Étude locale

∗ ∗ ∗

Relations de comparaison

Exercice 1 – ★ *Fonctions dominées*

1. Donner la définition de « f est dominée par g au voisinage de a »
2. Montrer que $x^2 \underset{0}{=} \mathcal{O}(x)$
3. Montrer que $x \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(x^2\right)$
4. Soit f continue en a, montrer que $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(1)$.

Exercice 2 – ★ *Fonctions négligeables*

1. Montrer que $x \sin x \underset{0}{=} o(\sin x)$
2. Montrer que $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$

Exercice 3 – ★ *Compatibilité avec la multiplication*

1. Soit $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$ et $\lambda \neq 0$, montrer que $\lambda f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi)$
2. Soit $f_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$, montrer que $f_1 f_2 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1\varphi_2)$
3. Soit $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ et $\lambda \neq 0$, montrer que $\lambda f \underset{a}{=} o(\varphi)$
4. Soit $f_1 \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(\varphi_2)$, montrer que $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(\varphi_1\varphi_2)$

Exercice 4 – ★ *Compatibilité avec la composition*

1. Soit $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$
2. Soit $f \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} o(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$
3. Soit $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} o(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$
4. Soit $f \underset{a}{=} o(\varphi_1)$ et $\varphi_1 \underset{a}{=} \mathcal{O}(\varphi_2)$, montrer que $f \underset{a}{=} o(\varphi_2)$

Exercice 5 – ★ *Équivalent simple*

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

a. $1 + x + \ln x$ en 0 et $+\infty$

b. $\cosh(\sqrt{x})$ en 0 et $+\infty$

c. $\sin(\cos x)$ en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$

d. $\tan(2x)$ en 0 et $\dfrac{\pi}{4}$

e. $\ln(\sin x)$ en 0 et $\dfrac{\pi}{2}$

f. $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0

Exercice 6 – ★ *Équivalent d'un polynôme*

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. Soit p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$.

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} P(x)$
2. Déterminer un équivalent de P en 0
3. Déterminer un équivalent de P en $+\infty$

Exercice 7 – ★ *Exponentielle et équivalent*

1. Est-ce que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Longrightarrow e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)}$? Justifier.
2. Montrer que $e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)} \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$

Exercice 8 – ★ *Logarithme et équivalent*

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g strictement positives telles que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si $L \neq 1$ alors $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.
2. Montrer que si $L = 1$ et $f'(a) = g'(a) \neq 0$ alors $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.

Exercice 9 – ★ *Exponentielle et négligeabilité*

Soit f, g deux fonctions avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1. Est-ce que $e^{g(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{f(x)}\right) \Longrightarrow g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x))$? Justifier.
2. Est-ce que $g(x) \underset{+\infty}{=} o(f(x)) \Longrightarrow e^{g(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{f(x)}\right)$? Justifier.

Exercice 10 – ★ *Équivalent simple*

Déterminer un équivalent simple des suites :

1. $n \sin \dfrac{1}{n^2}$
2. $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
3. $n^{\frac{1}{n}} - 1$
4. $\ln(1+n) - \ln(n)$
5. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right)$
6. $\tan^n\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 11 – ★★ *Équivalent simple*

Déterminer un équivalent simple en 0 de :

a. $\cos(ax) - \cos(bx)$

b. $a^x - b^x \quad (a, b > 0)$

c. $\tan \dfrac{\pi}{2x+1}$

d. $\sqrt[4]{16+x} - \sqrt[3]{8+x}$

e. $\sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x^2}$

f. $\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$

Exercice 12 – ★★ *Équivalent et puissance*

Soit $u_n, v_n > 0$.

1. Si $u_n \sim v_n$ est-ce que $u_n^n \sim v_n^n$? Justifier.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \longrightarrow 0$ est-ce que $u_n^n \sim v_n^n$? Justifier.
3. Montrer que si $u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\lim u_n = L \neq 0$ alors $u_n^n \sim v_n^n$

Exercice 13 – ★ *Limites de fonctions*

Déterminer grâce à un équivalent les limites des fonctions suivantes :

1. $x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$ en 0
2. $\dfrac{(1-\cos x)\arctan x}{x \tan x}$ en 0
3. $\tan x \tan 2x$ en $\dfrac{\pi}{2}$
4. $(2x^2 - 3x + 1)\tan \pi x$ en $\dfrac{1}{2}$
5. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0
6. $(1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$ en 0

Exercice 14 – ★ *Limites de suites*

Déterminer grâce à un équivalent les limites des suites suivantes :

1. $\left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$
2. $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$
3. $\left(\dfrac{n}{n-\alpha}\right)^n$
4. $\left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$

Exercice 15 – ★

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$

1. Montrer que $u_{n-2} \underset{+\infty}{=} o(n!)$
2. Montrer que $u_n \sim n!$

Exercice 16 – ★★

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
2. En déduire que $S_n \longrightarrow +\infty$
3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) est convergente.
4. En déduire un équivalent de S_n

Exercice 17 – ★★

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3
2. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$
3. Montrer que $u_{n+1} \leq n+1$
4. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\sqrt{n})$
5. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} o(n)$
6. En déduire un équivalent de u_n
7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$

Exercice 18 – ★★

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ que l'on note u_n. Donc $u_n - \ln(u_n) = n$.
2. Montrer que $n \leq u_n \leq 2n$
3. En déduire que $u_n \sim n$
4. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} n + \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$

Exercice 19 – ★★ *Relation de comparaison sur les séries divergentes*

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites, avec (v_n) positive et $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.

1. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow U_n \underset{+\infty}{=} o(V_n)$
2. En déduire que si $u_n \sim v_n$ alors $U_n \sim V_n$

Développements limités

Exercice 20 – ★ *Un premier développement limité en a*

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 3 de $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}$.

Exercice 21 – ★ *Un premier développement limité en* $+\infty$

Donner le développement limité à l'ordre 3 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$.

Exercice 22 – ★ *Formule de Taylor-Young*

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2_I$. Soit $x \in I$.

Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$.

Exercice 23 – ★★ *Formule de Taylor-Young*

Soit f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de $f'(x_0)$ et $f''(x_0)$?
2. Démontrer que $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$

Exercice 24 – ★ *Somme et produit de développement limités en 0.*

Calculer les développements limités en 0 suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
2. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ à l'ordre 4.
3. $\sin x \cos 2x$ à l'ordre 6.
4. $\cos x \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
5. $(1+x^3)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3.
6. $\ln^2(1+x)$ à l'ordre 4.

Exercice 25 – ★ *Développements limités de fonctions composées en 0.*

Calculer les développements limités en 0 suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4.
2. $e^{\sin x}$ à l'ordre 4.
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5.
4. $x(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4.

Exercice 26 – ★ *Développement limité d'un quotient en 0.*

Calculer les développements limités en 0 suivants :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ à l'ordre 4.
3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2.
4. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3.

Exercice 27 – ★ *Intégration de développement limités*

Calculer à l'aide d'intégrations les développements limités en 0 suivants :

1. $\tan x$ à l'ordre 7.
2. $\arccos x$ à l'ordre 5.
3. $\operatorname{Argth} x$ à l'ordre 5.
4. $\operatorname{Argsh} x$ à l'ordre 5.

Exercice 28 – ★ *Développements limités en a*

Calculer les développements limités suivants :

1. e^x en 1 à l'ordre 3.
2. $\ln x$ en 2 à l'ordre 3.
3. $\cos x$ en $\dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.
4. $\sqrt{x}$ en 2 à l'ordre 3.
5. $\tan x$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.
6. $\arcsin x$ en $\dfrac{1}{2}$ à l'ordre 3.

