Vers l'université

$\ast\ \ast\ \ast$

Ensembles et applications

Exercice 1 – ★ *Quantificateurs*

Écrire à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes ainsi que leurs négations :

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers
5. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
6. Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe

Correction

1. $\nexists\, x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x \geq y$, négation : $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x \geq y$
   Ou $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, y > x$, négation : $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \ni \mathbb{Z}, x \geq y$
2. $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \exists z \in \mathbb{Z}, x = yz$, négation : $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{Z}, x \neq yz$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = \sqrt{x}$, négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq \sqrt{x}$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{p}{q}$, négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}, x = \frac{p}{q}$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq x^2$, négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x < x^2$
6. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xy \geq 0$ ou $xz \geq 0$ ou $yz \geq 0$, négation : $\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xy < 0$ et $xz < 0$ et $yz < 0$

Exercice 2 – ★ *Formules de distributivité*

Soit A, B, C trois sous-ensembles de E.

1. Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Démontrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Correction

1. • Montrons $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$:
   Soit $x \in A \cap (B \cup C)$ donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Il y a deux cas :
   -Si $x \in B$ alors $x \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   -Si $x \in C$ alors $x \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   Dans tous les cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, donc $\boxed{A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
   • Montrons que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$:
   Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, il y a deux cas :
   - Si $x \in A \cap B$ alors $x \in A \cap (B \cup C)$
   - Si $x \in A \cap C$ alors $x \in A \cap (B \cup C)$
   Dans les deux cas $x \in A \cap (B \cup C)$ donc $\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)}$
2. • Montrons que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \subset A \cup B$ et $A \subset A \cup C$ donc $A \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   De même $B \cap C \subset B \subset A \cup B$ et $B \cap C \subset C \subset A \cup C$
   Donc $\boxed{B \cap C \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
   • Montrons que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$
   Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Il y a deux cas :
   - Si $x \in A$ alors on a aussi $x \in A \cup (B \cap C)$
   - Si $x \notin A$ alors il faut $x \in B$ et $x \in C$ et donc $x \in B \cap C$
   Ainsi $\boxed{(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)}$

Exercice 3 – ★ *Injectivité, surjectivité*

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
3. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
5. Trouver deux applications f, g non bijectives telles que $g \circ f$ soit bijective.

Correction

1. Soit $x, x' \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, puisque g est injective, on a donc $f(x) = f(x')$ et puisque f est injective, $x = x'$, donc $g \circ f$ est injective.
2. Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ donc $g(f(x)) = g(f(x'))$ et puisque $g \circ f$ est injective, $x = x'$, donc f est injective.
3. Soit $z \in G$, comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, et ainsi $g(f(x)) = z$, c'est-à-dire que $g \circ f$ est surjective.
4. Soit $z \in G$, comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. Soit $y = f(x) \in F$, on a donc $g(y) = z$, donc g est surjective dans G.
5. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f : n \mapsto 2n$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : n \mapsto \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. f n'est par surjective et g n'est pas injective, et pourtant $\forall n \in \mathbb{N}, g \circ f(n) = \lfloor \frac{2n}{2} \rfloor = n$, qui est bijective.

Exercice 4 – ★ *Image directe, image réciproque*

1. Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f = \exp$, $I = [0, 1[$
   (b) $f = \ln$, $I =]0, 1]$
   (c) $f : x \mapsto x^2$, $I =]-1, 2]$
   (d) $f = \sin$, $I = [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$
2. Déterminer $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f = \exp$, $I = [0, 1[$
   (b) $f = \ln$, $I =]0, +\infty[$
   (c) $f : x \mapsto x^2$, $I =]-1, 2]$
   (d) $f = \sin$, $I = [0, 1[$

Correction

1. (a) $f(I) = [1, e[$
   (b) $f(I) =]-\infty, 0]$
   (c) $f(I) = [0, 4]$
   (d) $f(I) = [\frac{1}{2}, 1]$
2. (a) $f^{-1}(I) =]-\infty, 0[$
   (b) $f^{-1}(I) =]1, +\infty[$
   (c) $f^{-1}(I) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
   (d) $f^{-1}(I) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi[$

