Dimension des espaces vectoriels

$\ast \ast \ast$

Familles libres

Exercice 1 – ★

1. La famille $\mathcal{F} = \{(1,1),(1,-1)\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?
2. La famille $\mathcal{F} = \{(1,-1),(-2,2)\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?

Correction

1. On pose $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$. On pose $u = (x,y)$, on cherche $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $u = ae_1 + be_2$, si ces réels existent la famille est génératrice.
   On a donc $\begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$
   On a déterminé les réels a et b qui conviennent, donc la famille est **génératrice**.
2. On pose $e_1 = (1,-1)$ et $e_2 = (-2,2)$. On pose $u = (x,y)$, on cherche $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $u = ae_1 + be_2$, si ces réels existent la famille est génératrice.
   On a donc $\begin{cases} x = a-2b \\ y = -a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \end{cases}$
   Si $x \neq -y$, il n'y a pas de réels a,b qui conviennent, donc la famille **n'est pas génératrice**.

Exercice 2 – ★

Les familles composées des vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

a. $x_1 = (1,1,0)$ $\quad x_2 = (0,1,1)$
b. $x_1 = (0,0,1)$ $\quad x_2 = (0,1,1)$ $\quad x_3 = (1,1,1)$
c. $x_1 = (0,1,-1)$ $\quad x_2 = (1,0,-1)$ $\quad x_3 = (1,-1,0)$
d. $x_1 = (1,1,-1)$ $\quad x_2 = (1,-1,1)$ $\quad x_3 = (-1,1,1)$ $\quad x_4 = (1,1,1)$

Correction

a. Soit λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$
Donc $(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
Donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$

b. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$
Donc $(\lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$ donc $\lambda_3 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$ donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$

c. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$
Donc $(\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1 & = \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1 = -\lambda_2 = \lambda_3$ conviennent, donc $\boxed{\text{la famille n'est pas libre}}$
On a $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

d. On remarque $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$ donc $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ donc $\boxed{\text{la famille n'est pas libre}}$

Exercice 3 – ★★

1. Soit $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, avec $w = \alpha u + \beta v$.
   Montrer que $\mathcal{G} = \{u, v\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, u\}$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E, avec $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Montrer que $\mathcal{G} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est génératrice de E.
   On a donc montré qu'en enlevant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres dans une famille génératrice, on obtient encore une famille génératrice.

Correction

1. $u = u$, $v = v$ et $w = \alpha u + \beta v$ donc tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{G}$, donc d'après une propriété de cours, la famille $\mathcal{G}$ est génératrice.
2. $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in G$ et u est combinaison linéaire des vecteurs x_i donc tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{G}$, donc d'après une propriété de cours, la famille $\mathcal{G}$ est génératrice.

Exercice 4 – ★★

Les familles composées des vecteurs suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ sont-elles libres ou liées ?

a. $f_1 : x \mapsto \cos x \qquad f_2 : x \mapsto \sin x \qquad f_3 : x \mapsto 1$

b. $f_1 : x \mapsto \cos^2 x \qquad f_2 : x \mapsto \cos 2x \qquad f_3 : x \mapsto 1$

c. $f_i : x \mapsto \exp(\lambda_i x)$ pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

d. $f_k : x \mapsto \sin kx \qquad k \in [\![1, n]\!]$

Correction

a. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$
   En $x = 0$: $\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \qquad (1)$
   En $x = \frac{\pi}{2}$: $\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad (2)$
   En $x = \pi$: $-\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \qquad (3)$
   Donc $(1) + (3)$ $\lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $\boxed{\text{la famille est libre}}$

b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos 2x - 1 = 0 = 2f_1 - f_2 - f_3$
   $\boxed{\text{Donc la famille n'est pas libre}}$

c. Il y a deux méthodes
   <u>Méthode 1</u>
   Soit $\lambda_{k_0} = \max(\lambda_i)$
   Si $\lambda_{k_0} > 0$:
   On a alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i x) = \exp(\lambda_{k_0} x) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp((\lambda_i - \lambda_{k_0})x) = 0$
   Puisque $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$, on a $i \neq k_0 \Rightarrow \lambda_i - \lambda_{k_0} < 0$ et ainsi $\lim_{x \to +\infty} \exp((\lambda_i - \lambda_{k_0})x) = 0$
   Donc $\lim_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp((\lambda_i - \lambda_{k_0})x) = \alpha_{k_0} = 0$
   Si $\lambda_{k_0} \leq 0$: alors tous les λ_i sont négatifs. On pose alors $\lambda_{k_0} = \min(\lambda_i)$
   Puisque $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$, on a $i \neq k_0 \Rightarrow \lambda_i - \lambda_{k_0} > 0$ et ainsi $\lim_{x \to -\infty} \exp((\lambda_i - \lambda_{k_0})x) = 0$
   Donc $\lim_{x \to -\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp((\lambda_i - \lambda_{k_0})x) = \alpha_{k_0} = 0$
   On peut recommencer la même opération en posant $\lambda_{k_1} = \max_{i \neq k_0}(\lambda_i)$ tant que $\max(\lambda_i) > 0$, sinon on pose $\lambda_{k_1} = \min_{i \neq k_0}(\lambda_i)$
   On montre ainsi que tous les $\alpha_i = 0$ et donc la famille est libre

   <u>Méthode 2</u> : Par récurrence
   Soit (H_n) « la famille à n éléments est libre »

   Initialisation : La famille $(\exp(\lambda_1 x))$ est libre

Hérédité : On suppose H_n vraie, montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \exp(\lambda_i x) = 0 \quad (1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i \exp(\lambda_i x) = 0 \quad (2) \text{ par dérivation}$$

$$(2) - \lambda_{n+1}(1) : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) \exp(\lambda_i x) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) \exp(\lambda_i x)$$

D'après H_n la famille $(\exp(\lambda_i x))_{1\le i\le n}$ est libre donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$
Or $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \neq \lambda_{n+1} \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i = 0$

Donc $(1) \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \exp(\lambda_i x) = \alpha_{n+1} \exp(\lambda_{n+1} x) = 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$

Donc H_{n+1} est vraie, et ainsi pour tout entier naturel n non nul la famille $(\exp(\lambda_i x))_{1\le i\le n}$ est libre.

d. Soit (H_n) : « la famille à n éléments est libre »

Initialisation : La famille $(\sin(kx))$ est libre
Hérédité : On suppose H_n vraie, montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \sin(kx) = 0 \quad (1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_i(-k^2) \sin(kx) = 0 \quad (2) \text{ en dérivant deux fois}$$

$$(2)+(n+1)^2(1) : \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k(-k^2+(n+1)^2) \sin(kx) = 0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(-k^2+(n+1)^2) \sin(kx)$$

D'après H_n la famille $(\sin(kx))_{1\le k\le n}$ est libre donc
$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k(-k^2 + (n+1)^2) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha_k = 0$

Donc $(1) \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \sin(kx) = \alpha_{n+1} \sin((n+1)x) = 0 \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0$

Donc H_{n+1} est vraie, et ainsi pour tout entier naturel n non nul la famille $(\sin(kx))_{1\le k\le n}$ est libre.

Exercice 5 – ★★

1. Soit $\mathcal{F} = \{u, v\}$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Soit $w \in E$, qui n'est pas une combinaison linéaire de u et v. Montrer que $\mathcal{G} = \{u, v, w\}$ est libre.
2. $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une famille libre d'un espace vectoriel E, et $u \in E$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i, montrer que $\mathcal{G} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, u\}$ est libre.

Correction

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $au + bv + cw = 0$, alors $cw = -au - bv$
   Si $c \neq 0$ alors $w = -\frac{1}{c}(au + bv)$, donc w est combinaison linéaire de u et v, ce qui est faux. Donc $c = 0$, et alors $au + bv = 0$ et comme $\mathcal{F}$ est libre, cela implique $a = b = 0$ et en conclusion la famille $\mathcal{G}$ est libre.
2. Soit (λ_i) tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} u = 0$.

   Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $u = -\dfrac{1}{\lambda_{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et dans ce cas u est combinaison linéaire des x_i, ce qui est faux. Donc $\lambda_{n+1} = 0$, et alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$, et comme $\mathcal{F}$ est libre, cela implique $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 0$ et en conclusion la famille $\mathcal{G}$ est libre.

