

# Vers l'université

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Ensembles et applications</b>	<b>2</b>
1.1	Ensembles . . . . .	2
1.2	Quantificateurs et propositions . . . . .	2
1.3	Ensemble des parties d'un ensemble . . . . .	3
1.4	Application . . . . .	3
1.5	Majorant, borne et maximum . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Nombres réels</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Suites et fonctions</b>	<b>6</b>
3.1	Fonctions usuelles . . . . .	6
3.2	Limites et convergence . . . . .	7
3.3	Continuité . . . . .	8
3.4	Dérivation . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>12</b>
4.1	Nombres complexes de module 1 . . . . .	12
4.2	Forme trigonométrique d'un nombre complexe . . . . .	13
4.3	Racines de l'unité . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Rédaction et vocabulaire</b>	<b>14</b>
5.1	Démonstration . . . . .	14
5.2	Vocabulaire . . . . .	14

# 1 Ensembles et applications

## 1.1 Ensembles

### Définition 0.1.1 Élément

On appelle **élément** d'un ensemble  $E$ , tout objet qui appartient à  $E$ . On note  $x \in E$  : «  $x$  **appartient** à  $E$  ». Dans ce cas on dit que  $x$  est un **élément** de  $E$  et que  $E$  **contient**  $x$ .

REMARQUE : On note  $\emptyset$  l'**ensemble vide**.  $\forall x, x \notin \emptyset$ .

### Définition 0.1.2 Sous-ensemble

Soit  $E, F$  deux ensembles. On dit que  $F$  est un **sous-ensemble** de  $E$  si :  $\forall x \in F, x \in E$ . Dans ce cas on note  $F \subset E$ , on dit aussi que  $F$  est **inclus** dans  $E$  ou que  $F$  est une **partie** de  $E$ .

REMARQUES :

1.  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  : l'ensemble des nombres entiers naturels est inclus dans l'ensemble des nombres entiers relatifs.
2.  $2 \in \mathbb{N}$
3.  $\{2\} \subset \mathbb{N}$
4.  $\emptyset \subset \mathbb{N}$

### Définition 0.1.3 Égalité d'ensembles

Deux ensembles  $E, F$  sont égaux si et seulement s'ils contiennent les mêmes éléments.

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

### Définition 0.1.4 Produit d'ensembles

Soit  $E, F$  deux ensembles, on peut construire un nouvel ensemble appelé **produit** de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$  dont les éléments sont  $(x, y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ .

EXEMPLES :

1.  $(3, -5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$
2.  $(\pi, e) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

## 1.2 Quantificateurs et propositions

### Quantificateurs

Soit  $P(x)$  une **proposition** dépendant d'un élément  $x \in E$ .

- La proposition  $\forall x \in E, P(x)$ , signifie que tout élément  $x$  de  $E$  vérifie la proposition  $P(x)$

EXEMPLE :  $P(x) : x \geq 0$ , avec  $E = \mathbb{N}$ , on a  $\forall x \in E, P(x)$

On a alors :  $\forall x, P(x) \iff \{x \in E, P(x)\} = E$

- La proposition  $\exists x \in E, P(x)$ , signifie qu'il existe un élément  $x$  de  $E$  qui vérifie la proposition  $P(x)$

EXEMPLE :  $P(x) : x^2 = 0$ , avec  $E = \mathbb{R}$ , on a  $\exists x \in E, P(x)$

On a alors :  $\exists x, P(x) \iff \{x \in E, P(x)\} \neq \emptyset$

- La proposition  $P \Rightarrow Q$  signifie que si  $P$  est vraie alors  $Q$  est vraie.

### Négation d'une proposition

On note  $\overline{P}$  la **négation** de la proposition  $P$ .

EXEMPLES :

1. Si  $P(x) : x = 2$  alors  $\overline{P(x)} : x \neq 2$
2. Si  $P(x) : x \geq 0$  alors  $\overline{P(x)} : x < 0$

On a alors :  $\overline{P \text{ ou } Q} \iff \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$  ainsi que :  $\overline{P \text{ et } Q} \iff \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$

De plus :  $\overline{\forall x, P(x)} \iff \exists x \in E, \overline{P(x)}$  ainsi que :  $\overline{\exists x, P(x)} \iff \forall x \in E, \overline{P(x)}$

EXEMPLE : Une fonction  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  si :  $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq M$

Une fonction  $f$  est donc non bornée si :  $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| > M$

Si  $P \Rightarrow Q$  cela veut dire que si  $Q$  est faux,  $P$  ne peut pas être vraie (c'est ce qu'on appelle la **contraposée**), ainsi :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

On en déduit également que  $P \Rightarrow Q$  signifie :  $\overline{\overline{Q} \text{ et } \overline{P}}$  c'est-à-dire  $\overline{P} \text{ ou } Q$ . On peut aussi voir que  $P \Rightarrow Q$  signifie :  $(P \text{ et } Q) \text{ ou } \overline{Q}$ , et en développant on a :  $(P \text{ ou } \overline{Q}) \text{ et } (Q \text{ ou } \overline{Q}) = (P \text{ ou } \overline{Q})$

### 1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

#### Définition 0.1.5 Ensemble des parties

L'ensemble des sous-ensembles de  $E$  est appelé **ensemble des parties** de  $E$ , et est noté  $\mathcal{P}(E)$ . Ainsi :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

EXEMPLE : Si  $E = \{a, b, c\}$  alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$ , si  $|E| = n$  alors  $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$

#### Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit  $A, B$  deux parties de  $E$ .

