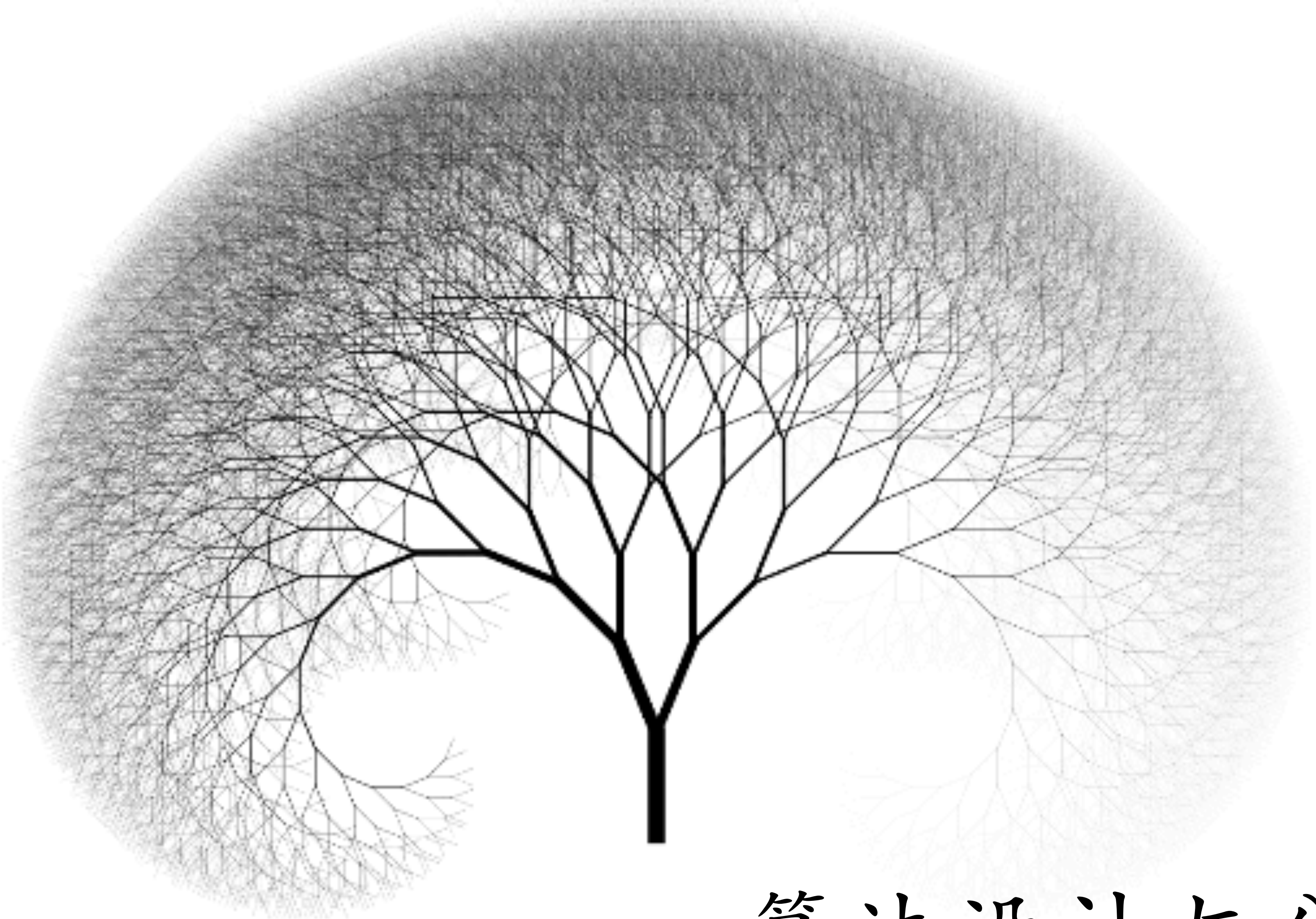


算法设计与分析

刘 安

苏州大学 计算机科学与技术学院

http://web.suda.edu.cn/anliu/

热身问题

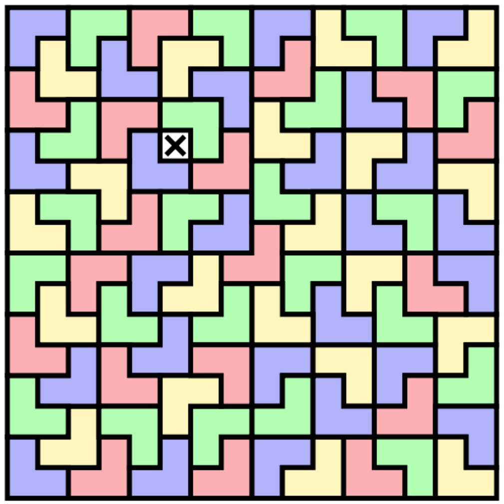
Warm-up Problems

热身问题

- 给定一个自然数n，如果其能分解成若干连续自然数之和，返回这些自然数，否则提示不能分解
  - 15=1+2+3+4+5=4+5+6=7+8

- 给定一个自然数$n \geq 30$，如果方程$6x + 10y + 15z = n$存在非负整数解，返回一组解，否则提示无解
  - 比如当$n = 31$时，(1,1,1)是一组解