Exercice 6 – ★★

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. On veut montrer que $f = \lambda Id_E$. On va montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ \lambda_x = \lambda_y$

1. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que (x, y) soit une famille liée, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$
2. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que (x, y) soit une famille libre. En calculant $f(x + y)$ montrer que $\lambda_x = \lambda_y$

Correction

1. Soit (x, y) un famille liée, on a ainsi $y = \alpha x$, avec $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0$.
   On a alors $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y = \alpha\lambda_y x$
   De plus $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x = \alpha\lambda_y x \Rightarrow \alpha(\lambda_x - \lambda_y)x = 0$
   Et puisque $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0$, $\boxed{\text{on a } \lambda_x = \lambda_y}$
2. Soit (x, y) une famille libre. On a $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$
   De plus $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ et $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$
   On a donc $\lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y \Rightarrow (\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$
   Or (x, y) est libre donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x) = 0$ et $(\lambda_{x+y} - \lambda_y) = 0$
   Et ainsi $\boxed{\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y}$

Bases et dimension

Exercice 7 – ★

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs :
$u = (1, 1, -1)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (1, -1, 1)$

1. Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$
2. Donner les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base.

Correction

1. On a $\frac{u+w}{2} = (1, 0, 0) = e_1$, $\frac{u+v}{2} = (0, 1, 0)e_2$ et $\frac{v+w}{2} = (0, 0, 1) = e_3$, or (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ donc (u, v, w) est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$
   En outre (u, v, w) est une famille génératrice à 3 éléments dans un espace de dimension 3, c'est donc une base.
2. On a $x = (x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1\dfrac{(u + w)}{2} + x_2\dfrac{(u + v)}{2} + x_3\dfrac{(v + w)}{2} = \dfrac{(x_1 + x_2)}{2}u + \dfrac{(x_2 + x_3)}{2}v + \dfrac{(x_1 + x_3)}{2}w$
   Avec $x = (2, 1, 3)$ on a $x = \dfrac{3}{2}u + 2v + \dfrac{5}{2}w$

Exercice 8 – ★

Soit $P_1(X) = (X-1)^2, \quad P_2(X) = X^2, \quad P_3(X) = (X+1)^2$

1. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Montrer $1, X, X^2 \in \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
3. En déduire que (P_1, P_2, P_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$
4. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $1 + X + X^2 = aP_1 + bP_2 + cP_3$.

Correction

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0$, alors
$$\begin{cases} a + c = 0 \ (1) \\ -2a + 2c = 0 \ (2) \\ a + b + c = 0 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3) - (1) : b = 0 \\ (2) + 2(1) : c = 0 \\ (3) : a = 0 \end{cases}$$
Donc la famille est libre.
2. $1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_3), \quad X = \frac{1}{4}(-P_1 + P_3) \quad X^2 = P_2$
3. Ainsi $\mathcal{F} = (1, X, X^2) \subset \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$, or $\mathcal{F}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une famille génératrice. Ainsi $\mathcal{G}$ engendre une famille génératrice, c'est donc une famille génératrice.
4. $1 + X + X^2 = \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_3$

Exercice 9 – ★★ *Polynômes de Bernstein*

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$

1. Pour $n = 2$, calculer P_0, P_1 et P_2.
2. Pour $n = 2$, démontrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Démontrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction

1. $P_0(X) = (1-X)^2$, $P_1(X) = X(1-X)$, $P_2(X) = X^2$
2. $P_0(X) + 2P_1(X) + P_2(X) = 1$, $P_1(X) + P_2(X) = X$, $P_2(X) = X^2$, donc (P_0, P_1, P_2) est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$
$aP_0 + bP_1 + cP_2 = a + (-2a + b)X + (-a - b + c)X^2 = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$, donc la famille est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$
3. **Libre** : Le terme de plus bas degré dans P_k est de degré k. Soit (λ_i) tels que $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. S'il existe des λ_i non nuls alors on appelle k le plus petit entier tel que $\lambda_k \neq 0$, alors le terme de degré k de $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$ est $\lambda_k X^k$, ce qui montre que $\lambda_k = 0$. Ce qui montre que tous les λ_i sont nuls, et donc la famille est libre.
Génératrice : En s'inspirant du cas $n = 2$ on calcule :
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k P_k(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1$$
De même en s'inspirant du cas $n = 2$, on calcule :
$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k P_{n-k}(X) = \sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k X^{n-k}(1-X)^k = X^p \sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k X^{n-k-p}(1-X)^k = X^p$$
Ainsi $(1, X, \dots, X^n) \in \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_n)$ donc la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est génératrice.

Exercice 10 – ★

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

a. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$

b. $F = \{(a, a+b, b) \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}\}$

c. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ , x = 2y = 3z\}$

d. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 3y - z = 0\}$, $F + G$

e. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ , x + y = 0,\ y + z = 0,\ z + t = 0,\ t + x = 0\}$

f. $F = \text{Vect}((1,2,-1,1), (-3,-2,3,2), (-1,0,1,1), (2,3,-2,1))$

g. $\{P \in \mathbb{R}_4[X], P(1) = 0\}$

h. ★ Ensemble des suites arithmétiques

i. $F = \{g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid g'' = 0\}$

Correction

a. $u = (x,y,z) \in F \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 3z \Leftrightarrow u = (2y - 3z, y, z) = y(2,1,0) + z(-3,0,1) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((2,1,0),(-3,0,1))$

Donc $F = \text{Vect}((2,1,0),(-3,0,1))$ On a donc $\dim F \leq 2$, la famille $((2,1,0),(-3,0,1))$ est génératrice de F. Il faut vérifier qu'elle est libre.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a(2,1,0) + b(-3,0,1) = (0,0,0)$ donc $(2a - 3b, a, b) = (0,0,0)$ donc $a = b = 0$ donc la famille est libre et ainsi la famille $((2,1,0),(-3,0,1))$ est une base de F qui $\boxed{\text{est de dimension 2}}$

b.

c. $u = (x,y,z) \in F \Leftrightarrow x = 2y = 3z \Leftrightarrow u = (6a, 3a, 2a) = a(6,3,2) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}(6,3,2)$

Donc $F = \text{Vect}((6,3,2))$. La famille $((6,3,2))$ est donc génératrice de F, elle est aussi libre car elle contient un seul élément non nul. $\boxed{\text{Donc } \dim F = 1}$

d. $u \in F \Leftrightarrow x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + 2y \Leftrightarrow u = (x, y, x + 2y) = x(1,0,1) + y(0,1,2) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1,0,1)(0,1,2)) = F$

De plus $a(1,0,1) + b(0,1,2) = (0,0,0) \Rightarrow a = b = 0$ $\boxed{\text{donc } \dim F = 2}$

De même $u \in G \Leftarrow z = -x + 3y \Leftrightarrow u = x(1,0,-1) + y(0,1,3) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1,0,-1),(0,1,3)) = G$

En outre $a(1,0,-1) + b(0,1,3) = (0,0,0) \Rightarrow a = b = 0$ $\boxed{\text{donc } \dim G = 2}$

<u>Méthode 1</u> pour $F + G$

Il est clair que $F + G \subset \mathbb{R}^3$ donc $\dim(F + G) \leq 3$

$F + G = \text{Vect}((1,0,1)(0,1,2)) + \text{Vect}((1,0,-1),(0,1,3)) = \text{Vect}((1,0,1)(0,1,2),(1,0,-1),(0,1,3))$

Cette famille n'est pas libre, sinon on aurait $\dim(F + G) \geq 4$

On va montrer que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$, on pose $f_1 = (1,0,1)$, $f_2 = (0,1,2)$ et $f_3 = (0,1,3)$

On a $f_3 - f_2 = (0,0,1) = e_3$, puis $f_2 - 2e_3 = (0,1,0) = e_2$ et $f_1 - e_3 = (1,0,0) = e_1$

Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments sont des combinaisons linéaires d'éléments de (f_1, f_2, f_3), la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et ainsi $F + G = \mathbb{R}^3$ donc $\dim(F + G) = 3$

<u>Méthode 2</u> pour $F + G$

On veut utiliser la formule $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, on doit donc déterminer $F \cap G$

$u \in F \cap G \Leftrightarrow x + 2y - z = -x + 3y - z = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z & = x + 2y \\ x + 2y & = -x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = x + 2y \\ 2x & = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = 5x \\ 2x & = y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u = (x, 2x, 5x) = x(1,2,5) = \text{Vect}(1,2,5)$

Donc $\dim F \cap G = 1$ et ainsi $\boxed{\dim(F + G) = 2 + 2 - 1 = 3}$

e. $u \in F \Leftrightarrow x + y = 0 = y + z = z + t = t + x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y & = 0 \\ y + z & = 0 \\ z + t & = 0 \\ t + x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = -x \\ z & = -y = x \\ t & = -z = -x \\ t & = -x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u = (x, -x, x, -x) = x(1,-1,1,-1) \in \text{Vect}((1,-1,1,-1)) = F$

$\boxed{\text{Donc } \dim F = 1}$ car la famille $((1,-1,1,-1))$ est libre.

f.

g. $P \in F \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow P(X) = (X - 1)Q(X)$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ car $\deg(P) = \deg(X - 1) + \deg(Q) = 1 + \deg(Q) \leq 4$ donc $\deg(Q) \leq 3$

Comme Q peut être choisi sans condition, on a $\boxed{\dim F = \dim \mathbb{R}_3[X] = 4}$

h. Une suite arithmétique est du type $u_{n+1} = u_n + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

On a alors $u_1 = u_0 + k$ et ainsi $k = u_1 - u_0$, ainsi la suite (u_n) est caractérisée par ses deux premiers termes u_0 et u_1.