- **Complémentaire** :  $\bar{A}$  est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à  $A$  :

$$\forall x \in E, x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

EXEMPLE : Dans l'ensemble des réels, si  $A = \{0\}$ , alors  $\bar{A} = \mathbb{R}^*$

- **Intersection**  $A \cap B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  et à  $B$  : on dit « A inter B » :

$$\forall x \in E \quad x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

EXEMPLE :  $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

- **Réunion** :  $A \cup B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  : on dit « A union B »

$$\forall x \in E \quad x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

- **Différence** :  $A \setminus B$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent à  $A$  mais pas à  $B$  : on dit « A privé de B »

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

EXEMPLE :  $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{R}_- = \mathbb{R}_+^*$

### 1.4 Application

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles, et  $f : E \longrightarrow F$  une **application**.

- $E$  est appelé **ensemble de départ**
- $F$  est appelé **ensemble d'arrivée**
- Si  $f(x) = y$  alors  $y$  est appelé **image** de  $x$  par  $f$ , et  $x$  est un **antécédent** de  $y$  par  $f$ .

EXEMPLES :

1. L'application  $\begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto x \end{cases}$  est appelé application **identité** de  $E$  et est notée  $Id_E$ .  $\forall x \in E, Id_E(x) = x$
2. Si  $f : E \longrightarrow F$ , alors  $f \circ Id_E = f$  et  $Id_F \circ f = f$

#### Définition 0.1.6 Restriction, Prolongement

- Soit  $A \subset E$  un ensemble et  $f : E \longrightarrow F$  une application. On appelle **restriction** de  $f$  à  $A$  (ou sur  $A$ ) l'application :

$$f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto f(x) \end{cases}$$

- Soit  $A \subset E$  un ensemble et  $f : A \longrightarrow F$  une application. On appelle **prolongement** de  $f$  à  $E$  (ou sur  $E$ ) tout application  $g$  qui vérifie :

$$g : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ \forall x \in A & g(x) = f(x) \end{cases}$$

Dans ce cas  $f$  est une **restriction** de  $g$  à  $A$

### Injectivité et surjectivité

**Définition 0.1.7 Injection, Surjection, Bijection**

Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application.

- On dit que  $f$  est **injective** (ou que c'est une **injection**) si pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet **au plus** une solution, c'est-à-dire :

$$\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

- On dit que  $f$  est **surjective** (ou que c'est une **surjection**) si pour tout  $y \in F$ , l'équation  $y = f(x)$  admet **au moins** une solution, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

- On dit que  $f$  est **bijjective** (ou que c'est une **bijection**) si elle est **injective** et **surjective**.

EXEMPLES :

1. L'application  $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$  est **injective** mais pas **surjective**
2. L'application  $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$  est **surjective** mais pas **injective**
3. L'application  $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$  est **surjective** et **injective**, elle est **bijjective**.

**Propriété 0.1.8 Bijection réciproque**

Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application **bijjective**. Il existe une application de  $F$  dans  $E$ , notée  $f^{-1}$  telle que :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_E$$

L'application  $f^{-1}$  est appelé **bijection réciproque** de  $f$

DÉMONSTRATION

Si  $f$  est bijective alors tout élément  $y \in F$  a un unique antécédent  $x \in E$  par  $f$ . On peut donc définir  $f^{-1}$  par  $\forall y \in F, f^{-1}(y) = x$ , où  $x$  est l'unique solution de  $f(x) = y$ . Dans ce cas  $\forall y \in F, f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$  et  $\forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x$

**Image directe et image réciproque****Définition 0.1.9 Image directe**

Soit  $f : E \longrightarrow F$  une application. Soit  $A \subset E$ . On appelle **image** de  $A$  par  $f$  l'ensemble des images des éléments de  $A$ , noté  $f(A)$ . On a :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F \quad \text{et} \quad \forall y \in F, y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

REMARQUES :

1. Si  $f : E \longrightarrow F$ , on appelle **image** de  $f$  l'ensemble  $f(E) = \{f(x), x \in E\} \subset F$ .
2.  $f$  est **surjective** si et seulement si  $f(E) = F$

EXEMPLE : Si  $f : x \longmapsto \sin x$  alors  $f([0, \pi]) = [0, 1]$

**Définition 0.1.10 Image réciproque**

Soit  $f : E \longrightarrow F$  et  $B \subset F$ . On appelle **image réciproque** de  $B$  par  $f$ , l'ensemble des antécédents des éléments de  $B$ , noté  $f^{-1}(B)$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E \quad \text{et} \quad \forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

REMARQUE : Même si  $f$  n'est pas bijective, on peut définir une image réciproque.

EXEMPLE : Soit  $f : x \longmapsto x^2$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  n'est pas bijective et  $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$

## 1.5 Majorant, borne et maximum

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ .

### Définition 0.1.11 Majorée, Minorée, Bornée

- $A$  est dite **majorée**, s'il existe un élément  $M$  de  $E$  supérieur ou égal à tous les éléments de  $A$  :

$$\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M$$

$M$  est appelé **majorant** de  $A$ .

- $A$  est dite **minorée**, s'il existe un élément  $m$  de  $E$  inférieur ou égal à tous les éléments de  $A$  :

$$\exists m \in E, \forall x \in A, x \geq m$$

$m$  est appelé **minorant** de  $A$ .

- Si  $A$  est **majorée** et **minorée**, on dit que  $A$  est **bornée**.

EXEMPLES :

1. Soit  $A = [0, 1]$ ,  $A$  est **majorée** par 1, ou 2.  $A$  est **minorée** par 0, ou  $-4$ .  $A$  est **bornée**
2. Soit  $A = [-12, +\infty[$ .  $A$  n'est pas **majorée**.  $A$  n'est pas **bornée**.

