Espaces vectoriels et applications linéaires

∗ ∗ ∗

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 – ★
Les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$
b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$
c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$
d. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\}$
e. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
f. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=0\}$

Correction

Dans chaque cas on appelle F l'ensemble considéré.

a. $0_{\mathbb{R}^2} \in F$. Soit $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ dans F, et $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
Soit $w = \alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (X,Y)$. $w \in F \Leftrightarrow X+Y=0$
$X+Y = \alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y' = \alpha \underbrace{(x+y)}_{=0 \text{ car } u\in F} + \beta \underbrace{(x'+y')}_{=0 \text{ car } v \in F} = 0$
Donc $w \in F$, donc F est stable et par suite $\boxed{\text{est un sous-espace vectoriel}}$

b. $0_{\mathbb{R}^2} \notin F$, $\boxed{\text{donc } F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$

c. $u=(1,0) \in F$ et $v=(0,1) \in F$, mais $u+v=(1,1) \notin F$, donc F n'est pas stable, donc $\boxed{\text{ce n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$

d. $0_{\mathbb{R}^2} \in F$, soit $u=(x,y) \in F$ et $v=(x',y') \in F$.
Soit $w = \alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = (X,Y)$, $w \in F \Leftrightarrow X=0$
$X = \alpha \underbrace{x}_{=0 \text{ car } u\in F} + \beta \underbrace{x'}_{=0 \text{ car } v\in F} = 0$ donc $w \in F$
Donc F est stable, donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel}}$

e. Soit $u=(0,1) \in F$, $-u=(0,-1) \notin F$ donc F n'est pas stable, donc $\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel}}$

f. $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$, donc seul le vecteur nul appartient à F, ainsi $F=\{0_{\mathbb{R}}^2\}$ qui est $\boxed{\text{bien un sous-espace vectoriel.}}$

Exercice 2 – ★
Les ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a. L'ensemble des suites croissantes.
b. L'ensemble des suites monotones.
c. L'ensemble des suites bornées.
d. L'ensemble des suites convergentes.
e. L'ensemble des suites périodiques.
f. L'ensemble des suites arithmétiques. $(u_{n+1} = u_n + k, k \in \mathbb{R})$
g. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = n^2 u_{n+1} + u_n\}$

Correction

On rappelle que le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$
Dans chaque cas on appelle F l'ensemble considéré.

a. Soit $(u_n) \in F$, donc (u_n) est croissante. La suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -u_n$ est décroissante, donc $(v_n) \notin F$ donc $\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$

b. Soit (u_n) croissante de premiers termes $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=5$ et (v_n) décroissante de premiers termes $v_0=0$, $v_1=-2$, $v_2=-3$. (u_n) et (v_n) sont monotones mais $w_n = u_n + v_n$ ne l'est pas. En effet $w_0=0$, $w_1=-1$, $w_2=2$, donc $(w_n) \notin F$, donc $\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$

c. $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$ (bornée par 0), soit (u_n) une suite bornée par M et (v_n) bornée par M', et $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, alors (w_n) définie par $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ est bornée par $|\alpha|M + |\beta|M'$ donc $(w_n) \in F$, donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$

d. $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$ (converge vers 0), soit (u_n) et (v_n) convergeant vers l et l' deux réels. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, et (w_n) définie par $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.
On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) + \beta \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \alpha l + \beta l'$.
Donc (w_n) est une suite convergente, donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$

e. $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$ (de période 1). Soit $a,b \in \mathbb{N}$, (u_n) une suite $a-$périodique et (v_n) une suite $b-$périodique. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+a} = u_n$ et $v_{n+b} = v_n$. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et (w_n) définie par $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$. Soit $c = \text{ppcm}(a,b)$, donc $c = ka = k'b$, avec $k,k' \in \mathbb{N}$
Donc $w_{n+c} = \alpha u_{n+ka} + \beta v_{n+k'b} = \alpha u_n + \beta v_n = w_n$, donc (w_n) est une suite $c-$périodique, donc $(w_n) \in F$.
Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$

f. $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$ $(u_{n+1} = u_n + 0)$. Soit (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + k$ et (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + k'$ deux suites de F. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et (w_n) définie par $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.

$w_{n+1} = \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} = \alpha(u_n + k) + \beta(v_n + k') = w_n + \alpha k + \beta k' = w_n + K$

Donc $(w_n) \in F$, donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$

g. $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$ $(0 = n^2 \times 0 + 0$). Soit (u_n) et v_n deux suites de F, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et (w_n) définie par $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.

$w_{n+2} = \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} = \alpha(n^2 u_{n+1} + u_n) + \beta(n^2 v_{n+1} + v_n)$

$w_{n+2} = n^2(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + \alpha u_n + \beta v_n = n^2 w_{n+1} + w_n$

Donc $(w_n) \in F$ donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$

Exercice 3 – ★

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$
2. Donner une partie A qui engendre F et une partie B qui engendre G.
3. Déterminer un vecteur non nul de $F \cap G$. Ce vecteur engendre-t-il $F \cap G$?