- 已知一个大小为$2^n \times 2^n$的棋盘上缺失了一个方块，如果使用L形骨牌可以完美覆盖该棋盘，返回具体的方案，否则提示不能覆盖。完美覆盖是指没有未覆盖的方格，也没有堆叠或者悬挂在棋盘外的骨牌

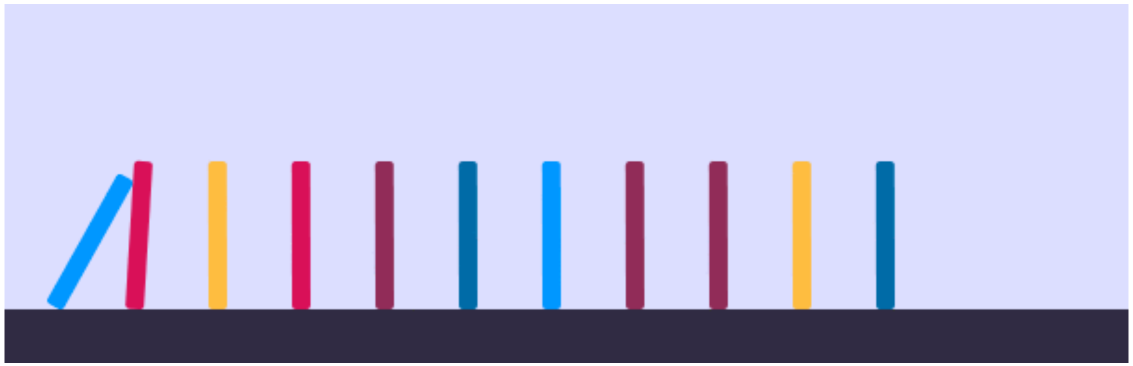


归纳

Induction

多米诺骨牌

- 多米诺骨牌按照如下规则摆放
  - 如果推动第一块骨牌，它将会倒下并撞击第二块骨牌使其倒下
  - 每一块骨牌被撞击时都会倒下并撞击下一块骨牌使其倒下
- 根据上述规则，如果第一块骨牌被推倒，那么所有的骨牌最终都会倒下



多米诺骨牌

- 多米诺骨牌效应（蝴蝶效应）
  - 每个骨牌倒下时能推动一个比其大1.5倍的骨牌
  - 第1块骨牌高5毫米
  - 第30块骨牌高639米
  - 中国第一高楼上海中心大厦632米（截至2021年4月）

