

Vers l'université

Table des matières

1 Ensembles et applications	2
1.1 Ensembles	2
1.2 Quantificateurs et propositions	2
1.3 Ensemble des parties d'un ensemble	3
1.4 Application	3
1.5 Majorant, borne et maximum	5
2 Nombres réels	5
3 Suites et fonctions	6
3.1 Fonctions usuelles	6
3.2 Limites et convergence	7
3.3 Continuité	8
3.4 Dérivation	10
4 Nombres complexes	12
4.1 Nombres complexes de module 1	12
4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe	13
4.3 Racines de l'unité	13
5 Rédaction et vocabulaire	14
5.1 Démonstration	14
5.2 Vocabulaire	14

1 Ensembles et applications

1.1 Ensembles

Définition 0.1.1 Élément

On appelle **élément** d'un ensemble E , tout objet qui appartient à E . On note $x \in E$: « x appartient à E ». Dans ce cas on dit que x est un **élément** de E et que E **contient** x

REMARQUE : On note \emptyset l'**ensemble vide**. $\forall x, x \notin \emptyset$.

Définition 0.1.2 Sous-ensemble

Soit E, F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** de E si : $\forall x \in F, x \in E$. Dans ce cas on note $F \subset E$, on dit aussi que F est **inclus** dans E ou que F est une **partie** de E .

REMARQUES :

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres entiers naturels est inclus dans l'ensemble des nombres entiers relatifs.
2. $2 \in \mathbb{N}$
3. $\{2\} \subset \mathbb{N}$
4. $\emptyset \subset \mathbb{N}$

Définition 0.1.3 Égalité d'ensembles

Deux ensembles E, F sont égaux si et seulement s'ils contiennent les mêmes éléments.

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Définition 0.1.4 Produit d'ensembles

Soit E, F deux ensembles, on peut construire un nouvel ensemble appelé **produit** de E et F , noté $E \times F$ dont les éléments sont (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

EXEMPLES :

1. $(3, -5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$
2. $(\pi, e) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

1.2 Quantificateurs et propositions

Quantificateurs

Soit $P(x)$ une **proposition** dépendant d'un élément $x \in E$.

- La proposition $\forall x \in E, P(x)$, signifie que tout élément x de E vérifie la proposition $P(x)$

EXEMPLE : $P(x) : x \geq 0$, avec $E = \mathbb{N}$, on a $\forall x \in E, P(x)$

On a alors : $\forall x, P(x) \iff \{x \in E, P(x)\} = E$

- La proposition $\exists x \in E, P(x)$, signifie qu'il existe un élément x de E qui vérifie la proposition $P(x)$

EXEMPLE : $P(x) : x^2 = 0$, avec $E = \mathbb{R}$, on a $\exists x \in E, P(x)$

On a alors : $\exists x, P(x) \iff \{x \in E, P(x)\} \neq \emptyset$

- La proposition $P \Rightarrow Q$ signifie que si P est vraie alors Q est vraie.

Négation d'une proposition

On note \overline{P} la **négation** de la proposition P .

EXEMPLES :

1. Si $P(x) : x = 2$ alors $\overline{P(x)} : x \neq 2$
2. Si $P(x) : x \geq 0$ alors $\overline{P(x)} : x < 0$

On a alors : $\overline{P \text{ ou } Q} \iff \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$ ainsi que : $\overline{P \text{ et } Q} \iff \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$

De plus : $\overline{\forall x, P(x)} \iff \exists x \in E, \overline{P(x)}$ ainsi que : $\overline{\exists x, P(x)} \iff \forall x \in E, \overline{P(x)}$

EXEMPLE : Une fonction f est bornée sur \mathbb{R} si : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq M$

Une fonction f est donc non bornée si : $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| > M$

Si $P \Rightarrow Q$ cela veut dire que si Q est faux, P ne peut pas être vraie (c'est ce qu'on appelle la **contraposée**), ainsi :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

On en déduit également que $P \Rightarrow Q$ signifie : \overline{Q} et \overline{P} c'est-à-dire \overline{P} ou Q . On peut aussi voir que $P \Rightarrow Q$ signifie : $(P \text{ et } Q)$ ou \overline{Q} , et en développant on a : $(P \text{ ou } \overline{Q})$ et $(Q \text{ ou } \overline{Q}) = (P \text{ ou } \overline{Q})$

1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 0.1.5 Ensemble des parties

L'ensemble des sous-ensembles de E est appelé **ensemble des parties** de E , et est noté $\mathcal{P}(E)$. Ainsi :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

EXEMPLE : Si $E = \{a, b, c\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$, si $|E| = n$ alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$

Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit A, B deux parties de E .

