Dimension des espaces vectoriels

$* * *$

Familles libres - génératrices

Exercice 1 – ★

1. La famille $\mathcal{F} = \{(1,1),(1,-1)\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?
2. La famille $\mathcal{F} = \{(1,-1),(-2,2)\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 – ★★

1. Soit $\mathcal{F} = \{u,v,w\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, avec $w = \alpha u + \beta v$.
   Montrer que $\mathcal{G} = \{u,v\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{x_1,x_2,\dots,x_n,u\}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E, avec $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Montrer que $\mathcal{G} = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ est génératrice de E.
   On a donc montré qu'en enlevant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres dans une famille génératrice, on obtient encore une famille génératrice.

Exercice 3 – ★

Les familles composées des vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

a. $x_1 = (1,1,0)$ $\quad x_2 = (0,1,1)$

b. $x_1 = (0,0,1)$ $\quad x_2 = (0,1,1)$ $\quad x_3 = (1,1,1)$

c. $x_1 = (0,1,-1)$ $\quad x_2 = (1,0,-1)$ $\quad x_3 = (1,-1,0)$

d. $x_1 = (1,1,-1)$ $\quad x_2 = (1,-1,1)$ $\quad x_3 = (-1,1,1)$ $\quad x_4 = (1,1,1)$

Exercice 4 – ★★

Les familles composées des vecteurs suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?

a. $f_1 : x \mapsto \cos x$ $\quad f_2 : x \mapsto \sin x$ $\quad f_3 : x \mapsto 1$

b. $f_1 : x \mapsto \cos^2 x$ $\quad f_2 : x \mapsto \cos 2x$ $\quad f_3 : x \mapsto 1$

c. $f_i : x \mapsto \exp(\lambda_i x)$ pour $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

d. $f_k : x \mapsto \sin kx$ $\quad k \in [\![1,n]\!]$

Exercice 5 – ★★

1. Soit $\mathcal{F} = \{u,v\}$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Soit $w \in E$, qui n'est pas une combinaison linéaire de u et v. Montrer que $\mathcal{G} = \{u,v,w\}$ est libre.
2. $\mathcal{F} = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ une famille libre d'un espace vectoriel E, et $u \in E$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i, montrer que $\mathcal{G} = \{x_1,x_2,\dots,x_n,u\}$ est libre.

Exercice 6 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. On veut montrer que $f = \lambda Id_E$. On va montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ \lambda_x = \lambda_y$

1. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que (x,y) soit une famille liée, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$
2. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que (x,y) soit une famille libre. En calculant $f(x+y)$ montrer que $\lambda_x = \lambda_y$

Bases et dimension

Exercice 7 – ★

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs :
$u = (1,1,-1)$, $v = (-1,1,1)$ et $w = (1,-1,1)$

1. Montrer que (u,v,w) forme une base de $\mathbb{R}^3$
2. Donner les coordonnées du vecteur $(2,1,3)$ dans cette base.

Exercice 8 – ★

Soit $P_1(X) = (X-1)^2$, $\quad P_2(X) = X^2$, $\quad P_3(X) = (X+1)^2$

1. Montrer que la famille (P_1,P_2,P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Montrer $1, X, X^2 \in \mathrm{Vect}(P_1,P_2,P_3)$.
3. En déduire que (P_1,P_2,P_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$
4. Déterminer $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $1 + X + X^2 = aP_1 + bP_2 + cP_3$.

Exercice 9 – ★★ *Polynômes de Bernstein*

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$

1. Pour $n = 2$, calculer P_0, P_1 et P_2.
2. Pour $n = 2$, démontrer que (P_0,P_1,P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Démontrer que $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 10 – ★

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

a. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$

b. $F = \{(a, a+b, b) \in \mathbb{R}^3, a,b \in \mathbb{R}\}$

c. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ , x = 2y = 3z\}$

d. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 3y - z = 0\}$, $F + G$

e. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , x+y=0,\ y+z=0,\ z+t=0,\ t+x=0\}$

f. $F = \mathrm{Vect}((1,2,-1,1),(-3,-2,3,2),(-1,0,1,1),(2,3,-2,1))$

g. $\{P \in \mathbb{R}_4[X], P(1)=0\}$

h. ⋆ Ensemble des suites arithmétiques

i. $F = \{g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid g'' = 0\}$

Exercice 11 – ★

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :
$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, b-2c+d=0\} \quad G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, a=d, b=2c\}$

1. Donner une base de F et de G.
2. Donner une base de $F \cap G$.
3. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 12 – ★

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-y-2z=0\} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x=2y=x+z\}$

1. Déterminer les dimensions de F et de G.
2. Déterminer la dimension de $F \cap G$.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 13 – ★

Soit F, G, H les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, 2x-y+4z+3t=0)\} \quad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y-4z+3t=0)\}$$
$$H = \mathrm{Vect}((-3,1,1,1),(6,2,-1,-2),(3,11,2,-1))$$

1. Donner une base de $F \cap G$ et sa dimension.
2. Montrer que $H \subset F \cap G$.
3. Montrer que $H = F \cap G$.

Exercice 14 – ★

Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :

a. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x-y, y-x, 0) \end{cases}$

b. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x-y, y-z, z-x) \end{cases}$

c. $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto z + i\overline{z} \end{cases}$

d. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto P - (X+1)P' \end{cases}$

Exercice 15 – ★

Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille : $\{e_1 = (1,1,1,1), e_2 = (1,1,-1,-1)\}$

Exercice 16 – ★

Soit $\mathcal{F}$ un famille à p éléments d'un espace vectoriel E.
Montrer que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre.

Exercice 17 – ★

Déterminer le rang des familles suivantes :

a. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((2,5,3),(1,-1,4),(1,6,-1))$

b. Dans $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = ((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0))$

c. Dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathcal{F} = (X^2+X+1,\ X^2+3X+1,\ 2X,\ X^3+3)$

d. Dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ avec :

$$\varphi_1(x,y,z,t) = x+t \qquad \varphi_2(x,y,z,t) = -x+2y$$
$$\varphi_3(x,y,z,t) = x+y-z+t \qquad \varphi_4(x,y,z,t) = y+t$$

Exercice 18 – ★

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $E = \mathbb{R}^5$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$

Applications linéaires et dimension

Exercice 19 – ★ Vrai ou faux ?

a. Une famille est libre si et seulement si ses éléments ne sont pas colinéaires deux à deux.

b. Une famille est liée si : $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Rightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0,0,\ldots,0)$

c. Une famille est liée si et seulement si chacun de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

d. Une famille est génératrice finie ne peut avoir moins d'élément qu'une famille libre.

e. Dans un espace vectoriel de dimension n, tout famille de strictement plus de n éléments est liée.

f. Dans un espace vectoriel de dimension n, tout famille de moins de n éléments est libre.

g. Dans un espace vectoriel de dimension n, tout famille de n éléments est une base.

h. Si F et G deux sous-espaces de E sont tels que $\dim F + \dim G = \dim E$ alors F et G sont supplémentaires.

i. Tout endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie est un automorphisme.

j. Pour tout endomorphisme f de E, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 20 − ★

Soit f un endomorphisme de E de dimension finie. Montrer que :

$$\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Im}\left(f^2\right)\Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f)\oplus\operatorname{Ker}(f)=E\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Ker}\left(f^2\right)$$

Exercice 21 − ★

Soit E un espace vectoriel et p,q deux projection de E telles que $p\neq 0, q\neq 0, p\neq q$. Démontrer que (p,q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$

Exercice 22 − ★★

Soit f,g deux endomorphisme de E, un espace vectoriel de dimension finie

1. Montrer que $\operatorname{rg}(g\circ f)\leq \min(\operatorname{rg}(f),\operatorname{rg}(g))$
2. On note h la restriction de f à $\operatorname{Ker}(g\circ f)$
   a. Déterminer $\operatorname{Ker}(h)$ et $\operatorname{Im}(h)$
   b. Grâce au théorème du rang, montrer que

$$\dim\operatorname{Ker}(g\circ f)\leq \dim\operatorname{Ker}(g)+\dim\operatorname{Ker}(f)$$

Exercice 23 − ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et F,G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe un endomorphisme de E tel que $\operatorname{Im}(u)=F$ et $\operatorname{Ker}(u)=G$ si et seulement si $\dim F+\dim G=n$

Exercice 24 − ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Ker}(u)$ si et seulement si n est pair.

Exercice 25 − ★★

Soit f un endomorphisme de rang p d'un espace vectoriel E de dimension n $(p\leq n)$. Montrer que f peut s'écrire comme la somme de p endomorphismes de rang 1.

Exercice 26 − ★★

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f,g deux applications linéaires de E dans F.

1. Montrer que $|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)|\leq \operatorname{rg}(u+v)\leq \operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$
2. On suppose de plus que $E=F$, $u+v$ est inversible (bijectif) et que $u\circ v=0_{\mathcal{L}(E)}$, montrer alors que :

$$\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)=\dim E$$

Exercice 27 − ★★

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n tel que $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$ (on dit que f est nilpotent d'indice n).

Montrer qu'il existe $x_0\in E$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0)\right)$ forme une base de E.

Exercice 28 − ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que :

$$u^2+3u+2Id_E=0$$

1. Soit $v=u+2Id_E$, calculer v^2
2. Montrer que v est un projecteur de E
3. En déduire qu'il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tels que $v_{|F}=Id_F$ et $v_{|G}=0_{\mathcal{L}(G)}$ et que $E=\operatorname{Im}(u)\oplus\operatorname{Im}(u+2Id_E)$
4. En déduire que $u_{|F}=-Id_F$ et $u_{|G}=-2Id_G$

Exercice 29 − ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f\in\mathcal{L}(E)$.

1. Soit $k\geq 1$, montrer que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)\subset\operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(f^{k+1}\right)\subset\operatorname{Im}\left(f^k\right)$.
2. Démontrer qu'il existe $p\leq n$ tel que $\forall k\geq p, \operatorname{Ker}\left(f^k\right)=\operatorname{Ker}\left(f^p\right)$.
3. Démontrer que $\operatorname{Ker}\left(f^p\right)$ et $\operatorname{Im}\left(f^p\right)$ sont supplémentaires.
4. Démontrer qu'il existe deux *s.e.v.* F et G de E qui sont supplémentaires et tels que $f_{|F}$ est nilpotent et $f_{|G}$ est un automorphisme.
5. Soit $d_k=\dim\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$. Montrer que la suite $(d_{k+1}-d_k)$ est décroissante.

Formes linéaires

Exercice 30 − ★★

Dans $E=\mathbb{R}^4$, écrire le sous-espace engendré par les vecteurs $u=(2,1,0,2)$ et $v=(-1,-2,3,1)$ comme l'intersection de noyaux de deux formes linéaires indépendantes. C'est-à-dire, montrer qu'il existe deux formes linéaires φ_1,φ_2 telles que

$\operatorname{Ker}(\varphi_1)\cap\operatorname{Ker}(\varphi_2)=\operatorname{Vect}(u,v)$

Exercice 31 − ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et u un vecteur de E tel que $u\notin H$. Montrer qu'il existe une et une seule forme linéaire φ telle que $\operatorname{Ker}(\varphi)=H$ et $\varphi(u)=1$

Exercice 32 − ★★

1. Soit E de dimension n, et H_1 et H_2 deux hyperplans de E.
   Soit φ_1,φ_2 deux formes linéaires telles que $H_1=\operatorname{Ker}(\varphi_1)$ et $H_2=\operatorname{Ker}(\varphi_2)$.
   Montrer que $\dim(H_1\cap H_2)=n-2\Leftrightarrow(\varphi_1,\varphi_2)$ est une famille libre.
2. Cas général : Soit $T=(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E, et $T^\circ=\{x\in E, \forall\varphi\in T, \varphi(x)=0\}$. Montrer que T° est un *s.e.v.* de E de dimension $n-\operatorname{rg}(T)$.