归纳法和归纳证明

- 给定一系列陈述$S_1, S_2, S_3, \cdots$
  - 假设S_1为真，并且
  - 对于每一个$k \in \mathbb{N}$，如果S_k为真，那么S_{k+1}也为真
- 那么对于所有的$n \in \mathbb{N}$，S_n为真

- 归纳证明（Proof by induction)
  - 基本情况：说明S_1为真
  - 归纳假设：假设S_k为真
  - 归纳步骤：证明如果S_k为真，那么S_{k+1}也为真
  - 结论：根据归纳法，所有的S_n为真

强归纳法和归纳证明

- 给定一系列陈述$S_1, S_2, S_3, \cdots$
  - 假设S_1为真，并且
  - 对于每一个$k \in \mathbb{N}$，如果$S_1, S_2, \cdots, S_k$都为真，那么S_{k+1}也为真
- 那么对于所有的$n \in \mathbb{N}$，S_n为真

- 归纳证明（Proof by induction)
  - 基本情况：说明S_1为真
  - 归纳假设：假设$S_1, S_2, \cdots, S_k$都为真
  - 归纳步骤：证明如果$S_1, S_2, \cdots, S_k$都为真，那么S_{k+1}也为真
  - 结论：根据归纳法，所有的S_n为真

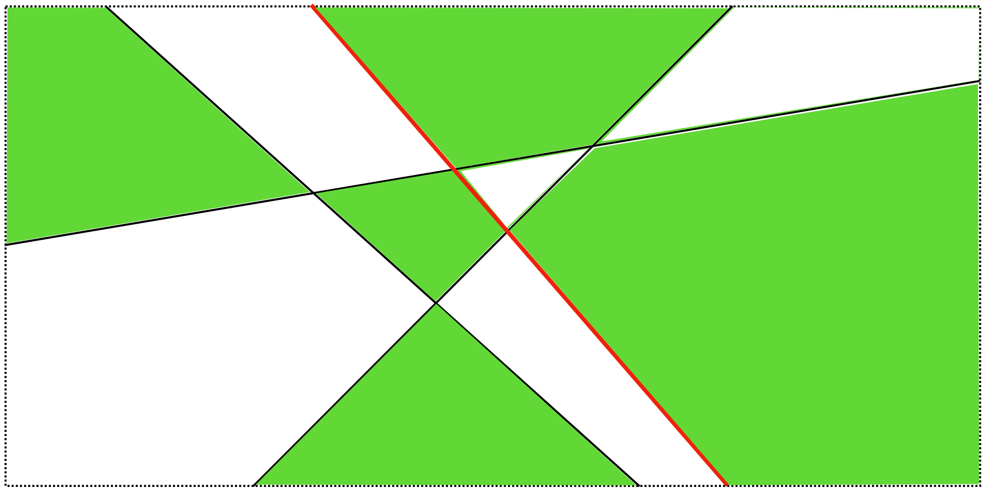
简单着色问题

The Simple Coloring Problem