- **Complémentaire** : \bar{A} est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A :

$$\forall x \in E, x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

EXEMPLE : Dans l'ensemble des réels, si $A = \{0\}$, alors $\bar{A} = \mathbb{R}^*$

- **Intersection** $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B : on dit « A inter B » :

$$\forall x \in E \quad x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

EXEMPLE : $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

- **Réunion** : $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B : on dit « A union B »

$$\forall x \in E \quad x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

- **Différence** : $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B : on dit « A privé de B »

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

EXEMPLE : $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+$

1.4 Application

Soit E et F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ une **application**.

- E est appelé **ensemble de départ**
- F est appelé **ensemble d'arrivée**
- Si $f(x) = y$ alors y est appelé **image** de x par f , et x est un **antécédent** de y par f .

EXEMPLES :

1. L'application $\begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \mapsto x \end{cases}$ est appelé application **identité** de E et est notée Id_E . $\forall x \in E, Id_E(x) = x$
2. Si $f : E \rightarrow F$, alors $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$

Définition 0.1.6 Restriction, Prolongement

- Soit $A \subset E$ un ensemble et $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle **restriction** de f à A (ou sur A) l'application :

$$f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow F \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$$

- Soit $A \subset E$ un ensemble et $f : A \rightarrow F$ une application. On appelle **prolongement** de f à E (ou sur E) tout application g qui vérifie :

$$g : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ \forall x \in A & g(x) = f(x) \end{cases}$$

Dans ce cas f est une **restriction** de g à A

Injectivité et surjectivité

Définition 0.1.7 Injection, Surjection, Bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

➤ On dit que f est **injective** (ou que c'est une **injection**) si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet **au plus** une solution, c'est-à-dire :

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

➤ On dit que f est **surjective** (ou que c'est une **surjection**) si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet **au moins** une solution, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

➤ On dit que f est **bijective** (ou que c'est une **bijection**) si elle est **injective** et **surjective**.

EXEMPLES :

1. L'application $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ est **injective** mais pas **surjective**

2. L'application $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ est **surjective** mais pas **injective**

3. L'application $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ est **surjective** et **injective**, elle est **bijective**.

Propriété 0.1.8 Bijection réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application **bijective**. Il existe une application de F dans E , notée f^{-1} telle que :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_E$$

L'application f^{-1} est appelé **bijection réciproque** de f

DÉMONSTRATION

Si f est bijective alors tout élément $y \in F$ a un unique antécédent $x \in E$ par f . On peut donc définir f^{-1} par $\forall y \in F, f^{-1}(y) = x$, où x est l'unique solution de $f(x) = y$. Dans ce cas $\forall y \in F, f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$ et $\forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x$

Image directe et image réciproque**Définition 0.1.9 Image directe**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$. On appelle **image** de A par f l'ensemble des images des éléments de A , noté $f(A)$. On a :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F \quad \text{et} \quad \forall y \in F, y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

REMARQUES :

1. Si $f : E \rightarrow F$, on appelle **image** de f l'ensemble $f(E) = \{f(x), x \in E\} \subset F$.
2. f est **surjective** si et seulement si $f(E) = F$

EXAMPLE : Si $f : x \mapsto \sin x$ alors $f([0, \pi]) = [0, 1]$

Définition 0.1.10 Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ et $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f , l'ensemble des antécédents des éléments de B , noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E \quad \text{et} \quad \forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

REMARQUE : Même si f n'est pas bijective, on peut définir une image réciproque.

EXAMPLE : Soit $f : x \mapsto x^2$ définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors f n'est pas bijective et $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$

1.5 Majorant, borne et maximum

Soit E un ensemble et A une partie de E .

Définition 0.1.11 Majorée, Minorée, Bornée

➤ A est dite **majorée**, s'il existe un élément M de E supérieur ou égal à tous les éléments de A :

$$\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M$$

M est appelé **majorant** de A .

➤ A est dite **minorée**, s'il existe un élément m de E inférieur ou égal à tous les éléments de A :

$$\exists m \in E, \forall x \in A, x \geq m$$

m est appelé **minorant** de A .

➤ Si A est **majorée** et **minorée**, on dit que A est **bornée**.

EXEMPLES :

1. Soit $A = [0, 1[$. A est **majorée** par 1, ou 2. A est **minorée** par 0, ou -4 . A est **bornée**
2. Soit $A = [-12, +\infty[$. A n'est pas **majorée**. A n'est pas **bornée**.