### Définition 0.1.12 Borne supérieure, Borne inférieure

- Soit  $M$  un majorant de  $A$ . Si  $M$  est le plus petit majorant, on dit que  $M$  est la **borne supérieure** de  $A$ . Si elle existe, elle est unique. On note  $\sup A = M$
- Soit  $m$  un minorant de  $A$ . Si  $m$  est le plus grand minorant, on dit que  $m$  est la **borne inférieure** de  $A$ . Si elle existe, elle est unique. On note  $\inf A = m$

EXEMPLES :

1. Soit  $A = [0, 1]$ , 1 est la **borne supérieure** de  $A$ , 2 n'est pas la **borne supérieure** de  $A$ .  $\sup A = 1$
2. Soit  $A = [-12, +\infty[$ ,  $-12$  est la **borne inférieure** de  $A$ ,  $A$  n'a pas de **borne supérieure**.  $\inf A = -12$

### Définition 0.1.13 Maximum, Minimum

- Soit  $M$  la borne supérieure de  $A$ . Si  $M \in A$ , alors on dit que  $M$  est le **maximum** de  $A$ . S'il existe, il est unique. On note  $\max A = M$
- Soit  $m$  la borne inférieure de  $A$ . Si  $m \in A$ , alors on dit que  $m$  est le **minimum** de  $A$ . S'il existe, il est unique. On note  $\min A = m$

EXEMPLES :

1. Soit  $A = [0, 1]$ , 0 est le **minimum** de  $A$ . 1 n'est pas le **maximum**.  $A$  n'a pas de **maximum**.  $\min A = 0$
2. Soit  $A = [-12, +\infty[$ ,  $-12$  est le **minimum** de  $A$ .  $A$  n'a pas de **maximum**.  $\min A = -12$

## 2 Nombres réels

### Définition 0.2.14 Intervalle

Une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un **intervalle** si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a \leq x \leq b \implies x \in I)$$

EXEMPLES :

1.  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$  est un **intervalle**.
2.  $\mathbb{R}^*$  n'est pas un **intervalle**.

RAPPELS :

1.  $a$  et  $b$  sont appelés **bornes** ou **extrémités** de l'intervalle
2. Tous les  $x$  tels que  $a < x < b$  sont dits **à l'intérieur** de  $I$ .
3. Les intervalles du type  $[a, b]$  sont dits **fermés**
4. Les intervalles du type  $]a, b[$  sont dits **ouverts**
5. Les intervalles du type  $]a, b]$  ou  $[a, b[$  ne sont ni **ouverts** ni **fermés**

6.  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}$  sont **ouverts** et **fermés**.
7. On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
8. Un intervalle fermé borné est appelé **segment**.  $[-1, 4]$  est un segment.

### Définition 0.2.15 Voisinage

- Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on appelle **voisinage** de  $a$  tout intervalle qui contient un intervalle fermé centré en  $a$  :  $[a - \alpha, a + \alpha]$
- On appelle **voisinage** de  $+\infty$  tout intervalle non majorée :  $[\alpha, +\infty[$  ou  $]\alpha, +\infty[$

EXEMPLES :

1.  $] -1, 5]$  est un **voisinage** de 0, mais n'est pas un **voisinage** de 5 car si  $\alpha > 0$ , alors  $[5 - \alpha, 5 + \alpha] \not\subset ] -1, 5]$
2.  $[5, +\infty[$  est un voisinage de  $+\infty$ ,  $] -\infty, 6]$  est un voisinage de  $-\infty$

### Propriété 0.2.16 Borne supérieure

- Soit  $A$  une partie non vide **majorée** de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  possède une **borne supérieure** notée  $\sup A$
- Soit  $A$  une partie non vide **minorée** de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  possède une **borne inférieure** notée  $\inf A$

## 3 Suites et fonctions

### 3.1 Fonctions usuelles

#### Logarithme et exponentielle

On a les identités suivantes :  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$      $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$      $e^a \times e^b = e^{a+b}$      $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Attention :  $\ln a \times \ln b \neq \ln(a+b)$      $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln(a-b)$

RAPPELS :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$

#### Fonctions circulaires

Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b \quad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

RAPPELS :

1.  $\cos' x = -\sin x$      $\sin' x = \cos x$      $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
2.  $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$      $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$      $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

#### Fonctions hyperboliques

On appelle **sinus hyperbolique**  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , notée sh en français.

On appelle **cosinus hyperbolique**  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , notée ch en français

On appelle **tangente hyperbolique**  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ , notée th en français.

RAPPELS :

1.  $\cosh x + \sinh x = e^x$      $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
2.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
3.  $\cosh' x = \sinh x$      $\sinh' x = \cosh x$      $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

On appelle **argument sinus hyperbolique** la bijection réciproque de  $\sinh$ , on la note  $\text{Argsh}$

On appelle **argument cosinus hyperbolique** la bijection réciproque de  $\cosh$ , on la note  $\text{Argch}$

On appelle **argument tangente hyperbolique** la bijection réciproque de  $\tanh$ , on la note  $\text{Argth}$

$$\text{RAPPELS : } \text{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{Argth}' x = \frac{1}{1 - x^2}$$

### 3.2 Limites et convergence

#### Définition 0.3.17 Limite finie

➤ On dit que la fonction  $f$  admet une **limite finie** en  $a$  si

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , et on dit que «  $f$  **tend** vers  $b$  en  $a$  »

➤ On dit que la fonction  $f$  admet une **limite finie** en  $+\infty$  si

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ , et on dit que «  $f$  **tend** vers  $b$  en  $+\infty$  »

➤ On dit que la suite  $(u_n)$  admet une **limite finie** si :

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - b| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$ , et on dit que «  $(u_n)$  **tend** vers  $b$  » ou que «  $(u_n)$  **converge** vers  $b$  »

EXEMPLE :