On construit alors l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} \{\text{suites arithmétiques}\} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$

φ est alors surjective car pour $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on peut trouver (u_n) arithmétique avec $u_0 = a$ et $u_1 = b$ dans ce cas $(k = b - a)$ et alors $\varphi(u_n) = v$.

En outre $\varphi(u_n) = (0,0) \Rightarrow u_0 = u_1 = 0 \Rightarrow k = 0$ et alors (u_n) est la suite constante nulle, donc φ est une application injective. En conclusion φ est un isomorphisme. On en déduit $\dim\{\text{suites arithmétiques}\} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

i. $g \in F \Leftrightarrow g'' = 0 \Leftrightarrow g = ax + b \Leftarrow g = af_1 + bf_2$ avec

$f_1 = Id$ et $f_2 : x \mapsto 1$. Donc $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$

En outre $af_1 + bf_2 = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ donc la famille (f_1, f_2) est libre, et ainsi, $\boxed{\dim F = 2}$

Exercice 11 – ★

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :
$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, b - 2c + d = 0\}$ $\quad G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, a = d, b = 2c\}$

1. Donner une base de F et de G.
2. Donner une base de $F \cap G$.
3. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Correction

1. • $u = (a,b,c,d) \in F \Leftrightarrow d = -b + 2c \Leftrightarrow u = (a,b,c,-b+2c) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,2)$ donc $F = \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,2))$

   Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $a(1,0,0,0) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,2) = 0 \Leftrightarrow (a,b,c,-b+2c) = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$

   Donc la famille $\{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\}$ est libre, c'est donc un base de F.

   • $u = (a,b,c,d) \in G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = d \\ b = 2c \end{array}\right. \Leftrightarrow u = (a,2c,c,a) = a(1,0,0,1) + c(0,2,1,0)$

   Donc $G = \mathrm{Vect}((1,0,0,1),(0,2,1,0))$

   Soit $a,c \in \mathbb{R}$ tels que $a(1,0,0,1) + c(0,2,1,0) = 0 \Leftrightarrow (a,2c,c,a) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow a = c = 0$, donc la famille $\{(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$ est libre, c'est donc une base de G.

2. $u = (a,b,c,d) \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = -b + 2c \\ a = d \\ b = 2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = d = 0 \\ b = 2c \\ d = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow u = (0,2c,c,0) = c(0,2,1,0)$. Donc $F \cap G = \mathrm{Vect}((0,2,1,0))$. C'est une famille libre car elle contient un seul vecteur non nul, c'est donc une base de $F \cap G$.

3. $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = 4$, de plus $F, G \subset \mathbb{R}^4$ donc $F + G \subset \mathbb{R}^4$, et comme $\dim F + G = \dim \mathbb{R}^4$, on a $F + G = \mathbb{R}^4$

Exercice 12 – ★

Soit F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y - 2z = 0\}$ $\quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = x + z\}$

1. Déterminer les dimensions de F et de G.
2. Déterminer la dimension de $F \cap G$.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Correction

1. • $u = (x,y,z) \in F \Leftrightarrow y = x - 2z \Leftrightarrow u = (x, x-2z, z) = x(1,1,0) + z(0,-2,1)$ donc $F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,-2,1))$

   Soit $x,z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1,1,0) + z(0,-2,1) = 0 = (x, x-2z, z) \Leftrightarrow x = z = 0$, donc la famille $\{(1,1,0),(0,-2,1)\}$ est libre, c'est donc une base de f, donc $\dim F = 2$.

   • $u = (x,y,z) \in G \Leftrightarrow x = 2y = x + z \Leftrightarrow u = (2y,y,0) = y(2,1,0)$, donc $G = \mathrm{Vect}((2,1,0))$. La famille $\{(2,1,0)\}$ contient un seul vecteur non nul, elle est donc libre, c'est donc une base de G, donc $\dim G = 1$

2. $u = (x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 2z \\ x = 2y \\ z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x \\ x = 2y \\ z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$

3. $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, de plus $F + G \subset \mathbb{R}^3$ donc $F + G = \mathbb{R}^3$. De plus comme $F \cap G = \{0\}$, on obtient $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 13 – ★

Soit F, G, H les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, 2x - y + 4z + 3t = 0)\} \quad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y - 4z + 3t = 0)\}$$
$$H = \text{Vect}((-3,1,1,1),(6,2,-1,-2),(3,11,2,-1))$$

1. Donner une base de $F \cap G$ et sa dimension.
2. Montrer que $H \subset F \cap G$.
3. Montrer que $H = F \cap G$.

Correction

1. $u = (x,y,z,t) \in F \cap G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 4z + 3t = 0 \\ y - 4z + 3t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 6t = 0 \\ y - 4z + 3t = 0 \end{array} \right.$
   $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3t \\ y = 4z - 3t \end{array} \right. \Leftrightarrow u = (-3t, 4z - 3t, z, t) = z(0,4,1,0) + t(-3,-3,0,1)$
   Donc $F \cap G = \text{Vect}((0,4,1,0),(-3,-3,0,1))$, de plus si $z, t \in \mathbb{R}$ sont tels que $z(0,4,1,0) + t(-3,-3,0,1) = 0$ alors $(-3t, 4z-3t, z, t) = (0,0,0,0)$ donc $z = t = 0$, donc la famille $\{(0,4,1,0),(-3,-3,0,1)\}$ est libre, c'est donc une base de $F \cap G$ et donc $\dim F \cap G = 2$.
2. On vérifie que $(-3,1,1,1) \in F$ et $(-3,1,1,1) \in G$ donc $(-3,1,1,1) \in F \cap G$. De même pour $(6,2,-1,-2),(3,11,2,-1)$, on en déduit que $H \subset F \cap G$
3. $\dim H \leq \dim F \cap G = 2$, en outre $\text{Vect}((6,2,-1,-2),(3,11,2,-1)) \subset H$ et $\{(6,2,-1,-2),(3,11,2,-1)\}$ est un famille libre. En effet si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a(6,2,-1,-2) + b(3,11,2,-1) = 0$ alors $b = -2a$ et $a = 2b$ donc $a = b = 0$, ainsi $\dim \text{Vect}((6,2,-1,-2),(3,11,2,-1)) = 2 \leq \dim H$. D'où $\dim H = 2$, et puisque $H \subset F \cap G$, on en déduit $H = F \cap G$

Exercice 14 – ★

Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :

a. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, y-x, 0) \end{array} \right.$

b. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$

c. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + i\overline{z} \end{array} \right.$

d. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - (X+1)P' \end{array} \right.$

Correction

a. $u = (x,y) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow (x-y, y-x, 0) = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - y & = 0 \\ y - x & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = y \\ y & = x \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow u = (x,x) = x(1,1) \Leftrightarrow u \in \text{Vect}((1,1))$

Donc $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,1))}$ et $\boxed{((1,1)) \text{ est une base du noyau}}$

$v(a,b,c) \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow (a,b,c) = (x-y, y-x, 0)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - y & = a \\ y - x & = b \\ c & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - y & = a \\ -a & = b \\ c & = 0 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow v = (a, -a, 0) = a(1,-1,0) \Leftrightarrow v \in \text{Vect}((1,-1,0))$