Définition 0.1.12 Borne supérieure, Borne inférieure

➤ Soit M un majorant de A . Si M est le plus petit majorant, on dit que M est la **borne supérieure** de A . Si elle existe, elle est unique. On note $\sup A = M$

➤ Soit m un minorant de A . Si m est le plus grand minorant, on dit que m est la **borne inférieure** de A . Si elle existe, elle est unique. On note $\inf A = m$

EXEMPLES :

1. Soit $A = [0, 1[$. 1 est la **borne supérieure** de A , 2 n'est pas la **borne supérieure** de A . $\sup A = 1$
2. Soit $A = [-12, +\infty[$. -12 est la **borne inférieure** de A , A n'a pas de **borne supérieure**. $\inf A = -12$

Définition 0.1.13 Maximum, Minimum

➤ Soit M la borne supérieure de A . Si $M \in A$, alors on dit que M est le **maximum** de A . S'il existe, il est unique. On note $\max A = M$

➤ Soit m la borne inférieure de A . Si $m \in A$, alors on dit que m est le **minimum** de A . S'il existe, il est unique. On note $\min A = m$

EXEMPLES :

1. Soit $A = [0, 1[$. 0 est le **minimum** de A . 1 n'est pas le **maximum**. A n'a pas de **maximum**. $\min A = 0$
2. Soit $A = [-12, +\infty[$. -12 est le **minimum** de A . A n'a pas de **maximum**. $\min A = -12$

2 Nombres réels

Définition 0.2.14 Intervalle

Une partie I de \mathbb{R} est un **intervalle** si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a \leq x \leq b \implies x \in I)$$

EXEMPLES :

1. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ est un **intervalle**.
2. \mathbb{R}^* n'est pas un **intervalle**.

RAPPELS :

1. a et b sont appelés **bornes** ou **extrémités** de l'intervalle
2. Tous les x tels que $a < x < b$ sont dits **à l'intérieur** de I .
3. Les intervalles du type $[a, b]$ sont dits **fermés**
4. Les intervalles du type $]a, b[$ sont dits **ouverts**
5. Les intervalles du type $]a, b]$ ou $[a, b[$ ne sont ni **ouverts** ni **fermés**

6. \emptyset et \mathbb{R} sont **ouverts** et **fermés**.
7. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
8. Un intervalle fermé borné est appelé **segment**. $[-1, 4]$ est un segment.

Définition 0.2.15 Voisinage

- Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de a tout intervalle qui contient un intervalle fermé centré en a : $[a - \alpha, a + \alpha]$
- On appelle **voisinage** de $+\infty$ tout intervalle non majorée : $[\alpha, +\infty[$ ou $]\alpha, +\infty[$

EXEMPLES :

1. $] -1, 5]$ est un **voisinage** de 0, mais n'est pas un **voisinage** de 5 car si $\alpha > 0$, alors $[5 - \alpha, 5 + \alpha] \not\subset] - 1, 5]$
2. $[5, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$, $] - \infty, 6]$ est un voisinage de $-\infty$

Propriété 0.2.16 Borne supérieure

- Soit A une partie non vide **majorée** de \mathbb{R} , alors A possède une **borne supérieure** notée $\sup A$
- Soit A une partie non vide **minorée** de \mathbb{R} , alors A possède une **borne inférieure** notée $\inf A$

3 Suites et fonctions

3.1 Fonctions usuelles

Logarithme et exponentielle

On a les identités suivantes : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ $e^a \times e^b = e^{a+b}$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Attention : $\ln a \times \ln b \neq \ln(a + b)$ $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln(a - b)$

RAPPELS :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$

Fonctions circulaires

Formules d'addition :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b \quad \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

RAPPELS :

1. $\cos' x = -\sin x$ $\sin' x = \cos x$ $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
2. $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

Fonctions hyperboliques

On appelle **sinus hyperbolique** $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, notée sh en français.

On appelle **cosinus hyperbolique** $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, notée ch en français

On appelle **tangente hyperbolique** $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, notée th en français.

RAPPELS :

1. $\cosh x + \sinh x = e^x$ $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
3. $\cosh' x = \sinh x$ $\sinh' x = \cosh x$ $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

On appelle **argument sinus hyperbolique** la bijection réciproque de sinh, on la note Argsh

On appelle **argument cosinus hyperbolique** la bijection réciproque de cosh, on la note Argch

On appelle **argument tangente hyperbolique** la bijection réciproque de tanh, on la note Argth

RAPPELS : $\text{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\text{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\text{Argth}' x = \frac{1}{1 - x^2}$

3.2 Limites et convergence

Définition 0.3.17 Limite finie

➤ On dit que la fonction f admet une **limite finie** en a si

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, et on dit que « f tend vers b en a »

➤ On dit que la fonction f admet une **limite finie** en $+\infty$ si

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et on dit que « f tend vers b en $+\infty$ »

➤ On dit que la suite (u_n) admet une **limite finie** si :

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - b| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$, et on dit que « (u_n) tend vers b » ou que « (u_n) converge vers b »

EXEMPLE :

Définition 0.3.18 Limite infinie

➤ On dit que f admet pour **limite** $+\infty$ en a si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$$