简单着色问题

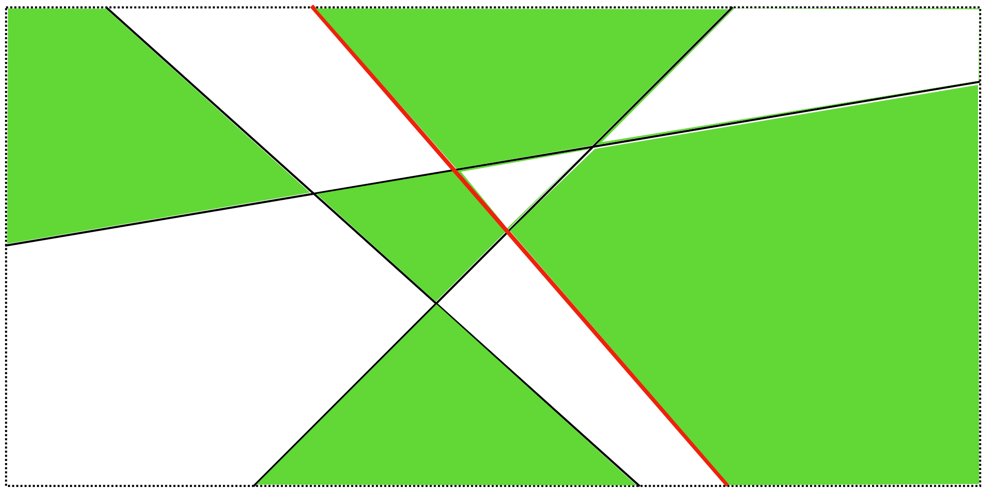
- 命题：可以用两种颜色为平面上任意条直线形成的区域进行着色，使得相邻的区域具有不同的颜色
- 证明
  - 基本情况：1条直线将平面分成2个区域，命题显然成立
  - 归纳假设：假设可以用两种颜色为$n-1$条直线形成的区域着色
  - 归纳步骤：考虑增加第n条直线后如何着色
    - 保持左侧区域的颜色不变
    - 将右侧区域的颜色反转
    - 相邻区域具有不同的颜色
  - 结论：命题成立

严格证明见下一页



简单着色问题

- 保持左侧区域的颜色不变，将右侧区域的颜色反转
- 考虑任意两个相邻的区域R_1和R_2
  - 如果在同一侧，根据归纳假设，它们具有不同的颜色
    - 无论是否反转，仍然具有不同的颜色
  - 如果不在同一侧，它们的公共边必然在第n条直线上
    - 在增加第n条直线前，它们属于同一区域，具有相同的颜色
    - 现在一侧不变，一侧反转，所以具有不同的颜色



平铺问题

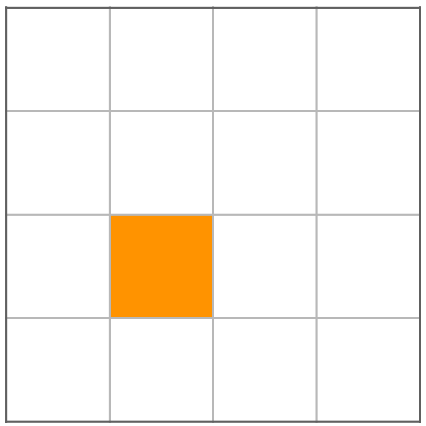
Tiling

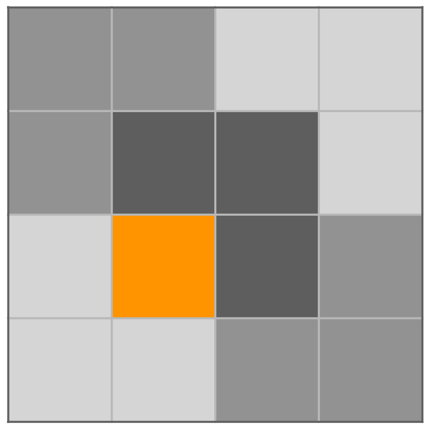
平铺问题

- 对于任意的$n \in \mathbb{N}$，如果从$2^n \times 2^n$的棋盘上移去任意一个方块，剩余的棋盘可以被L形骨牌完美覆盖

  - L形骨牌: 

  - 完美覆盖：没有未覆盖的方格，也没有堆叠或者悬挂在棋盘外的骨牌





平铺问题

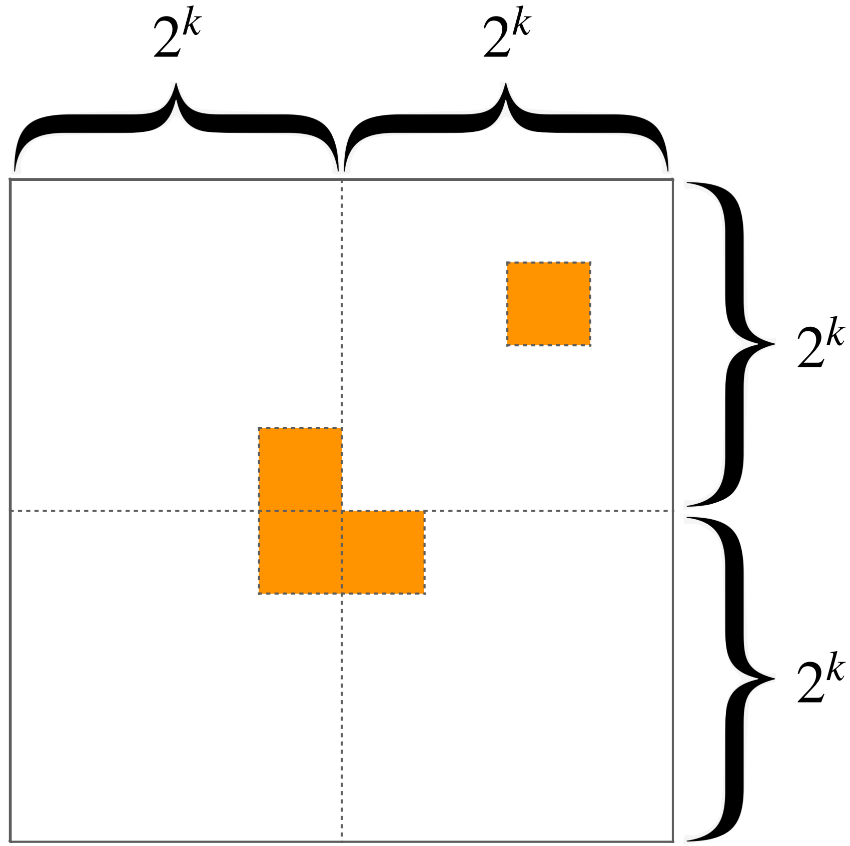
- 对于任意的$n \in \mathbb{N}$，如果从$2^n \times 2^n$的棋盘上移去任意一个方块，剩余的棋盘可以被L形骨牌完美覆盖

- 证明

  - 基本情况：$n = 1$

平铺问题

- 对于任意的$n \in \mathbb{N}$，如果从$2^n \times 2^n$的棋盘上移去任意一个方块，剩余的棋盘可以被L形骨牌完美覆盖
- 证明
  - 基本情况：$n = 1$时命题成立
  - 归纳假设：令$n = k \in \mathbb{N}$时命题成立
  - 归纳步骤：考虑$2^{k+1} \times 2^{k+1}$的棋盘
    - 将其分成4个$2^k \times 2^k$的棋盘
    - 任意移去一个方块
    - 如图放置一个L形骨牌
    - 根据归纳假设
      - 4个$2^k \times 2^k$的棋盘都可以被完美覆盖
  - 结论：命题成立



邮资问题

Stamp

邮资问题

- 给你无限数量的6分、10分和15分三种邮票以及一笔邮资$n \geq 30$分，如果这笔邮资恰好可以由这三种邮票组成，返回各自的数量，否则返回不可能
- $n = 31$时可以，$31 = 1 \times 6 + 1 \times 10 + 1 \times 15$

邮资问题

- 命题：任意的$n \in \mathbb{N}$且$n \geq 30$都可以写成$6a + 10b + 15c$的形式，其中a, b, c都是非负整数
- 证明思路：
  - 归纳假设：假设命题对于$n = 30, 31, 32, \cdots, k$都成立，其中$k \geq 30$
  - 归纳步骤：考虑$n = k + 1$的情况
    - 如果$n - 6$可以写成$6a + 10b + 15c$的形式，那么n也必然可以写成$6a' + 10b' + 15c'$的形式，其中$a' = a + 1$，$b' = b$，$c' = c$
      - 当$n - 6 \geq 30$时，根据归纳假设，$n - 6 = 6a + 10b + 15c$
      - 当$n - 6 < 30$时
        - 不符合归纳假设条件
        - 但如右表，每种情况命题都成立