#### Définition 0.3.18 Limite infinie

➤ On dit que  $f$  admet pour **limite**  $+\infty$  en  $a$  si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$$

Dans ce cas on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , et on dit que «  $f$  **tend** vers  $+\infty$  en  $a$  »

➤ On dit que  $f$  admet pour **limite**  $+\infty$  en  $+\infty$  si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$$

Dans ce cas on note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , et on dit que «  $f$  **tend** vers  $+\infty$  en  $+\infty$  »

➤ On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour **limite**  $+\infty$  si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$$

Dans ce cas on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , et on dit que «  $(u_n)$  **tend** vers  $+\infty$  » ou que «  $(u_n)$  **diverge** vers  $+\infty$  »

METTRE DES EXEMPLES

REMARQUES :

1. Les notations pour une limite de fonction sont :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$
2. Les notations pour une limite de suite sont :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$  et  $u_n \rightarrow b$
3. Les autres notations ne sont pas correctes. On n'utilise pas la flèche  $\rightarrow$  pour autre chose.
4. Si on effectue une limite sur  $x$ , alors il n'y a pas de  $x$  dans le résultat :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+x} \neq \ln x \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^2} \neq \frac{1}{n} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} \neq \frac{e^x}{x}$$

5. On effectue le calcul avant, et on passe à la limite à la fin :

- pour  $n \neq 0$ ,  $\frac{n}{1+n^2} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$  or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n} = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0$
- $\frac{e^x}{1+x} = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$  or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+x} = +\infty$

#### Opération sur les limites

- Addition des limites : si  $f$  et  $g$  ont une **limite finie** en  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- Produit de limites : si  $f$  et  $g$  ont une **limite finie** en  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Attention : il faut démontrer que  $f$  et  $g$  ont une limite, sinon on ne peut pas utiliser les formules d'addition ou de multiplication.

Par exemple :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin(x) - \sin(x)) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  (n'a pas de sens).

### Limites et inégalités

Si  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > b$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq b$ , on appelle cela le passage aux inégalités larges.

De même si  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

EXEMPLE :

$$1. \forall x > 0, \quad \frac{1}{x} > 0 \text{ mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

### Croissances comparées

On a :

$$\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \ln^\alpha x = 0$$

En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

On a :

$$\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\beta e^{\alpha x} = 0$$

En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

### Théorème de Bolzano-Weierstrass

#### Définition 0.3.19 Suite extraite

Soit  $(u_n)$  une suite, et une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. On a donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$ . Toute suite  $(v_n)$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$  est appelée **suite extraite** de  $(u_n)$

EXEMPLES :

1.  $v_n = u_{2n}$  est une **suite extraite** de  $(u_n)$
2.  $v_n = u_{2n+1}$  est une **suite extraite** de  $(u_n)$

#### Propriété 0.3.20 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle **bornée**, on peut extraire une suite **convergente**

EXEMPLE : Soit  $u_n = (-1)^n$ , est une suite bornée, non convergente.  $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$  est une suite constante, donc convergente.

## 3.3 Continuité

#### Définition 0.3.21 Continuité

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **continue** en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

REMARQUES :

1. Si  $f$  est définie en  $a \in \mathbb{R}$ , alors elle est **continue** en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
2. L'ensemble  $\mathcal{C}^0$  est l'ensemble des fonctions continues.
3. L'ensemble  $\mathcal{C}^1$  est l'ensemble des fonctions dérivables et dont la dérivée est continue.
4. L'ensemble  $\mathcal{C}^n$  est l'ensemble des fonctions  $n$  fois dérivables et dont la dérivée  $n$ -ème est continue.

**Propriété 0.3.22 Caractérisation séquentielle**

Soit  $f$  une fonction de  $I$  sur  $\mathbb{R}$ .  $f$  est continue en  $a \in I$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $I$  qui tend vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))$  tend vers  $f(a)$

**DÉMONSTRATION**

$\Rightarrow$  : Montrons que si  $f$  est continue en  $a$  alors pour toute suite  $(x_n)$  qui tend vers  $a$ ,  $(f(x_n))$  tend vers  $f(a)$ .

Soit  $(x_n)$  une suite qui tend vers  $a$ , on a donc  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \varepsilon$ ,

puisque  $f$  est continue en  $a$ ,  $\forall \alpha > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \alpha$

Soit  $\alpha > 0$  donc  $\exists \delta > 0 \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \alpha$ . D'après la limite de  $(x_n)$ , en prenant  $\varepsilon = \delta$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \delta$  et donc  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f(x_n) - f(a)| \leq \alpha$ , ce qui montre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$

$\Leftarrow$  : Montrons que si pour toute suite  $(x_n)$  qui tend vers  $a$ ,  $(f(x_n))$  tend vers  $f(a)$  alors  $f$  est continue en  $a$ . On démontre la contraposée, on suppose  $f$  non continue en  $a$  et on va trouver une suite  $(x_n)$  qui tend vers  $a$  avec  $(f(x_n))$  qui ne tend pas vers  $f(a)$

Puisque  $f$  ne tend pas vers  $f(a)$ ,  $\exists \alpha > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I, |x - a| \leq \delta$  et  $|f(x) - f(a)| > \alpha$

En particulier il existe un  $x_n \in I$  tel que  $|x_n - a| \leq 2^{-n}$  et  $|f(x_n) - f(a)| > \alpha$  et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En répétant l'opération, on obtient une suite de  $I$  qui tend vers  $a$  (car  $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq 2^{-n}$ ) mais  $|f(x_n) - f(a)| > \alpha$ , c'est-à-dire que  $(f(x_n))$  ne tend pas vers  $f(a)$ .