Exercice 29 – ★ *Développement en* $+\infty$

Calculer les développements suivants en $+\infty$:

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3.
2. $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$ à l'ordre 4.
3. $(x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 4.
4. $x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$ à l'ordre 2

Exercice 30 – ★ *Développement limité à l'ordre 100 !*

Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 100 de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 31 – ★★ *Développement limité d'une fonction réciproque*

Soit $f : x \longmapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.
3. On admet que $f^{-1}(y)$ admet un développement limité en $y = 0$ à l'ordre 4, quelle est sa forme générale ?
4. On pose $y = f(x)$, en utilisant $f^{-1}(y) = x$, déterminer le développement limité de $f^{-1}(y)$ en $y = 0$ à l'ordre 4 ?

Exercice 32 – ★★ *Un développement limité intéressant*

Soit $n \geq 1$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{\exp((n+1)x) - 1}{\exp(x) - 1}$, et $f(0) = a$, avec a tel que $f \in \mathcal{C}^0$

1. Déterminer a.
2. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
3. Soit (a_p) la suite telle que $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + o(x^m)$. Déterminer a_p.

Exercice 33 – ★ *Calcul de limites grâce à un développement limité*

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sinh x - x\cosh x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Exercice 34 – ★ *Tangente en a*

Dans chaque cas, donner l'équation de la tangente en a ainsi que la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente.

1. $f(x) = \ln(\cos x)$ en $a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ en $a = 0$

Exercice 35 – ★ *Asymptote en* ∞

Soit $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$

1. Donner l'équation de l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, notée $\mathcal{D}_{+\infty}$. Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_{+\infty}$?
2. Donner l'équation de l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$, notée $\mathcal{D}_{-\infty}$. Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}_{-\infty}$?

Exercice 36 – ★ *Branche infinie en* ∞

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}(2x^2-1)e^{\frac{1}{x}}$

1. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $+\infty$, notée $\mathcal{B}_{+\infty}$. Quelle est la direction de $\mathcal{B}_{+\infty}$?
2. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche infinie en $-\infty$, notée $\mathcal{B}_{-\infty}$. Quelle est la direction de $\mathcal{B}_{-\infty}$?

Exercice 37 – ★★ *Étude d'une fonction en a et en* $+\infty$

Soit $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.

1. $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente en $a = 2$, notée T_2 ? Si oui, donner l'équation de T_2 et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_2.
2. $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote ou branche infinie en $+\infty$? En cas d'asymptote, donner l'équation de l'asymptote et la position de $\mathcal{C}_f$. En cas de branche infinie, donner la direction.

Exercice 38 – ★ *Autres développements*

1. Calculer un développement de $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
2. Calculer un développement de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$

Exercice 39 – ★★ *Développement limité d'une intégrale*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

Exercice 40 – ★★ *Développement limité d'une suite implicite*

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
2. Que vaut $\tan(x+n\pi)$?, en déduire que l'équation $\tan x = x$ admet une unique dans $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$, notée x_n
3. Montrer que $x_n \sim n\pi$ puis que $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} \sim -\dfrac{1}{n\pi}$
4. Calculer un équivalent de $x_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}$ et conclure que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 41 – ★★ *Équivalent d'une suite définie par une intégrale*

Soit la suite $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 42 – ★★ *Une limite de sinus*

Soit $u_n = \sin(\pi\sqrt{4n^2+n})$. Calculer la limite de u_n.

Exercice 43 – ★★ *Étude d'une fonction définie par une intégrale*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan t dt$

1. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
2. Étudier $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$: asymptote, branche infinie, position de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 44 – ★★ *Encore une suite implicite*

On considère l'équation $\ln(x^k) + 1 = x$, pour $n \geq 2$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $]1, +\infty[$. On note x_n cette solution.
2. Donner un développement limité à trois terme de la suite (x_n).

Exercice 45 – ★★ *Équivalent d'une suite d'intégrale*

Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$