Chapitre 4

Matrices

Table des matières

1 Introduction

1.1 Définitions

Définition 4.1.1 Matrice
On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. On dit aussi matrice np.

On a donc pour une matrice A :

$$A : \left\{ \begin{array}{rl} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto a_{ij} \end{array} \right.$$

On a alors $A(i,j) = a_{ij}$

On notera souvent une matrice sous forme de tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

et de manière réduite $A = (a_{ij})$

Soit A une matrice np, on appelle :

- j^e vecteur **colonne** de A le vecteur

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

- i^e vecteur **ligne** de A le vecteur

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

Quelques types de matrices

Si $p = 1$,on dit que A est une **matrice colonne**, on a alors

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Si $n = 1$, on dit que A est une **matrice ligne**, on alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

Si $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée**

Lorsque A est carrée, on dit qu'elle est :

- **Triangulaire supérieure** si $\forall (i,j),\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, donc A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Triangulaire inférieure** si $\forall (i,j),\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$ c'est-à-dire A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Diagonale** si $\forall(i,j),\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ c'est-à-dire que A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On note cette matrice $\mathrm{Diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

D'une manière générale on appelle **diagonale**, ou **éléments diagonaux** de A, le vecteur $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

La matrice $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$ est notée I_n et est appelée **matrice identité**.

Notations

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices np à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées nn à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.2 Matrice d'une d'une famille de vecteurs

Définition 4.1.2 Représentation matricielle d'un vecteur
Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'un base $\mathcal{B} = (e_{1,2}, \dots, e_n)$, on peut représenter un vecteur x de E par la **matrice colonne**, notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ formée par les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$

$$\text{Si } x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}(x)} = X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Exemple
Le vecteur $x = (2, 1, 3) = 2e_1 + 1e_2 + 3e_3$ a pour matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Définition 4.1.3 Représentation matricielle d'une famille de vecteur
On peut représenter la famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E par la matrice np dont la j^e colonne est formée par les composantes de x_j dans la base canonique $\mathcal{B}$

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1) & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_2) & \dots & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_p) \end{pmatrix}$$

Exemple
On reprend $x_1 = (2, 1, 3)$, et on considère $x_2 = (-1, 4, 5)$. Ainsi la matrice de (x_1, x_2) dans $\mathcal{B}$ est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1) & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_2) \end{pmatrix}$$

1.3 Matrice d'une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$

Une application linéaire f de E dans F est **caractérisée par l'image de la base** $\mathcal{B}$, c'est-à-dire par la famille de p vecteurs de F : $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$

Définition 4.1.4 Matrice d'une application linéaire
Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle matrice de f par rapport (ou relativement) aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice dont la j^e colonne est formée des composantes de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, ainsi :

$$f(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_p))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np}\end{pmatrix}$$

Exemple :
Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X]\\ P & \longmapsto & (X+1)P-P'\end{array}\right.$
Soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}'=(1,X,X^2,X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$
$f(1)=1+X \qquad f(X)=-1+X+X^2 \qquad f(X^2)=-2X+X^2+X^3$
On peut alors construire la matrice de f par rapport au base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Utilisation
Soit $x=(x_1,x_2,\dots,x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $f(x)=y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$
On a $x=\sum_{j=1}^{p} x_je_j$ et $f(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i$ donc

$$y=\sum_{i=1}^{n} y_ie'_i=f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{p} x_je_j\right)=\sum_{j=1}^{p} x_jf(e_j)$$

$$y=\sum_{i=1}^{n} y_ie'_i=\sum_{j=1}^{p} x_j\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i\right)}_{f(e_j)}=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} x_ja_{ij}\right)}_{y_i}e'_i$$

On en déduit que y_i s'exprime en fonction des éléments de la i^e ligne de la matrice de f.

La matrice représentant le vecteur $y=f(x)$ dans $\mathcal{B}'$ est

$$Y=\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(x))=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

Réciproquement
Toute matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définit une unique application linéaire d'un espace vectoriel de dimension p dans un espace de dimension n. En effet si l'on choisit une matrice $A=(a_{ij})$ on peut lui associer l'application f tel que $f(e_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i$.