Dans ce cas on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, et on dit que « f tend vers $+\infty$ en a »

➤ On dit que f admet pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$$

Dans ce cas on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et on dit que « f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ »

➤ On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$$

Dans ce cas on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, et on dit que « (u_n) tend vers $+\infty$ » ou que « (u_n) diverge vers $+\infty$ »

METTRE DES EXEMPLES

REMARQUES :

1. Les notations pour une limite de fonction sont : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$
2. Les notations pour une limite de suite sont : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ et $u_n \rightarrow b$
3. Les autres notations ne sont pas correctes. On n'utilise pas la flèche \longrightarrow pour autre chose.
4. Si on effectue une limite sur x , alors il n'y a pas de x dans le résultat :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+x} \neq \ln x \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^2} \neq \frac{1}{n} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} \neq \frac{e^x}{x}$$

5. On effectue le calcul avant, et on passe à la limite à la fin :

- pour $n \neq 0$, $\frac{n}{1+n^2} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0$
- $\frac{e^x}{1+x} = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} = +\infty$

Opération sur les limites

- Addition des limites : si f et g ont une **limite finie** en a alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- Produit de limites : si f et g ont une **limite finie** en a alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Attention : il faut démontrer que f et g ont une limite, sinon on ne peut pas utiliser les formules d'addition ou de multiplication.

Par exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin(x) - \sin(x)) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ (n'a pas de sens).

Limites et inégalités

Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > b$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq b$, on appelle cela le passage aux inégalités larges.

De même si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

EXEMPLE :

1. $\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Croissances comparées

On a :

$$\forall \alpha > 0 \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0 \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \ln^\alpha x = 0$$

En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

On a :

$$\forall \alpha > 0 \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0 \ \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\beta e^\alpha x = 0$$

En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 0.3.19 Suite extraite

Soit (u_n) une suite, et une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. Toute suite (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ est appelée **suite extraite** de (u_n)

EXEMPLES :

1. $v_n = u_{2n}$ est une **suite extraite** de (u_n)
2. $v_n = u_{2n+1}$ est une **suite extraite** de (u_n)

Propriété 0.3.20 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente

EXEMPLE : Soit $u_n = (-1)^n$, est une suite bornée, non convergente. $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ est une suite constante, donc convergente.

3.3 Continuité

Définition 0.3.21 Continuité

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . On dit que f est **continue** en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

REMARQUES :

1. Si f est définie en $a \in \mathbb{R}$, alors elle est **continue** en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
2. L'ensemble \mathcal{C}^0 est l'ensemble des fonctions continues.
3. L'ensemble \mathcal{C}^1 est l'ensemble des fonctions dérivables et dont la dérivée est continue.
4. L'ensemble \mathcal{C}^n est l'ensemble des fonctions n fois dérivables et dont la dérivée n -ème est continue.

Propriété 0.3.22 Caractérisation séquentielle

Soit f une fonction de I sur \mathbb{R} . f est continue en $a \in I$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de I qui tend vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$

DÉMONSTRATION

\Rightarrow : Montrons que si f est continue en a alors pour toute suite (x_n) qui tend vers a , $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Soit (x_n) une suite qui tend vers a , on a donc $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \varepsilon$, puisque f est continue en a , $\forall \alpha > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \alpha$

Soit $\alpha > 0$ donc $\exists \delta > 0 \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \alpha$. D'après la limite de (x_n) , en prenant $\varepsilon = \delta$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \delta$ et donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f(x_n) - f(a)| \leq \alpha$, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$

\Leftarrow : Montrons que si pour toute suite (x_n) qui tend vers a , $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$ alors f est continue en a . On démontre la contraposée, on suppose f non continue en a et on va trouver une suite (x_n) qui tend vers a avec $(f(x_n))$ qui ne tend pas vers $f(a)$

Puisque f ne tend pas vers $f(a)$, $\exists \alpha > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \delta$ et $|f(x) - f(a)| > \alpha$

En particulier il existe un $x_n \in I$ tel que $|x_n - a| \leq 2^{-n}$ et $|f(x_n) - f(a)| > \alpha$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En répétant l'opération, on obtient une suite de I qui tend vers a (car $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq 2^{-n}$) mais $|f(x_n) - f(a)| > \alpha$, c'est-à-dire que $(f(x_n))$ ne tend pas vers $f(a)$.

Définition 0.3.23 Prolongement par continuité

Soit $I \subset \mathbb{R}$, et $a \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. Si f admet une limite finie en a , notée b , alors on peut prolonger f en une fonction **continue** sur I de la façon suivante :

$$g : \begin{cases} \text{si } x \in I \setminus \{a\}, & g(x) = f(x) \\ \text{si } x = a, & g(a) = b \end{cases}$$

La fonction g obtenue est continue, on dit que g est un **prolongement** de f sur I . On dit aussi qu'on a effectué un **prolongement par continuité** de f .

