2025 年新课标 I 卷数学超详解（by Rq cen）

提示：试题来源于网络，部分题目可能与真题有出入，只能先解答网络版，请勿作为估分依据，题目难度评价分很简单、较简单、中等、较难、很难 5 档。

一、单项选择题

1. $(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部为（）

A. −1　　B. 0　　C. 1　　D. 6

解析：本题已知一个复数的表达式，需选出该复数的虚部，按照复数的运算法则将其化简即可，需注意虚部为 i 前面的实数，不包括 i，不过选项中都是实数，没有考察“虚部不包括 i”这一点，化简：$(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}=\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2=\mathrm{i}-5$，i 前的系数为 1，虚部为 1，本题选 C。

评价；很简单，套公式即可，也不涉及概念细节的辨析。

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素个数为（）

A. 0　　B. 3　　C. 5　　D. 8

解析：本题已知一个由一位数组成的全集 U，一个由 1、3、5 组成的集合 A，需选出 A 的补集 $\complement_U A$ 中的元素的个数，由于已知的集合都是有限集，先利用补集的定义求出 $\complement_U A$，再数出当中元素的个数即可。补集是从全集中去除该集合中元素后，剩余元素组成的集合，从 1~8 中去除 1、3、5，可得 $\complement_U A=\{2,4,6,7,8\}$，当中有 5 个元素，本题选 C。

评价：很简单，利用补集的定义求出补集再数数即可。

3. 若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 7 倍，则 C 的离心率为（）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

解析：本题已知双曲线的虚轴长为实轴长的 7 倍，需选出该双曲线的离心率，可以先设出双曲线含参数的方程，利用已知的 7 倍关系，列出等式，再利用该等式关系将离心率的表达式化简求出数值。

设双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），其中 a 为实半轴的长度，b 为虚半轴的长度，由已知条件“虚轴长为实轴长的 7 倍”可得 $2b=\sqrt{7}\times 2a$，化简得 $b=\sqrt{7}a$，双曲线的离心率的定义式为 $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，将 $b=\sqrt{7}a$ 代入该表

达式并化简：$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{a^2+(\sqrt{7}a)^2}}{a}=2\sqrt{2}$，本题选 D。

评价：较简单，需要熟练掌握双曲线的各参数的含义和数量关系。

4. 若点$(a,0)$（$a>0$）是函数$y=2\tan(x-\frac{\pi}{3})$的图像的一个对称中心，则 a 的最小值为（）

A. 30°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 135°

解析：本题已知一个含参数的点是一个正切函数的对称中心，求点中的参数的最小值。本题需要对正切函数的基本性质、函数的平移变换较为熟悉，并能灵活分析应用。

基本的正切函数$y=\tan x$的一系列对称中心为$(k\pi,0)$（$k\in\mathbf{Z}$，下同），已知函数$y=2\tan(x-\frac{\pi}{3})$是将$y=\tan x$向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再竖直拉伸为 2 倍，其中竖直拉伸对对称中心无影响，只有平移变换会将对称中心全都随函数图像一起向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，对称中心变为$(k\pi+\frac{\pi}{3},0)$，那么已知点$(a,0)$的坐标也满足公式$(k\pi+\frac{\pi}{3},0)$，由此可得$a=k\pi+\frac{\pi}{3}$，其中 k 为整数，还已知$a>0$并且求 a 的最小值，那么让$k=0$，可得 a 的最小值为$\frac{\pi}{3}$，4 个选项都是角度，把弧度制化为角度制，$\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\times\frac{180°}{\pi}=60°$，本题选 B。

评价：中等，需熟练掌握正切函数的性质、函数变换的规律、弧度制的换算。

5. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上且周期为2的偶函数，当$2\le x\le 3$时，$f(x)=5-2x$，则$f(-\frac{3}{4})=$（）

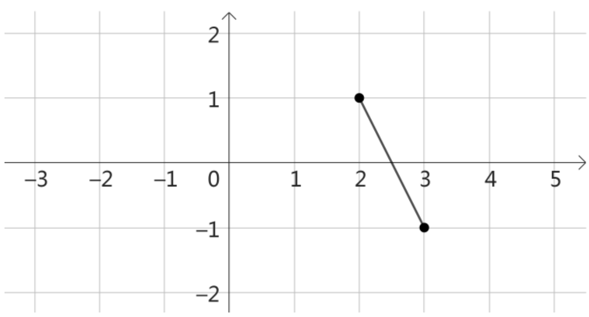
A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

解析：本题已知$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，还是周期为 2 的周期函数，还是偶函数，可知该函数有明显的重复和对称，可能可以通过一小段已知信息复制和对称出其余信息，还已知当$2\le x\le 3$时$f(x)=5-2x$，这段区间的长度恰好是周期的一半，另一半可以利用偶函数的性质推出，需选出$f(-\frac{3}{4})$的值。

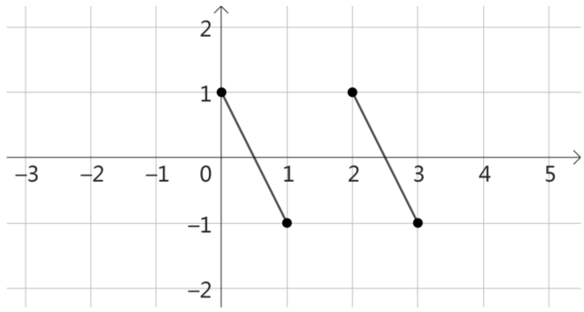
本题有两种思路，一种是利用已知解析式的区间，结合周期性和对称性求出

函数的整体情况，然后代入自变量求函数值，另一种是利用周期性和对称性，找到$-\dfrac{3}{4}$在已知解析式的区间$2 \le x \le 3$中对应的点，然后求值。

先用第一种方法，已知当$2 \le x \le 3$时$f(x)=5-2x$，先画出这段图像，如下图所示，连接两个端点$(2,1)$和$(3,-1)$得到线段即可。



又已知该函是周期为 2 的周期函数，可知$2-2 \le x \le 3-2$——即$0 \le x \le 1$的函数图像与$2 \le x \le 3$相同，把线段向左平移到区间$0 \le x \le 1$，如下图所示，平移后线段的端点变为$(0,1)$和$(1,-1)$，解析式为$f(x)=1-2x$。