Cette application est bien linéaire et on connait l'image d'une base, donc on connait entièrement l'application f.

En outre, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_p))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np}\end{pmatrix}=A$

En particulier, on peut associer à toute matrice $A\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. On appelle cette application, **l'application linéaire canoniquement associée** à A.
Exemple :
Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ associée.
On a alors $f(e_1)=3f_1+5f_2, \qquad f(e_2)=-f_1+2f_2 \qquad f(e_3)=2f_1-3f_2$

2 Opération sur les matrices

2.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Addition des matrices

Définition 4.2.5 Somme de deux matrices
Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle **somme des matrices** A et B, la matrice $A + B = (c_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Propriété 4.2.6 Groupe $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$
L'ensemble des matrices np muni de l'addition $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ est un **groupe abélien**

Démonstration

- L'addition est une **loi interne**
- La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (tous les $a_{ij} = 0$) noté $0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ est **élément neutre**.
- Toute matrice $A = (a_{ij})$ possède **une opposée** $-A = (-a_{ij})$
- L'addition est **commutative** et **associative**.

Multiplication des matrices par un scalaire

Définition 4.2.7 Multiplication par un scalaire
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle produit de A par α la matrice $\alpha A = (b_{ij})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \qquad b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Exemple :

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 4.2.8 Espace vectoriel $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +, \cdot)$
L'ensemble $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un **espace vectoriel**

Démonstration

- $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +)$ est un **groupe abélien**.
- $\alpha(\beta A) = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta b_{ij}) = \alpha\beta A$
- $1 \cdot A = 1(a_{ij}) = (a_{ij}) = A$
- $\alpha(A + B) = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = (\alpha(a_{ij} + b_{ij})) = (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\alpha bij) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = (\alpha + \beta)(a_{ij}) = ((\alpha + \beta)a_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = \alpha A + \beta A$

Propriété 4.2.9 Lien entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension p et n et deux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, alors l'application φ :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$

est un **isomorphisme** d'espaces vectoriels.

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de F. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha, \beta \in K$. On pose

$$A = (a_{ij}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$$
$$B = (b_{ij}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)$$
$$C = (c_{ij}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha u + \beta v)$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, c_{ij} est la i^e composante de $(\alpha u + \beta v)(e_j)$
Or

$$(\alpha u + \beta v)(e_j) = \alpha u(e_j) + \beta v(e_j) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) e'_i$$

Donc $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$
Ainsi $\varphi(\alpha u + \beta v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha u + \beta v) = C = (c_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \beta(b_{ij}) = \alpha A + \beta B = \alpha \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \beta \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$
Donc φ est une **application linéaire**.
De plus pour toute matrice $A = (a_{ij})$ il existe une unique application linéaire vérifiant

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$$

Donc l'application est **bijective**

Remarque : Cette propriété énonce qu'on peut considérer que les applications linéaires et les matrices ont les mêmes propriétés. Suivant le type de problème, on peut utiliser les matrices ou les applications linéaires.

Base de $\mathcal{M}_{np}\mathbb{K}$

Définition 4.2.10 Matrice élémentaire
On appelle **matrice élémentaire** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, et on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice ij

.

Exemple
Dans $\mathcal{M}_{45}(\mathbb{K})$, la matrice E_{23} est

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 4.2.11 Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$
La famille (E_{ij}) est une **base** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ que l'on appelle **base canonique**. L'espace $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est donc de dimension np

Démonstration

- **Famille libre** : Soit (λ_{ij}) une famille telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$$

  Cela implique que tous les $\lambda_{ij} = 0$ car λ_{ij} est le coefficient d'indice ij de la matrice nulle, qui vaut 0
- **Famille génératrice** : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$$

  Donc la famille est bien génératrice

En conclusion c'est une base. Il y a np éléments dans cette base, donc $\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$

Propriété 4.2.12 Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

Démonstration

D'après la propriété précédente, si E est de dimension p et F de dimension n alors $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont isomorphes, ils ont donc la même dimension.