Correction

1. • $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $(0 + 0 + 0 = 0)$, soit $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (x', y', z') \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Soit $w = \alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') = (X, Y, Z)$. $w \in F \Leftrightarrow X + Y + Z = 0$
$X + Y + Z = \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z' = \alpha \underbrace{(x + y + z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \beta \underbrace{(x' + y' + z')}_{=0 \text{ car } v \in F} = 0$
Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$
• $0_{\mathbb{R}^3} \in G$ car si $a = b = 0$ alors $(a - b, a + b, a - 3b) = (0, 0, 0)$
soit $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, $u = (a - b, a + b, a - 3b) \in G$ et $v = (a' - b', a' + b', a' - 3b') \in G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Soit $w = \alpha u + \beta v = (\alpha(b - a) + \beta(b' - a'), \alpha(a + b) + \beta(a' + b'), \alpha(a - 3b) + \beta(a' - 3b'))$
$w = (X, Y, Z)$, il faut prouver qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $X = A - B$, $Y = A + B$ et $Z = A - 3B$
$X = \alpha(a - b) + \beta(a' - b') = (\alpha a + \beta a') - (\alpha b + \beta b') = A - B$
Dans ce cas $A + B = (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') = \alpha(a + b) + \beta(a' + b') = Y$
Et $A - 3B = (\alpha a + \beta a') - 3(\alpha b + \beta b') = \alpha(a - 3b) + \beta(a' - 3b') = Z$
Donc $w \in G$, donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$
2. • $u = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -(x + y) \Leftrightarrow u = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$, donc $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$
Donc $\boxed{A = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\} \text{ engendre } F}$
• $v \in G \Leftrightarrow v = (a - b, a + b, a - 3b) \Leftrightarrow v = a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3) \Leftrightarrow v \in \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1, -3))$, donc $G = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1, -3))$
Donc $\boxed{B = \{(1, 1, 1), (-1, 1, -3)\} \text{ engendre } G}$
3. Soit $u \in F \cap G \Leftrightarrow u = (x, y, -x - y) = (a - b, a + b, a - 3b)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = a - 3b = -x - y = -(a - b) - (a + b) = -2a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = a + b \\ z = -x - y \\ a = b \end{cases}$$
$\Leftrightarrow u = a(0, 2, -2) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((0, 2, -2))$.
Cela prouve que $\boxed{(0, 2, -2) \in F \cap G \text{ et que } (0, 2, -2) \text{ engendre } F \cap G.}$

Exercice 4 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E.
On rappelle que comparer F et G signifie déterminer si $F \subset G$, $G \subset F$ ou $F = G$.

1. Comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$
2. Comparer $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$

Correction

Montrons d'abord que si $x \in F$ sous espace vectoriel de E alors $x + y \in F \Leftrightarrow y \in F$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x \in F$ et $y \in F$, dans ce cas $x + y \in F$ par stabilité de F
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \in F$, $y \in E$ alors $x + y \in F \Rightarrow y = x + y - x \in F$.

En revanche si $x \notin F$ et $y \notin F$ il est possible que $x + y \in F$. Par exemple soit $F = \text{Vect}((1,0))$, $u = (1,1) \notin F$ et $v = (1,-1) \notin F$, mais $u + v = (2,0) \in F$

1. $\boxed{\subset}$ Soit $x \in F \cap (G + H) \Rightarrow x = x_G + x_H \in F$. Si $x \neq 0_E$ et $F \cap G = F \cap H = \{0_E\}$ il est possible que $x_G \notin F$ et $x_H \notin F$.
   Exemple avec $E = \mathbb{R}^2$ $F = \text{Vect}((1,0))$, $G = \text{Vect}((1,1))$ et $H = \text{Vect}((1,-1))$. $x = (1,0) \in F$, et $x = (1,1) + (1,-1) \in G + H$, donc $x \in F \cap (G + H)$ mais $x \notin (F \cap G) + (F \cap H)$ car $F \cap G = F \cap H = \{0_E\}$
   Conclusion $\boxed{F \cap (G + H) \not\subset (F \cap G) + (F \cap H)}$
   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H) \Rightarrow x = x_{FG} + x_{FH}$ avec $x_{FG} \in (F \cap G)$ et $x_{FH} \in (F \cap H)$
   Puisque $x_{FG} \in F$ et $x_{FH} \in F$, $x \in F$ et comme $x_{FG} \in G$ et $x_{FH} \in H$, $x \in G + H$
   Donc $x \in F \cap (G + H)$ et ainsi $\boxed{F \cap (G + H) \supset (F \cap G) + (F \cap H)}$
2. $\boxed{\subset}$ Soit $x \in F + (G \cap H) \Rightarrow x = x_F + x_{GH}$.
   Puisque $x_{GH} \in G \cap H$, on a $x_{GH} \in G$ et $x_{GH} \in H$ donc $x \in F + G$ et $x \in F + H$ c'est-à-dire $x \in (F + G) \cap (F + H)$
   Ainsi $\boxed{F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)}$
   $\boxed{\supset}$ Dans $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{Vect}((1,0))$, $G = \text{Vect}((1,1))$ et $H = \text{Vect}((1,-1))$.
   On a alors $G \cap H = \{0_E\}$ et ainsi $F + (G \cap H) = F$. Soit $u = (1,1) \in G$, donc $u \in F + G$, de plus $u = (2,0) - (1,-1) \in F + H$ donc $u \in (F + G) \cap (F + H)$ mais $u \notin F$ donc $u \notin F + (G \cap H)$
   Donc $\boxed{F + (G \cap H) \not\supset (F + G) \cap (F + H)}$

