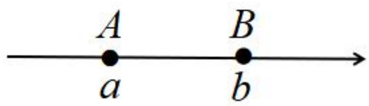
# 专题 04 等式与不等式的性质

## 考点聚焦



## 重点速记

一、应知应会




我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的，在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大. 例如，在上图中，点 $A$ 表示实数 $a$ ，点 $B$ 表示实数 $b$ ，点 $A$ 在点 $B$ 右边，那么 $a>b$ . 我们再看上图， $a>b$ 表示 $a$ 减去 $b$ 所得的差是一个大于 0 的数即正数. 一般地：若 $a>b$ ，则 $a-b$ 是正数；逆命题也正确. 类似地，若 $a<b$ ，则 $a-b$ 是负数；若 $a=b$ ，则 $a-b=0$ ，它们之间是等价的. 即：

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$ ;

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$ ;

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$ .

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了. 由此出发，我们还可以证明不等式的基本性质.

## 二、知识梳理

### （一）等式的性质

1. 用等号“＝”把两个表达式连接起来，所得的式子称为等式（equAlity）.

2. 等式的性质：（1）传递性 $a=b$，且 $b=c \Rightarrow a=c$ （2）加（减）法性质 $a=b \Leftrightarrow a\pm c=b\pm c$

（3）乘法性质 $a=b \Rightarrow ac=bc$

3. 乘法公式

（1）$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ （2）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ （3）$(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$

（4）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ （5）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

（6）$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ （7）$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

### （二）方程的解集

我们知道，含有未知数的等式称为方程（equation）．使得方程左右两边相等的未知数的值，称为方程的解（solution of an equation）．以方程的所有解为元素组成的集合称为方程的解集（solution set of an equation）.

### （三）一元二次方程的解集及根与系数的关系

1. 一元二次方程的解习惯上叫做该方程的根（root）．如果一元二次方程的两个根相等，那么这两个根叫做重根（double root）．重根在解集中只能出现一次.

2. 韦达定理：若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$）的两根为 $x_1$，$x_2$，则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}，\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

解题过程中不能忽视对方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 进行判断.

### （四）不等式的性质

1. 不等式的性质：(1)传递性：如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$；(2)加法性质：如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$；（3）乘法性质：如果 $a>b,c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b,c<0$，那么 $ac<bc$.

2. 定理：对于任意的实数 $a$ 和 $b$，总有

$$a^2+b^2\geq 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

## 学以致用

### 考点剖析

**（一）等式的性质**

**例 1.** 设 $a$、$b$、$c$、$d$ 是实数，判断下列命题的真假，并说明理由.

（1）如果 $a=b$，且 $c=d$，那么 $a+c=b+d$；　　（2）如果 $a=b$，且 $c=d$，那么 $ac=bd$；

（3）如果 $a=b\neq 0$，那么 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$；　　（4）如果 $a=b$，那么 $a^n=b^n$，其中 $n$ 是正整数;

（5）如果 $ac=bc$，那么 $a=b$；　　（6）如果 $(a-b)^2+(b-c)^2=0$，那么 $a=b=c$.

**例 2.** 计算：（1）$\left(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{3}\right)^2$　　（2）$\left(a+b-c\right)\left(a-b+c\right)$

（3）$\left(a+2\right)\left(a-2\right)\left(a^4+4a^2+16\right)$　　（4）$(2x+1)^2-(x-1)^2$

**例 3.** 分解因式：（1）$x^3+5x^2+6x$　　（2）$a^7-ab^6$

**（二）方程的解集**

**例 4.** 设 $a$、$b\in R$，求关于 $x$ 的方程 $ax=b$ 的解集.

**例 5.** 设 $k\in R$，求关于 $x$ 与 $y$ 的二元一次方程组 $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=kx+3 \end{cases}$ 的解集.

**（三）一元二次方程的解集及根与系数的关系**

**例 6.** 求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的解集.

**例 7.** 若 $x_1$ 和 $x_2$ 分别是一元二次方程 $2x^2+5x-3=0$ 的两根，求下列各式的值：

（1）$|x_1-x_2|$；（2）$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$；（3）$x_1^3+x_2^3$.

**例 8.** 已知 $x_1$、$x_2$ 是关于 $x$ 的一元二次方程 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$ 的两个非零实数根，问 $x_1$ 和 $x_2$ 能否同号？若能同号，请求出相应的 $m$ 的取值范围；若不能同号，请说明理由.