又已知该函数为偶函数，当$-1 \le x \le 0$时，利用偶函数的定义式$f(-x)=f(x)$可得$f(-\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4})=1-2\times\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{2}$，本题选 A。

再用第二种思路，先利用偶函数的性质可得$f(-\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4})$，再利用周期函数的性质可得$f(-\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4}+2)=f(\dfrac{11}{4})$，而$\dfrac{11}{4}=2.75$恰好在已知解析式的区间$2 \le x \le 3$中，可得$f(-\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4})=f(\dfrac{3}{4}+2)=f(\dfrac{11}{4})=5-2\times\dfrac{11}{4}=-\dfrac{1}{2}$，结果相同。

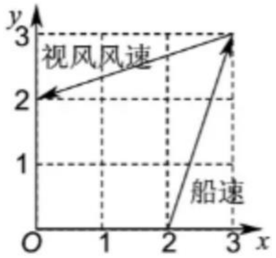
评价：中等，需熟练掌握周期函数+偶函数的高度规律性，进行适当的分析计算即可。

6.帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中成为视风风速，视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风

速对应的向量之和，其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等，方向相反。图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系。已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2（风度的大小和向量的大小相同，单位 m/s），则真风为（）

A．轻风　　B. 微风　　C. 和风　　D. 劲风

等级	风速大小	名称
2	1.1~3.3	轻风
3	3.4~5.4	微风
4	5.5~7.9	和风
5	8.0~10.1	劲风



解析：本题信息量较大，并且涉及到帆船运动中的很多属于，初步读题后发现很多专业词语都转化成了向量，因此本题很可能跟向量的运算有关，接下来详细分析题目，并梳理出题目中蕴含的数学关系。

“帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向”，这句是背景知识，出现了“风速的大小和方向”暗示可能涉及向量，没有太多具体信息。

“测出的结果在航海学中成为视风风速”，加上前半句“动员可借助风力计测定风速的大小和方向”，出现了第一个新名词：**视风风速**，它是运动员借助风力计测定的。

“视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和”，前半句明确了**视风风速**对应向量，因此**视风风速**可以用向量表示，设为$\vec{a}_{视}$后半句又出现两个新名词：**真风风速**和**船行风速**，并且也明确了这两个概念也对应向量，即能用向量表示，分别设为$\vec{a}_{真}$和$\vec{a}_{船}$，本句给出了数量关系：$\vec{a}_{视}=\vec{a}_{真}+\vec{a}_{船}$，这个等式很可能非常重要。

“其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等，方向相反”，本句给出了**船行风速**的含义，即与船速对应的向量大小相等，方向相反，凭生活中的直观印象可以猜测是因为船在前进与空气有相对运动，导致感受到的风。虽然此处出现了新的向量——**船速**，为了加以区分，把**船行风速**对应的向量记作$\vec{a}_{船行}$，**船速**对应的向量记作$\vec{a}_{船速}$，本剧给出了另一个数量关系：$\vec{a}_{船行}=-\vec{a}_{船速}$，结合前面的数量关系$\vec{a}_{视}=\vec{a}_{真}+\vec{a}_{船行}$可得$\vec{a}_{视}=\vec{a}_{真}-\vec{a}_{船速}$。

“图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系”，看了下图一，就是对**风速**的分级和名字，没什么重要数量关系。

“已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2（风度的大小和向量的大小相同，单位 m/s）”，图 2 中画出了 2 个向量**视**

风风速 $\vec{a}_{视}$ 和**船速** $\vec{a}_{船速}$，利用前面的已知关系可以求出**船行风速** $\vec{a}_{船行}=-\vec{a}_{船速}$ 和**真风风速** $\vec{a}_{真}=\vec{a}_{视}+\vec{a}_{船速}$。

最后需要选出真风的名字，应当是利用表 1 中真风的名字对应的风速，在此之前需要利用图 2 中的数据和前面的等式求出真风的风速。

全文中没有解释**真风风速**的含义，只给出了数量关系，猜测可能就是跟船速无关的“真正的风速”吧，不管猜得对不对，都对解题无影响。

从图 2 提供的坐标系中能读出，**视风风速**的向量向左平移了 3 个单位、向下平移了 1 个单位，可得 $\vec{a}_{视}=(-3,-1)$，**船速**的向量向右平移了 1 个单位，向上平移了 3 个单位，可得 $\vec{a}_{船速}=(1,3)$，利用前面分析得出的数量关系 $\vec{a}_{视}=\vec{a}_{真}+\vec{a}_{船}$ 和 $\vec{a}_{船行}=-\vec{a}_{船速}$ 和相应数据可得 $\vec{a}_{真}=\vec{a}_{视}+\vec{a}_{船速}=(-3+1,-1+3)=(-2,2)$，**真风风速**的大小为矢量 $(-2,2)$ 的模：$\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$，可知 $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$，即 $2<\sqrt{8}<3$，在轻风的范围内，本题选 A。

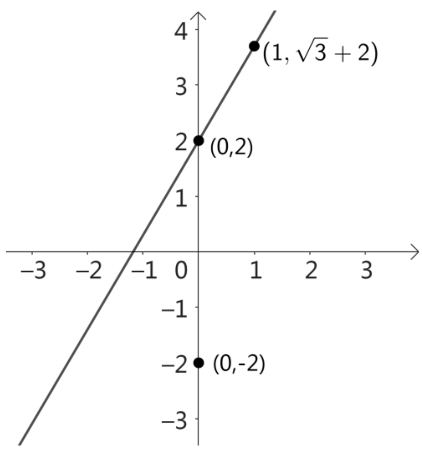
评价：较难，本题需要较强的信息处理和分析能力，以及足够的耐心。

7. 若圆 $x^2+(y+2)^2=r^2\,(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是（）

A．$(0,1)$　　B．$(1,3)$　　C．$(3,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