EXEMPLE : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin x}{x} \end{cases}$. On sait alors que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, on peut alors prolonger f par continuité sur \mathbb{R} . On pose $\forall x \neq 0, g(x) = f(x)$ et $g(0) = 1$. La fonction g est un **prolongement continu** de f sur \mathbb{R}

Propriété 0.3.24 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall b \in [f(x), f(y)], \quad \exists a \in [x, y], \quad f(a) = b$$

DÉMONSTRATION

Soit $(x, y) \in I^2$ et $b \in]f(x), f(y)[$ (Si $b = f(x)$ ou $b = f(y)$ alors b est bien atteint par f). Soit $E = \{a \in [x, y], f(a) \leq b\}$. E est un ensemble non vide car $x \in E$ et E est majoré par y , donc d'après la propriété de la borne supérieure, E admet une borne supérieure noté A .

Il existe une suite (a_n) d'éléments de E qui converge vers A . Comme f est continue, $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(A)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leq b$, donc $f(A) \leq b$.

Puisque $f(y) > b$, $A \neq y$, or pour tout $a \in]A, y[$, $f(a) > b$, donc $\lim_{a \rightarrow A^+} f(a) \geq b$, et comme f est continue, $\lim_{a \rightarrow A^+} f(a) = f(A)$, donc $f(A) \geq b$

Conclusion : $f(A) = b$

Propriété 0.3.25 Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle.

DÉMONSTRATION

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f définie sur I . Soit $(c, d) \in f(I)^2$, il existe donc $(a, b) \in I$ tels que $c = f(a)$ et $d = f(b)$. Soit y tel que $c \leq y \leq d$.

Puisque f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x , avec $a \leq x \leq b$, tel que $y = f(x)$, et comme I est un intervalle, $x \in I$, donc $y \in f(I)$. Ce qui montre que $f(I)$ est un intervalle.

Propriété 0.3.26 Image d'un segment

Une fonction **continue** sur un segment $[a, b]$ est **bornée** et **atteint ses bornes**. L'image de $[a, b]$ est donc un **segment** :

$$f([a, b]) = [m, M] \quad \text{où} \quad m = \inf_{[a, b]} f = \min_{[a, b]} f \quad \text{et} \quad M = \sup_{[a, b]} f = \max_{[a, b]} f$$

DÉMONSTRATION

Soit f définie sur I et $[a, b] \subset I$. On va montrer que f est majorée et atteint sa borne sup, c'est-à-dire que f a un maximum sur $[a, b]$.

Soit $J = f([a, b])$ et $M = \sup J \in \overline{\mathbb{R}}$. Il existe une suite (y_n) d'éléments de J telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = M$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in f([a, b])$ donc il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = y_n$.

La suite (x_n) est bornée, on peut donc extraire une suite convergente (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass), on la note $(x_{\varphi(n)})$. Soit l la limite de cette suite. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, en passant à la limite $a \leq l \leq b$, f est continue en l , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$.

Puisque (y_n) admet une limite, toute suite extraite a la même limite, donc $y_{\varphi(n)} \rightarrow M$, ce qui montre que $M = f(l) \in f([a, b])$ et que M est fini (car image de l par f). On a donc montré que f était majorée (car M est fini), et que sa borne sup (M) était atteinte (en $x = l \in [a, b]$).

La démonstration est identique pour montrer que f est minorée et atteint sa borne inf.

Conclusion : $J = [m, M]$

METTRE UN SCHÉMA**Définition 0.3.27 Fonction Lipschitzienne**

Soit f une fonction définie sur I . On dit que f est **lipschitzienne** sur I si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Dans ce cas on dit aussi que f est **k-lipschitzienne**.

3.4 Dérivation**Définition 0.3.28 Maximum local, Minimum local**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

➤ On dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

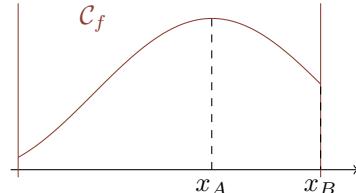
➤ On dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Si x_0 est un minimum ou un maximum local, on dit que x_0 est un **extremum local**.

EXEMPLES :

1. La fonction f admet un **maximum local** en x_A .
La fonction f admet un **minimum local** en x_B .
2. La fonction $x \mapsto x^2$ admet un **minimum local** en 0
3. La fonction $g : \begin{cases}]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ admet un maximum en 1, g n'admet pas de minimum, en revanche elle admet une borne inférieure : $\inf g = 0$

**Propriété 0.3.29 Extremum local**

Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un **extremum local** en $x_0 \in I$ et si f est **dérivable** en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$

DÉMONSTRATION

On suppose que f atteint un maximum local en x_0 . Donc :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

À gauche : $\forall x_1 \in]x_0 - \alpha, x_0[\quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$ donc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ ie $f'(x_0) \geq 0$

À droite : $\forall x_2 \in]x_0, x_0 + \alpha[\quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq 0$ donc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ ie $f'(x_0) \leq 0$

REMARQUE :

1. Il est indispensable que l'intervalle de départ soit **ouvert**.
2. Si l'intervalle de départ n'est pas ouvert, on peut appliquer le théorème sur les extrema locaux atteints sur les points **intérieurs**.