2.2 Produit de matrices

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E.
Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E$.
Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\varphi(e_j) = a_j$.
On a donc

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j$$

On peut associer à x et φ les matrices suivantes :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$$

On veut alors définir le produit de matrice pour avoir : $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}(\varphi(x))}$
On définit donc

$$AX = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = \sum_{j=1}^{p} a_j x_j$$

Remarques :

- Pour effectuer ce produit il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de X
- Ce produit permet de calculer l'image d'un vecteur par une forme linéaire.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ on a alors

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + (-1) \times (-3) + 3 \times 2 = 2 + 3 + 6 = 11$$

Produit d'une matrice $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ par une matrice colonne

Soit E et F deux espaces vectoriels possédants des bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$
On a vu précédemment que si $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E$, on peut lui associer la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de E dans F, telle que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$. On peut associer à f la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On a aussi vu que si $y = f(x)$, alors on a :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Avec $y_i = \sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}$ et donc $y_1 = \sum_{j=1}^{p} x_j a_{1j}$

On remarque que y_1 est égal à la première ligne de A multipliée par X. De même y_i est égal à la i^e ligne de A multipliée par X.

$$y_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p$$

On définit alors le produit AX de telle façon à ce que la i^e coordonnée de AX soit le produit de la i^e ligne de A par X. Dans ce cas on obtient $AX = Y$ et ainsi

$$Y = AX = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(y) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(x))$$

Et ainsi :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(x))}$$

Remarques :

- Pour effectuer ce produit il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de X. Le résultat de ce produit est une matrice colonne qui a n lignes, le nombre de lignes de A
- Ce produit permet de calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a alors :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 4 \times 3 + (-2) \times (-2) \\ 2 \times 1 + (-1) \times 3 + 3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}_{qn}(\mathbb{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Soit E, F, G espaces vectoriels de bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = (a_{jk}) = A$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) = (b_{ij}) = B$

On cherche l'expression du produit $BA = C$.

Si l'on réutilise la définition du produit vu précédemment, on a alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = AX = Y \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}_G}(v(u(x))) = BY = BAX$$

Ainsi,

$$C = BA = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u)$$

On peut donc définir le produit de deux matrices, cela correspond à la composition de deux applications linéaires.

On cherche la matrice de l'application composée $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_G$.

$$v \circ u(e_k) = v\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} f_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} v(f_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \left(\sum_{i=1}^{q} b_{ij} g_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}\right)}_{c_{ik}} g_i$$

On a donc $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}$ qui est la i^e composante de $v \circ u(e_k)$ dans $\mathcal{B}_G$, donc $(c_{ik}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = C$

Définition 4.2.13 Produit de matrices
Soit $A = (a_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{qn}(\mathbb{K})$. On appelle produit BA la matrice :

$$C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K}) \qquad \text{avec} \qquad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

On a

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 12 \\ 11 & 2 & 19 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Pour faire le produit BA il faut que le nombre de ligne de A soit égal au nombre de colonne de B.
- Le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{qn}$ par une matrice de $\mathcal{M}_{np}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{qp}$

Propriété 4.2.14 Matrice de la composée d'applications linéaires
Soit E, F, G trois espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$$

Propriétés du produit matriciel

Propriété 4.2.15 Distributivité

- ➢ Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a :

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha(AB) + \beta(AC)$$

- ➢ Soit $A, B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a :

$$(\alpha A + \beta B)C = \alpha(AC) + \beta(BC)$$

Propriété 4.2.16 Associativité
Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{K})$, on a :

$$A(BC) = (AB)C$$

2.3 Anneau des matrices carrées

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété 4.2.17 Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau

.