Donc $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}((1,-1)) \text{ et } ((1,-1)) \text{ est une base de l'image.}}$

b. $u = (x,y,z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow (x-y, y-z, z-x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - y & = 0 \\ y - z & = 0 \\ z - x & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} y & = x \\ z & = y = x \\ z & = x \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow u = x(1,1,1) = \text{Vect}((1,1,1))$

Donc $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,1,1)) \text{ et } ((1,1,1)) \text{ est une base du noyau.}}$

$v = (a,b,c) \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow (a,b,c) = (x-y, y-z, z-x) = x(1,0,-1) + y(-1,1,0) + z(0,-1,1) \Leftrightarrow v \in \text{Vect}((1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1))$

Mais la famille $((1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1))$, n'est pas libre car $(1,0,-1) + (-1,1,0) + (0,-1,1) = 0$ donc $\dim \text{Im}(f) < 3$. En revanche $((1,0,-1),(-1,1,0))$ est libre et $\text{Vect}((1,0,-1),(-1,1,0)) \subset \text{Vect}((1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1))$

donc $2 \leq \dim \mathrm{Vect}((1,0,-1),(-1,1,0)) \leq \dim \mathrm{Vect}((1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1)) < 3$

$\boxed{\text{On en déduit } \dim \mathrm{Im}(f) = 2 \text{ et } ((1,0,-1),(-1,1,0)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f)}$

<u>Autre méthode</u>

Une application est caractérisée par l'image d'une base. On a $f(1,0,0) = (1,0,-1)$, $f(0,1,0) = (-1,1,0)$ et $f(0,0,1) = (0,-1,1)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1))$

On montre de la même façon que c'est un espace de dimension 2.

c. $z = a + ib \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow z + i\bar{z} = 0 \Leftrightarrow a + ib + i(a - ib) = a + b + i(a+b) = 0 = (a+b)(1+i) \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow z = a - ia = a(1-i) \Leftrightarrow z \in \mathrm{Vect}(1-i)$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1-i) \text{ et } (1-i) \text{ est une base du noyau}}$

$z \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow z = y + i\bar{y} = (a+b)(1+i) \Leftrightarrow z \in \mathrm{Vect}(1+i)$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1+i) \text{ et } (1+i) \text{ est une base de l'image}}$

d. $P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0$

On a $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ et $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$

Ainsi $f(P) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 - (X+1)(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2) = 0$
$\Leftrightarrow a_0 - a_1 + (a_1 - 2a_2 - a_1)X + (a_2 - 3a_3 - 2a_2)X^2 + (a_3 - 3a_3)X^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 &= 0 \\ -2a_2 &= 0 \\ -a_2 - 3a_3 &= 0 \\ -2a_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 &= a_1 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow P = a_0 + a_0X = a_0(1+X) \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(1+X) = \mathrm{Ker}(f)$

Donc $\boxed{(1+X) \text{ est une base du noyau.}}$

$Q = f(P) \Leftrightarrow Q = a_0 - a_1 + (-2a_2)X + (-a_2 - 3a_3)X^2 + (-2a_3)X^3$
$\Leftrightarrow Q = (a_0 - a_1) + a_2(-2X - X^2) + a_3(-3X^2 - 2X^3)$
$\Leftrightarrow Q \in \mathrm{Vect}(1, -2X - X^2, -3X^2 - 2X^3)$

La famille $(1, -2X - X^2, -3X^2 - 2X^3)$ est libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ donc $\boxed{\text{c'est une base.}}$

Exercice 15 – ★

Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille :

$$e_1 = (1,1,1,1) \qquad e_2 = (1,1,-1,-1)$$

Correction

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$ il faut donc trouver une famille libre ou génératrice à 4 éléments.

On remarque $e_1 + e_2 = (2,2,0,0)$ et $e_1 - e_2 = (0,0,2,2)$.

En posant $e_3 = (1,0,0,0)$ on obtient $\dfrac{e_1 + e_2}{2} - e_3 = (0,1,0,0)$.

En posant $e_4 = (0,0,0,1)$ on obtient $\dfrac{e_1 - e_2}{2} - e_4 = (0,0,1,0)$.

En conclusion les vecteurs $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4. Or ils forment une famille génératrice donc la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice et contient 4 éléments, $\boxed{\text{c'est donc une base}}$.

Exercice 16 – ★

Soit $\mathcal{F}$ un famille à p éléments d'un espace vectoriel E.

Montrer que $\text{rg}(\mathcal{F}) = p \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre.

Correction

C'est une propriété du cours.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ alors $\dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = p$ donc $\mathcal{F}$ est une famille à p éléments génératrice d'un espace vectoriel de dimension p, c'est donc une base, donc c'est une famille libre.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\mathcal{F}$ est libre, alors c'est une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ (car par définition elle engendre cet espace). Ainsi $\dim \text{Vect}(\mathcal{F}) = p = \text{rg}(\mathcal{F})$

Exercice 17 – ★

Déterminer le rang des familles suivantes :

a. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((2,5,3),(1,-1,4),(1,6,-1))$

b. Dans $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{F} = ((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0),(0,0,2,0))$

c. Dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathcal{F} = (X^2+X+1,\ X^2+3X+1,\ 2X,\ X^3+3)$

d. Dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)$ avec :

$$\varphi_1(x,y,z,t) = x+t \qquad \varphi_2(x,y,z,t) = -x+2y$$

$$\varphi_3(x,y,z,t) = x+y-z+t \qquad \varphi_4(x,y,z,t) = y+t$$

Correction

a. On remarque $(2,5,3)-(1,-1,4) = (1,6,-1)$ donc ce n'est pas une famille libre, donc $\text{rg}(F) < 3$

Soit $\mathcal{G} = ((1,-1,4),(1,6,-1))$, et $a,b \in \mathbb{R}$ tels que

$a(1,-1,4)+b(1,6,-1) = 0 \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow a(1,-1,4)-a(1,6,-1) = 0 = a(0,-7,5) \Rightarrow a = 0 = b$

Donc la famille $\mathcal{G}$ est libre et donc $\text{rg}(\mathcal{G}) = 2$

Puisque $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, on a $\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$ donc $\text{rg}(G) \leq \text{rg}(F)$

Ainsi $\text{rg}(\mathcal{G}) = 2 \leq \text{rg}(\mathcal{F}) < 3$

Et donc $\boxed{\text{rg}(\mathcal{F}) = 2}$

b. On remarque $2(1,1,0,0)+2(-1,-1,1,0) = (0,0,2,0)$ donc $\mathcal{F}$ n'est pas libre. Donc $\text{rg}(\mathcal{F}) < 4$

On note (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathcal{R}^4$

Soit $\mathcal{G} = ((1,0,1,0),(1,1,0,0),(-1,-1,1,0)) = (f_1,f_2,f_3)$.

On remarque $f_2+f_3 = e_3$, puis $f_1-e_3 = e_1$ et $f_2-e_1 = e_2$ donc $\text{Vect}(e_1,e_2,e_3) \subset \text{Vect}(\mathcal{G})$ donc $3 \leq \text{rg}(\mathcal{G})$

Ainsi $3 \leq \text{rg}(\mathcal{F}) < 4$ donc $\boxed{\text{rg}(\mathcal{F}) = 3}$

c. On remarque $X^2+3X+1-(X^2+X+1) = 2X$ donc $\mathcal{F}$ n'est pas libre, donc $\text{rg}(\mathcal{F}) < 4$

Soit $\mathcal{G} = (X^2+3X+1,\ 2X,\ X^3+3)$

Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que

$a(X^2+3X+1)+b(2X)+c(3+X^3) = a+3c+(3a+2b)X+aX^2+cX^3 = 0$

Ainsi $a = c = 0$ et donc $b = 0$, donc $\mathcal{G}$ est une famille libre, donc $\text{rg}(\mathcal{G}) = 3$ En conclusion $\text{rg}(F) = 3$

d. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que

$a\varphi_1+b\varphi_2+c\varphi_3+d\varphi_4 = 0 = (a-b+c)x+(2b+c+d)y+(-c)z+(a+c+d)t$

On a donc

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b+c &= 0 \\ 2b+c+d &= 0 \\ -c &= 0 \\ a+c+d &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b &= 0 \\ 2b+d &= 0 \\ c &= 0 \\ a+d &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= b \\ 2b+d &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= b \\ -2d+d &= 0 \\ c &= 0 \\ b &= -d \end{cases}$$