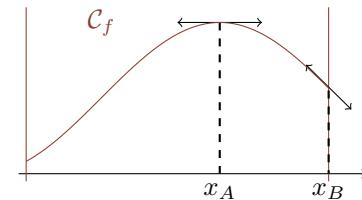
EXEMPLES :

1. La fonction $f :]0, x_B[\rightarrow \mathbb{R}$ admet un **maximum local** en x_A , l'intervalle de départ $]0, x_B[$ est **ouvert**, donc $f'(x_A) = 0$: tangente horizontale.

La fonction $f :]0, x_B]$ admet un **minimum local** en x_B mais l'intervalle de départ $]0, x_B]$ **n'est pas ouvert**.

2. La fonction $x \mapsto x^2$ admet un **minimum local** en 0. Sa dérivée en 0 est nulle.

3. La fonction $g : \begin{cases}]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \end{cases}$ admet un maximum en 1, mais $]0, 1]$ **n'est pas ouvert**. $\max g = 1$, $g'(x) = 1$ et $g'(1) = 1 \neq 0$. g n'admet pas de minimum, en revanche elle admet une borne inférieure : $\inf g = 0$.



REMARQUE : La réciproque est fausse : $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local.

Propriété 0.3.30 Théorème de Rolle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur un **segment** $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

DÉMONSTRATION

f est continue sur $[a, b]$ donc $f([a, b]) = [m, M]$. On va montrer qu'une de ces deux bornes est un extremum local :

- si $m = M$, f est constante et f' est nulle sur $]a, b[$
- si $m < M$, alors on ne peut pas avoir $m = f(a)$ et $f(b) = M$ (ou l'inverse), car $f(a) = f(b)$. Donc une de ces deux bornes est atteinte en un point $c \in]a, b[$, c'est donc un **extremum local** atteint sur un point **intérieur**, et d'après la propriété précédente, $f'(c) = 0$

Propriété 0.3.31 Théorème des accroissements finis (égalité)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur un **segment** $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DÉMONSTRATION

On pose $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$, et on va appliquer le théorème de Rolle à g . g est bien continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. En outre :

$$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g , et ainsi il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Propriété 0.3.32 Inégalité des accroissements finis

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

- Si $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$
- $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{]a, b[} (|f'(x)|) |b - a|$

DÉMONSTRATION

- Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, on en déduit que $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$, d'où le résultat.
- si f' n'est pas bornée, le résultat n'est pas intéressant. Si f' est bornée, notons $M = \sup_{]a, b[} |f'(x)|$, on a donc $\forall x \in]a, b[-M \leq f'(x) \leq M$. On en déduit : $-M \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$ et ainsi $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

4 Nombres complexes

RAPPELS :

1. $\forall z \in \mathbb{C} \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 z = x + iy$ avec $i^2 = -1$.
2. x est appelé **partie réelle** et y est appelé **partie imaginaire**. On note $\operatorname{Re}(z) = x$ et $\operatorname{Im}(z) = y$
3. $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$
4. $\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(zz') \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$
5. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé **module** de z .
6. On a les formules suivantes : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ et $|zz'| = |z| |z'|$
7. $\bar{z} = x - iy$ est appelé **conjugué** de z . $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$.
8. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' \quad |\bar{z}| = |z| \quad z\bar{z} = |z|^2$
9. Si $A(x_A, y_A)$ est un point du plan, $z_A = x_A + iy_A$ est appelée **affixe** du point A .

4.1 Nombres complexes de module 1**Propriété 0.4.33 Groupe U des nombres complexes de module 1**

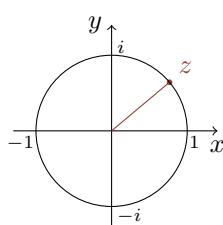
L'ensemble (U, \times) des nombres complexes de module 1 est un **groupe**. C'est-à-dire que :

1. $\forall (z, z') \in U^2 \quad zz' \in U$
2. $1 \in U$
3. $\forall z \in U, \frac{1}{z} \in U$

DÉMONSTRATION

1. $\forall (z, z') \in U^2, |zz'| = |z| |z'| = 1 \times 1 = 1$ donc $zz' \in U$
2. $|1| = 1$ donc $1 \in U$
3. $\forall z \in U, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in U$

L'ensemble U peut se représenter sous forme de cercle de centre O et de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique**.