**Définition 0.3.23 Prolongement par continuité**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$ , et  $a \in I$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $I \setminus \{a\}$ . Si  $f$  admet une limite finie en  $a$ , notée  $b$ , alors on peut **prolonger**  $f$  en une fonction **continue** sur  $I$  de la façon suivante :

$$g : \begin{cases} \text{si } x \in I \setminus \{a\}, & g(x) = f(x) \\ \text{si } x = a, & g(a) = b \end{cases}$$

La fonction  $g$  obtenue est continue, on dit que  $g$  est un **prolongement** de  $f$  sur  $I$ . On dit aussi qu'on a effectué un **prolongement par continuité** de  $f$ .

EXEMPLE : Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{\sin x}{x} \end{cases}$ . On sait alors que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , on peut alors **prolonger**  $f$  par

**continuité** sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $\forall x \neq 0, g(x) = f(x)$  et  $g(0) = 1$ . La fonction  $g$  est un **prolongement continu** de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Propriété 0.3.24 Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I$  alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall b \in [f(x), f(y)], \quad \exists a \in [x, y], \quad f(a) = b$$

**DÉMONSTRATION**

Soit  $(x, y) \in I^2$  et  $b \in ]f(x), f(y)[$  (Si  $b = f(x)$  ou  $b = f(y)$  alors  $b$  est bien atteint par  $f$ ). Soit  $E = \{a \in [x, y], f(a) \leq b\}$ .  $E$  est un ensemble non vide car  $x \in E$  et  $E$  est majoré par  $y$ , donc d'après la propriété de la borne supérieure,  $E$  admet une borne supérieure noté  $A$ .

Il existe une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $E$  qui converge vers  $A$ . Comme  $f$  est continue,  $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(A)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leq b$ , donc  $f(A) \leq b$ .

Puisque  $f(y) > b$ ,  $A \neq y$ , or pour tout  $a \in ]A, y[, f(a) > b$ , donc  $\lim_{a \rightarrow A^+} f(a) \geq b$ , et comme  $f$  est continue,  $\lim_{a \rightarrow A^+} f(a) = f(A)$ , donc  $f(A) \geq b$

Conclusion :  $f(A) = b$

**Propriété 0.3.25 Image d'un intervalle**

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un **intervalle**.

**DÉMONSTRATION**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $f$  définie sur  $I$ . Soit  $(c, d) \in f(I)^2$ , il existe donc  $(a, b) \in I$  tels que  $c = f(a)$  et  $d = f(b)$ . Soit  $y$  tel que  $c \leq y \leq d$ .

Puisque  $f$  est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x$ , avec  $a \leq x \leq b$ , tel que  $y = f(x)$ , et comme  $I$  est un intervalle,  $x \in I$ , donc  $y \in f(I)$ . Ce qui montre que  $f(I)$  est un intervalle.

**Propriété 0.3.26 Image d'un segment**

Une fonction **continue** sur un segment  $[a, b]$  est **bornée** et **atteint ses bornes**. L'image de  $[a, b]$  est donc un **segment** :

$$f([a, b]) = [m, M] \quad \text{où} \quad m = \inf_{[a, b]} f = \min_{[a, b]} f \quad \text{et} \quad M = \sup_{[a, b]} f = \max_{[a, b]} f$$

**DÉMONSTRATION**

Soit  $f$  définie sur  $I$  et  $[a, b] \subset I$ . On va montrer que  $f$  est majorée et atteint sa borne sup, c'est-à-dire que  $f$  a un maximum sur  $[a, b]$ .

Soit  $J = f([a, b])$  et  $M = \sup J \in \overline{\mathbb{R}}$ . Il existe une suite  $(y_n)$  d'éléments de  $J$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = M$ .

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n \in f([a, b])$  donc il existe  $x_n \in [a, b]$  tel que  $f(x_n) = y_n$ .

La suite  $(x_n)$  est bornée, on peut donc extraire une suite convergente (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass), on la note  $(x_{\varphi(n)})$ . Soit  $l$  la limite de cette suite. Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$ , en passant à la limite  $a \leq l \leq b$ .  $f$  est continue en  $l$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$ .

Puisque  $(y_n)$  admet une limite, toute suite extraite a la même limite, donc  $y_{\varphi(n)} \rightarrow M$ , ce qui montre que  $M = f(l) \in f([a, b])$  et que  $M$  est fini (car image de  $l$  par  $f$ ). On a donc montré que  $f$  était majorée (car  $M$  est fini), et que sa borne sup ( $M$ ) était atteinte (en  $x = l \in [a, b]$ ).

La démonstration est identique pour montrer que  $f$  est minorée et atteint sa borne inf.

Conclusion :  $J = [m, M]$

**METTRE UN SCHÉMA****Définition 0.3.27 Fonction Lipschitzienne**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $f$  est **lipschitzienne** sur  $I$  si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Dans ce cas on dit aussi que  $f$  est **k-lipschitzienne**.

**3.4 Dérivation****Définition 0.3.28 Maximum local, Minimum local**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $x_0 \in I$ .

➤ On dit que  $f$  admet un **maximum local** en  $x_0$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in I \cap ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

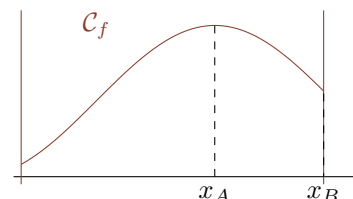
➤ On dit que  $f$  admet un **minimum local** en  $x_0$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in I \cap ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Si  $x_0$  est un minimum ou un maximum local, on dit que  $x_0$  est un **extremum local**.