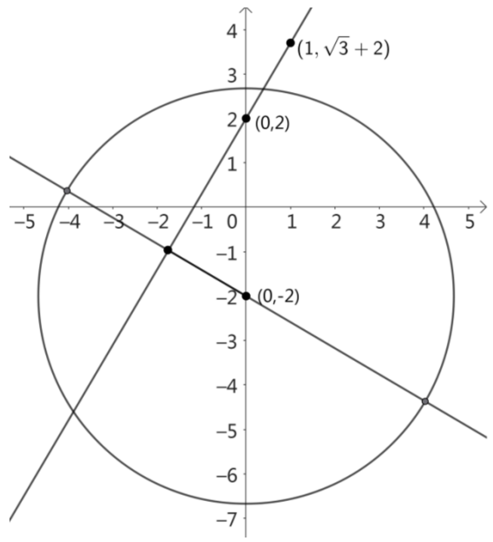
解析：本题已知一个圆的方程，从方程中能直接得知圆心的位置，但半径是参数 r，还已知该圆上到一条已知直线的距离为 1 的点有且仅有 2 个，这是一组位置关系，可以将圆的大小限定，需选出 r 的取值范围。

先画个草图，由圆的方程可知圆心的位置为 $(0,-2)$，已知直线经过点 $(0,2)$ 和 $(1,\sqrt{3}+2)$，其中 $\sqrt{3}\approx 1.7$，该点大约在 $(1,3.7)$ 附近，如下图所示。



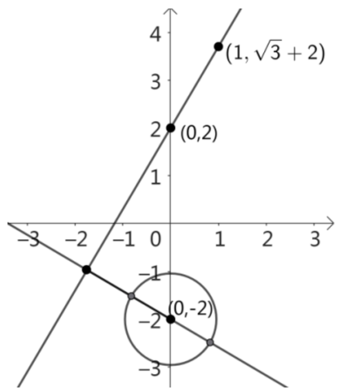
从图中大致可知，如果圆的半径太小，那么圆上可能没有到直线距离为 1 的点，如果圆的半径太大，那么圆上可能有 3 个或 4 个到直线距离为 1 的点，本

题只利用解析几何列方程、联立方程、求解个数的方法可能很复杂，优先考虑利用平面几何做辅助线，遇到圆与直线的问题时，先考虑从圆心向直线引垂线，随便画个圆出来，如下页图所示。



从图中可以看出，已知直线把圆分割成两部分，左右两个圆弧上都可能有对称的 2 个点或只有 1 个点到直线的距离为 1，如果只有 2 个点，那么左边小圆弧上最远的点（垂线与圆的交点）到已知直线的距离应当恰好小于 1，这样该圆弧让其他点到已知直线的距离都比 1 小，这是半径的最大值。

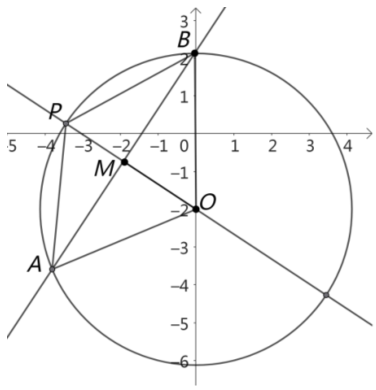
另外，圆不能太小，如下图所示，要保证圆缩小到与已知直线无交点时，垂线与圆（靠近已知直线的）的交点到直线的距离恰好大于 1，这样改点 2 边恰好有 2 个对称的点到直线的距离为 1，这是半径的最小值。



接下来开始分析计算，先求半径的最大值，如下页图所示，设圆心为 O，圆心向已知直线引垂线的垂足为 M，垂线与圆在已知直线另一侧的交点为 P，已知直线与圆的两个交点为 A 和 B，不管有没有用先把这些点都连起来。

其中圆心 O 的坐标为 $(0,-2)$，已知直线的方程为 $y=\sqrt{3}x+2$，需要满足 $PM<1$，只需解出 $PM=1$ 对应的半径，然后让半径小于这个临界值即可。虽然可以利用垂线经过点 $(0,-2)$ 和斜率为已知直线的负倒数 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 列出其点斜式，再

联立方程求点 P 和 M 的坐标，再列出 PM 之间距离的等式求 r，但感觉计算量较大，先尝试利用寻找平面几何关系。

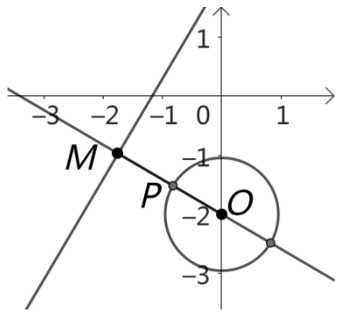


由圆的半径都相等可得 $OA=OP=r$，需要恰好不满足的临界条件为 $PM=1$，$OP\perp AB$，可以尝试利用直角三角形 OAM 列出勾股定理，其中 $OA=r$，$OM=OP-PM=r-1$，$AM=\dfrac{1}{2}AB$，而 A、B 的坐标可以利用圆与已知直线的方程用参数 r 表示。把直线方程 $y=\sqrt{3}x+2$ 代入圆的方程 $x^2+(y+2)^2=r^2$ 得 $x^2+(\sqrt{3}x+2+2)^2=r^2$，化简成用 r 表示 x 的形式：$x^2+(\sqrt{3}x+4)^2=r^2$，$4x^2+8\sqrt{3}x+16-r^2=0$，$x=\dfrac{-8\sqrt{3}\pm\sqrt{(8\sqrt{3})^2-4\times4\times(16-r^2)}}{8}=\dfrac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{r^2-4}}{2}$，又因为直线 AB 的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，可得

$$AB=\sqrt{1+(-\frac{\sqrt{3}}{3})}\left|x_B-x_A\right|=\sqrt{1+(-\frac{\sqrt{3}}{3})}\left|\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{r^2-4}}{2}-\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{r^2-4}}{2}\right|$$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{r^2-4}$（这是个需要掌握的常用公式），$AM=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{r^2-4}$，将各数据代入勾股定理 $OM^2+MA^2=OA^2$ 得 $(r-1)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{r^2-4})^2=r^2$，化简求解：$r^2-2r+1+\dfrac{1}{3}r^2-\dfrac{4}{3}=r^2$，$r^2-6r-1=0$，$r=3$ 或 $r=-2$，只保留正值，半径的最大临界值（取不到）为 3。