Exercice 5 – ★

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel } \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$$

Correction

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ et si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$, dans les deux cas $\boxed{F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel, soit $x \in F$ et $y \in G$. Ainsi $x + y \in F \cup G$, donc

- si $x + y \in F$, alors $y = \underbrace{x + y}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F} \in F$, ce qui prouve que $G \subset F$
- sinon $x + y \in G$, dans ce cas $x = \underbrace{x + y}_{\in G} - \underbrace{y}_{\in G} \in G$, ce qui prouve que $F \subset G$

En conclusion $\boxed{F \subset G \text{ ou } G \subset F}$

Exercice 6 – ★

Dans les cas suivants, montrer que F et G sont supplémentaires dans E

1. $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$
2. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$, $G = \{f \in E \mid f \text{ constante}\}$

Correction

1. Soit $u \in E$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) - \alpha(1, \dots, 1) + \underbrace{\alpha(1, \dots, 1)}_{\in G}$.

   Il faut $(x_1, \dots, x_n) - \alpha(1, \dots, 1) \in F \Leftrightarrow (x_1 - \alpha, \dots, x_n - \alpha) \in F$

   $\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \dfrac{S}{n}$

   Donc avec $\alpha = \dfrac{S}{n}$, $u = \underbrace{(x_1 - \alpha, \dots, x_n - \alpha)}_{\in F} + \underbrace{(\alpha, \dots, \alpha)}_{\in G}$

   Donc $\boxed{E = F + G}$

   En outre si $u \in F \cap G$ alors $u = \alpha(1, 1, \dots, 1)$ et $\alpha + \alpha + \dots + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ainsi $u = (0, 0 \dots, 0)$, donc $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$, et donc $\boxed{E = F \oplus G}$

2. Soit $h \in E$, $\int_0^1 h(t)dt = m \in \mathbb{R}$. On pose $f = h - g$, avec $g(t) = m$ alors :

   $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 h(t) - g(t)dt = \int_0^1 h(t)dt - m = 0$

   Ainsi $h = f + g \in F + G$ donc $\boxed{E = F + G}$

   De plus si $h \in F \cap G$ alors $h(t) = m$, de plus $\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 mdt = m = 0$, donc $h(t) = 0$, donc $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$, en conclusion $\boxed{E = F \oplus G}$

Exercice 7 – ★★

On rappelle que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer :

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

Correction

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des ensembles non vides (ils contiennent la fonction nulle), de plus ils sont stables par combinaison linéaire, ce sont donc des $\boxed{\text{sous-espaces vectoriels de } \mathcal{F}(\mathbb{R}).}$
- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, telle que $f = g + h$, avec g paire et h impaire. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$

  $$\begin{cases} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x) \end{cases}$$

  On en déduit $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

  Ces deux fonctions g et h sont $\boxed{\text{les seules qui peuvent convenir, elles sont uniques.}}$
- Réciproquement, pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, on a :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\in \mathcal{I}}$$

  Cela prouve que $\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}}$, et puisque la décomposition est unique, il vient $\boxed{\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R})}$

Exercice 8 – ★

Dans chaque cas déterminer un supplémentaire de F dans E.

1. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{Vect}\{(1,0,1),(1,1,0)\}$
2. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in E \mid x-y+z=0\}$

Correction

1. • On remarque d'abord que $F\neq E$ car par exemple le vecteur $(1,0,0)$ appartient à E mais pas à F. On pose alors $G=\text{Vect}((1,0,0))$, puisque $(1,0,0)\notin F$, on a $\boxed{F\cap G=\{0_E\}}$.

   • Regardons si tout vecteur u de E peut se décomposer sur $F+G$.

   Soit $u=(x,y,z)\in E$, $u=y(1,1,0)+z(1,0,1)-y(1,0,0)-z(1,0,0)+x(1,0,0)$

   $u=\underbrace{(x-y-z)(1,0,0)}_{\in G}+\underbrace{y(1,1,0)+z(1,0,1)}_{\in F}$

   Ce qui prouve que $\boxed{F+G=E}$, et ainsi $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires.}}$

2. • Soit $u\in F$, alors $u=(x,y,z)$ tel que $x-y+z=0$ donc $z=y-x$ donc $u=(x,y,y-x)=x(1,0,-1)+y(0,1,1)$, ce qui prouve que $F\subset\text{Vect}((1,0,-1),(0,1,1))$. Réciproquement $(1,0,-1)\in F$ et $(0,1,1)\in F$ donc $\text{Vect}((1,0,-1),(0,1,1))\subset F$ et ainsi $\boxed{F=\text{Vect}((1,0,-1),(0,1,1))}$. Le vecteur $(0,0,1)\notin F$, donc en posant $G=\text{Vect}((0,0,1))$, on a $F\cap G=\{0_E\}$.