$\Rightarrow a = b = c = d = 0$ donc $\mathcal{F}$ est libre et ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 4}$

Exercice 18 – ★

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $E = \mathbb{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$

Correction

D'après le cours, $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

Puisque $F \subset E$ et $G \subset E$ on a $F + G \subset E$ donc $\dim F + G \leq \dim E = 5$

Donc $\dim F + G = 3 + 3 - \dim F \cap G \leq 5$

Donc $1 \leq \dim F \cap G$ donc $F \cap G \neq \{0_E\}$ car $\dim\{0_E\} = 0$

Applications linéaires et dimension

Exercice 19 – ★ Vrai ou faux ?

a. Une famille est libre si et seulement si ses éléments ne sont pas colinéaires deux à deux.

b. Une famille est liée si : $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0,0,\dots,0)$

c. Une famille est liée si et seulement si chacun de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

d. Une famille est génératrice finie ne peut avoir moins d'élément qu'une famille libre.

e. Dans un espace vectoriel de dimension n, tout famille de strictement plus de n éléments est liée.

f. Dans un espace vectoriel de dimension n, tout famille de moins de n éléments est libre.

g. Dans un espace vectoriel de dimension n, tout famille de n éléments est une base.

h. Si F et G deux sous-espaces de E sont tels que $\dim F + \dim G = \dim E$ alors F et G sont supplémentaires.

i. Tout endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie est un automorphisme.

j. Pour tout endomorphisme f de E, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

Correction

a. Faux, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, dans la famille $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ les éléments ne sont pas colinéaires deux à deux et pourtant la famille n'est pas libre

b. Faux, si la somme est nulle on peut avoir $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (0,0,\dots,0)$

c. Faux, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, dans la famille $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ les éléments ne sont pas chacun combinaison linéaire des autres et pourtant la famille est liée.

d. Vrai

e. Vrai

f. Faux, la famille (0_E) est liée.

g. Faux, dans $\mathbb{R}^2$ la famille (e_1, e_1) n'est pas une base.

h. Faux, dans $\mathbb{R}^2$, soit $F = G = \mathrm{Vect}(e_1)$, alors $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim F + \dim G$ mais F et G ne sont pas supplémentaires.

i. Vrai, car en dimension finie si un endomorphisme est injectif il est aussi surjectif

j. Faux, dans $E = \mathbb{R}^2$, soit f l'endomorphisme tel que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = 0$ on a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_2) = \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires.

Exercice 20 – ★

Soit f un endomorphisme de E de dimension finie. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$$

Correction

On note cette proposition (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)

Dans tous les cas $x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^2)$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)}$

De même $z \in \mathrm{Im}(f^2) \Rightarrow \exists x \in E,\ z = f^2(x) = f(y) \in \mathrm{Im}(f)$

donc $\boxed{\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)}$

$\boxed{(1) \Rightarrow (3)}$ On suppose $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
D'après le théorème du rang
$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f^2) + \dim \mathrm{Im}(f^2)$
Puisque $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ on a $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^2)$ et donc
$\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f^2)$ et comme $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ on a $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$

$\boxed{(1) + (3) \Rightarrow (2)}$ Soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $f(y) = 0 = f(f(x)) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 = y$ donc $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
En outre $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \subset E$ et
$\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)) = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) - \dim \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \dim E - 0$
On en déduit $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$ et ainsi $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)}$

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Soit $f' = \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f^2) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

$y \in \mathrm{Im}(f') \Leftrightarrow \exists x \in \mathrm{Im}(f), y = f'(x) = f(x)$ et comme $x \in \mathrm{Im}(f), \exists x' \in E, x = f(x')$, c'est-à-dire $y = f^2(x') \Leftrightarrow y \in \mathrm{Im}(f^2)$, donc $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f^2)$. On suppose que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, alors d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f') + \dim \mathrm{Ker}(f') = \dim \mathrm{Im}(f^2) + \dim \mathrm{Ker}(f') = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f')$ donc $\mathrm{Ker}(f') = \{0_E\}$. Or $x \in \mathrm{Ker}(f') \Leftrightarrow f'(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}}$.
Enfin par le théorème du rang $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$, on en déduit $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$, ainsi $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)}$

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ On suppose $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$

D'après le théorème du rang $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f^2) + \dim \mathrm{Im}(f^2)$

Puisque $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ on a $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f^2)$ et donc $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^2)$ et comme $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ on a $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)}$

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ On suppose $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, ainsi $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$

Donc $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Ce n'est pas utile car on a déjà démontré $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ mais on peut le faire tout de même. On suppose alors $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$

Donc $\forall x \in E,\ \exists x_I \in \mathrm{Im}(f), \exists x_K \in \mathrm{Ker}(f),\ x = x_I + x_K$

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, ainsi $y = f(x) = f(x_I + x_K) = f(x_I)$ et comme $x_I \in \mathrm{Im}(f), \exists x_0 \in E,\ x_I = f(x_0)$, donc $y = f(f(x_0)) \in \mathrm{Im}(f^2)$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)}$

Exercice 21 – ★

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projections de E telles que $p \neq 0, q \neq 0, p \neq q$. Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$

Correction

<u>Première méthode</u> Si $p = \lambda q$ alors $p \circ p = p = \lambda q$ et $p \circ p = \lambda q \circ \lambda q = \lambda^2 q$ donc $\lambda = 0$ ou 1 et comme $p \neq 0$ alors $\lambda = 1$ et donc $p = q$.

<u>Deuxième méthode</u> On suppose $p = \lambda q$, avec $\lambda \neq 0$. On a d'après les propriétés sur projecteurs $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. $x \in \mathrm{Ker}(p) \Leftrightarrow p(x) = 0_E = \lambda q(x) \Leftrightarrow q(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(q)$, donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ donc $p(x) = x = \lambda q(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}(q)$ donc $q(x) = x$ ainsi $\lambda = 1$

Exercice 22 – ★★

Soit f, g deux endomorphismes de E, un espace vectoriel de dimension finie

1. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$
2. On note h la restriction de f à $\text{Ker}(g \circ f)$
   a. Déterminer $\text{Ker}(h)$ et $\text{Im}(h)$
   b. Grâce au théorème du rang, montrer que
   $$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}(g) + \dim \text{Ker}(f)$$

Correction

Soit $x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(g \circ f)$ donc $\boxed{\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)}$ et donc $\dim \text{Ker}(f) \leq \dim \text{Ker}(g \circ f)$

De même si $z \in \text{Im}(g \circ f) \Rightarrow \exists x \in E,\ z = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) \in \text{Im}(g)$ donc $\boxed{\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)}$ et donc $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$

1. D'après le théorème du rang
   $\dim E = \text{rg}(f) + \dim \text{Ker}(f) = \text{rg}(g) + \dim \text{Ker}(g) = \text{rg}(g \circ f) + \dim \text{Ker}(g \circ f)$
   On a donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) + \underbrace{\dim \text{Ker}(f) - \dim \text{Ker}(g \circ f)}_{\leq 0} \leq \text{rg}(f)$
   En conclusion $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$ et $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$ donc $\boxed{\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))}$
2. a. On considère $h : \left\{ \begin{array}{rcl} \text{Ker}(g \circ f) & \longrightarrow & \text{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$
   $x \in \text{Ker}(h) \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g \circ f)$
   Donc $\boxed{\text{Ker}(h) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g \circ f)}$ donc $\dim \text{Ker}(h) \leq \dim \text{Ker}(f)$

   Soit $y \in \text{Im}(h) \Leftrightarrow \exists x \in \text{Ker}(g \circ f),\ y = f(x) \Leftrightarrow y \in \text{Im}(f)$ et $g(y) = g(f(x)) = 0$ car $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ donc $y \in \text{Ker}(g)$
   On en conclut $\boxed{\text{Im}(h) = \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)}$ donc $\dim \text{Im}(h) \leq \dim \text{Ker}(g)$

   b. On applique le théorème du rang à h, on obtient donc :
   $\dim \text{Ker}(g \circ f) = \dim \text{Im}(h) + \dim \text{Ker}(h) \leq \dim \text{Ker}(g) + \dim \text{Ker}(f)$

Exercice 23 – ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe un endomorphisme de E tel que $\text{Im}(u) = F$ et $\text{Ker}(u) = G$ si et seulement si $\dim F + \dim G = n$

Correction

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\text{Im}(u) = F$ et $\text{Ker}(u) = G$ alors d'après le théorème du rang :
$\dim E = \dim \text{Ker}(u) + \dim \text{Im}(u) = \dim F + \dim G = n$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit F, G tels que $\dim F + \dim G = n$

Soit $\dim F = r$ et $\dim G = p$, on a donc $p + r = n$. Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de F et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de G. On peut compléter cette base de G en une base de E : $(e_1, \ldots, e_n)$.