再求半径的最小值，如下图所示，圆心为 O，圆心向已知直线引垂线的垂足为 M，垂线与圆在已知直线另一侧的交点为 P。



需要恰好不满足的临界条件为 $PM=1$，利用点到直线的距离公式容易求得 OM 的长度，OP 为圆的半径，由 $OM=OP+PM$ 可以建立数量关系。先把已知直线方程化成一般式：$\sqrt{3}x-y+2=0$，代入点到直线的距离公式可得 $OM=\dfrac{\left|\sqrt{3}\times 0-(-2)+2\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=2$，将各数据代入 $OM=OP+PM$ 可得 $2=r+1$，解得 $r=1$，半径的最小临界值（取不到）为 1。

综上，本题选 B。

从应试的角度，本题分析出基本情形的用时较短，具体计算较花时间，在分析出具体情形后，简单计算圆心到已知直线的距离大于 1，即可排除半径过小的 0，直接排除选项 A，还能排除有 4 个交点的半径过大的+∞，直接排除选项 C 和 D，只剩选项 B，还可以把各选项中出现较多的值 1 和 3 代入基本关系大致判断，极大缩小运算量。

评价：中等或较难。需要对圆与直线的位置关系非常熟悉，如果应试能力较强则能迅速找出答案，如果应试能力一般需要一定的计算量。

8.若实数 x，y，z 满足 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x，y，z 的大小关系不可能是（）

A．$x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

解析：本题已知一组关于 3 个变量的等式关系，等式中有对数运算，需选出不可能的大小关系，考虑利用对数运算的性质（如换底公式）进行比较。需注意，本题需要两个等号同时成立，因此不能拆开分别比较 $2+\log_2 x=3+\log_3 y$、$3+\log_3 y=5+\log_5 z$、$2+\log_2 x=5+\log_5 z$ 中 x 与 y、y 与 z、x 与 z 的大小，对已知等式组做同步变换，先消掉最左边的常数 2，$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$ 变为 $\log_2 x=1+\log_3 y=3+\log_5 z$，相当于 3 个函数 $f(x)=\log_2 x$，$f(y)=1+\log_3 y$，$f(z)=2+\log_5 z$，需要判断当这 3 个函数的值相等时，自变量之间不可能的大小关系，需要结合对数函数的性质和规律判断。

首先，这三个对数函数的底数都大于 1，该范围内底数越大，对数趴得越低，

当自变量足够大时，常数项的影响可以忽略，即当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) > f(y) > f(z)$，反过来当函数值相等时，$z > y > x$，没有这个选项可以排除。

再试一些特殊值，当函数值为 0 时，解 $\log_2 x = 0$ 得 $x = 1$，解 $1 + \log_3 y = 0$ 得 $y = \frac{1}{3}$，解 $2 + \log_5 z = 0$ 得 $z = \frac{1}{25}$，此时 $x > y > z$，选项 A 可能成立，排除。

当函数值为-1 时，解 $\log_2 x = -1$ 得 $x = \frac{1}{2}$，解 $1 + \log_3 y = -1$ 得 $y = \frac{1}{9}$，解 $2 + \log_5 z = -1$ 得 $z = \frac{1}{125}$，此时还是 $x > y > z$，再让函数值减小似乎规律不变，前面分析得知最终会变为 $z > y > x$，所以接下来尝试让函数值逐渐变大一些，看看会不会变出 $x > z > y$ 或 $z > x > y$ 之类的情况。

当函数值为 1 时，解 $\log_2 x = 1$ 得 $x = 2$，解 $1 + \log_3 y = 1$ 得 $y = 1$，解 $2 + \log_5 z = 1$ 得 $z = \frac{1}{5}$，还是 $x > y > z$，再让函数值增大。

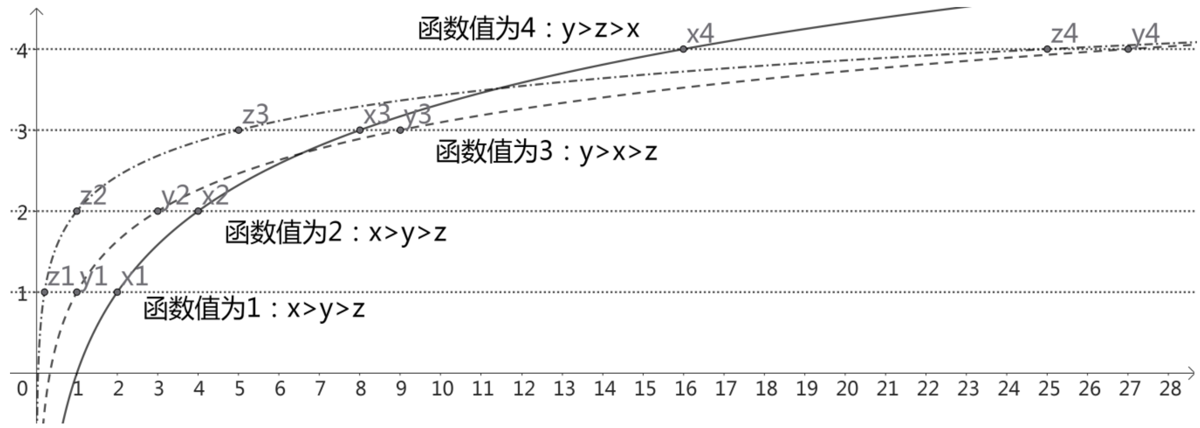
当函数值为 2 时，解 $\log_2 x = 2$ 得 $x = 4$，解 $1 + \log_3 y = 2$ 得 $y = 3$，解 $2 + \log_5 z = 2$ 得 $z = 1$，还是 $x > y > z$，再让函数值增大。

当函数值为 3 时，解 $\log_2 x = 3$ 得 $x = 8$，解 $1 + \log_3 y = 3$ 得 $y = 9$，解 $2 + \log_5 z = 3$ 得 $z = 5$，变为 $y > x > z$，选项 C 可能成立，排除。