   • Regardons si tout vecteur de E peut se décomposer sur $F+G$.

   Soit $u=(x,y,z)$, $u=x(1,0,-1)+y(0,1,1)-x(0,0,-1)-y(0,0,1)+z(0,0,1)$

   donc $u=\underbrace{x(1,0,-1)+y(0,1,1)}_{\in F}+\underbrace{(x-y+z)(0,0,1)}_{\in G}$

   Ce qui prouve $F+G=E$, et ainsi $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires.}}$

Applications linéaires

Exercice 9 – ★

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

a. $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,y-z)\end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & xy\end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u_n) & \longmapsto & (u_0,u_1,u_2)\end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ a_0+a_1X+a_2X^2 & \longmapsto & a_0+a_1+a_2\end{array}\right.$

Correction

Dans chaque cas on appelle f l'application considérée

a. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $u=(x,y,z), v=(x',y',z')\in E$, on a alors $\alpha u+\beta v=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')=(X,Y,Z)$ et

$$f(\alpha u+\beta v)=(X-Y,Y-Z)=(\alpha x+\beta x'-\alpha y-\beta y',\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z')$$

$$f(\alpha u+\beta v)=\alpha(x-y,y-z)+\beta(x'-y',y'-z')=\alpha f(u)+\beta f(v)$$

Donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$

b. Soit $u(1,0)$ et $v=(0,1)$, on a $f(u)=f(v)=0$, mais $f(u+v)=1\neq f(u)+f(v)$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas une application linéaire}}$

c. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $(u_n),(v_n)$ deux suites. Soit (w_n) définie par $w_n=\alpha u_n+\beta v_n$. On a alors :

$$f(\alpha u_n+\beta v_n)=f(w_n)=(w_0,w_1,w_2)=(\alpha u_0+\beta v_0,\alpha u_1+\beta v_1,\alpha u_2+\beta v_2)$$

$$f(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha(u_0,u_1,u_2)+\beta(v_0,v_1,v_2)=\alpha f(u)+\beta f(v)$$

Donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$

d. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $P=a_0+a_1X+a_2X^2$ et $Q=b_0+b_1X+b_2X^2$ deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $C=\alpha P+\beta Q=\alpha a_0+\beta b_0+(\alpha a_1+\beta b_1)X+(\alpha a_2+\beta b_2)X^2$. On a alors

$$f(\alpha P+\beta Q)=F(C)=\alpha a_0+\beta b_0+(\alpha a_1+\beta b_1)+(\alpha a_2+\beta b_2)$$

$$f(\alpha P+\beta Q)=\alpha(a_0+a_1+a_2)+\beta(b_0+b_1+b_2)=\alpha f(P)+\beta f(Q)$$

Donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$

Exercice 10 – ★

Dans chaque cas déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x-z) \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcl} \{\text{Suites convergentes}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n) & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ a_0 + a_1X + a_2X^2 & \longmapsto & (a_0+a_1)(1+X) \end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f+f' \end{array}\right.$

Correction

Dans chaque cas on appelle f l'application considérée.

a. • $u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow (x+y, x-z) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x \\ z=x \end{array}\right. \Leftrightarrow u = x(1,-1,1) \Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}((1,-1,1))$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,1))}$

• $x \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow u = (x+y, x-z) = x(1,1) + y(1,0) - z(0,1)$

On peut dire que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1),(1,0),(0,1))$. Mais on peut aussi remarquer que pour tout $v = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $v = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$, donc $v \in \mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) \subset \mathrm{Im}(f)$.

$\boxed{\text{En conclusion } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$

b. • $(u_n) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{\text{suites qui tendent vers } 0\}}$

• Soit $x \in \mathbb{R}$, la suite (u_n) constante définie par $u_n = x$ est convergente de limite x, donc $f(u_n) = x$, donc $x \in \mathrm{Im}(f)$, et ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}}$

c. • $P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow a_0 + a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_0 \Leftrightarrow P = a_0 - a_0X + a_2X^2 = a_0(1-X) + a_2X^2$ $\Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(1-X, X^2)$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1-X, X^2)}$

• $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = (a_0+a_1)(1+X) \in \mathrm{Vect}(1+X)$, donc $\mathrm{Im}(f) \subset (1+X)$. Réciproquement, $\forall Q \in \mathrm{Vect}(1+X)$, $Q = \alpha(1+X)$, en choisissant $P = \alpha$, on a $f(P) = Q$, donc $Q \in \mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Vect}(1+X) \subset \mathrm{Im}(f)$. $\boxed{\text{Conclusion, } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1+X))}$

d. • $g \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow g + g' = 0 \Leftrightarrow g : t \mapsto C\exp(-t), C \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{g : t \mapsto C\exp(-t),\ C \in \mathbb{R}\}}$