Propriété 0.4.34

Tout nombre complexe $z \in U$ peut s'écrire :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Soit $\varphi : \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$. φ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$\varphi'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = i\varphi(\theta)$$

On utilise donc la notation $\varphi(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

On obtient alors les formules :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 0.4.35 Forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$, z s'écrit sous la forme :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z , le réel θ est appelé **argument** de z , noté

RAPPELS :

1. $\arg zz' = \arg z + \arg z'$
2. $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$
3. $\arg \bar{z} = -\arg z$
4. $\arg z^n = n \arg z$

4.3 Racines de l'unité

Propriété 0.4.36 Racine n-ème de l'unité

L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est

$$U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Tout nombre z tel que $z^n = 1$ est appelé **racine n-ème de l'unité**.

DÉMONSTRATION

On cherche une solution sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$. On a alors

$$z^n = 1 \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

EXEMPLES :

1. $U_1 = \{1\}$
2. $U_2 = \{1, -1\}$
3. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $U_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \bar{j}\}$
4. $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$
5. On note souvent $w_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $U_n = \{w_n^0, w_n^1, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}\}$ et $|U_n| = n$

Propriété 0.4.37 Interprétation géométrique

Les éléments de U_n forment un polygone régulier à n côtés

DÉMONSTRATION

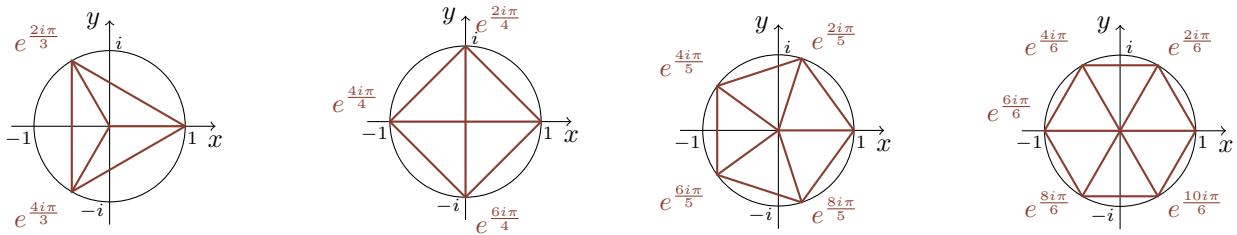
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les racines n -ème de 1 sont les $w_n^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Il faut montrer que les côtés ont même longueur et que les angles sont égaux :

- La longueur du k -ème côté est : $|w_n^k - w_n^{k-1}| = |w_n^{k-1}| \cdot |w_n - 1| = |w_n - 1|$
Ce nombre ne dépend pas de k , donc tous les côtés ont la même longueur.
- L'angle (interne) entre le côté $k-1$ et le côté k est

$$\arg(w_n^{k-1} - w_n^k) - \arg(w_n^{k-1} - w_n^{k-2}) = \arg\left(\frac{w_n^{k-1} - w_n^k}{w_n^{k-1} - w_n^{k-2}}\right) = \arg\left(\frac{w_n^{k-1}}{w_n^{k-2}} \cdot \frac{1 - w_n}{w_n - 1}\right) = \arg -w_n = \frac{2\pi}{n} - \pi$$

Ne dépend pas de k , donc tous les angles sont égaux.

ILLUSTRATION : Racines 3e, 4e, 5e, 6e de l'unité :



5 Rédaction et vocabulaire

5.1 Démonstration

- Les symboles « $\exists, \forall, \Rightarrow$ » ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

ON ÉCRIT

- La fonction f est majorée sur \mathbb{R}
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
- Si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$

ON N'ÉCRIT PAS

- $\exists M$ tel que pour tout $x, f(x) \leq M$
- $x > 0 \rightarrow \frac{1}{x} > 0$ (On n'utilise pas la flèche \rightarrow)

- Lorsqu'on veut démontrer une propriété qui commence par « $\forall x \in \mathbb{R}$ », la démonstration commence par « Soit $x \in \mathbb{R}$ » et on montre que la propriété est vraie pour ce « x ».

Après « Soit $x \in \mathbb{R}$ », x est fixé, on ne peut plus écrire $x = \dots$.

Exemple : Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Il faut démontrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$

Il y a deux « \forall », donc on doit utiliser deux fois « Soit », un fois pour ε , une fois pour x .

Soit $\varepsilon > 0$, on peut poser $A = \frac{1}{\varepsilon} + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $x > A$, alors $x > A > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, et donc $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, ce qui montre la propriété.