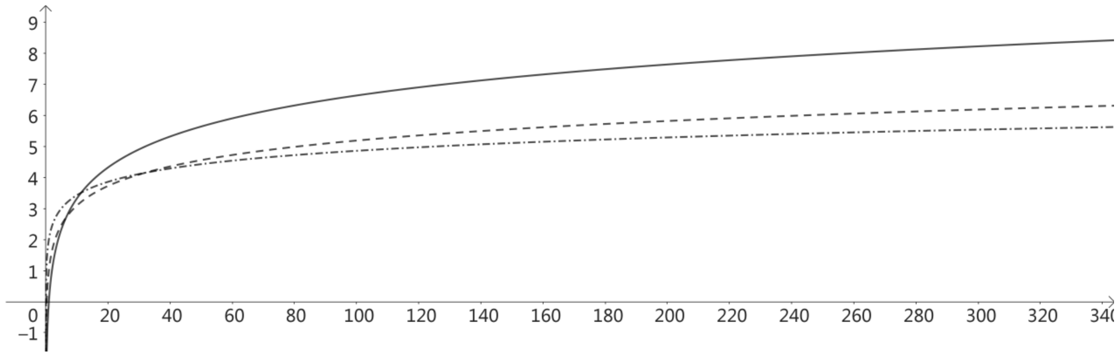
再让函数值增大，当函数值为 4 时，解 $\log_2 x = 4$ 得 $x = 16$，解 $1 + \log_3 y = 4$ 得 $y = 27$，解 $2 + \log_5 z = 4$ 得 $z = 25$，变为 $y > z > x$，选项 D 可能成立，排除。

随着函数值继续增大，最后会变成开头分析得出的 $z > y > x$，不会再有 x 比 y 和 z 高的机会了，就此作罢。只剩选项 B 没有排除，本题选 B。

下图为在同一个坐标系中画出的这 3 个函数的图像，实线为 $f(x) = \log_2 x$，虚线为 $f(y) = 1 + \log_3 y$，点划线为 $f(z) = 2 + \log_5 z$，一系列水平线标出了当函数值相同时，对应的自变量的大小关系，同一条水平线上越靠右的点横坐标越大，为了便于观察，调整了 x 轴与 y 轴的刻度比例。



下页图为这 3 个函数在自变量较大的时候的图像，需要熟悉指数函数“底数越大趴得越平”的规律，以及自变量足够大后相加的常数项可以忽略的特点，至于自变量较小时的交错关系只能具体分析。



评价：较难，需要对对数函数的递增规律很熟悉，要注意同时让 3 个表达式相等再比较 x、y、z 之间的大小关系，而不是分别两两比较，好在本题利用一些较小的数字尝试后就能排除所有错误选项。

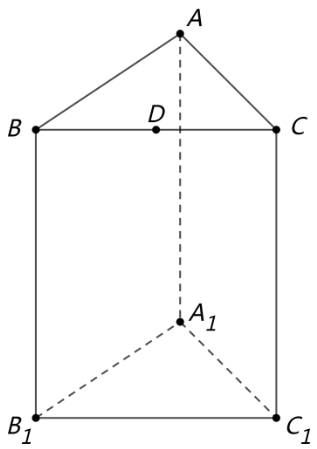
二、多项选择题

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 中点，则（）

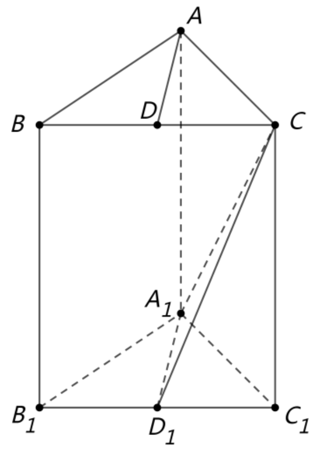
A． $AD\perp A_1C$　　B. $B_1C\perp$ 平面AA_1D

C. $CC_1\parallel$ 平面AA_1D　　D. $AD\parallel A_1B_1$

解析：本题已知一个正三棱柱，正三棱柱的底面是正三角形，并且高垂直于底面，还专门给出了 BC 的中点 D，需要选出正确的选项，多选题不能用排除法，只能逐个分析判断，作图是让高比底面边长明显长一截，防止因为让侧面恰好变成正方形而导致不必要的误判，如下图所示。

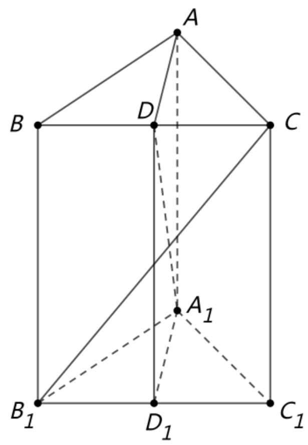


选项 A，$AD \perp A_1C$，如下页图所示，连接 AD 和 A_1C，两条直线不相交，难以直接判断是否垂直，可以找出 B_1C_1 的中点 D_1，则直线 $A_1D_1 \parallel AD$，那么 A_1D_1 与 A_1C 的夹角等于 AD 与 A_1C 的夹角。

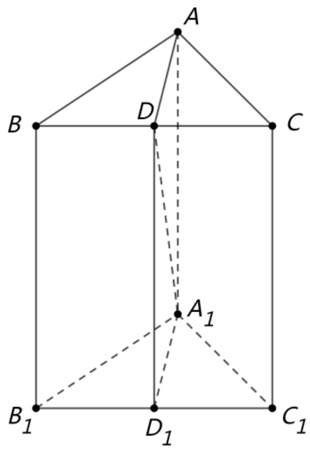


直观上看不太确定是否 $A_1D_1 \perp A_1C$，出于保险起见计算一下，设底面正三角形的边长为 a，棱柱的高为 h，A_1D_1 为正三角形的高，可得 $A_1D_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$A_1C$ 为侧面的对角线，侧面为矩形，可得 $A_1C = \sqrt{a^2 + h^2}$，$C_1D_1 = \sqrt{(\dfrac{a}{2})^2 + h^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + h^2}$，其中对角线 A_1C 最长，有可能是斜边，试一下勾股定理：$A_1D_1^2 + CD_1^2 = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + (\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + h^2})^2 = a^2 + h^2 = A_1C^2$，正确，备选。