**EXEMPLES :**

1. La fonction  $f$  admet un **maximum local** en  $x_A$ .  
La fonction  $f$  admet un **minimum local** en  $x_B$ .
2. La fonction  $x \mapsto x^2$  admet un **minimum local** en 0
3. La fonction  $g : \begin{cases} ]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \end{cases}$  admet un maximum en 1,  $g$  n'admet pas de minimum, en revanche elle admet une borne inférieure :  $\inf g = 0$

**Propriété 0.3.29 Extremum local**

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  admet un **extremum local** en  $x_0 \in I$  et si  $f$  est **dérivable** en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$

**DÉMONSTRATION**

On suppose que  $f$  atteint un maximum local en  $x_0$ . Donc :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

À gauche :  $\forall x_1 \in ]x_0 - \alpha, x_0[ \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  ie  $f'(x_0) \geq 0$

À droite :  $\forall x_2 \in ]x_0, x_0 + \alpha[ \quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$  ie  $f'(x_0) \leq 0$

REMARQUE :

1. Il est indispensable que l'intervalle de départ soit **ouvert**.
2. Si l'intervalle de départ n'est pas ouvert, on peut appliquer le théorème sur les extremum locaux atteints sur les points **intérieurs**.

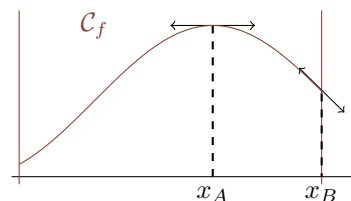
EXEMPLES :

1. La fonction  $f : ]0, x_B[ \rightarrow \mathbb{R}$  admet un **maximum local** en  $x_A$ , l'intervalle de départ  $]0, x_B[$  est **ouvert**, donc  $f'(x_A) = 0$  : tangente horizontale.

La fonction  $f : ]0, x_B]$  admet un **minimum local** en  $x_B$  mais l'intervalle de départ  $]0, x_B]$  **n'est pas ouvert**.

2. La fonction  $x \mapsto x^2$  admet un **minimum local** en 0. Sa dérivée en 0 est nulle.

3. La fonction  $g : \begin{cases} ]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \end{cases}$  admet un maximum en 1, mais  $]0, 1]$  **n'est pas ouvert**.  $\max g = 1$ ,  $g'(x) = 1$  et  $g'(1) = 1 \neq 0$ .  $g$  n'admet pas de minimum, en revanche elle admet une borne inférieure :  $\inf g = 0$ .



REMARQUE : La réciproque est fausse :  $x \mapsto x^3$  a une dérivée nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local.

### Propriété 0.3.30 Théorème de Rolle

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , **continue** sur un **segment**  $[a, b]$  et **dérivable** sur  $]a, b[$ .

Si  $f(a) = f(b)$  alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$

DÉMONSTRATION

$f$  est continue sur  $[a, b]$  donc  $f([a, b]) = [m, M]$ . On va montrer qu'une de ces deux bornes est un extremum local :

- si  $m = M$ ,  $f$  est constante et  $f'$  est nulle sur  $]a, b[$
- si  $m < M$ , alors on ne peut pas avoir  $m = f(a)$  et  $f(b) = M$  (ou l'inverse), car  $f(a) = f(b)$ . Donc une de ces deux bornes est atteinte en un point  $c \in ]a, b[$ , c'est donc un **extremum local** atteint sur un point **intérieur**, et d'après la propriété précédente,  $f'(c) = 0$

### Propriété 0.3.31 Théorème des accroissements finis (égalité)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , **continue** sur un **segment**  $[a, b]$  et **dérivable** sur  $]a, b[$ , alors :

$$\exists c \in ]a, b[ \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DÉMONSTRATION

On pose  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ , et on va appliquer le théorème de Rolle à  $g$ .  $g$  est bien continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . En outre :

$$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction  $g$ , et ainsi il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ , c'est-à-dire :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

**Propriété 0.3.32 Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , **continue** sur le segment  $[a, b]$  et **dérivable** sur  $]a, b[$ , alors

- Si  $\forall x \in ]a, b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$  alors  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
- $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{]a, b[} (|f'(x)|) |b-a|$

**DÉMONSTRATION**

- Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ , on en déduit que  $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$ , d'où le résultat.
- si  $f'$  n'est pas bornée, le résultat n'est pas intéressant. Si  $f'$  est bornée, notons  $M = \sup_{]a, b[} |f'(x)|$ , on a donc  $\forall x \in ]a, b[ \quad -M \leq f'(x) \leq M$ . On en déduit :  $-M \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$  et ainsi  $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

## 4 Nombres complexes

**RAPPELS :**

- $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad z = x + iy$  avec  $i^2 = -1$ .
- $x$  est appelé **partie réelle** et  $y$  est appelé **partie imaginaire**. On note  $\operatorname{Re}(z) = x$  et  $\operatorname{Im}(z) = y$
- $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$
- $\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$  et  $\operatorname{Im}(zz') \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  est appelé **module** de  $z$ .
- On a les formules suivantes :  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  et  $|zz'| = |z| |z'|$
- $\bar{z} = x - iy$  est appelé **conjugué** de  $z$ .  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$ .
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' \quad |\bar{z}| = |z| \quad z\bar{z} = |z|^2$
- Si  $A(x_A, y_A)$  est un point du plan,  $z_A = x_A + iy_A$  est appelée **affixe** du point  $A$ .

### 4.1 Nombres complexes de module 1

**Propriété 0.4.33 Groupe  $U$  des nombres complexes de module 1**

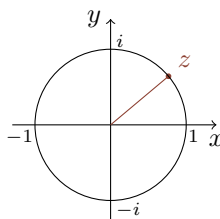
L'ensemble  $(U, \times)$  des nombres complexes de module 1 est un **groupe**. C'est-à-dire que :

- $\forall (z, z') \in U^2 \quad zz' \in U$
- $1 \in U$
- $\forall z \in U, \quad \frac{1}{z} \in U$

**DÉMONSTRATION**

- $\forall (z, z') \in U^2, \quad |zz'| = |z| |z'| = 1 \times 1 = 1$  donc  $zz' \in U$
- $|1| = 1$  donc  $1 \in U$
- $\forall z \in U, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = 1$  donc  $\frac{1}{z} \in U$

L'ensemble  $U$  peut se représenter sous forme de cercle de centre  $O$  et de rayon 1, appelé **cercle trigonométrique**.