5.2 Vocabulaire

Nombres et opérations

1. Égaler, être égal à : $a = 7$ « a égale sept » ou « a est égal à sept » « ça fait sept » « ça donne sept »
2. Ne pas être égal à, différent de : $a \neq 6$ « a n'est pas égal à six » ou « a est différent de six »
3. Addition, ajouter, plus : $a + 3$ « a plus trois », on a fait une addition. Ajouter a et trois.
4. Soustraction, soustraire, moins : $a - 5$ « a moins 5 », on a fait une soustraction. Soustraire 5 à a .
5. Positif, négatif : $a > 0$ « a est positif », $a < 0$ « a est négatif »
6. Plus grand, supérieur : $a > 3$ « a est plus grand que trois. » ou « a est supérieur à trois. »
7. Plus petit, inférieur : $a < -2$ « a est plus petit que moins deux »
8. inégalité stricte : $a > 3$ est strictement supérieur à (/ plus grand que) trois.
9. inégalité large : $a \geq 3$ est supérieur (/ plus grand) ou égal à trois.
10. Multiplier par, fois, multiplication, produit : $a \times 2$ « a fois 2 » ou « a multiplié par 2 ». On a fait une multiplication. $a \times 2$ est un produit.
11. Diviser par, sur, division : $\frac{a}{8}$ « a sur huit » ou « a divisé par huit ». On a fait une division. $\frac{a}{8}$ est un quotient ou une fraction. a est le numérateur, 8 est le dénominateur.
12. Développer, développement : $2(a + 5) = 2a + 10$: on dit qu'on développe le produit $2(a + 5)$

13. Factoriser, factorisation : $2a + 10 = 2(a + 5)$: on dit qu'on factorise $2a + 10$. On fait une factorisation.

Vocabulaire de la démonstration

LA CONSÉQUENCE ET LA CONDITION

1. $A \implies B$: « Si A alors B », « A implique B »
2. Donc, par conséquent, ainsi, d'où : $a > 0$ donc (/ par conséquent / ainsi / d'où) $\frac{1}{a} > 0$
3. Conclure, conclusion : à la fin d'une démonstration : « on peut conclure que f est positive, donc la propriété est vraie. »
4. Vérifier : La fonction f vérifie la condition du théorème.

LA CAUSE

1. Puisque, comme : Puisque (/ comme) $a \in [2, 7]$, a est positif.
2. Or : $f(0) = 0$, or f est croissante, donc $f(1)$ est positif.
3. Car : $f(1)$ est positif car f est croissante et $f(0) = 0$.

PROPOSITION

1. Soit : Soit $a \in \mathbb{R}$
2. Il existe, existence : $\exists a > 0$ « il existe un a positif »
3. Tel que : il existe a tel que $f(a) = 0$. Soit a tel que $f(a) = 0$
4. Pour tout, quel que soit : $\forall a \in \mathbb{R}$ « Pour tout réel a », « Quel que soit le réel a »
5. ie, c'est-à-dire : ie = c'est-à-dire : $a \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire que $a = \frac{p}{q}$
6. Unique, unicité : Si $x \neq 0$ il existe un unique réel y tel que $yx = 1$. Il y a unicité.

DIVERS

1. En outre, de plus :
2. Tous : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_i = 0$ « Tous les lambda i sont nuls »
3. Aucun, tous non : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_i \neq 0$ « Aucun des lambda i est nul », « Les lambda i sont tous non nuls »
4. Non tous : $\exists \lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$: « Il existe un lambda i non nul » \Leftrightarrow « Les lambda i sont non tous nuls »
5. Sauf : Soit $E = \{2, -4, 7, 3\}$. Dans E tous les nombres sont positifs, sauf -4 .

Suites et fonctions

1. Croissant, décroissant : $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow$ la suite (u_n) est croissante. ($x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$) \Leftrightarrow la fonction f est décroissante.
2. Tendre vers, converge, convergent : $u_n \xrightarrow{} 5$: La suite (u_n) tend (/ converge) vers 5. (u_n) est une suite convergente. $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$: la fonction f tend vers b quand x tend vers a .
3. Diverge, divergent : $u_n = (-1)^n$: La suite u_n diverge (/ est divergente).
4. Continue, continuité : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ La fonction f est continue en a
5. Dérivée, dérivable, dérivation : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b \Leftrightarrow$ La fonction f est dérivable en a . f' est la dérivée de f .
6. Atteindre, être atteint : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$: $f(2) = 0,5$ donc 0,5 est atteint par f . f atteint 0,5 en 2. 0 n'est pas atteint par f , mais f tend vers 0 en $+\infty$.

Équations

1. Admettre : L'équation $x + 2 = 5$ admet une solution : $x = 3$. L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution réelle.
2. Solution : 3 est solution de l'équation $x + 2 = 5$.
3. Vérifier : 3 vérifie l'équation $x + 2 = 5$.