MAT III - Contrôle
Durée : 45 min
29 septembre 2024
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Exercice 1 - 40 points

Soit E, F deux ensembles et $A \subset E$, $B \subset F$. Soit $f : E \longrightarrow F$

1. Donner la définition de : $f^{-1}(B)$
   $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$
2. Montrer que $A \subset f^{-1} \circ f(A)$
   Soit $x \in A$, donc $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1} \circ f(A)$.
3. Donner la définition de : f est injective de E dans F.
   $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
4. Montrer que si f est injective alors $f^{-1} \circ f(A) \subset A$
   Soit f injective, et $x \in f^{-1} \circ f(A)$ donc $f(x) \in f(A)$ donc il existe $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) = f(x)$ donc par injectivité $x_0 = x \in A$

Exercice 2 - 30 points

Soit (u_n) une suite.

1. Donner la définition de : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$
   $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - a| \leq \varepsilon$
2. Montrer que si (u_n) est croissante alors (u_n) est minorée.
   $m \geq n \Longrightarrow u_m \geq u_n$ donc $\forall m \geq 0, u_m \geq u_0$ donc (u_n) est minorée par u_0
3. Montrer que si (u_n) est convergente (limite finie) alors (u_n) est bornée.
   Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \quad |u_n - a| \leq \varepsilon$
   Soit $M = \max\{|u_n|, n \leq N\}$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \max(M, |a| + \varepsilon)$

Exercice 3 - 30 points

Soit f, φ deux fonctions réelles et $a \in \mathbb{R}$

1. Donner la définition de : $f \underset{a}{=} o(\varphi)$
   Sur un voisinage de a il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a telle que $f(x) = \varphi(x)\varepsilon(x)$
2. Donner un équivalent en 0 de : $\sin x - \tan x$
   $\sin x - \tan x = \tan x(\cos x - 1) \underset{0}{\sim} x \cdot \dfrac{-x^2}{2} = -\dfrac{x^3}{2}$
3. Grâce à un équivalent, calculer : $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{4}} \tan(2t) \ln(\tan t)$
   Soit $t = \dfrac{\pi}{4} - x$, on a donc $x \underset{t \to \frac{\pi}{4}}{\longrightarrow} 0$
   $\tan(2t)\ln(\tan t) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) \ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right) = \dfrac{\ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)}{\tan 2x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln\left(1 - \frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)}{2x} \underset{0}{\sim} -\dfrac{2\tan x}{2x(1+\tan x)} \underset{0}{\sim} -\dfrac{2x}{2x} = -1$
   donc $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{4}} \tan(2t)\ln(\tan t) = -1$