On construit alors l'application linéaire telle que
$\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) = 0$ et $\forall i \in [\![p+1, n]\!],\ f(e_i) = f_{i-p}$
Et on a alors $\text{Im}(f) = F$ et $\text{Ker}(f) = G$

Exercice 24 – ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$ si et seulement si n est pair.

Correction

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$, alors d'après le théorème du rang :
$n = \dim E = \dim \operatorname{Im}(u) + \dim \operatorname{Ker}(u) = 2 \dim \operatorname{Ker}(u)$, donc n est pair

$\boxed{\Leftarrow}$ Si n est pair alors $n = 2r$
Soit $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de E
Soit u l'endomorphisme tel que $\forall i \in [\![1, r]\!], u(e_i) = 0$ et $\forall i \in [\![r+1, n]\!], u(e_i) = e_{i-r}$
Dans ce cas $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = \operatorname{Im}(u)$

Exercice 25 – ★★

Soit f un endomorphisme de rang p d'un espace vectoriel E de dimension n ($p \leq n$). Montrer que f peut s'écrire comme la somme de p endomorphismes de rang 1.

Correction

Soit $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(f)$ que l'on complète en $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On pose δ_{ij}, appelé symbole de Kronecker, tel que $i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1$, et $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$
On pose aussi $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ f_i(e_j) = \delta_{ij} f(e_i)$
Chaque f_i est de rang 1 car $\operatorname{Im}(f_i) = \operatorname{Vect}(f(e_i))$, de plus

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(e_j) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{ij} f(e_j) = \begin{cases} f(e_j) \text{ si } j \leq p \\ 0 \text{ si } j > p \end{cases}$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i$ et f sont égaux sur une base, donc ils sont égaux.

Exercice 26 – ★★

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f, g deux applications linéaires de E dans F.

1. Montrer que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$
2. On suppose de plus que $E = F$, $u + v$ est inversible (bijectif) et que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$, montrer alors que :
$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim E$$

Correction

On rappelle que si $\lambda \neq 0$ alors $\text{rg}(\lambda f) = \text{rg}(f)$

1. Soit $y \in \text{Im}(u+v) \Rightarrow \exists x \in E, y = (u+v)(x) = u(x) + v(x) \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
   On a ainsi $\text{Im}(u+v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ et donc $\boxed{\text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)}$

   On va appliquer cette inégalité aux applications $u + v$ et $-v$, on obtient :
   $\text{rg}(u+v-v) \leq \text{rg}(u+v) + \text{rg}(-v)$ et donc $\text{rg}(u) \leq \text{rg}(u+v) + \text{rg}(v)$
   Et ainsi $\text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u+v)$

   On applique cette inégalité aux applications $u + v$ et $-u$, on obtient :
   $\text{rg}(u+v-u) \leq \text{rg}(u+v) + \text{rg}(-u)$ et donc $\text{rg}(v) \leq \text{rg}(u+v) + \text{rg}(u)$
   Et ainsi $\text{rg}(v) - \text{rg}(u) \leq \text{rg}(u+v)$
   On en conclut $\boxed{|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v)}$
2. Si $u + v$ est bijectif alors $\text{rg}(u+v) = \dim E \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$
   En outre, $u \circ v = 0 \Rightarrow \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$
   Et ainsi, $\text{rg}(v) \leq \dim E - \text{rg}(u)$ ce qui donne $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq \dim E$
   En conclusion $\boxed{\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim E}$

Exercice 27 – ★★

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ (on dit que f est nilpotent d'indice n).

Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ forme une base de E.

Correction

Soit $x_0 \in E$ tel que $f_{n-1}(x_0) \neq 0$ (sinon la famille sera liée). Soit une famille (α_i) telle que

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$$

. En appliquant f^{n-1} à cette égalité on obtient :

$$\alpha_0 f^{n-1}(x_0) + \alpha_1 f^n(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{2n-2}(x_0) = 0$$

et comme $f^n = 0$, pour tout $p \geq n$, $f^p = 0$ et ainsi $\alpha_0 f^{n-1}(x_0) = 0$
Enfin, $f^{n-1}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

On obtient alors $\alpha_1 f(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$, en appliquant f^{n-2} on montre que $\alpha_1 = 0$ et ainsi de suite. On obtient finalement :
$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ et donc la famille est libre.
C'est une famille libre à n éléments dans un espace de dimension n, c'est donc une base.

On montre une deuxième méthode : Supposons $\alpha_0 \neq 0$, on a alors

$$x_0 = -\frac{1}{\alpha_0}\left(\alpha_1 f(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)\right)$$

On obtient alors

$$f^{n-1}(x_0) = f^{n-1}\left(-\frac{1}{\alpha_0}\left(\alpha_1 f(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)\right)\right)$$

$$f^{n-1}(x_0) = -\frac{1}{\alpha_0}\left(\alpha_1 f^n(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{2n-2}(x_0)\right) = 0$$

Or $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, c'est une contradiction, donc $\alpha_0 = 0$.
On peut recommencer en supposant $\alpha_1 \neq 0$, dans ce cas :

$$f(x_0) = -\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 f^2(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)\right)$$

Et en appliquant f^{n-2} à cette égalité on obtient :

$$f^{n-1}(x_0) = -\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 f^n(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1} f^{2n-3}(x_0)\right) = 0$$

On en déduit une contradiction et ainsi $\alpha_1 = 0$ et on montre ainsi que la famille est libre.

Exercice 28 – ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que :

$$u^2 + 3u + 2Id_E = 0$$

1. Soit $v = u + 2Id_E$, calculer v^2
2. Montrer que v est un projecteur de E
3. En déduire qu'il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tels que $v_{|F} = Id_F$ et $v_{|G} = 0_{\mathcal{L}(G)}$ et que $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u + 2Id_E)$
4. En déduire que $u_{|F} = -Id_F$ et $u_{|G} = -2Id_G$

Correction

1. $v^2 = (u + 2Id_E)^2 = u^2 + 4u + 4Id_E$
   Or u vérifie $u^2 + 3u + 2Id_E = 0$ donc $u^2 = -3u - 2Id_E$
   Ainsi $\boxed{v^2 = -3u - 2Id_E + 4u + 4Id_E = u + 2Id_E}$
2. On remarque que $v^2 = v$, donc $\boxed{v \text{ est un projecteur}}$
3. v étant un projecteur, c'est par définition un projecteur sur $\mathrm{Im}(v)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(v)$, ces deux sous-espace étant supplémentaires.
   On sait de plus que $x \in \mathrm{Im}(v) \iff v(x) = x$, donc on doit poser $F = \mathrm{Im}(v)$ pour obtenir $v_{|F} = Id_F$.
   Dans ce cas, en posant $G = \mathrm{Ker}(v)$, on obtient bien $v_{|G} = 0_{\mathcal{L}(G)}$
   D'après le cours $E = F \oplus G = \mathrm{Im}(v) \oplus \mathrm{Ker}(v)$
   Puisque $v = u + 2Id_E$, on a $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u + 2Id_E)$
   On obtient $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u + 2Id_E)$
4. $u_{|F} = v_{|F} - 2Id_F = Id_F - 2Id_F = -Id_F$
   $u_{|G} = v_{|G} - 2Id_G = 0 - 2Id_G = -2Id_G$

Exercice 29 – ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $k \geq 1$, montrer que $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
2. Démontrer qu'il existe $p \leq n$ tel que $\forall k \geq p, \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p)$.
3. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires.
4. Démontrer qu'il existe deux *s.e.v.* F et G de E qui sont supplémentaires et tels que $f_{|F}$ est nilpotent et $f_{|G}$ est un automorphisme.
5. Soit $d_k = \dim \mathrm{Ker}(f^k)$. Montrer que la suite $(d_{k+1} - d_k)$ est décroissante.