	30	31	32	33	34	35
6	5	1	2	3	4	0
10	0	1	2	0	1	2
15	0	1	0	1	0	1

连续自然数之和

Sums of Consecutive Natural Numbers

连续自然数之和

- 观察
  - 如果n是奇数，那么$n = 2r + 1 = r + (r + 1)$
  - 如果n是偶数，那么$n = 2(2r + 1) = (r - 1) + r + (r + 1) + (r + 2)$
    - 如果$r - 1 \geq 1$，等式恒成立
    - 如果$r - 1 = 0$，省略该项
    - 如果$r - 1 = -1$，即$n = 2$，等式不成立
  - 如果$n = 4(2r + 1)$，那么
    - $n = (r - 3) + (r - 2) + (r - 1) + r + (r + 1) + (r + 2) + (r + 3) + (r + 4)$
      - 如果$r - 3 \geq 1$，等式恒成立
      - 如果$r - 3 = 0$，省略该项
      - 如果$r - 3 = -1$，省略前3项
      - 如果$r - 3 = -2$，省略前5项
      - 如果$r - 3 = -3$，即$n = 4$，等式不成立

连续自然数之和

- 命题：任意自然数都可以表示成一个奇数与2的幂的积。
- 证明
  - 基本情况：$n=1$时显然成立，$n=1\times 2^0$
  - 归纳假设：假设命题对于$n=1, 2, 3, \cdots, k$都成立
  - 归纳步骤：考虑$n=k+1$的情况
    - 如果n为奇数，显然成立
    - 如果n为偶数，根据归纳假设，$n/2=(2r+1)\times 2^t$
      - $n=(2r+1)\times 2^{t+1}$，命题成立

连续自然数之和

- 命题：自然数n可以表示成连续自然数之和当且仅当n不是2的幂
- 证明$\Leftarrow$
  - 若n不是2的幂，那么存在整数$t \geq 0, r > 0$使得$n = (2r+1) \times 2^t$
  - 考虑如下2×2^t个连续的数

$r+1-2^t$		$r-1$	r	$r+1$	$r+2$		$r+2^t$

  - 一共有2^t对，每对的和是$2r+1$，所以这些数的总和是n
  - 如果$r+1-2^t \leq 0$，那么这些数不全是正数
  - 而中间两个数$r, r+1$是正数，所以正数至少比负数多2个
  - 注意到从$r+1-2^t$到$-(r+1-2^t)$的和为0
  - 所以省略它们后留下的数（至少两个）即为所求

连续自然数之和

- 命题：自然数n可以表示成连续自然数之和当且仅当n不是2的幂
- 证明⇒
  - 假设n是从m开始的p个连续自然数之和，其中$m \geq 1, p \geq 2$
  - 下面证明n等于某个整数乘以一个大于1的奇数
    - 如果该命题成立，显然n不是2的幂
  - 首先考虑$p = 2$，显然n是奇数
  - 其次考虑$p > 2$

    根据假设，

    $$n = \sum_{i=0}^{p-1}(m+i) = mp + \sum_{i=0}^{p-1} i = mp + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(2m+p-1)}{2}$$

    - p和$2m + p - 1$必然一奇一偶，且两者都大于2
    - 所以n等于某个整数乘以一个大于1的奇数

尼姆博弈（特例）

The game of Nim (special case)