Démonstration

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.
- La loi $\times$ est une loi interne, associative et distributive.
- La matrice identité I_n est **élément neutre** pour la loi $\times$

Remarques :

- La multiplication de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **n'est pas commutative** : $AB \neq BA$
- L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre : $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Exemples :

1. $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $AB = 0$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. $BA \neq AB$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Multiplier à **gauche** une matrice A par la matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ revient à multiplier les **lignes** de A par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$
- Multiplier à **droite** une matrice A par la matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ revient à multiplier les **colonnes** de A par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Exemples :

1. Multiplication à **gauche**
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Multiplication à **droite**
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 15 & -1 \end{pmatrix}$$

Éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: le groupe $\mathcal{GL}(\mathbb{K})$

Définition 4.2.18 Matrice inversible
Un matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice B vérifiant :
$$AB = BA = I_n$$
B est appelée **inverse** de A et est noté A^{-1}. L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé **groupe linéaire**.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
On a
$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \times A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Propriété 4.2.19 Matrice de la bijection réciproque
Soit E et F deux sous espaces vectoriels de dimension n munis des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Une application linéaire $\mathcal{L}(E,F)$ est **bijective** si et seulement si la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est **inversible**, et on a alors :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})$$

Démonstration

➢ Si u est bijective, on peut écrire :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u \circ u^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(Id_F) = I_n$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(u^{-1} \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(Id_E) = I_n$$
Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})$

➢ Réciproquement, on suppose $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ inversible, et soit v l'application linéaire associée à $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)^{-1}$, alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u \circ v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(v) = I_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(Id_F)$$
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = I_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(Id_E)$$

Donc $u \circ v = Id_F$ et $v \circ u = Id_E$, donc u est une application linéaire bijective.

Exemple : **Calcul pratique de l'inverse d'une matrice**
Soit u une application bijective de E dans F, et soit $x \in E$. On a alors $u(x) = y \in F$.
Puisque u est bijective, il existe u^{-1} de F dans E telle que $\forall x \in E,\ u^{-1}(u(x)) = x$ et donc $u^{-1}(y) = x$.
Si l'on écrit ces relations avec les matrices, en posant $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$, on obtient

$$AX = Y \quad \text{et} \quad A^{-1}Y = X$$

Ainsi pour déterminer A^{-1} il faut exprimer les coordonnées de X en fonction de celles de Y.
Attention ce n'est possible que si A est inversible.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, l'opération $AX = Y$ correspond à :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = y_1 \quad (1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = y_2 \quad (2) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = y_3 \quad (3) \end{cases}$$

On obtient : $(1)+(2)+(3)$: $\quad 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = y_1 + y_2 + y_3$ donc $x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{4}$ (4)
$(1)-(4)$: $\quad x_1 = \dfrac{3y_1 - y_2 - y_3}{4}$, $(2)-(4)$: $\quad x_2 = \dfrac{-y_1 + 3y_2 - y_3}{4}$, $(3)-(4)$: $\quad x_3 = \dfrac{-y_1 - y_2 + 3y_3}{4}$

On en déduit $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
On peut vérifier que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$

Propriété 4.2.20 Critère d'inversibilité
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}, \quad AX = 0 \Longrightarrow X = 0$$

Alors A est une matrice inversible.

Démonstration
Soit u l'endomorphisme associé à A vérifiant la relation $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on a donc $u(x) = 0$, cela se traduit en terme de matrice par $AX = 0$ et donc $X = 0$ et ainsi $x = 0$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$ donc u est injective, et par suite bijective. En conclusion la matrice de u, A est inversible.

Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $AX = 0$ alors $\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ x_1 & = 0 \end{cases}$ donc $x_1 = x_2 = 0$ et donc $X = 0$, donc la matrice A est inversible.

Propriété 4.2.21 Critère d'inversibilité
Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient :

$$AB = I_n$$

Alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$

Démonstration
Soit u, v les endomorphismes associés à A, B. On a alors $AB = I_n$ implique $u \circ v = Id_{\mathbb{K}^n}$, donc $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathbb{K}^n$. Or $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$, ainsi $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{K}^n$, c'est-à-dire que u est surjective et donc bijective.
Par conséquent, A est inversible, donc A^{-1} existe. $AB = I_n \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}I_n \Rightarrow B = A^{-1}$
Donc la matrice B est inversible (car A^{-1} est inversible) et on $AB = I_n \Rightarrow ABB^{-1} = I_nB^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$

Propriété 4.2.22
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Une famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de E est une base de E si et seulement si, la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible.

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et u un endomorphisme de E, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$. Donc l'endomorphisme associé à $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'endomorphisme u tel que pour tout i, $u(e_i) = x_i$. On sait qu'un endomorphisme est bijectif si et seulement si l'image d'une base est une base. Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E.