Correction

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$ alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ donc $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
   Soit $z \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$ donc il existe $x \in E$ tel que $z = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = f^k(y)$ donc $z \in \mathrm{Im}(f^k)$, donc $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$
2. D'après la question 1 $\dim \mathrm{Ker}(f^k) \leq \dim \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \leq n$, donc $u_k = \dim \mathrm{Ker}(^k)$ est une suite à valeurs entière croissante et majorée, elle est donc convergente, et donc constante à partir d'un certain rang p. Donc il existe $p \in \mathbb{N}$, minimal, tel que $\forall k \geq p, \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p)$
   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, et soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+2})$, donc $f^{k+2}(x) = 0_E = f^{k+1}(f(x))$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^k)$ donc $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, et ainsi $\mathrm{Ker}(f^{k+2}) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et puisque $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+2})$, on a $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^{k+2})$, et on montre ainsi que $\forall k' \geq k, \mathrm{Ker}(f^{k'}) = \mathrm{Ker}(f^k)$, donc $k \geq p$. On a ainsi que $\forall k < p, \quad \mathrm{Ker}(f^{k+1}) > \mathrm{Ker}(f^k)$ et donc $\dim \mathrm{Ker}(f^p) > \dim \mathrm{Ker}(f^{p-1})$ donc $n \geq \dim \mathrm{Ker}(f^p) \geq \dim \mathrm{Ker}(f^{p-1}) + 1 \geq \dim \mathrm{Ker}(f^{p-2}) + 2 \geq \cdots \geq \mathrm{Ker}(f^{p-p}) + p$ d'où $p \leq n$
3. On sait que $\dim \mathrm{Ker}(f^p) = \dim \mathrm{Ker}(f^{p+1})$, d'après le théorème du rang $n = \mathrm{rg}(f^p) + \dim \mathrm{Ker}(f^p) = \dim \mathrm{rg}(f^{p+1}) + \dim \mathrm{Ker}(f^{p+1})$ on en déduit que $\mathrm{rg}(f^p) = \mathrm{rg}(f^{p+1})$ et comme $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$ on obtient que $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f^p) \cap \mathrm{Ker}(f^p)$ donc $y \in \mathrm{Im}(f^p)$ donc $y = f^p(x)$ et $f^p(y) = f^{2p}(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^p)$ donc $f^p(x) = 0 = y$. Donc $\mathrm{Im}(f^p) \cap \mathrm{Ker}(f^p) = \{0_E\}$
4. Soit $F = \mathrm{Ker}(f^p)$, alors $f^p_{|F} = 0_{\mathcal{L}(F)}$ car $\forall x \in \mathrm{Ker}(f^p), \quad f^p_{|F}(x) = f^p(x) = 0_E$, donc $f_{|F}$ est nilpotent.
   Soit $G = \mathrm{Im}(f^p)$ alors $\mathrm{Im}(f_{|G}) = \mathrm{Im}(f^{p+1}) = \mathrm{Im}(f^p) = G$ donc G est stable par $f_{|G}$, donc $f_{|G}$ est un endomorphisme de G. En outre comme $\mathrm{Im}(f_{|G}) = \mathrm{Im}(f^{p+1}) = \mathrm{Im}(f^p) = G$, $f_{|G}$ est surjectif et donc bijectif, c'est donc un automorphisme de G.
5. Soit la E_k un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f^k)$ dans $\mathrm{Ker}(f^{k+1})$, donc $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^k) \oplus E_k$. Soit $g_k = f_{|E_k}$. Alors $x \in \mathrm{Ker}(g_k) \Rightarrow g_k(x) = 0_E \Rightarrow f(x) =$

$0_E \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^k) \cap E_k = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$ donc g_k est injective, on en déduit d'après le théorème du rang $\dim E_k = \dim \mathrm{Ker}(g_k) + \dim \mathrm{Im}(g_k)$ et donc $\dim \mathrm{Im}(g_k) = \dim E_k$. En outre $\forall x \in E_k, \quad f^k(g_k(x)) = f^{k+1}(x) = 0_E$ donc $\mathrm{Im}(g_k) \subset \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k-1}) \oplus E_{k-1}$. Enfin, soit $y \in \mathrm{Im}(g_k) \cap \mathrm{Ker}(f^{k-1})$, donc $\exists x \in E_k, y = f(x)$ donc $f^{k-1}(y) = f^k(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^k) \cap E_k = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(g_k) \cap \mathrm{Ker}(f^{k-1}) = \{0_E\}$.
Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(g_k) + \mathrm{Ker}(f^{k-1})) = \dim \mathrm{Im}(g_k) + \dim \mathrm{Ker}(f^{k-1}) \leq \dim \mathrm{Ker}(f^k) = \dim \mathrm{Ker}(f^{k-1}) + \dim E_{k-1}$. Ainsi $\dim E_k = \dim \mathrm{Im}(g_k) \leq \dim E_{k-1}$ c'est à dire $d_{k+1} - d_k \leq d_k - d_{k-1}$ donc la suite $(d_{k+1} - d_k)$ est décroissante.

Formes linéaires

Exercice 30 – ★★

Dans $E = \mathbb{R}^4$, écrire le sous-espace engendré par les vecteurs $u = (2,1,0,2)$ et $v = (-1,-2,3,1)$ comme l'intersection de noyaux de deux formes linéaires indépendantes. C'est-à-dire, montrer qu'il existe deux formes linéaires φ_1, φ_2 telles que

$\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Vect}(u,v)$

Correction

On commence par compléter la famille (u,v) en une base de $\mathbb{R}^4$

Soit $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0,0)$, on a alors

$au + bv + ce_1 + de_2 = (2a - b + c, a - 2b + d, 3b, 2a + b) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c &= 0 \\ a - 2b + d &= 0 \\ 3b &= 0 \\ 2a + b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c &= 0 \\ a + d &= 0 \\ b &= 0 \\ 2a &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= 0 \\ d &= 0 \\ b &= 0 \\ a &= 0 \end{cases}$$

Donc la famille (u,v,e_1,e_2) est une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^4$

On peut donc écrire que $e_2 \notin \mathrm{Vect}(u,v,e_1)$ et $e_1 \notin \mathrm{Vect}(u,v,e_2)$ (sinon la famille serait liée).

On pose $H_1 = \mathrm{Vect}(u,v,e_1)$ et $H_2 = \mathrm{Vect}(u,v,e_2)$.

On pose alors φ_1 la forme linéaire telle que $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $\varphi_1(e_2) = 1$ et φ_2 la forme linéaire telle que $H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ et $\varphi_2(e_1) = 1$

Comme $\mathrm{Ker}(\varphi_1) \neq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, les deux formes linéaires sont indépendantes. En effet si elles étaient liées, on aurait $\lambda \neq 0$ tel que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ et dans ce cas

$x \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \Leftrightarrow \varphi_1(x) = 0 = \lambda\varphi_2(x) \Leftrightarrow \varphi_2(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\varphi_2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$

Enfin $\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Vect}(u,v,e_1) \cap \mathrm{Vect}(u,v,e_2) = \mathrm{Vect}(u,v)$ car

$e_2 \notin \mathrm{Vect}(u,v,e_1)$ et $e_1 \notin \mathrm{Vect}(u,v,e_2)$

On a donc déterminé deux formes linéaires indépendantes telles que

$\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Vect}(u,v)$

On voudrait déterminer l'expression de ces deux formes linéaires.

$(x,y,z,t) = au + bv + ce_1 + de_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c &= x \\ a - 2b + d &= y \\ 3b &= z \\ 2a + b &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c &= x \\ a - 2b + d &= y \\ b &= \frac{z}{3} \\ 6a + 3b &= t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + c &= x \\ a - 2b + d &= y \\ b &= \frac{z}{3} \\ 6a &= 3t - z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 3b + 3c &= 3x = 3t - z - z + 3c \\ 6a - 12b + 6d &= 6y = 3t - z - 4z + 6d \\ b &= \frac{z}{3} \\ 6a &= 3t - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3c &= 3x + 2z - 3t \\ 6d &= 6y + 5z - 3t \\ b &= \frac{z}{3} \\ 6a &= 3t - z \end{cases}$$

On en déduit $\varphi_1(x,y,z,t) = \varphi_1(au+bv+ce_1+d_2) = d\varphi_1(e_2) = d = y+\frac{5}{6}z-\frac{1}{2}t$
Et $\varphi_2(x,y,z,t) = \varphi_2(au+bv+ce_1+d_2) = c\varphi_2(e_1) = c = x+\frac{2}{3}z-t$
Ainsi $(x,y,z,t)\in \mathrm{Vect}(u,v) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y+\frac{5}{6}z-\frac{1}{2}t & =0 \\ x+\frac{2}{3}z-t & =0 \end{array}\right.$

On peut vérifier que u,v sont solutions de ce système d'équations, intersection de deux noyaux de formes linéaires.