尼姆博弈（特例）

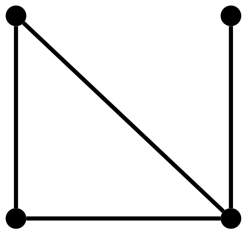
- 现有两堆数量相等的硬币，两名玩家交替进行取硬币，玩家1首先取，每次只能从一堆硬币中取出不同数量的硬币（至少一个，最多全部取走），取得最后一枚硬币的玩家获胜
- 命题：在尼姆博弈（特例）$G(n)$中，玩家2必胜，其中两堆硬币数量均为n
- 证明
  - 基本情况：$n = 1$，玩家2显然获胜
  - 归纳假设：假设命题对于$n = 1, 2, 3, \cdots, k$都成立
  - 归纳步骤：考虑$n = k + 1$的情况
    - 若玩家1取走一整堆，那么玩家2取走另一堆即可获胜
    - 否则，若玩家1从其中一堆取走$j(1 \le j < n)$枚硬币，玩家2也从另外一堆取走j枚硬币
      - 剩下的游戏是$G(n - j)$，根据归纳假设，玩家2获胜

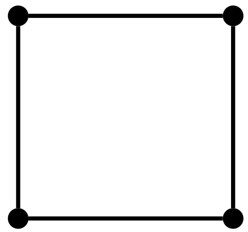
曼特尔定理

Mantel's Theorem

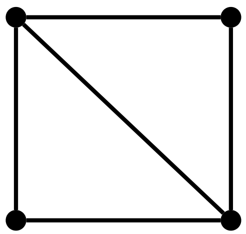
问题

- 一个具有$2n$个顶点的图至少需要包含多少条边才能保证其中有一个三角形
- 考虑具有4个顶点的图
  - 4条边





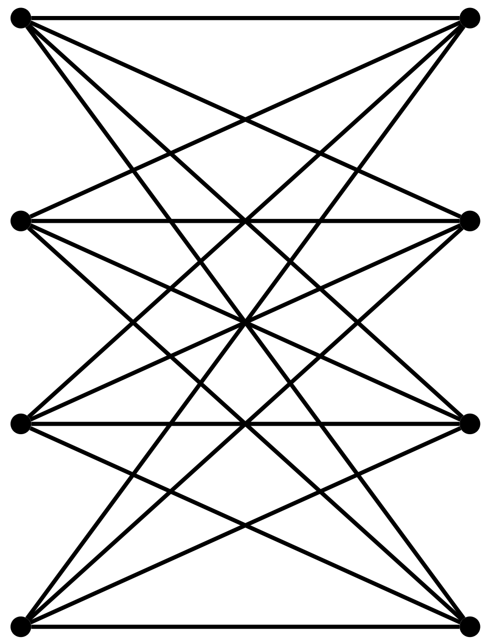
  - 5条边



  - 最多只有6条边，容易验证删除任意一条边之后，图中均有一个三角形

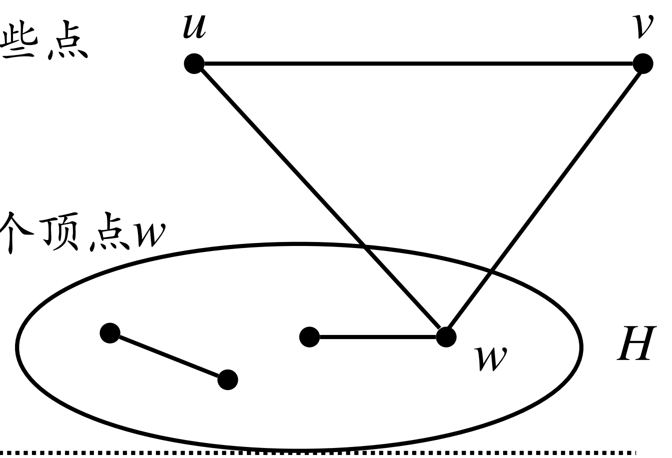
问题

- 一个具有$2n$个顶点的图至少需要包含多少条边才能保证其中有一个三角形
- 考虑具有$2n$个顶点的二部完全图
  - n^2条边，但没有三角形
  - 如果增加一条边?