Exemple

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. On remarque $x_3 = (2, 6, -2) = 2x_1$ donc $2x_1 - x_3 = 0$ donc (x_1, x_2, x_3) n'est pas une famille libre, par suite ce n'est pas une base, et donc A n'est pas une matrice inversible.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $x_1 = e_3$, $x_2 = e_1$, $x_3 = e_2$ donc la famille (x_1, x_2, x_3) est une base et ainsi la matrice A est inversible.
3. On a montré plus haut que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ était inversible (on a même calculé l'inverse).
   Donc la famille de ses vecteurs colonnes forme une base : $((2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3 Changements de bases

3.1 Effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$

Soit $x \in E$, on peut décomposer x dans les deux bases, et on a alors : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$.

Ainsi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x) = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

De plus $x = Id_E(x)$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Id_E(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$

On a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ c'est la matrice de la base $\mathcal{B}'$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$

On pose $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$, et on obtient alors $X = PX'$

Définition 4.3.23 Matrice de passage
On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$$

Attention : La matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est la matrice des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$

Propriété 4.3.24 Formule de changement de bases d'un vecteur
Soit X et X' les matrices d'un même vecteur x exprimé dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a alors :

$$\boxed{X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X'}$$

Exemple :

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = ((2, 1, 4), (-1, 2, 3), (1, -1, 0)) = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit $X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a alors que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

On vérifie ce calcul, $x' = 2e'_1 + e'_2 - e'_3 = 2(2,1,4) + (-1,2,3) - (1,-1,0) = (2,5,11)$

Propriété 4.3.25 Inverse de la matrice de passage
La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est **inversible** et son inverse est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. On a donc

$$P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Démonstration

- La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$, elle est donc associé à l'application identité qui est bijective, elle est donc inversible.
- On a $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(Id_E)M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(Id_E) = I_n$ ainsi $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice inversible et $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

3.2 Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. On appelle $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. On pose alors :

- $P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$
- $Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$
- $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ et $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u)$

Soit $x \in E$ et $y \in F$, on note $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(x)$, $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E}(x)$, $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(y)$, $Y' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_F}(y)$

On a d'après les formules de changement de bases des vecteurs :

$$X = PX' \quad \text{et} \quad Y = QY'$$

Lorsque $y = u(x)$ on a $Y = AX$ donc

$$QY' = AX = APX'$$

Et comme Q est inversible :

$$Y' = \underbrace{Q^{-1}AP}_{A'}X'$$

Donc $A' = Q^{-1}AP$

Propriété 4.3.26 Formule de changement de bases d'une application linéaire
Avec les notations précédentes

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP}$$

Remarque : Il est très facile de se tromper, il est vivement conseillé de retenir $X = PX'$ puis de retrouver cette formule.

Exemple :
Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ les bases canoniques associées, contenant les vecteurs e_i et f_i
Soit $\mathcal{B}'_E = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ et $\mathcal{B}'_F = ((0,1),(1,1))$, contenant les vecteurs e'_i et f'_i
Soit u l'application canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On va déterminer l'expression de la matrice de u par rapport au bases $\mathcal{B}'_E$ et $\mathcal{B}'_F$.
On a besoin de $P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de $Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut calculer que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La formule nous dit : $A' = Q^{-1}AP$, donc :

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Essayons de vérifier ce résultat.

D'après la matrice A on sait que

$$u(e_1) = f_1 + 2f_2 = (1, 2)$$

On remarque que le vecteur $e'_3 = e_1$, donc $u(e_1) = u(e'_3)$, on peut utiliser A' pour calculer cette image. D'après la matrice A',

$$u(e'_3) = f'_1 + f'_2$$

Enfin d'après la base $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$, on a

$$f'_1 = f_2 \quad \text{et} \quad f'_2 = f_1 + f_2$$

Donc

$$u(e'_3) = f'_1 + f'_2 = f_2 + f_1 + f_2 = f_1 + 2f_2 = (1, 2)$$

Remarque : En pratique, sauf si les matrices A, P, Q sont très simples (comme ici), vérifier demande beaucoup calculs.