**Propriété 0.4.34**

Tout nombre complexe  $z \in U$  peut s'écrire :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Soit  $\varphi : \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$ .  $\varphi$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$\varphi'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = i\varphi(\theta)$$

On utilise donc la notation  $\varphi(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

On obtient alors les formules :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

## 4.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

**Définition 0.4.35 Forme trigonométrique**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z$  s'écrit sous la forme :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Cette écriture est appelé **forme trigonométrique** de  $z$ , le réel  $\theta$  est appelé **argument** de  $z$ , noté

RAPPELS :

1.  $\arg zz' = \arg z + \arg z'$
2.  $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$
3.  $\arg \bar{z} = -\arg z$
4.  $\arg z^n = n \arg z$

## 4.3 Racines de l'unité

**Propriété 0.4.36 Racine n-ème de l'unité**

L'ensemble des solutions de l'équation  $z^n = 1$  est

$$U_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Tout nombre  $z$  tel que  $z^n = 1$  est appelé **racine n-ème de l'unité**.

DÉMONSTRATION

On cherche une solution sous la forme  $z = |z|e^{i\theta}$ . On a alors

$$z^n = 1 \Leftrightarrow |z|^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

EXEMPLES :

1.  $U_1 = \{1\}$
2.  $U_2 = \{1, -1\}$
3. On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ,  $U_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \bar{j}\}$
4.  $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$
5. On note souvent  $w_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , alors  $U_n = \{w_n^0, w_n^1, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}\}$  et  $|U_n| = n$

**Propriété 0.4.37 Interprétation géométrique**

Les éléments de  $U_n$  forment un polygone régulier à  $n$  côtés

DÉMONSTRATION

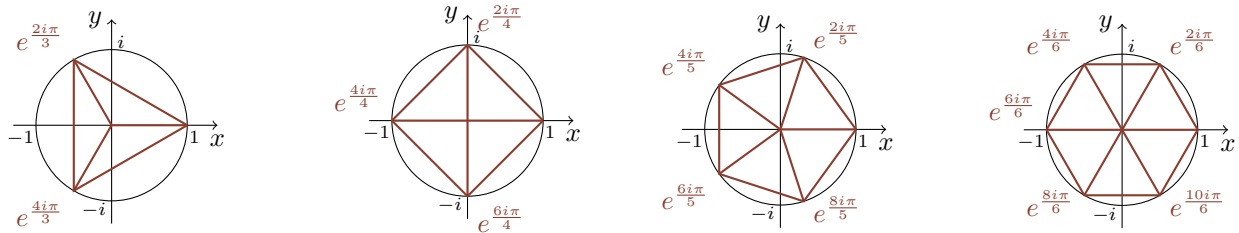
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , les racines  $n$ -ème de 1 sont les  $w_n^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ . Il faut montrer que les côtés ont même longueur et que les angles sont égaux :

- La longueur du  $k$ -ème côté est :  $|w_n^k - w_n^{k-1}| = |w_n^{k-1}| \cdot |w_n - 1| = |w_n - 1|$   
Ce nombre ne dépend pas de  $k$ , donc tous les côtés ont la même longueur.
- L'angle (interne) entre le côté  $k-1$  et le côté  $k$  est

$$\arg(w_n^{k-1} - w_n^k) - \arg(w_n^{k-1} - w_n^{k-2}) = \arg\left(\frac{w_n^{k-1} - w_n^k}{w_n^{k-1} - w_n^{k-2}}\right) = \arg\left(\frac{w_n^{k-1}}{w_n^{k-2}} \cdot \frac{1 - w_n}{w_n - 1}\right) = \arg -w_n = \frac{2\pi}{n} - \pi$$

Ne dépend pas de  $k$ , donc tous les angles sont égaux.

ILLUSTRATION : Racines 3e, 4e, 5e, 6e de l'unité :



## 5 Rédaction et vocabulaire

### 5.1 Démonstration

- Les symboles «  $\exists, \forall, \Rightarrow$  » ne doivent pas être utilisés dans une phrase en français.

ON ÉCRIT

- La fonction  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
- Si  $x > 0$  alors  $\frac{1}{x} > 0$

ON N'ÉCRIT PAS

- $\exists M$  tel que pour tout  $x, f(x) \leq M$
- $x > 0 \longrightarrow \frac{1}{x} > 0$  (On n'utilise pas la flèche  $\longrightarrow$ )

- Lorsqu'on veut démontrer une propriété qui commence par «  $\forall x \in \mathbb{R}$  », la démonstration commence par

« Soit  $x \in \mathbb{R}$  » et on montre que la propriété est vraie pour ce «  $x$  ».

Après « Soit  $x \in \mathbb{R}$  »,  $x$  est fixé, on ne peut plus écrire  $x = \dots$ .

Exemple : Démontrons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . Il faut démontrer que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$

Il y a deux «  $\forall$  », donc on doit utiliser deux fois « Soit », un fois pour  $\varepsilon$ , une fois pour  $x$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on peut poser  $A = \frac{1}{\varepsilon} + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ . Soit  $x > A$ , alors  $x > A > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ , et donc  $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ , ce qui montre

la propriété.