曼特尔定理

- 曼特尔定理：如果图G具有$2n$个顶点和n^2+1条边，那么G包含一个三角形
- 证明
  - 基本情况：当$n=1$时，没有图具有2个顶点和2条边，命题成立*
  - 归纳假设：假设$n=k$时曼特尔定理成立
  - 归纳步骤：证明具有$2(k+1)$个顶点和$(k+1)^2+1$条边的图包含一个三角形
    - 从$2(k+1)$个顶点中任取两个相邻的顶点u和v，剩余的$2k$个顶点以及它们之间的边构成的子图记为H
    - 如果H中有k^2+1条边，根据归纳假设，其中必有一个三角形
    - 否则，H中最多有k^2条边
      - 剩余的$2k+1$条边必然从u或v离开，进入H中的某些点
    - 而H中只有$2k$个顶点
      - 根据鸽巢原理，必然至少有2条边进入H中的某一个顶点w
    - 显然u,v,w构成一个三角形，命题成立



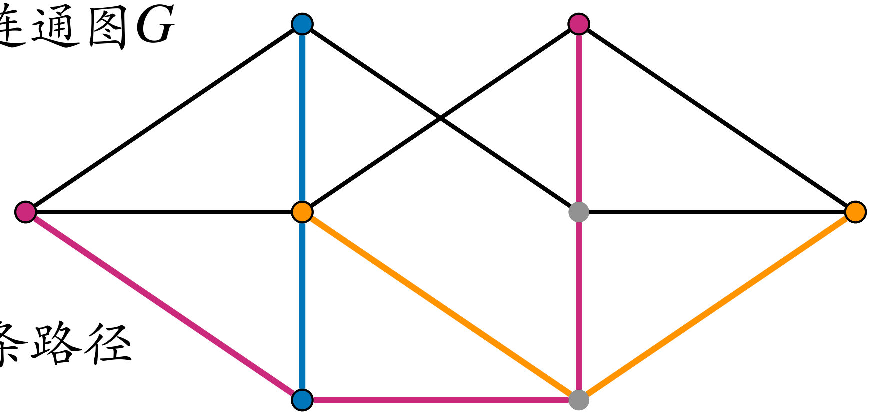
* 也可以给定理增加条件$n\geq 2$。此时，基本步骤是具有4个顶点和5条边的图。

边不相交路径

Edge-Disjoint Paths

边不相交路径

- 引理：无向连通图G中包含偶数个奇数度顶点
- 命题：令O是无向连通图G中奇数度顶点的集合且$|O| = 2k$。可以将O中的顶点分成k对，每对顶点之间存在一条路径，且这k条路径是边不相交的
- 证明
  - 基本情况：只有$m = 1$条边时显然成立
  - 归纳假设：具有m条边时命题成立
  - 归纳步骤：考虑具有$m+1$条边的无向连通图G
    - 如果O为空，命题显然成立
    - 否则，从O中任取两个顶点
      - G是连通的，所以它们之间一定有条路径
      - 从G中移除这条路径，剩余的图具有更少的边
      - 根据归纳假设，剩余的图具有$k-1$条边不相交的路径。证毕！



剩余的图还是连通的吗？

加强归纳假设

- 引理：无向图G中包含偶数个奇数度顶点
- 命题：令O是无向图G中奇数度顶点的集合且$|O| = 2k$。可以将O中的顶点分成k对，每对顶点之间存在一条路径，且这k条路径是边不相交的
- 证明
  - 基本情况：只有$m = 1$条边时显然成立
  - 归纳假设：具有m条边时命题成立
  - 归纳步骤：考虑具有$m + 1$条边的无向图G
    - 如果O为空，命题显然成立
    - 否则，选择G的一个连通分量H
      - H是无向图，所以一定有偶数个奇数度顶点，选择两个顶点
      - H是连通的，所以可以从H中移除这两个顶点之间的路径
      - 根据归纳假设，剩余的图具有$k - 1$条边不相交的路径。证毕！