Définition 4.3.27 Matrices équivalentes
Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$A' = Q^{-1}AP$$

sont dites **équivalentes**

3.3 Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un endomorphisme

Il s'agit d'un cas particulier du cas précédent. On considère cette fois une application de E dans E (c'est-à-dire $F = E$). On a donc

- $P = P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$ matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$
- $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(u)$ et $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E}(u)$

Puisque $E = F$, $Q = P$. On a alors d'après les calculs précédents : $A' = P^{-1}AP$

Propriété 4.3.28 Formule de changement de bases d'un endomorphisme
Avec les notations précédentes

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Exemple :
Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à D d'équation $y + 2x = 0$ et parallèlement à D' d'équation $y = x$.
On a alors $D = \text{Vect}((1, -2))$ et $D' = \text{Vect}((1, 1))$
Soit $u = (x, y) = u_D + u_{D'} = a(1, -2) + b(1, 1) = (a + b, -2a + b)$, ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = a + b \\ y & = -2a + b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a & = \frac{x-y}{3} \\ b & = \frac{2x+y}{3} \end{array} \right.$$

On a alors $s(u) = u_D - u_{D'} = \frac{x-y}{3}(1, -2) - \frac{2x+y}{3}(1, 1) = \dfrac{1}{3}(-x - 2y, -4x + y)$
On a alors, dans $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que la première colonne de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s)$ est le vecteur $s(e_1) = s(1, 0) = \frac{1}{3}(-1, -4)$
Cherchons l'expression de s dans la base formée par les vecteurs directeurs de D et D',
$\mathcal{B}' = ((1, -2), (1, 1))$
On a alors

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a besoin de $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, que l'on obtient en résolvant $PX = Y$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = y_1 \\ -2x_1 + x_2 & = y_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 & = \frac{y_1 - y_2}{3} \\ x_2 & = \frac{2y_1 + y_2}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi (en utilisant $X = P^{-1}Y$)

$$P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement base nous dit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(s) = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice nous dit que si on prend un vecteur de $u \in D$ alors $s(u) = u$, et en effet, les vecteurs de D sont invariants par la symétrie s.
En outre, si on prend un vecteur $u \in D'$, alors $s(u) = -u$, en effet la symétrie s transforme les vecteurs de D' en leur opposés.

Remarque : Cette matrice est beaucoup plus simple que la matrice d'origine, ainsi changer de bases permet d'obtenir des matrices pratiques pour faire des calculs. Cette remarque est à la base de la théorie de la réduction des endomorphismes qui sera étudiée l'année prochaine.

Définition 4.3.29 Matrices semblables
Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$A' = P^{-1}AP$$

sont dites **semblables**

4 Transposition

4.1 Transposée d'une matrice

Définition 4.4.30 Transposée d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de $A = (a_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ notée ${}^tA = (a'_{ij})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!] \qquad a'_{ij} = a_{ji}$$

Exemples :

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Notation : La notation anglaise pour la transposée de A est A^T

4.2 Transposée d'un produit

Propriété 4.4.31 Transposée d'un produit
Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$:

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

DÉMONSTRATION

On pose $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$, ${}^tA = (a'_{ij})$, ${}^tB = (b'_{ij})$, ${}^t(AB) = (c'_{ij})$ et ${}^tB{}^tA = (d_{ij})$

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b'_{ik}a'_{kj} = d_{ij}$$

Propriété 4.4.32 Transposée de l'inverse
La transposée d'une matrice inversible est inversible et :

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

DÉMONSTRATION

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, on a alors

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tA = I_n$$

Ce qui prouve que ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

4.3 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 4.4.33 Matrice symétrique
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$, c'est-à-dire si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad a_{ji} = a_{ij}$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

EXEMPLES :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 7 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique
2. $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ est symétrique.

Définition 4.4.34 Matrice antisymétrique
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. A est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire si :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad a_{ji} = -a_{ij}$$

Comme $a_{ii} = -a_{ii}$, on a $a_{ii} = 0$, donc la diagonale de A est nulle.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

EXEMPLE : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique