Vers l'université

$\ast \ast \ast$

Ensembles et applications

Exercice 1 – ★ *Quantificateurs*

Écrire à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes ainsi que leurs négations :

1. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
2. Il existe un entier multiple de tous les autres.
3. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers
5. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
6. Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe

Exercice 2 – ★ *Formules de distributivité*

Soit A, B, C trois sous-ensembles de E.

1. Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Démontrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 3 – ★ *Injectivité, surjectivité*

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
3. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective
5. Trouver deux applications f, g non bijectives telles que $g \circ f$ soit bijective.

Exercice 4 – ★ *Image directe, image réciproque*

1. Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f = \exp$, $I = [0,1[$
   (b) $f = \ln$, $I =]0,1]$
   (c) $f : x \mapsto x^2$, $I =]-1,2]$
   (d) $f = \sin$, $I = [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$
2. Déterminer $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f = \exp$, $I = [0,1[$
   (b) $f = \ln$, $I =]0,+\infty[$
   (c) $f : x \mapsto x^2$, $I =]-1,2]$
   (d) $f = \sin$, $I = [0,1[$

Exercice 5 – ★ *Image réciproque*

Soit E, F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$. Soit B, B' deux parties de F

1. Démontrer que $B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
2. En déduire que : $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
3. Démontrer que : $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
4. Démontrer que : $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

Nombres réels

Exercice 6 – ★ *Borne supérieure*

Dans chaque cas, déterminer si les ensembles suivants sont : majoré, minoré, borné. Puis dire s'ils admettent des bornes supérieure et inférieure. Ces bornes sont-elles des maximum ou minimum ?

a. $\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b. $\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ c. $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{p},\ (n,p) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

Exercice 7 – ★ *Borne supérieure*

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que : $(\forall \varepsilon > 0 \quad a \leq b + \varepsilon) \Longrightarrow a \leq b$
2. Soit A, B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, montrer que :
   (a) $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$
   (b) $A \cup B$ est majorée. Déterminer $\sup(A \cup B)$
   (c) $A \cap B$ est majorée. Dans le cas où elle admet une borne supérieure, donner un majorant de $\sup(A \cap B)$.

Exercice 8 – ★ *Borne supérieure*

Soit A, B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose : $A+B = \{a+b,\ (a,b) \in A \times B\}$

1. Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure.
2. Montrer que sa borne supérieure est $\sup A + \sup B$

Exercice 9 – ★ *Inégalité triangulaire*

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, montrer $\left||x| - |y|\right| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$.

Exercice 10 – ★ *Somme géométrique*

Soit $x \neq 1$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Exercice 11 – ★ *Somme des entiers et compagnie*

1. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$, avec $\forall n \leq 0, S_n = 0$. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)$

2. En déduire que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3. Soit $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. En écrivant $(n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$, montrer que

$$(n+1)^3 = 3T_n + 3S_n + n + 1$$

4. En déduire T_n

5. Soit $W_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. En écrivant $S_n^2 = \sum_{k=0}^{n} S_k^2 - S_{k-1}^2$, montrer que $W_n = S_n^2$.

Exercice 12 – ★ *Somme télescopique*

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

3. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$

Exercice 13 – ★ *Produit télescopique*

1. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1}$

2. Calculer $\prod_{k=1}^{n} 1 - \dfrac{1}{k^2}$

Exercice 14 – ★★ *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

Soit $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$

1. En écrivant $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

2. On suppose qu'au moins un $a_i \neq 0$, montrer qu'il y a égalité si et seulement il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad b_i = \lambda a_i$

3. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, montrer que $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sqrt{n}$

Suites et fonctions

Fonctions usuelles

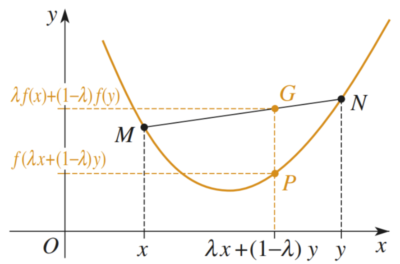
Exercice 15 – ★★ *Fonction convexe - Inégalité de Jensen*

L'exercice a pour objectif de rappeler la définition d'une fonction convexe, et quelques propriétés.

Définition : On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Interprétation graphique :
Si $M, N \in \mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous du segment $[MN]$:



Propriété (Inégalité de Jensen) : Soit f une fonction convexe sur I, $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \Longrightarrow \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

1.a. Démontrer par récurrence sur n l'inégalité de Jensen.
1.b. En déduire que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs non tous nuls alors :

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

Propriété : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, la fonction : $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

Démonstration
2.a. Soit $x_0, x_1, x_2 \in I$, tels que $x_0 < x_1 < x_2$. On suppose f convexe sur I.
Montrer que $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$, ce qui montre la croissance de l'application.

2.b. Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x < y$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ avec $\lambda \in]0,1[$. On suppose l'application $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ croissante. Montrer que $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, c'est-à-dire que f est convexe.

PROPRIÉTÉ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

Démonstration
3.a. Soit f une fonction dérivable et convexe sur I. Montrer que f' est croissante.
3.b. On suppose que f est dérivable et f' croissante sur I.
Soit $a < b \in I$, et $D : y = mx + p$ la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. En étudiant la fonction $g : x \longmapsto f(x) - (mx+p)$, montrer que f est convexe.

PROPRIÉTÉ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.

PROPRIÉTÉ : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

Démonstration
4.a. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, convexe et dérivable sur I. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $x_0 \in I$, équation du type $y = T_{x_0}(x)$.
4.b. Montrer que $\forall x \in I, f(x) \geq T_{x_0}(x)$.

Exercice 16 – ★ *Logarithme, exponentielle et convexité*

1. Montrer que $f : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.
3. Montrer que $g : x \longmapsto -\ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire que : $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 17 – ★ *Racine carrée et inégalité arithmético-géométrique*

1. Montrer que $f : x \longmapsto -\sqrt{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$
2. En déduire que $\forall x,y > 0,\ \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} \geq \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$
3. Montrer que $\forall x,y > 0,\ \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$
4. À l'aide de l'inégalité de Jensen, montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Exercice 18 – ★★ *Inégalité de Hölder*

1. Montrer que $\forall q \geq 1,\ x \longmapsto x^q$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   En utilisant $a_i b_i = a_i^p \frac{b_i}{a_i^{p-1}}$ et l'inégalité de Jensen, montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Fonctions trigonométriques

Exercice 19 – ★ *Formulaire trigonométrique*

1. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$. En utilisant $\vec{u} \cdot \vec{v}$, montrer :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

2. En utilisant $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et la question 1, déterminer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
3. En déduire $\cos 2x, \sin 2x, \tan(a+b)$ et $\tan 2x$
4. En utilisant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ montrer : $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$ et $\tan' x = 1 + \tan^2 x$
5. Écrire sous forme de produit $\cos a + \cos b$ et $\cos a - \cos b$
6. Écrire sous forme de produit $\sin a + \sin b$ et $\sin a - \sin b$

Exercice 20 – ★★ *Rigolo*
Montrer :

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\cdots\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$$

Exercice 21 – ★ *Une inégalité trigonométrique*
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\sin x) > \sin(\cos x)$

Exercice 22 – ★ *Dérivée des fonctions circulaires réciproques*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective dérivable et f^{-1} sa bijection réciproque. Déterminer $(f^{-1})'(x)$.
2. En déduire $\arccos' x$, $\arcsin' x$ et $\arctan' x$

Exercice 23 – ★ *Fonction hyperboliques réciproques*

1. En résolvant $x = \sinh y$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argsh} x = \ln f(x)$ avec f à déterminer.
2. En résolvant $x = \cosh y$, montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{Argch} x = \ln g(x)$ avec g à déterminer.
3. En résolvant $x = \tanh y$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argth} x = \dfrac{1}{2}\ln h(x)$ avec h à déterminer.

Exercice 24 – ★ *Majorant, borne, extremum*

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Donner un minorant et un majorant de f
2. Montrer qu'elle admet des bornes supérieure et inférieure et déterminer ces bornes.
3. f admet-elle un maximum ? un minimum ?

Limites

Exercice 25 – ★ *Limite d'une somme*

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \longrightarrow a$ et $v_n \longrightarrow b$

1. À l'aide de la définition d'une limite, montrer que $u_n + v_n \longrightarrow a + b$
2. À l'aide de la définition d'une limite, montrer que $u_n v_n \longrightarrow ab$

Exercice 26 – ★ *Croissances comparées*

1. En utilisant l'inégalité $\ln x < x$ montrer : $\forall \alpha > 0,\ \ln x^{\alpha} < x^{\alpha}$
2. En déduire que : $\forall \beta > 0\ \forall x \geq 1 \quad 0 \leq \dfrac{\ln x}{x^{\beta}} < \dfrac{x^{\alpha-\beta}}{\alpha}$
3. En déduire que : $\forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\beta}} = 0$
4. En déduire que : $\forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} x^{\beta} \ln x = 0$
5. Montrer que : $\forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{\beta}} = +\infty$
6. En déduire que : $\forall \beta > 0 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^{\beta} e^x = 0$

Exercice 27 – ★ *Suite bornée*

1. Montrer que tout suite convergente est bornée.
2. Donner une suite bornée non convergente.

Exercice 28 – ★★ *Suite croissante et limite*

Soit (u_n) une suite croissante.

1. On suppose (u_n) majorée, on note A sa borne supérieure.
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A - \varepsilon$
3. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
4. On suppose maintenant que (u_n) n'est pas majorée, montrer qu'elle tend vers $+\infty$.

Exercice 29 – ★ *Limite et suite extraite*

1. Montrer que si (u_n) admet une limite (même infinie) alors toute suite extraite de (u_n) admet la même limite.
2. Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite.

Exercice 30 – ★★ *Théorème de Bolzano-Weierstrass*

L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass grâce au lemme des pics.

Définition : On appelle pic d'une suite (u_n) un élément u_m de cette suite tel que : $\forall n \geq m \quad u_n \leq u_m$

Soit (u_n) une suite.

1. On suppose que (u_n) possède une infinité de pics, montrer qu'on peut extraire une suite décroissante de (u_n).
2. On suppose que (u_n) possède un nombre fini de pic, montrer qu'on peut extraire une suite croissante de (u_n).

   Ces deux résultats constituent le lemme des pics
3. Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass grâce au lemme des pics.

Continuité

Exercice 31 – ★ *Limite et continuité*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$. Montrer : $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \geq A\ f(x) > 0$

Exercice 32 – ★ *Continuité et extremum*

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée, puis qu'elle admet un minimum.

Exercice 33 – ★ *Fonction continue, limite et borne*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bornée sur sur un voisinage de a.
2. En déduire qu'une fonction continue en a est bornée au voisinage de a.

Exercice 34 – ★ *Prolongement par continuité*

1. Prolonger $x \longmapsto x \ln x$ afin de la rendre continue sur $\mathbb{R}_+$
2. Prolonger $x \longmapsto \dfrac{x}{\tan x}$ afin de la rendre continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
3. Prolonger $x \longmapsto \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ afin de la rendre continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 35 – ★ *Continuité et inégalité*

Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall x \in [a, b] \quad f(x) > g(x)$.
Montrer : $\exists \delta > 0\ \forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x) + \delta$

Exercice 36 – ★ *Fonction Lipschitzienne*

1. Soit f une fonction lipschitzienne sur un intervalle I. Montrer que f est continue sur I.
2. Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$

3. Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$

Exercice 37 – ★ *Point fixe*

Soit f une fonction continue sur un segment $I = (a, b]$ tel que $f(I) \subset I$. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire que : $\exists c \in [a, b]\ f(c) = c$

Exercice 38 – ★★ *Une équation fonctionnelle difficile*

Déterminer une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)\cos x$$

Dérivation

Exercice 39 – ★ *Fonction dérivable ?*

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 40 – ★ *Limite et dérivée*

Soit f dérivable x_0. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$

Exercice 41 – ★ *Inégalité et convexité*

1. Soit f, g deux fonctions convexes sur I. Montrer que $f + g$ est convexe sur I.
2. Montrer que $x \longmapsto -\sin x$ est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
3. En déduire $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\quad \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

Exercice 42 – ★ *Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ou pas.*

Soit $f : \begin{cases} f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est dérivable en 0.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 43 – ★★

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$
2. On suppose que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$.
   Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$

Exercice 44 – ★★ *Une identité sur les coefficients binomiaux*

1. Calculer la dérivée n-ème de $x^n(1-x)^n$
2. Déterminer de deux manières le coefficient devant x^n de la dérivée n-ème de $x^n(1-x)^n$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$

Exercice 45 – ★ *Prolongement de la dérivée*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b]$.
Montrer que si f' a une limite finie en a alors f est dérivable en a et $f'(a) = \displaystyle\lim_{x \to a} f'(x)$

Exercice 46 – ★ *Série harmonique*

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k+1} \leq \ln \dfrac{k+1}{k} \leq \dfrac{1}{k}$
2. En déduire un encadrement de la suite :
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$
   C'est-à-dire : $\quad \ldots \leq S_n \leq \ldots$
3. Montrer que la suite (S_n) converge.

Exercice 47 – ★★ *Accroissement finis et règle de L'Hôpital*

Dans cet exercice nous démontrons une forme généralisée des accroissements finis et l'utilisons afin de démontrer la règle de L'hôpital.

1. Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. En étudiant $\varphi(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$ démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$
2. Soit f, g deux fonctions continues sur $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$ telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $\forall x \in V \setminus \{x_0\},\ g'(x) \neq 0$
   (a) Montrer que : $\forall x \in V \setminus \{x_0\},\ g(x) \neq 0$
   (b) À l'aide de la question 1, montrer que si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ alors $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

   Le résultat de la question 2 est connue sous le nom de règle de L'Hôpital, mais n'est valable que pour une limite en $a \in \mathbb{R}$, et pas en l'infini. Dans la prochaine question, nous montrons que sous des hypothèses plus fortes, on peut étendre ce résultat pour une limite à l'infini.
3. Soit f, g deux fonctions dérivables sur $[a, +\infty[$, telles que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $g'(x) > 0$ sur $[a, +\infty[$. On suppose que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $A \geq a$ tel que :
   $$\forall x \geq A \qquad \int_A^x (L - \varepsilon) g'(t)dt \leq \int_A^x f'(t)dt \leq \int_A^x (L + \varepsilon) g'(t)dt$$
   (b) En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 48 – ★★ *Théorème de Darboux*

1. Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone.
2. Montrer que si $a, b \in I$, avec $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

On a donc montré que si f est la dérivée d'une fonction, elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Darboux.

Nombres complexes

Exercice 49 – ★ *Complexe de module 1*

Soit $z, z' \in \mathcal{C}$ tels que $|z| = |z'| = 1$, et $1 + zz' \neq 0$ Montrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$

Exercice 50 – ★ *Angle moitié*

Écrire sous forme de produit :

a. $e^{i\theta} + 1$

b. $e^{i\theta} - 1$

c. $e^{\frac{i\pi}{2n}} - e^{\frac{i(n+1)\pi}{2n}}$

d. $e^{\frac{ik\pi}{2n}} + e^{\frac{i\pi}{2}}$

Exercice 51 – ★ *Sommes trigonométriques*

a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos kx$

b. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin kx$

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cos kx$

d. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx$

e. Calculer $D_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} ke^{ikx}$ avec $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

f. Calculer $K_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k$

Exercice 52 – ★ *Racines de l'unité*

On note $\forall k \in [\![0, n-1]\!]\}, w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ les racines n-ème de l'unité.

1. Simplifier $P(z) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (z - w_k)$.
2. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} w_k$.

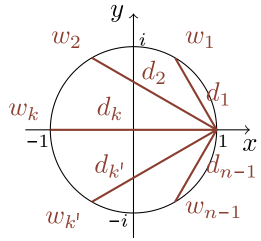
Exercice 53 – ★★ *Un cosinus*

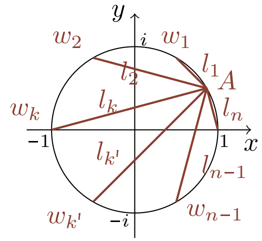
Calculer $\cos \frac{2\pi}{5}$

Exercice 54 – ★★ *Triangle équilatéral*

Soit A, B, C trois points non alignés d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$

Exercice 55 – ★★ *Le produit de Wallis*





Sur le schéma ci-dessus on a noté pour $k \in [\![1, n]\!]$, $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in U_n$ les racines n-ème de l'unité. d_k est la distance entre le point w_n et le point w_k. l_k est la distance entre le point A et le point w_k. Le point A se situe sur le cercle, au milieu entre $w_n = 1$ et $w_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Déterminer d_k en fonction de w_k.
2. Calculer $D_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} d_k$.
3. Donner l'affixe z_A du point A. Calculer z_A^n.
4. Calculer $L_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} l_k$.
5. Soit $W_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1} d_k}{\prod_{k=1}^{n-1} l_k}$. Calculer W_n à l'aide de D_n et L_n
6. Calculer $\dfrac{d_k}{l_k}$, puis à l'aide $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, donner $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{d_k}{l_k}$.
7. En déduire que $\dfrac{d_1}{l_1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{1}$, $\dfrac{d_2}{l_2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{4}{3}$
8. Montrer que $d_{n-k} = d_k$ puis calculer l_{n-k}. En déduire $\dfrac{d_{n-k}}{l_{n-k}}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{d_{n-k}}{l_{n-k}}$.
9. En déduire que $\dfrac{d_{n-1}}{l_{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{d_{n-2}}{l_{n-2}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{4}{5}$
10. En déduire la limite du produit de Wallis :

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

Dans cette dernière question on a fait une permutation entre une limite et un produit infini, ce qu'il faudrait justifier, mais cela sort du cadre de l'exercice.