• Soit $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, h est dans l'image de l'application f si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f(g) = h \Leftrightarrow g + g' = h$. Le théorème de Cauchy assure alors l'existence d'une solution, ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$

Exercice 11 – ★★

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

1. Démontrer que tout vecteur de E est combinaison linéaire de e_1 et e_2
2. Soit f un endomorphisme de E, démontrer qu'il existe quatre réels a,b,c,d tels que $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$
3. Réciproquement vérifier qu'une telle application est linéaire.
4. Généraliser au cas où f est une application de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Correction

1. Soit $u(x,y) \in E$, alors $u = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2$, donc $\boxed{E \subset \mathrm{Vect}(e_1,e_2)}$
2. $f(u) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2)$.
   $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont des constantes de $\mathbb{R}^2$, donc il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $\boxed{f(u) = x(a,c) + y(b,d) = (ax+by, cx+dy)}$
3. On calcule $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y')$
$$\begin{aligned} &= (a(\alpha x + \beta x') + b(\alpha y + \beta y'), c(\alpha x + \beta x') + d(\alpha y + \beta y')) \\ &= \alpha(ax+by, cx+dy) + \beta(ax'+by', cx'+dy') \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$
4. Dans $\mathbb{R}^p$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_ie_i$ avec $e_i = (0,0,\dots,1,0,\dots,0)$

   On a donc $f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_je_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_jf(e_j)$

   On peut poser $f(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$

   Ainsi $f(x) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_ja_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)e_i$

   On verra plus tard que ce résultat est la base de la représentation des applications linéaires par des matrices.

Exercice 12 – ★★

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$. On note $E_i = \text{Vect}\{(e_i)\}$

1. Démontrer que tout vecteur u de E se décompose de façon unique sur E_1, E_2 et E_3
2. Démontrer qu'il existe une application linéaire f de E dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(e_1) = (0,1) \qquad f(e_2) = (1,0) \qquad f(e_3) = (1,1)$$

3. Démontrer qu'une telle application linéaire est unique.
4. Calculer $f(x,y,z)$
5. Déterminer le noyau et l'image de f

Correction

1. Soit $u = (x,y,z) = z(1,1,1) - z(1,1,0) + y(1,1,0) - y(1,0,0) + x(1,0,0)$
   $= (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$
   Donc la décomposition existe et est unique.
2. On doit avoir $f(u) = f((x-y)e_1 + (y-z)e_2 + z(e_3))$
   $= (x-y)f(e_1) + (y-z)f(e_2) + zf(e_3) = (x-y)(0,1) + (y-z)(1,0) + z(1,1)$
   Soit $f : u \mapsto (x-y)(0,1) + (y-z)(1,0) + z(1,1)$
   On peut vérifier qu'une telle application est linéaire, de plus, on a :
   $f(e_1) = (0,1)$, $f(e_2) = (1,0)$, $f(e_3) = (1,1)$
   Donc cette application convient.
3. Cette application est bien unique car si l'on impose $f(e_i) = g(e_i)$ alors
   $(f-g)(u) = (x-y)(f-g)(e_1) + (y-z)(f-g)(e_2) + z(f-g)(e_3) = 0$
4. On a $f : u \mapsto (x-y)(0,1) + (y-z)(1,0) + z(1,1) = (y, x-y+z)$
5. $u \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x+z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -x \end{array} \right. \Leftrightarrow u = (x,0,-x) = x(1,0,-1)$
   Donc $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,0,-1))}$
   Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $v = v_1(1,0) + v_2(0,1) = v_1 f(e_2) + v_2 f(e_1)$
   $= f(v_1 e_2 + v_2 e_1) \in \text{Im}(f)$. Donc $\mathbb{R}^2 \subset \text{Im}(f)$, et on a $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ par définition de f, en conclusion, $\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$

Exercice 13 – ★

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$
2. $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$
3. $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$

Correction

1. Soit $z \in \text{Im}(g \circ f) \Rightarrow \exists x \in E, z = g(f(x)) = g(y) \in \text{Im}(g)$
2. Soit $x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0_F \Rightarrow g(f(x)) = g(0_F) = 0_G \Rightarrow x \in \text{Ker}(g \circ f)$
3. Soit $x \in \text{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0_G \Leftrightarrow f(x) \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\text{Ker}(g))$

Exercice 14 – ★

Soit f et g deux endomorphismes de E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$$

Correction

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in E, y = f(x) \Rightarrow g(y) = g(f(x)) = 0_E \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(g)$
$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in E,\ f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(g) \Rightarrow g(f(x)) = 0_E \Rightarrow g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Autre méthode

$g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow g \circ f(E) = \{0_E\} \Leftrightarrow g(\mathrm{Im}(f)) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$

Exercice 15 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $u^{-1}(u(F)) = F + \mathrm{Ker}(u)$
2. Montrer que $u(u^{-1}(F)) = F \cap \mathrm{Im}(u)$
3. Montrer $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F)) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u) \subset F \subset \mathrm{Im}(u)$

Correction

1. $\boxed{\subset}$ $u^{-1}(u(F)) = \{x \in E,\ u(x) \in u(F)\}$
   Soit $x \in E$ tel que $u(x) = y \in u(F)$ donc il existe $x' \in F$ tel que $y = u(x')$ donc $u(x) = u(x') \Rightarrow u(x - x') = 0_E \Rightarrow x_0 = x - x' \in \mathrm{Ker}(u) \Rightarrow x = x' + x_0 \in F + \mathrm{Ker}(u)$
   Donc $\boxed{u^{-1}(u(F)) \subset F + \mathrm{Ker}(u)}$
   $\boxed{\supset}$ Soit $x = x_F + x_0$, avec $x_F \in F$ et $x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $u(x) = u(x_F) \in u(F)$
   Donc $\boxed{u^{-1}(u(F)) \supset F + \mathrm{Ker}(u)}$
2. $\boxed{\subset}$ $u(u^{-1}(F)) = \{y \in E \mid \exists x \in u^{-1}(F), u(x) = y\}$
   $= \{y \in E \mid \exists x \in E, u(x) = y \text{ et } u(x) \in F\}$
   Ainsi si $y \in u(u^{-1}(F))$ $y \in \mathrm{Im}(u)$ et $y = u(x) \in F$ donc $y \in F$, donc $y \in \mathrm{Im}(u) + F$
   Donc $\boxed{u(u^{-1}(F)) \subset F \cap \mathrm{Im}(u)}$
   $\boxed{\supset}$ Si $y \in F \cap \mathrm{Im}(u)$ alors $\exists x \in E,\ u(x) = y \in F$ donc $x \in u^{-1}(F)$ donc $y \in u(u^{-1}(F))$
   Donc $\boxed{u(u^{-1}(F)) \supset F \cap \mathrm{Im}(u)}$
3. $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F)) \Leftrightarrow F + \mathrm{Ker}(u) = F \cap \mathrm{Im}(u)$
   Or $F \cap \mathrm{Im}(u) \subset F \subset F + \mathrm{Ker}(u)$
   Il n'y a égalité que si $F \cap \mathrm{Im}(u) = F = F + \mathrm{Ker}(u)$
   On a donc $F \cap \mathrm{Im}(u) = F$ ce qui implique $\boxed{F \subset \mathrm{Im}(u)}$
   Et $F = F + \mathrm{Ker}(u)$ implique $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \subset F}$

Exercice 16 – ★★

On rappelle que $f^2 = f \circ f$

Soit f un endomorphisme de E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Correction

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ donc $\exists x \in E,\ y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $y = f(x) = 0_E$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On a dans tous les cas si $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ (résultat particulier de l'exercice 13), donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$. Il reste à montrer $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ donc $f^2(x) = 0_E$ donc $f(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ et on a aussi que $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) = 0_E$ et par suite $x \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qui implique $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)}$

Exercice 17 – ★★

Soit f et g deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel telles que $\forall x \in E, f(x)g(x) = 0$.

Montrer que $f = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ ou $g = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$.

Correction

On a $\forall x \in E,\ f(x)g(x) = 0$ alors $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cup \mathrm{Ker}(g)$. Ainsi $E \subset \mathrm{Ker}(f) \cup \mathrm{Ker}(g)$ et donc $E = \mathrm{Ker}(f) \cup \mathrm{Ker}(g)$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) \cup \mathrm{Ker}(g)$ est un espace vectoriel, or d'après le résultat de l'exercice 5 cela implique que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ ou $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$

Si $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ alors $\mathrm{Ker}(f) \cup \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(g) = E$ donc $\boxed{g = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}}$

De même si $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$ alors $\mathrm{Ker}(f) \cup \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) = E$ donc $\boxed{f = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}}$

Projecteurs et symétries

Exercice 18 – ★

Soit $E=\mathbb{R}^2$ et $p:\left\{\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (5x-2y,10x-4y)\end{array}\right.$

Montrer que p est une projection sur F parallèlement à G, deux sous-espaces vectoriels à déterminer.

Correction

Soit $u=(x,y)$, $p(u)=(5x-2y,10x-4y)=v=(X,Y)$
$p(p(u))=p(v)=p(X,Y)=(5X-2Y,10X-4Y)$
$=(5(5x-2y)-2(10x-4y),10(5x-2y)-4(10x-4y))=(5x-2y,10x-4y)=v=p(u)$
Donc $\boxed{p\circ p=p \text{ donc } p \text{ est un projecteur}}$
$F=\mathrm{Im}(p)$, $u\in F\Leftrightarrow p(u)=u\Leftrightarrow(5x-2y,10x-4y)=(x,y)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 5x-2y & =x \\ 10x-4y & =y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 5x-2y & =x \\ y & =2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 5x-4x & =x \\ y & =2x\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow y=2x\Leftrightarrow u=(x,2x)\Leftrightarrow u\in\mathrm{Vect}((1,2))$
Donc $\boxed{F=\mathrm{Vect}((1,2))}$
$G=\mathrm{Ker}(p)$, $u\in G\Leftrightarrow p(u)=0\Leftrightarrow(5x-2y,10x-4y)=(0,0)$
$\Leftarrow 2y=5x\Leftrightarrow u=(2a,5a)\Leftrightarrow u\in\mathrm{Vect}((2,5))$
Donc $\boxed{G=\mathrm{Vect}((2,5))}$