选项 B，$B_1C \perp 平面AA_1D$，如下图所示，连接 AD、A_1D、B_1C，平面 AA_1D 实际上就是上下两个底面的中线截取的平面 AA_1D_1D，该平面与底面垂直，如果 $B_1C \perp 平面AA_1D$，那么需要 B_1C 与平面 AA_1D 中的任意直线都垂直，但明显 B_1C 与该平面内的 DD_1 不垂直，所以 B_1C 与平面 AA_1D 不垂直，错误，排除。



选项 C，$CC_1 \parallel 平面AA_1D$，如下页图所示，仍连接 AD、A_1D，平面 AA_1D 实际上就是上下两个底面的中线截取的平面 $AA_1D\ _1D$，该平面与底面垂直，如果 $CC_1 \parallel 平面AA_1D$，那么只要 CC_1 与该平面内的 1 条直线平行就行，由正三棱柱的性质可知 $CC_1 \parallel DD_1$，所以 $CC_1 \parallel 平面AA_1D_1D$，即 $CC_1 \parallel 平面AA_1D$，正确，备选。



选项 D，$AD \parallel A_1B_1$，如上图所示，没必要新画图了，AD 和 A_1B_1 分别在上下底面内，只要找到其中一条直线在另一个平面内对应的平行线即可，AD 在下底面对应的平行线为 A_1D_1，而 A_1D_1 与 A_1B_1 相交于点 A_1，所以 A_1D_1 与 A_1B_1 不平行，那么 AD 与 A_1B_1 也不平行，错误，排除。

综上，本题选 AC。

10. 设抛物线 C：$y^2=6x$ 的焦点为 F，过 F 的直线与 C 交于 A，B 两点，过 A 作直线 l：$x=-\dfrac{3}{2}$ 的垂线，垂足为 D，过 F 且垂直于 AB 的直线与 l 交于点 E，则（）

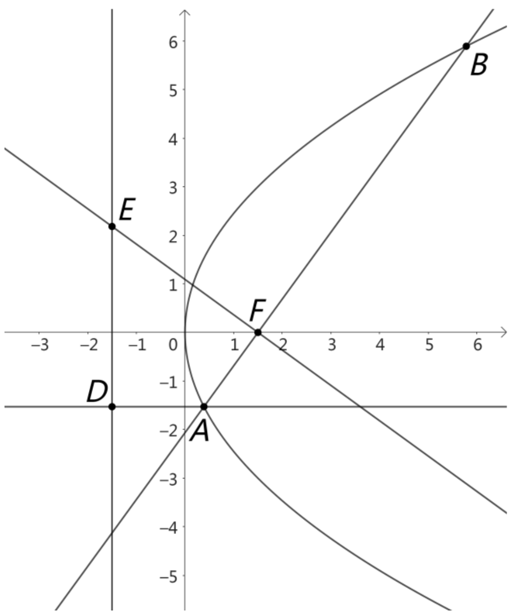
A．$|AD|=|AF|$　　B．$|AB|=|AE|$

C．$|AB|\geq 6$　　D．$|AE|\cdot|BE|\geq 18$

解析：本题已知一个抛物线的方程，还已知经过抛物线焦点的直线与抛物线相交于两点，再做出经过其中一个焦点且垂直于一条已知直线 l 的垂线，熟悉抛物线性质的话可以理解得知 l 为抛物线的准线，在过焦点做垂直于斜线的直线与准线 l 相交于点 E，需选出正确的选项，又只能逐个分析判断。

先根据题意画出图形，抛物线的焦点为 $F(\frac{3}{2},0)$，准线就是 l：$x=-\frac{3}{2}$，抛物线的顶点为原点 $(0,0)$，抛物线经过点 $(1,\pm\sqrt{6})$（分别在 $(1,\pm2.5)$ 附近）、$(2\pm2\sqrt{3})$（分别在 $(2,\pm3.4)$ 附近）（差不多就行，不需要很准），经过焦点的直线随便给个差不多的斜率，为了方便计算让斜率为正，然后画出相应的垂线，如下页图所示。

选项 A，$|AD|=|AF|$，因为 A 是抛物线上的点，F 为抛物线的焦点，AD 为 A 到抛物线准线的距离，抛物线的定义为到焦点与到准线距离相等的点组成的图形，由定义可得 $|AD|=|AF|$，正确，备选。



选项 B，$|AB|=|AE|$，斜线与抛物线的交点 A 与 B 可以互换位置（名字），而 E 的位置与 AB 是否互换无关，这就导致如果 $|AB|=|AE|$，那么把 A 与 B 互换位置后，就需要满足 $|AB|=|BE|$，由此可得应当始终很对称地 $|AB|=|AE|=|BE|$，但 A 与 B 到 E 的距离显然不一样，可排除本选项。

选项 C，$|AB|\geq 6$，设直线 AB 的斜率为 k，因为直线 AB 经过焦点 $F(\frac{3}{2},0)$，可得直线 AB 的方程为 $y=k(x-\frac{3}{2})$，接下来需要表示出 A 和 B 的坐标，将直线 AB 的方程 $y=k(x-\frac{3}{2})$ 代入抛物线的方程得 $[k(x-\frac{3}{2})]^2=6x$，化简求解：

$k^2(x^2-3x+\frac{9}{4})=6x$，$k^2x^2-(3k^2+6)x+\frac{9}{4}k^2=0$，$x=\dfrac{3k^2+6\pm\sqrt{(3k^2+6)^2-4\times k^2\times\frac{9}{4}k^2}}{2k^2}=$，

$\dfrac{3k^2+6\pm\sqrt{36k^2+36}}{2k^2}=\dfrac{3k^2+6\pm6\sqrt{k^2+1}}{2k^2}$，已知直线斜率和直线上两点横坐标之差，则这两点间距离为 $|AB|=\sqrt{k^2+1}\left|\dfrac{3k^2+6+6\sqrt{k^2+1}}{2k^2}-\dfrac{3k^2+6-6\sqrt{k^2+1}}{2k^2}\right|=$