Exercice 5 – ★ *Image réciproque*

Soit E, F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$. Soit B, B' deux parties de F

1. Démontrer que $B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
2. En déduire que : $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
3. Démontrer que : $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
4. Démontrer que : $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

Correction

1. Soit $x \in f^{-1}(B)$ donc $f(x) \in B \subset B'$ donc $f(x) \in B'$ donc $x \in f^{-1}(B')$
2. Soit $x \in f^{-1}(B \cap B')$, donc $f(x) \in (B \cap B')$ donc $f(x) \in B$ et $f(x) \in B'$ donc $x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B')$ donc $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$, ainsi $\boxed{f^{-1}(B \cap B') \subset f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')}$

   Soit $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ donc $f(x) \in B$ et $f(x) \in B'$ donc $f(x) \in B \cap B'$ donc $x \in f^{-1}(B \cap B')$ donc $\boxed{f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cap B')}$
3. Soit $x \in f^{-1}(B \cup B')$, donc $f(x) \in (B \cup B')$ donc $f(x) \in B$ ou $f(x) \in B'$ donc $x \in f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B')$ donc $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$, ainsi $\boxed{f^{-1}(B \cup B') \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')}$

   Soit $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ donc $f(x) \in B$ ou $f(x) \in B'$ donc $f(x) \in B \cup B'$ donc $x \in f^{-1}(B \cup B')$ donc $\boxed{f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cup B')}$
4. $x \in f^{-1}(\overline{B}) \Longleftrightarrow f(x) \in \overline{B} \Longleftrightarrow f(x) \notin B \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Longleftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(B)}$

Nombres réels

Exercice 6 – ★ *Borne supérieure*

Dans chaque cas, déterminer si les ensembles suivants sont : majoré, minoré, borné. Puis dire s'ils admettent des bornes supérieure et inférieure. Ces bornes sont-elles des maximum ou minimum ?

a. $\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b. $\left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ c. $\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ (n, p) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

Correction

On appelle ces ensembles, A, B, C

a. A est minorée, majorée, bornée. $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, $\max A = 1$, il n'y a pas de minimum ($0 \notin A$)

b. B est minorée, majorée, bornée. $\inf B = -1$, $\sup B = 1$. Il n'y a pas de maximum ni de minimum.

c. C est minorée, majorée, bornée. $\inf C = -1$, $\sup C = 1$. Il n'y a pas de maximum ni de minimum.

Exercice 7 – ★ *Borne supérieure*

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que : $(\forall \varepsilon > 0 \quad a \leq b + \varepsilon) \Longrightarrow a \leq b$
2. Soit A, B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, montrer que :
   (a) $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$
   (b) $A \cup B$ est majorée. Déterminer $\sup(A \cup B)$
   (c) $A \cap B$ est majorée. Dans le cas où elle admet une borne supérieure, donner un majorant de $\sup(A \cap B)$.

Correction

1. On va montrer la contraposée : $a > b \Longrightarrow (\exists \varepsilon > 0, a > b + \varepsilon)$. Soit $a > b$, et $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Alors $b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a$.
2. (a) Soit $A \subset B$ et $M_A = \sup A$, $M_B = \sup B$. $\forall x \in A, x \in B$. On va montrer la contraposée. On suppose $M_A > M_B$. Comme $M_A = \sup A$, $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in A, M > M_A - \varepsilon$. Donc il existe $M \in A$ tel que que $M_A > M > M_B$ (on a pris $\varepsilon = M_A - M_B$). $M \in A$ donc $M \in B$ avec $M > M_B$ donc M_B n'est pas un majorant de B. Or M_B est un majorant de B par hypothèse.
   (b) Soit $x \in A \cup B$, alors $x \leq \max(\sup A, \sup B) = M$, donc $A \cup B$ est majorée, et $M_{AB} = \sup(A \cup B) \leq M$.
   $A \subset A \cup B$ donc $M_{AB} \geq M_A$, de même $M_{AB} \geq M_B$ donc $M_{AB} = \sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B) = M$. Donc $M_{AB} = M$
   (c) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $A \cap B$ est majorée par $\min(\sup A, \sup B)$. Si elle est non vide, elle admet une borne supérieure. Dans ce cas $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$

Exercice 8 – ★ *Borne supérieure*

Soit A, B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose : $A+B = \{a+b, \ (a, b) \in A \times B\}$

1. Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure.
2. Montrer que sa borne supérieure est $\sup A + \sup B$

Correction

1. Soit $M = \sup A + \sup B = M_A + M_B$. Soit $x \in A + B$ donc $x = x_A + x_B \leq M_A + M_B = M$ donc $\forall x \in A + B, x \leq M$ donc M est un majorant de $A \cup B$. Donc $A + B$ admet une borne supérieure.
2. • $\forall x \in A + B, x \leq M$ donc $\boxed{\sup(A + B) \leq M}$ (le sup est le plus petit des majorants, il est donc plus petit que M qui est un majorant)
   • Soit $x_0 < M$ et $\varepsilon_0 = M - x_0 > 0$. On va montrer que x_0 n'est pas un majorant de $A + B$. Puisque $M_A = \sup A$, alors $\forall \varepsilon_A > 0, \exists x_A \in A, x_A > M_A - \varepsilon_A$. Soit $\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_0}{3}$ et $x_A \in A$ avec $x_A > M_A - \varepsilon_A$. De même il existe $x_B > M_B - \varepsilon_A$ avec $x_B \in B$. Ainsi $x_A + x_B > M_A + M_B - \frac{2\varepsilon_0}{3} > M - \varepsilon_0 = x_0$. Donc x_0 n'est pas un majorant de $A + B$.
   Donc $\forall x_0 < M$, $\sup(A + B) > x_0$ et donc $\boxed{\sup(A + B) \geq M}$
   Ainsi $\boxed{\sup(A + B) = M}$

Exercice 9 – ★ *Inégalité triangulaire*

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, montrer $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$.

Correction

$|x+y|^2 = x^2+y^2+2xy \leq |x|^2+|y|^2+2|x||y| = (|x|+|y|)^2$ et $|x+y| \geq 0$ et $|x|+|y| \geq 0$

$\big||x|-|y|\big|^2 = |x|^2+|y|^2-2|x||y| = x^2+y^2-2|xy| \leq x^2+y^2-2xy = (x+y)^2 = |x+y|^2$ et $\big||x|-|y|\big| \geq 0$

Exercice 10 – ★ *Somme géométrique*

Soit $x \neq 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Correction

$x \neq 1, \quad (1+x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Exercice 11 – ★ *Somme des entiers et compagnie*

1. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$, avec $\forall n \leq 0, S_n = 0$. Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k)$
2. En déduire que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
3. Soit $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. En écrivant $(n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - k^3$, montrer que
$$(n+1)^3 = 3T_n + 3S_n + n + 1$$
4. En déduire T_n
5. Soit $W_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. En écrivant $S_n^2 = \sum_{k=0}^{n} S_k^2 - S_{k-1}^2$, montrer que $W_n = S_n^2$.

Correction

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = S_n = \sum_{i=0}^{n} i$, on pose $i = n-k$, dans ce cas $k = n-i$, donc $S_n = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{k=n}^{0} n-k = S_n = \sum_{k=0}^{n} n-k$
2. $2S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n-k = \sum_{k=0}^{n} k+n-k = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1)$
3. $(n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 + 3k + 1$
$= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3T_n + 3S_n + n + 1$
4. $T_n = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{3} = \frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$
$= \frac{(n+1)n(2n+4-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $S_n^2 = \sum_{k=0}^{n} S_k^2 - S_{k-1}^2 = \sum_{k=0}^{n}(S_k - S_{k-1})(S_k + S_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{k(k-1+k+1)}{2}$
$= \sum_{k=0}^{n} k^3 = W_n$

Exercice 12 – ★ *Somme télescopique*

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
3. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Correction

1. $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$
2. Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
3. $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1-k+k}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

Exercice 13 – ★ *Produit télescopique*

1. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{k^2}$

Correction

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{k^2} = 0$

   $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}$

   $\displaystyle = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$

Exercice 14 – ★★ *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels.

Soit $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$

1. En écrivant $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$
2. On suppose qu'au moins un $a_i \neq 0$, montrer qu'il y a égalité si et seulement il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad b_i = \lambda a_i$
3. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sqrt{n}$

Correction

1. $\displaystyle f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = Ax^2 + Bx + C \geq 0$ donc $\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$

   Ainsi $\displaystyle 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ d'où : $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$
2. S'il y a égalité alors $B^2 = 4AC$, donc $\Delta = 0$ donc la fonction polynomiale admet une racine double notée α. On a alors $f(\alpha) = 0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i \alpha + b_i)^2$ et donc $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i \alpha + b_i = 0$ donc $b_i = \lambda a_i$ avec $\lambda = -\alpha$

   Si $\forall i \in [\![1, n]\!], b_i = \lambda a_i$ alors $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i^2\right| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

   et $\displaystyle\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 a_i^2} = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

Suites et fonctions

Fonctions usuelles

Exercice 15 – ★★ *Fonction convexe - Inégalité de Jensen*

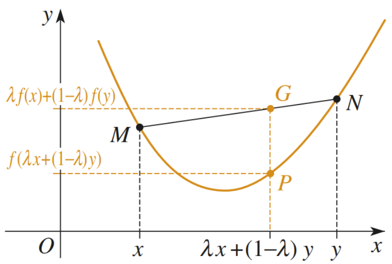
L'exercice a pour objectif de rappeler la définition d'une fonction convexe, et quelques propriétés.

DÉFINITION : On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Si $M, N \in \mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous du segment $[MN]$:



PROPRIÉTÉ (INÉGALITÉ DE JENSEN) : Soit f une fonction convexe sur I, $x_1, \ldots, x_n \in I$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \Longrightarrow \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

1.a. Démontrer par récurrence sur n l'inégalité de Jensen.

1.b. En déduire que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positifs non tous nuls alors :

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

PROPRIÉTÉ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, la fonction : $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

Démonstration

2.a. Soit $x_0, x_1, x_2 \in I$, tels que $x_0 < x_1 < x_2$. On suppose f convexe sur I.

Montrer que $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$, ce qui montre la croissance de l'application.

2.b. Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x < y$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ avec $\lambda \in]0,1[$. On suppose l'application $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ croissante. Montrer que $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, c'est-à-dire que f est convexe.

PROPRIÉTÉ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

Démonstration

3.a. Soit f une fonction dérivable et convexe sur I. Montrer que f' est croissante.

3.b. On suppose que f est dérivable et f' croissante sur I.

Soit $a < b \in I$, et $D : y = mx + p$ la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. En étudiant la fonction $g : x \longmapsto f(x) - (mx + p)$, montrer que f est convexe.

PROPRIÉTÉ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.

PROPRIÉTÉ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

Démonstration

4.a. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, convexe et dérivable sur I. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $x_0 \in I$, équation du type $y = T_{x_0}(x)$.

4.b. Montrer que $\forall x \in I, f(x) \geq T_{x_0}(x)$.

Correction

1. (a) **Initialisation** $n = 1$, dans ce cas $\lambda_1 = 1$ et l'inégalité devient $f(x_1) \leq f(x_1)$ ce qui est vrai.

   Hérédité : On suppose que l'inégalité est vraie au rang n, et on va la démontrer au rang $n+1$.

   - Si $\lambda_{n+1} = 1$ alors $\forall i \leq n, \quad \lambda_i = 0$ et

   $$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) = \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

   Donc la propriété est vraie au rang $n+1$

   - Si $\lambda_{n+1} < 1$ alors $\lambda_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et

   $$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\underbrace{\lambda_{n+1} x_{n+1}}_{\lambda x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{(1-\lambda)y}\right) \underset{\text{f convexe}}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Donc $\lambda = \lambda_{n+1}$, $1 - \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, et $y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda} x_i$

On a alors $\frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ donc d'après l'hypothèse de récurrence au rang n : $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda} f(x_i) = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

On en déduit : $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$, ce qui conclut la démonstration.