Exercice 31 – ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et u un vecteur de E tel que $u\notin H$. Montrer qu'il existe une et une seule forme linéaire φ telle que $\mathrm{Ker}(\varphi)=H$ et $\varphi(u)=1$

Correction

Soit $D=\mathrm{Vect}(u)$, on a $H+D\subset E$ et $H\cap D=\{0_E\}$ car $u\notin H$, on en déduit, $\dim H+D = \dim H + \dim D = n-1+1 = n = \dim E$, donc $E = H\oplus D$.
Soit $x\in E$, puisque $E=H\oplus D$, on a $\exists h\in H, \exists d\in D,\ x=h+d$
$d\in D=\mathrm{Vect}(u) \Rightarrow \exists\alpha\in\mathbb{K}, d=\alpha u$

Soit φ une forme linéaire sur E telle que $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$. Cela existe car d'après le cours tout hyperplan est noyau d'une forme linéaire.
$\forall x\in E, \varphi(x)=\varphi(h+d)=\varphi(d)=\varphi(\alpha u)=\alpha\varphi(u)$, on peut alors choisir $\varphi(u)=1$ et cela prouve l'existence d'une telle forme linéaire. Il reste à prouver l'unicité.

Soit ψ, une autre forme linéaire telle que $\mathrm{Ker}(\psi)=H$ et $\psi(u)=1$.
$\forall x\in E,\ x=h+d=h+\alpha u,\ \psi(x)=\psi(h+d)=\psi(\alpha u)=\alpha\psi(u)=\alpha=\varphi(x)$
Ainsi $\psi=\varphi$, ce qui prouve l'unicité.

Exercice 32 – ★★

1. Soit E de dimension n, et H_1 et H_2 deux hyperplans de E.
   Soit φ_1, φ_2 deux formes linéaires telles que $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.
   Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2 \Leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ est une famille libre.
2. Cas général : Soit $T = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E, et $T^\circ = \{x \in E, \forall \varphi \in T, \varphi(x) = 0\}$. Montrer que T° est un *s.e.v.* de E de dimension $n - \mathrm{rg}(T)$.

Correction

1. Soit H_1, H_2 deux hyperplans et φ_1, φ_2 deux formes linéaires telles que $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.
   $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$
   $= n - 1 + n - 1 - \dim H_1 \cap H_2 = 2n - 2 - \dim H_1 \cap H_2$
   En outre, $H_1 + H_2 \subset E \Rightarrow \dim H_1 + H_2 \leq n$
   Ainsi $\dim H_1 \cap H_2 \geq n - 2$

   $H_1 \cap H_2 \subset H_1 \Rightarrow \dim H_1 \cap H_2 \leq \dim H_1 = n - 1$
   On en conclut $\boxed{n - 2 \leq \dim H_1 \cap H_2 \leq n - 1}$

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons (φ_1, φ_2) libre, alors si $\dim H_1 \cap H_2 = n - 1$ on obtient $\dim H_1 \cap H_2 = \dim H_1 = \dim H_2$. Comme $H_1 \cap H_2 \subset H_1$ et $H_1 \cap H_2 \subset H_2$, on en déduit $H_1 \cap H_2 = H_1 = H_2$ et donc $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$. D'après le cours cela signifie que φ_1 et φ_2 sont colinéaires, c'est à dire que la famille (φ_1, φ_2) est liée. Or on a supposé cette famille libre, donc $\dim H_1 \cap H_2 \neq n - 1$, et ainsi $\boxed{\dim H_1 \cap H_2 = n - 2}$

   $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\dim H_1 \cap H_2 = n - 2$, si (φ_1, φ_2) est liée, alors $\exists \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\varphi_1 = \alpha \varphi_2$. $x \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \Leftrightarrow \varphi_1(x) = 0 = \alpha\varphi_2(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_2(x) = 0$ car $\alpha \neq 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, on en déduit $H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) = H_2$ et ainsi $H_1 \cap H_2 = H_1 = H_2$ et enfin $\dim H_1 \cap H_2 = \dim H_1 = n - 1$. Or on a supposé $\dim H_1 \cap H_2 = n - 2$ donc $\boxed{\text{la famille } (\varphi_1, \varphi_2) \text{ est libre}}$.

   En particulier, les solutions d'un système de deux équations homogènes à n inconnues, appartiennent à l'intersection de deux noyaux de formes linéaires, elles forment ainsi un espace de dimension $n - 2$ si ces formes sont indépendantes.

2. $x \in T^\circ \Leftrightarrow \forall \varphi \in T, \quad \varphi(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \varphi_2 \cap \cdots \cap \varphi_p = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$

   Donc $T^\circ = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$, c'est donc un espace vectoriel en tant qu'intersections d'espaces vectoriels.
   Soit $r = \mathrm{rg}(T) = \dim \mathrm{Vect}(T)$. Soit $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ une base des formes linéaires sur E adaptée à $\mathrm{Vect}(T)$, c'est à dire que la famille $(\psi_1, \cdots, \psi_r)$ est une sous-famille libre de T, et donc une base de $\mathrm{Vect}(T)$ (On peut extraire une base de toute famille génératrice, d'après le théorème de la base extraite). Soit (ε_i) une base de E telle que $\psi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ (avec $\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$, et 0 si $i \neq j$).
   Alors $x \in T^\circ \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \ \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, r]\!], \ \psi_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ donc $T^\circ = \mathrm{Vect}(\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ et donc $\dim T^\circ = n - r = n - \mathrm{rg}(T)$
   La démonstration est terminée, mais il y a deux points qui n'ont pas été justifiés :
   (a) On a pris $(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ une base des formes linéaires sur E, il faut donc démontrer que cet espace est de dimension n
   (b) On a pris une base (ε_i) de E telle que $\psi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$, il faut montrer que cela existe.

   Voici la justification des deux points précédents :

   (a) Soit E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, montrons que $\dim E^* = \dim E = n$.
   Soit (e_i) une base de E, alors $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Soit $(e_i^*) \subset E^*$, la famille de formes linéaires définies par $e_i^*(x) = x_i$. Montrons que c'est une famille libre : soit (α_i) telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0$, on a alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = \alpha_j = 0$, donc la famille (e_i^*) est libre.
   Soit $\varphi \in E^*$, alors $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*(x)$, donc $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$, donc la famille (e_i^*) est génératrice, donc $\dim E^* = n$

   (b) On va montrer que si (φ_i) est une base de E^* alors il existe (ε_i) une base de E telle que $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$. Si une telle base existe, alors $(\varphi_1(\varepsilon_j), \cdots, \varphi_n(\varepsilon_j)) = b_j$ le j^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on pose donc $u : E \to \mathbb{R}^n$ telle que $u(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$, on va montrer que u est bijective et alors ε_j sera l'image de b_j par u^{-1}.
   Soit $x \neq 0_E$, (e_i) une base de E, et (e_i^*) la base de E^* telle que $e_i^*(x) = x_i$ alors il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) \neq 0$, en effet comme $x \neq 0_E$, il y a au moins une coordonnée $x_j \neq 0$ et donc $e_j^*(x) = x_j \neq 0$, donc $\varphi = e_j^*$ convient.
   Comme les (φ_i) forment une base de E^*, les formes e_i^* s'expriment en fonction des φ_i, et si $x \neq 0_E$ alors il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $e_j^*(x) \neq 0$ et donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\varphi_k(x) \neq 0$ et donc $x \notin \mathrm{Ker}(u)$, donc u est injective, et par suite bijective car $\dim E = \dim \mathbb{R}^n$
   Soit $\mathcal{B} = (b_i)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, si on pose $\varepsilon_i = u^{-1}(b_i)$, on a que $u(\varepsilon_i) = b_i = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ c'est-à-dire $\varphi_i(\varepsilon_i) = 1$ et $\varphi_i(\varepsilon_j) = 0$, donc la famille (ε_i) vérifie bien la condition $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$, de plus c'est une base comme image de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par l'isomorphisme u^{-1}.