Espaces vectoriels et applications linéaires

$* * *$

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 – ★

Les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$
d. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$
e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
f. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\}$

Exercice 2 – ★

Les ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a. L'ensemble des suites croissantes.
b. L'ensemble des suites monotones.
c. L'ensemble des suites bornées.
d. L'ensemble des suites convergentes.
e. L'ensemble des suites périodiques.
f. L'ensemble des suites arithmétiques. $(u_{n+1} = u_n + k, k \in \mathbb{R})$
g. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = n^2 u_{n+1} + u_n\}$

Exercice 3 – ★

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
2. Donner une partie A qui engendre F et une partie B qui engendre G.
3. Déterminer un vecteur non nul de $F \cap G$. Ce vecteur engendre-t-il $F \cap G$?

Exercice 4 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E.
On rappelle que comparer F et G signifie déterminer si $F \subset G$, $G \subset F$ ou $F = G$.

1. Comparer $F \cap (G+H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$
2. Comparer $F + (G \cap H)$ et $(F+G) \cap (F+H)$

Exercice 5 – ★

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel } \iff (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

Exercice 6 – ★

Dans les cas suivants, montrer que F et G sont supplémentaires dans E

1. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1, \ldots, 1)\}$
2. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$, $G = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$

Exercice 7 – ★★

On rappelle que $\mathcal{F}(R)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer :

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(R)$$

Exercice 8 – ★

Dans chaque cas déterminer un supplémentaire de F dans E.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\{(1,0,1), (1,1,0)\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in E \mid x-y+z=0\}$

Applications linéaires

Exercice 9 – ★

Les applications suivantes sont-elles linéaires :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z) \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \longmapsto & a_0 + a_1 + a_2 \end{array}\right.$

Exercice 10 – ★

Dans chaque cas déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x-z) \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcl} \{\text{Suites convergentes}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n) & \longmapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \longmapsto & (a_0 + a_1)(1+X) \end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(R) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(R) \\ f & \longmapsto & f + f' \end{array}\right.$

Exercice 11 – ★★

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

1. Démontrer que tout vecteur de E est combinaison linéaire de e_1 et e_2
2. Soit f un endomorphisme de E, démontrer qu'il existe quatre réels a, b, c, d tels que $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$
3. Réciproquement vérifier qu'une telle application est linéaire.
4. Généraliser au cas où f est une application de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Exercice 12 – ★★

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$. On note $E_i = \text{Vect}\{(e_i)\}$

1. Démontrer que tout vecteur u de E se décompose de façon unique sur E_1, E_2 et E_3
2. Démontrer qu'il existe une application linéaire f de E dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(e_1) = (0,1) \qquad f(e_2) = (1,0) \qquad f(e_3) = (1,1)$$

3. Démontrer qu'une telle application linéaire est unique.
4. Calculer $f(x,y,z)$
5. Déterminer le noyau et l'image de f

Exercice 13 – ★

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$
2. $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$
3. $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$

Exercice 14 – ★

Soit f et g deux endomorphismes de E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

Exercice 15 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $u{-}1(u(F)) = F + \text{Ker}(u)$
2. Montrer que $u(u^{-1}(F)) = F \cap \text{Im}(u)$
3. Montrer $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F)) \iff \text{Ker}(u) \subset F \subset \text{Im}(u)$

Exercice 16 – ★★

On rappelle que $f^2 = f \circ f$

Soit f un endomorphisme de E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Exercice 17 – ★★

Soit f et g deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel telles que
$\forall x \in E, f(x)g(x) = 0$.
Montrer que $f = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ ou $g = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$.

Projecteurs et symétries

Exercice 18 – ★

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (5x-2y, 10x-4y) \end{array} \right.$

Montrer que p est une projection sur F parallèlement à G, deux sous-espaces vectoriels à déterminer.

Exercice 19 – ★

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in E \mid 2x - 3y = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(2,1)\}$.

Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G

Exercice 20 – ★

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}\{(1,1,0),(1,1,1)\}$, $G = \text{Vect}\{(0,1,1)\}$

Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G

Exercice 21 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p un projecteur de E

1. Montrer que $Id_E - p$ est un projecteur
2. Déterminer l'image et le noyau de $Id_E - p$ en fonction de ceux de p

Exercice 22 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

Soit p un projecteur de E. Montrer que $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par u si et seulement si u commute avec p, c'est-à-dire $u \circ p = p \circ u$

Exercice 23 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et p,q deux projecteur de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$
2. Montrer que dans ce cas

$$\text{Im}(p+q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) \text{ et } \text{Ker}(p+q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$$

Exercice 24 – ★

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $s : (x,y) \longmapsto (2x - y, 3x - 2y)$.

Montrer que s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G, deux sous-espaces vectoriels à déterminer.

Exercice 25 – ★

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in E \mid x + y = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,1)\}$. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à F et parallèlement à G

Exercice 26 – ★★

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $s : P(X) \longmapsto P(1-X)$. Montrer que s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G, deux sous-espaces vectoriels à déterminer.