## （四）不等式的性质

**例 9.** （1）已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证：$ac>bd$；

（2）已知 $a>b>0$，求证：$a^n>b^n$，其中 $n$ 为正整数.

**例 10.** 设 $a$ 是实数，比较 $(a+1)^2$ 与 $a^2-a+1$ 的值的大小.

## »过关检测

### A 组　双基过关

**【难度系数：★　时间：8 分钟　分值：20 分】**

1．（23-24 高一上·上海杨浦·期末）设 $a<b<0$，则下列不等式中正确的是（　）

A．$\frac{a}{b}<1$　　B．$a^2<b^2$　　C．$b^2>ab$　　D．$a^2>ab$

2．（23-24 高一上·上海闵行·期末）已知$a,b\in\mathbf{R}$,则“$a>1,b>1$”是“$ab>1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．（23-24 高一下·上海·开学考试）对于实数$a$，$b$，$c$，“$ac^2>bc^2$”是“$a>b$”的（　）条件

A．充分不必要　　B．必要不充分

C．充要　　D．既不充分也不必要

4．（23-24 高一上·上海松江·期末）已知$a,b\in\mathrm{R}$，设$M=a^2-ab,N=ab-b^2$，则$M$与$N$的值的大小关系是（　）

A．$M<N$　　B．$M\le N$

C．$M>N$　　D．$M\ge N$

5．（22-23 高一上·上海浦东新·期中）已知一元二次方程$x^2-2mx+m-1=0$的两个实根为$x_1$、$x_2$，且$x_1^2+x_2^2=2$，则实数$m$的值为____________.

6．（22-23 高一上·上海徐汇·期末）已知方程$x^2+x-1=0$的两个根为$x_1$、$x_2$，则$|x_1-x_2|=$________.

7．（23-24 高一上·上海徐汇·阶段练习）设$x_1$，$x_2$是方程$x^2+x-2024=0$的两个实数根，则$x_1^2+2x_1+x_2=$______.

8．（23-24 高一上·上海普陀·期中）以$\sqrt{3}-1$和$\sqrt{3}+1$为根且二次项系数为 1 的一元二次方程是________.

9．（21-22 高一上·上海浦东新·期末）已知 $a\in\mathbf{R}$，不等式$\frac{a}{x}\ge1$的解集为 $P$，且-1$\in P$，则 $a$ 的取值范围是____________.

10．（22-23 高一上·上海青浦·阶段练习）已知等式$2x^2+3x+4=a(2x+1)(x+1)+b$恒成立，则常数$a+b=$_

## B 组　巩固提高

**【难度系数：★★　时间：10 分钟　　分值：20 分】**

11．（23-24 高一下·上海·开学考试）设$a,b\in\mathbf{R}$，若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则（　）.

A．$a<b$　　B．$|a|<|b|$　　C．$a+b>ab$　　D．$2^a<2^b$

12．（23-24 高一上·上海·期末）已知$a$、$b$、$c\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的（　）条件

A．充要　　B．充分非必要　　C．必要非充分　　D．既非充分也非必要

13．（23-24 高一上·上海浦东新·期中）设关于 $x$ 的不等式$a_1x+b_1>0$的解集为 $A$，关于 $x$ 的不等式$a_2x+b_2>0$的解集为 $B$，则“$A=B$”是“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$”的（　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　　　　　　　　　　　　　D．非充分非必要条件

14．（23-24 高一上·上海浦东新·期末）已知对于实数 $x$，$y$，满足 $|2x+y|\le 1$，$|x-y|\le 2$，则 $|4x+5y|$ 的最大值为______．

15．（23-24 高一上·上海虹口·期中）去年 8 月，上海发放了“爱购上海”为主题的“消费满 100 元抵 50 元”的电子消费券．$A$ 商家是“爱购上海”的活动商户，同时举行促销活动，每件商品按原价 6 折销售，但折扣不能与“爱购上海”消费券同时使用．如果你在这个商家购买商品原价的范围在（100，150）元．若使用消费券更便宜，则原价范围为______．

16．（23-24 高一上·上海普陀·期中）下列命题中真命题的编号是______．

①$mx^2+2x-1=0$ 是一元二次方程；　　②空集是任何非空集合的真子集；

③互相包含的两个集合相等；　　　　④若 $\frac{a}{b^2}>\frac{c}{b^2}$，则 $a>c$；

⑤满足 $\{1,2\}\subset M\subset\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 $M$ 有 7 个．