Exercice 19 – ★

Soit $E=\mathbb{R}^2$, $F=\{(x,y)\in E\mid 2x-3y=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}\{(2,1)\}$.
Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G

Correction

$u\in F\Leftrightarrow 2x-3y=0\Leftrightarrow u=(3a,2a)\Leftrightarrow u\in\mathrm{Vect}(3,2)$
Donc $F=\mathrm{Vect}((3,2))$
$u=u_F+u_G=a(3,2)+b(2,1)=(3a+2b,2a+b)=(x,y)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 3a+2b & =x \\ 2a+b & =y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} -a & =x-2y \\ 2(2y-x)+b & =y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} a & =2y-x \\ b & =2x-3y\end{array}\right.$$

On sait que $p(u)=u_F$ donc $p(x,y)=a(3,2)=(-x+2y)(3,2)=(-3x+6y,-2x+4y)$
Donc $\boxed{p(x,y)=(-3x+6y,-2x+4y)}$

Exercice 20 – ★

Soit $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{Vect}\{(1,1,0),(1,1,1)\}$, $G=\text{Vect}\{(0,1,1)\}$

Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G

Correction

$u=(x,y,z)=u_F+u_G=a(1,1,0)+b(1,1,1)+c(0,1,1)=(a+b,a+b+c,b+c)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ a+b+c &= y \\ b+c &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b &= x \\ c &= y-x \\ a &= y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= x-y+z \\ c &= y-x \\ a &= y-z \end{cases}$$

$p(u)=u_F=a(1,1,0)+b(1,1,1)=(y-z)(1,1,0)+(x-y+z)(1,1,1)=(x,x,x-y+z)$

Donc $\boxed{p(x,y,z)=(x,x,x-y+z)}$

Exercice 21 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p un projecteur de E

1. Montrer que Id_E-p est un projecteur
2. Déterminer l'image et le noyau de Id_E-p en fonction de ceux de p

Correction

1. Soit $q=Id_E-p$, on a alors $q\circ q=(Id_E-p)\circ(Id_E-p)=Id_E-2p+p\circ p=Id_E-2p+p$
   Donc $q\circ q=Id_E-p=q$ donc q est un projecteur de E
2. $x\in\text{Ker}(q)\Leftrightarrow q(x)=0\Leftrightarrow(Id_E-p)(x)=0\Leftrightarrow x-p(x)=0\Leftrightarrow x=p(x)\Leftrightarrow x\in\text{Im}(p)$
   $\boxed{\text{Donc Ker}(q)=\text{Im}(p)}$
   $x\in\text{Im}(q)\Leftrightarrow q(x)=x\Leftrightarrow(Id_E-p)(x)=x\Leftrightarrow x-p(x)=x\Leftrightarrow p(x)=0\Leftrightarrow x\in\text{Ker}(p)$
   $\boxed{\text{Donc Im}(q)=\text{Ker}(p)}$

Exercice 22 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

Soit p un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par u si et seulement si u commute avec p, c'est-à-dire $u \circ p = p \circ u$

Correction

Soit $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$, puisque p est un projecteur de E, on a $= F \oplus G$

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont stables par u alors $u \circ p = p \circ u$
Soit $x \in E$, on a alors $x = x_F + x_G$ et $p(x) = x_F$.
On pose $u(x) = u(x_F + x_G) = u(x_F) + u(x_G) = y_F + y_G = y$, avec $u(x_F) = y_F$ et $u(x_G) = y_G$ car F et G stables par u.
On a alors $p(y) = y_F$
$u \circ p(x) = u(p(x)) = u(x_F) = y_F = p(y) = p(u(x)) = p \circ u(x)$ $\boxed{\text{donc } u \circ p = p \circ u}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que si $u \circ p = p \circ u$ alors F et G sont stables par u
On note $y = p(x)$
Soit $x \in F$ donc $x = x_F \Rightarrow x = p(x) \Rightarrow u(x) = u(p(x)) = p(u(x)) = p(y) \in F$
$\boxed{\text{Donc } F \text{ est stable par } u}$
Soit $x \in G$ donc $p(x) = 0 \Rightarrow u(p(x)) = u(0) \Leftrightarrow p(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) \in G$
$\boxed{\text{Donc } G \text{ est stable par } u}$

Exercice 23 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et p,q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$
2. Montrer que dans ce cas

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \text{ et } \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$$

Correction

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que si $p + q$ est un projecteur alors $pq = qp = 0$
Soit p et q deux projecteurs tels que $p + q$ soit un projecteur. On a alors
$(p+q)(p+q) = p + q$, et $(p+q)(p+q) = p^2 + qp + pq + q^2 = p + qp + pq + q$
On en déduit $pq + qp = 0 \Rightarrow pq = -qp$,
De plus $pq = ppq = p(-qp) = -pqp = (-pq)p = (qp)p = qp$
$\boxed{\text{Ainsi } pq = qp = 0}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $pq = qp = 0$ alors $(p+q)(p+q) = p + qp + pq + q = p + q$ $\boxed{\text{donc } p + q \text{ est un projecteur}}$

2. Soit $x \in \mathrm{Im}(p+q) \Rightarrow x = (p+q)(x) \Rightarrow x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$
$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)}$
Soit $z \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, donc $\exists x, y \in E,\ z = p(x) + q(y)$
Donc $(p+q)(z) = p(p(x)) + p(q(y)) + q(p(x)) + q(q(y)) = p(x) + q(y) = z \Rightarrow z \in \mathrm{Im}(p+q)$
$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)}$ et ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)}$
En outre si $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ alors $x = p(y) = q(z)$ donc
$p(x) = p(q(z)) = 0 = p(p(y)) = p(y) = x$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}}$
En conclusion $\boxed{\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q) \Rightarrow (p+q)(x) = 0 \Rightarrow$
$\underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} = \underbrace{-q(x)}_{\in \mathrm{Im}(q)} \Rightarrow p(x) \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \Rightarrow p(x) = 0 = q(x) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$
$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Ker}(p+q) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$
Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, alors $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$
$\boxed{\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p+q)}$ et ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$

Exercice 24 – ★

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $s : (x,y) \longmapsto (2x-y, 3x-2y)$.

Montrer que s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G, deux sous-espaces vectoriels à déterminer.

Correction

$s(u) = s(x,y) = (2x-y, 3x-2y) = v = (X,Y)$
$s \circ s(u) = s(v) = s(X,Y) = (2X-Y, 3X-2Y)$
$= (2(2x-y)-(3x-2y), 3(2x-y)-2(3x-2y)) = (x,y) = u$, donc $s \circ s = Id$
$\boxed{\text{donc } s \text{ est une symétrie}}$

Soit $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u \Leftrightarrow (2x-y, 3x-2y) = (x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y &= x \\ 3x-2y &= y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ y &= x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u = (x,x) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1,1))$
$\boxed{\text{Donc } F = \text{Vect}((1,1))}$

Soit $u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u \Leftrightarrow (2x-y, 3x-2y) = (-x,-y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y &= -x \\ 3x-2y &= -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 3x \\ y &= 3x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u = (x,3x) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1,3))$
$\boxed{\text{Donc } G = \text{Vect}((1,3))}$

Exercice 25 – ★

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in E \mid x+y=0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,1)\}$. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à F et parallèlement à G

Correction

$u = (x,y) \in F \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x \Leftrightarrow u=(x,-x) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1,-1))$
Soit $u = (x,y) = u_F + u_G = a(1,-1) + b(1,1) = (a+b, b-a)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= a+b \\ y &= b-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= 2b \\ x-y &= 2a \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u = \dfrac{x-y}{2}(1,-1) + \dfrac{x+y}{2}(1,1) = u_F + u_G$
On sait que $s(u) = u_F - u_G$ $\boxed{\text{donc } s(x,y) = (-y,-x)}$

Exercice 26 – ★★

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $s : P(X) \longmapsto P(1-X)$. Montrer que s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G, deux sous-espaces vectoriels à déterminer.

Correction

$s(P) = P(1-X) = Q(X)$
donc $s(s(P)) = s(Q) = Q(1-X) = Q(Y) = P(1-Y) = P(1-(1-X)) = P(X) = P$
Donc $s \circ s = Id$, $\boxed{\text{donc } s \text{ est une symétrie}}$

$P \in F \Leftrightarrow s(P) = P \Leftrightarrow P(1-X) = P(X)$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-X)^2 = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a_0 + a_1 + a_2 & = a_0 \\ -a_1 - 2a_2 & = a_1 \\ a_2 & = a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a_1 + a_2 & = 0 \\ -2a_2 & = 2a_1 \\ a_2 & = a_2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow a_1 = -a_2 \Leftrightarrow P(X) = a_0 + a_1X - a_1X^2 = a_0 + a_1(X - X^2) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}(1, X - X^2)$
$\boxed{\text{Donc } F = \text{Vect}(1, X - X^2)}$

$P \in G \Leftrightarrow S(P) = -P \Leftrightarrow P(1-X) = -P(X)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a_0 + a_1 + a_2 & = -a_0 \\ -a_1 - 2a_2 & = -a_1 \\ a_2 & = -a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a_1 + a_2 & = -2a_0 \\ -2a_2 & = 0 \\ a_2 & = -a_2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow P = a_0 - 2a_0X = a_0(1-2X) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}(1-2X)$
$\boxed{\text{Donc } G = \text{Vect}(1-2X)}$