = (x - 2y, -y)$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soit $v = s(u) = (x - 2y, -y) = (x', y')$, ainsi
   $$s(s(u)) = s(v) = (x' - 2y', -y') = (x - 2y - 2(-y), -(-y)) = (x, y) = u$$
   donc $s \circ s = s$ et s est bien une application involutive.
   En outre $u \in F \Leftrightarrow u = (x, 0) \Leftrightarrow s(u) = (x - 0, -0) = u \Leftrightarrow (s - Id_E)(u) = 0_E \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(s - Id_E)$
   Enfin $u \in G \Leftrightarrow u = (x, x) \Leftrightarrow s(u) = (x - 2x, -x) = -u \Leftrightarrow (s + Id_E)(u) = 0_E \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(s + Id_E)$
3. L'application $s : P(X) \longmapsto P(-X)$ est un endomorphisme involutif de $\mathbb{K}[X]$, en effet $s(s(P)) = P$. C'est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des polynômes pairs parallèlement au sous-espace vectoriel des polynômes impairs.