17．（21-22 高一上·上海嘉定·期末）已知 $a,b,c$ 都是实数，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个非零实根 $x_1,x_2$，且 $b=2c$，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=$______．

18．（23-24 高一上·上海·期中）关于 $x$ 的方程 $x^2-4x+1=0$ 的两根为 $x_1$，$x_2$，则 $x_1^2+x_2^2$ 的值为______．

19．（23-24 高一上·上海浦东新·期中）若 $x_1$、$x_2$ 是一元二次方程 $3x^2-10x+1=0$ 的两根，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值为_________．

20．（23-24 高一上·上海杨浦·阶段练习）已知实数 $m$、$n$ 满足 $m+n=4$，$(m-n)^2=12$，则以 $m$、$n$ 为两根的一个一元二次方程可以是__________

21．（22-23 高一上·上海普陀·期末）已知 $2+\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0(c\in\mathrm{R})$ 的一个根，则该方程的另一个根为___________．

22．（23-24 高一上·上海·期末）已知关于 $x$ 的方程 $bx+c=0$ 解集为 $\{2\}$，则“关于 $x$ 的不等式 $bx+c>0$ 的解集是 $(2,+\infty)$”是_________命题（填“真”或“假”）

23．（23-24 高一上·上海普陀·期中）已知等式 $2x^2-3x-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 恒成立，其中 $a$、$b$、$c$ 为常数，则 $a+b+c=$______

24．（23-24 高一上·上海徐汇·阶段练习）设 $a$，$b$，$c$，$m$，$n$ 均为实数，若 $mx^2-nx+3=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $a-b+c=$________．

25．（21-22 高一上·上海虹口·阶段练习）已知等式 $2x^2-3x-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 恒成立，其中 $a,b,c$ 为实数，则 $a-b+c=$_____．

## C 组　综合训练

**【难度系数：★★★　时间：15 分钟　　分值：30 分】**

26．（23-24 高一上·上海杨浦·期末）如果$a > b > 0$，那么下列式子中一定成立的是（　）

A．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B．$a^2<b^2$　　C．$\frac{a}{b}<1$　　D．$a^2 > ab$

27．（23-24 高一上·上海·期末）$\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$是$\begin{cases}2<x<3\\0<y<1\end{cases}$的（　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充分必要条件　　D．既非充分也非必奖条件

28．（23-24 高一上·上海·期中）设$x\in\mathbf{R}$，则方程$|2x+3|-|x-2|=|3x+1|$的解集为__________.

29．（23-24 高一下·上海嘉定·阶段练习）若不等式$-2<x^2+mx-m^2<1$的解集为$(n,2)$，则$m+n=$__________.

30．（22-23 高一上·上海浦东新·阶段练习）已知$x_1$，$x_2$是一元二次方程$4kx^2-4kx+k+1=0(k\neq0)$的两个实数根.

(1)求$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的值；（用$k$表示）

(2)是否存在实数$k$，使$\left(2x_1-x_2\right)\left(x_1-2x_2\right)=-\frac{3}{2}$成立？若存在，求出$k$的值，若不存在，请你说明理由；

(3)求使$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$的值为整数的实数$k$的整数值.

31．（23-24 高一上·上海·期中）已知关于$x$的方程$x^2+2\left(m-2\right)x+m^2+4=0$有两个实数根$x_1,x_2$，若$x_1^2+x_2^2=x_1x_2+21$，求实数$m$的值.

32．（23-24 高一上·上海杨浦·开学考试）（1）设全集$I=\mathrm{R},A=\left\{x|\ x^2+px+q=0\right\},B=\left\{x|\ x^2-3x+2=0\right\}$，已知$A\cup B=B$，求实数$p,q$满足的条件.

（2）已知关于$x$的一元二次方程$\left(a-1\right)x^2-\left(a^2+1\right)x+\left(a^2+a\right)=0$的两根都是整数，求满足条件的整数$a$的值.

33．（23-24 高一上·上海静安·期中）已知实常数 $a$、$b$，满足$a<b$，

(1)证明：关于$x$的方程$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=1$有两个不同的实数解.

(2)若关于$x$的方程$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=1$有两个不同的实数解$x_1,x_2$，$\left(x_1<x_2\right)$，求$|x_1-a|+|x_2-b|$的值.

34．（23-24 高一上·上海青浦·阶段练习）已知$x_1$，$x_2$是一元二次方程$4kx^2-4kx+k+1=0(k\neq0)$的两个实数根.

(1)是否存在实数$k$，使$x_1^2+x_2^2=\frac{1}{4}$成立？若存在，求出$k$的值，若不存在，请说明理由；

(2)若$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2$的值为整数，求整数$k$的值.

35.（21-22 高一上·上海徐汇·阶段练习）已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+4x+b(a<0,a,b\in\mathbf{R})$，设关于 $x$ 的方程 $f\left(x\right)=0$ 的两实根为 $x_1,x_2$，方程 $f\left(x\right)=x$ 的两实根为 $\alpha,\beta$.

(1)若 $|\alpha-\beta|=1$，求 $a$ 与 $b$ 的关系式；

(2)若 $a,b$ 均为负整数，且 $|\alpha-\beta|=1$，求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

(3)若 $\alpha<1<\beta<2$，求证：$(x_1+1)(x_2+1)<7$.

## D 组　拓展延伸

**【难度系数：★★★　时间：20 分钟　分值：30 分】**

36．（23-24 高一上·上海普陀·期中）设 $t$ 是不小于 1 的实数. 若对任意 $a,b\in\left[-1,t\right]$，总存在 $c,d\in\left[-1,t\right]$，使得 $\left(a+c\right)\left(b+d\right)=1$，则称这样的 $t$ 满足“性质 1”

(1)分别判断 $t>2$ 和 $1\le t<\dfrac{3}{2}$ 时是否满足“性质 1”;

(2)先证明:若 $u,v\ge\dfrac{1}{2}$，且 $u+v\ge\dfrac{5}{2}$，则 $uv\ge1$；并由此证明当 $\dfrac{3}{2}\le t\le2$ 时，对任意 $a,b\in\left[-1,t\right]$，总存在 $c_1,d_1\in\left[-1,t\right]$，使得 $\left(a+c_1\right)\left(b+d_1\right)\ge1$.

(3)求出所有满足“性质 1”的实数 t

37．（23-24 高一上·上海普陀·阶段练习）对在直角坐标系的第一象限内的任意两点作如下定义：若 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$，那么称点 $\left(a,b\right)$ 是点 $\left(c,d\right)$ 的“上位点”，同时点 $\left(c,d\right)$ 是点 $\left(a,b\right)$ 的“下位点”.

(1)试写出点 $\left(1,2\right)$ 的一个“上位点”坐标和一个“下位点”坐标；

(2)已知点 $\left(a,b\right)$ 是点 $\left(c,d\right)$ 的“上位点”，判断点 $\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+d}{2}\right)$ 是否是点 $\left(a,b\right)$ 的“下位点”，证明你的结论；

(3)设正整数 $n$ 满足以下条件：对集合 $\left\{t\middle|0<t<2022,t\in\mathrm{Z}\right\}$ 内的任意元素 $m$，总存在正整数 $k=2m+1$，使得点 $\left(n,k\right)$ 既是点 $\left(2022,m\right)$ 的“下位点”，又是点 $\left(2023,m+1\right)$ 的“上位点”，求满足要求的一个正整数 $n$ 的值，并说明理由

38．（22-23 高一上·上海闵行·期中）对在直角坐标系的第一象限内的任意两点作如下定义：若 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$，那么称点 $\left(a,b\right)$ 是点 $\left(c,d\right)$ 的“上位点”．同时点 $\left(c,d\right)$ 是点 $\left(a,b\right)$ 的“下位点”；

(1)试写出点 $\left(3,5\right)$ 的一个“上位点”坐标和一个“下位点”坐标；

(2)已知点 $\left(a,b\right)$ 是点 $\left(c,d\right)$ 的“上位点”，判断点 $P\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+d}{2}\right)$ 是否是点 $\left(a,b\right)$ 的“下位点”，证明你的结论；

(3)设正整数 $n$ 满足以下条件：对集合 $\left\{t\middle|0<t<2022,t\in Z\right\}$ 内的任意元素 $m$，总存在正整数 $k$，使得点 $\left(n,k\right)$ 既是点 $\left(2022,m\right)$ 的“下位点”，又是点 $\left(2023,m+1\right)$ 的“上位点”，求满足要求的一个正整数 $n$ 的值，并说明理由.