### 5.2 Vocabulaire

#### Nombres et opérations

1. Égal, être égal à :  $a = 7$  «  $a$  égale sept » ou «  $a$  est égal à sept » « ça fait sept » « ça donne sept »
2. Ne pas être égal à, différent de :  $a \neq 6$  «  $a$  n'est pas égal à six » ou «  $a$  est différent de six »
3. Addition, ajouter, plus :  $a + 3$  «  $a$  plus trois », on a fait une addition. Ajouter  $a$  et trois.
4. Soustraction, soustraire, moins :  $a - 5$  «  $a$  moins 5 », on a fait une soustraction. Soustraire 5 à  $a$ .
5. Positif, négatif :  $a > 0$  «  $a$  est positif »,  $a < 0$  «  $a$  est négatif »
6. Plus grand, supérieur :  $a > 3$  «  $a$  est plus grand que trois. » ou «  $a$  est supérieur à trois. »
7. Plus petit, inférieur :  $a < -2$  «  $a$  est plus petit que moins deux »
8. inégalité stricte :  $a > 3$  est strictement supérieur à (/ plus grand que) trois.
9. inégalité large :  $a \geq 3$  est supérieur (/ plus grand) ou égal à trois.
10. Multiplier par, fois, multiplication, produit :  $a \times 2$  «  $a$  fois 2 » ou «  $a$  multiplié par 2 ». On a fait une multiplication.  $a \times 2$  est un produit.
11. Diviser par, sur, division :  $\frac{a}{8}$  «  $a$  sur huit » ou «  $a$  divisé par huit ». On a fait une division.  $\frac{a}{8}$  est un quotient ou une fraction.  $a$  est le numérateur, 8 est le dénominateur.
12. Développer, développement :  $2(a + 5) = 2a + 10$  : on dit qu'on développe le produit  $2(a + 5)$

13. Factoriser, factorisation :  $2a + 10 = 2(a + 5)$  : on dit qu'on factorise  $2a + 10$ . On fait une factorisation.

### Vocabulaire de la démonstration

#### LA CONSÉQUENCE ET LA CONDITION

1.  $A \implies B$  : « Si  $A$  alors  $B$  », «  $A$  implique  $B$  »
2. Donc, par conséquent, ainsi, d'où :  $a > 0$  donc (/ par conséquent / ainsi / d'où)  $\frac{1}{a} > 0$
3. Conclure, conclusion : à la fin d'une démonstration : « on peut conclure que  $f$  est positive, donc la propriété est vraie. »
4. Vérifier : La fonction  $f$  vérifie la condition du théorème.

#### LA CAUSE

1. Puisque, comme : Puisque (/ comme)  $a \in [2, 7]$ ,  $a$  est positif.
2. Or :  $f(0) = 0$ , or  $f$  est croissante, donc  $f(1)$  est positif.
3. Car :  $f(1)$  est positif car  $f$  est croissante et  $f(0) = 0$ .

#### PROPOSITION

1. Soit : Soit  $a \in \mathbb{R}$
2. Il existe, existence :  $\exists a > 0$  « il existe un  $a$  positif »
3. Tel que : il existe  $a$  tel que  $f(a) = 0$ . Soit  $a$  tel que  $f(a) = 0$
4. Pour tout, quel que soit :  $\forall a \in \mathbb{R}$  « Pour tout réel  $a$  », « Quel que soit le réel  $a$  »
5. ie, c'est-à-dire : ie = c'est-à-dire :  $a \in \mathbb{Q}$  c'est-à-dire que  $a = \frac{p}{q}$
6. Unique, unicité : Si  $x \neq 0$  il existe un unique réel  $y$  tel que  $yx = 1$ . Il y a unicité.

#### DIVERS

1. En outre, de plus :
2. Tous :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $\lambda_i = 0$  « Tous les  $\lambda_i$  sont nuls »
3. Aucun, tous non :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $\lambda_i \neq 0$  « Aucun des  $\lambda_i$  est nul », « Les  $\lambda_i$  sont tous non nuls »
4. Non tous :  $\exists \lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  : « Il existe un  $\lambda_i$  non nul »  $\Leftrightarrow$  « Les  $\lambda_i$  sont non tous nuls »
5. Sauf : Soit  $E = \{2, -4, 7, 3\}$ . Dans  $E$  tous les nombres sont positifs, sauf  $-4$ .

### Suites et fonctions

1. Croissant, décroissant :  $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow$  la suite  $(u_n)$  est croissante.  $(x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)) \Leftrightarrow$  la fonction  $f$  est décroissante.
2. Tendre vers, converge, convergent :  $u_n \longrightarrow 5$  : La suite  $(u_n)$  tend (/ converge) vers 5.  $(u_n)$  est une suite convergente.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  : la fonction  $f$  tend vers  $b$  quand  $x$  tend vers  $a$ .
3. Diverge, divergent :  $u_n = (-1)^n$  : La suite  $u_n$  diverge (/ est divergente).
4. Continue, continuité :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$  La fonction  $f$  est continue en  $a$
5. Dérivée, dérivable, dérivation :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b \Leftrightarrow$  La fonction  $f$  est dérivable en  $a$ .  $f'$  est la dérivée de  $f$ .
6. Atteindre, être atteint :  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  :  $f(2) = 0,5$  donc 0,5 est atteint par  $f$ .  $f$  atteint 0,5 en 2. 0 n'est pas atteint par  $f$ , mais  $f$  tend vers 0 en  $+\infty$ .

### Équations

1. Admettre : L'équation  $x + 2 = 5$  admet une solution :  $x = 3$ . L'équation  $x^2 = -1$  n'admet pas de solution réelle.
2. Solution : 3 est solution de l'équation  $x + 2 = 5$ .
3. Vérifier : 3 vérifie l'équation  $x + 2 = 5$ .