$\sqrt{k^2+1}\cdot\dfrac{12\sqrt{k^2+1}}{2k^2}=\dfrac{6(k^2+1)}{k^2}=6(1+\dfrac{1}{k^2})>6$，当直线 AB 与 x 轴垂直时，A 与 B 的横坐标都是 $\frac{3}{2}$，代入 $y^2=6x$ 得 $y^2=6\times\frac{3}{2}$，解得 $y=\pm3$，可得 A 与 B 的坐标分别为 $(\frac{3}{2},3)$ 和 $(\frac{3}{2},-3)$，此时 $|AB|=6$，综上，$|AB|\geq6$，正确，备选。

选项 D，$|AE|\cdot|BE|\geq18$，前面求出了 A、B 的横坐标，但再求 A、B 纵坐标太复杂，尝试利用几何关系让计算简化，已知 $EF\perp AB$，对于三角形 AEB，它的面积既等于底边 AB 与高 EF 的乘积的一半，又能用正弦定理表示为临边 AE、BE 及它们夹角正弦的乘积的一半，由此可得 $\frac{1}{2}|AE|\cdot|BE|\cdot\sin\angle AEB=\frac{1}{2}|AB|\cdot|EF|$，化简得 $|AE|\cdot|BE|\cdot\sin\angle AEB=|AB|\cdot|EF|$，其中选项 C 中已求得 $|AB|=6(1+\frac{1}{k^2})>6$，接下来还需要求 $|EF|$，利用点 F 的坐标和 EF 与 AB 垂直，可得 EF 的点斜式方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-\frac{3}{2})$，点 E 的横坐标为 $-\frac{3}{2}$，代入 EF 的方程可得点 E 的纵坐标为 $y=-\frac{1}{k}(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2})=\frac{3}{k}$，点 E 的坐标为 $(-\frac{3}{2},\frac{3}{k})$，可得 $|EF|=\sqrt{(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{k})^2}=3\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$，将 $|AB|$ 和 $|EF|$ 的表达式代入面积等式可得 $|AE|\cdot|BE|\cdot\sin\angle AEB=6(1+\frac{1}{k^2})\times3\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$，移项得 $|AE|\cdot|BE|=\dfrac{18(1+\frac{1}{k^2})^{\frac{3}{2}}}{\sin\angle AEB}$，其中 $(1+\frac{1}{k^2})^{\frac{3}{2}}>1$，$\sin\angle AEB\leq1$，可得 $|AE|\cdot|BE|=\dfrac{18(1+\frac{1}{k^2})^{\frac{3}{2}}}{\sin\angle AEB}>18$，接下来需要验证最小值 18 能否取到，表达式 $|AE|\cdot|BE|=\dfrac{18(1+\frac{1}{k^2})^{\frac{3}{2}}}{\sin\angle AEB}$ 取最小值时，需要 $(1+\frac{1}{k^2})^{\frac{3}{2}}$ 为最小且

$\sin\angle AEB$ 为最大，当 $k\to+\infty$ 时 $(1+\frac{1}{k^2})^{\frac{3}{2}}$ 为最小，此时直线 AB 与 x 轴垂直，直线 AB 的方程为 $x=\frac{3}{2}$，直线 EF 就是 x 轴，点 E 的坐标为 $(-\frac{3}{2},0)$，将 $x=\frac{3}{2}$ 代入抛物线的方程可求得 A 和 B 的纵坐标：$y^2=6\times\frac{3}{2}$，$y=\pm3$，即 A 和 B 的坐标分别为 $(\frac{3}{2},3)$ 和 $(\frac{3}{2},-3)$，利用对称性可求得 $|AE|=|BE|=\sqrt{(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2})^2+(\pm3)^2}=3\sqrt{2}$，$|AE|\cdot|BE|=(3\sqrt{2})^9=18$，能取到最小值 18，正确，备选。

综上，本题选 ACD。

评价：较难，本题的选项 C 和 D 需要较强的几何分析和计算方面的技巧和能力，并且由于涉及具体数值，难以通过作图和感觉直观判断。

11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$，若 $\cos2A+\cos2B+2\sin C=2$，$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$，则（）

A. $\sin C=\sin^2A+\sin^2B$　　B. $c=\sqrt{2}$

C. $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $AC^2+BC^2=3$

解析：本题已知一个三角形的面积，还已知两个关于角度的等式需选出正确的选项，仍然只能挨个分析判断，三角恒等变换的技巧性很强，熟练度高（运气好）的话计算量会比较小，否则只能辛苦计算。

先观察下已知条件，面积与边长和角的大小都有关，而两个等式都只与角的大小有关，与边长无关，所以涉及长度的选项需要利用面积数据，只涉及角的选项优先考虑只利用后两个等式。

此外，如果有可能的话可以尝试利用 3 个已知关系求出三角形的全部信息，但可能非常难，不到万不得已不考虑，先逐个分析判断各选项。

选项 A，$\sin C=\sin^2A+\sin^2B$，只涉及角度，并且 A 与 B 的形式相同，都是正弦的平方，C 在等式另一侧，第一个已知等式中同样 A 与 B 的形式相同，且 2 倍角能转化为平方，来变形下试试：$\cos2A+\cos2B+2\sin C=2$，$1-2\sin^2A+1-2\sin^2B+2\sin C=2$，$\sin C=\sin^2A+\sin^2B$，正确，备选。

选项 B，做了大量分析后没找到思路，思考的过程放在本小题最后，最终放弃逐个分析，而是尝试用已知条件尽可能解出三角形的直接信息，重新开始做！

设三角形 ABC 的角 A、B、C 对的边长分别为 a、b、c，由正弦定理可得

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$，设$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=x$，可得$\sin A=xa$，$\sin B=xb$，$\sin C=xc$，已知三角形的面积为$\frac{1}{4}$，可得$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}$，代入$\sin C=xc$并化简可得$2xabc=1$（等式 1）。利用第一个已知等式证明了选项 A 中的$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$，把正弦函数换成边长得$xc=x^2a^2+x^2b^2$，化简得$c=xa^2+xb^2$（等式 2）。对第二个已知等式使用余弦定理和$\sin C=xc$得$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot xc=\frac{1}{4}$，化简得$x(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)=abc$（等式 3）。以上 3 个等式包含了本题的所有已知信息，把它们联立起来方便观察：

$$\begin{cases}2xabc=1\\c=xa^2+xb^2\\x(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)=abc\end{cases}$$

共有 4 个未知数和 3 个等式，可能没有唯一解，先尽量化简成用一个变量表示其他变量，这 4 个变量都是正数，还需要满足三角形的两边之和大于第三边、两边之差小于第三边。

由$2xabc=1$可得$x=\frac{1}{2abc}$，分别代入第二和第三个等式消去比例系数 x，只剩边长，便于确认是否满足两边之和大于第三边。把$x=\frac{1}{2abc}$代入第二个等式并化简：$c=\frac{1}{2abc}(a^2+b^2)$，$2abc^2=a^2+b^2$，代入选项 B 的$c=\sqrt{2}$得$4ab=a^2+b^2$，$b^2-4ab+a^2=0$，可以用 a 表示 b：$b=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-4a^2}}{2}=(2\pm\sqrt{3})a$，两个解都是正数，先都留着，看后续能不能推出矛盾。

把$x=\frac{1}{2abc}$代入第三个等式得$\frac{1}{2abc}(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)=abc$，化简得$(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)=2a^2b^2c^2$，代入$c=\sqrt{2}$得$(b^2+2-a^2)(a^2+2-b^2)=4a^2b^2$，展开并化简：$4-(b^2-a^2)^2=4a^2b^2$，$4-b^4+2a^2b^2-a^4=4a^2b^2$，$b^4+2a^2b^2+a^4-4=0$，可以用 a^2 表示 b^2：$b^2=\frac{-2a^2\pm\sqrt{4a^4-4a^4+16}}{2}=-a^2\pm 2$，只保留正数，$b^2=2-a^2$，还需要满足 a 和 b 都比$\sqrt{2}$小。

再把前面用 a 表示 b 的等式两边平方：$b^2=[(2\pm\sqrt{3})a]^2$，结合$b^2=2-a^2$可得$[(2\pm\sqrt{3})a]^2=2-a^2$，$(8\pm 4\sqrt{3})a^2=2$，解得，$b=\sqrt{2-a^2}=\sqrt{2-(\frac{\sqrt{4\mp 2\sqrt{3}}}{2})^2}=\frac{\sqrt{4\pm 2\sqrt{3}}}{2}$，

可以发现 a 与 b 的值是对称的，这与已知条件中 A 与 B 的出现形式一致相符，可以只考虑一种情况，如 $a=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}$，敏感地发现分子部分的根号套根号可以化简：$a=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，同理 $b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，检验一下两边之和是否大于第三边：$a+b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{3}>\sqrt{2}$，满足，两边之差是否小于第三边：$a-b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=1<\sqrt{2}$，也满足，没有得出矛盾。

虽然有可能存在并非唯一满足条件的三角形，但已知条件已经给了 3 个限定条件，有多种满足条件的三角形的可能性很小，即使有也很可能是一个锐角三角形和一个钝角三角形，可以利用选项 A 中证明的 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin C\geq\sin^2 C$ 证明最大的角 C 是锐角，那么 ABC 是锐角的可能性极大，所以应当是唯一的三角形。

至此，终于勉强证明了选项 B 正确，同时还求出了另外两条边长！

选项 C，$\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$，将前面求出的各边长代入 $x=\frac{1}{2abc}$ 解得 $x=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $\sin A=xa=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin B=xb=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，正确，备选。

选项 D，$AC^2+BC^2=3$，即 $b^2+a^2=3$，代入长度：$b^2+a^2=(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}+1}{2})^2$
$\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=2$，错误，排除。

本题选 ABC。

评价：较难或很难。本题需要对三角恒等变换、正弦定理、余弦定理较为熟悉，还需要足够强的分析计算化简、解三角形的能力。本题难以局部地将各选项一个一个击破，而是需要解出整个三角形的全部直接信息（边长和角的大小），再利用直接信息具体判断。

最后放上作者起初尝试逐个击破时，在选项 B 中多次尝试陷入死路的真实思路历程：

选项 B，出现了长度，需要利用跟长度有直接联系的面积数据，$AB=\sqrt{2}$，出现了长度，需要利用面积的数据，为了便于把边长与角度对应，把边 AB 的长

度命名为它的对角 c，即$c=\sqrt{2}$，三角形 ABC 的面积可以表示为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{4}$或$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}$，两个等式相乘可得$abc^2\sin A\sin B=\frac{1}{4}$，又多出了 a、b 两条边长需要消除，可以使用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得到$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$，代入前面的等式就能消除 a、b：$\frac{c\sin A}{\sin C}\cdot\frac{c\sin B}{\sin C}\cdot c^2\sin A\sin B=\frac{1}{4}$，化简得$4c^4\sin^2 A\sin^2 B=\sin^2 C$，选项 A 证明了$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$，可以代进去$4c^4\sin^2 A\sin^2 B=(\sin^2 A+\sin^2 B)^2$，移项并化简得$c^4=\frac{1}{4}(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A})^2\geq\frac{1}{4}(2\sqrt{\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}})^2=1$，与$c=\sqrt{2}$不矛盾，貌似没什么用，换个思路。

考虑利用第二个等式，两个已知等式中都有 $\sin C$，把两个等式稍作变形消除 $\sin C$ 只剩 A 和 B 试试看，由$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$可得$\sin C=2-\cos 2A+\cos 2B$，突然想起来可以直接利用已经证明的选项 A 中的等式$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$，联立第二个等式$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$可得$\sin^2 A+\sin^2 B=\frac{1}{4\cos A\cos B}$，好像化简起来更麻烦了，再换个思路。

针对三角形的面积公式$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{4}$或$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}$，代入$c=\sqrt{2}$看看能不能推出矛盾，$\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin B=\frac{1}{4}$，$a=\frac{\sqrt{2}}{4\sin B}$，同理可得$b=\frac{\sqrt{2}}{4\sin A}$，三角形需要满足两边之和大于第三边，如果 c 是最长的边，需要满足$a+b>c$，即$\frac{\sqrt{2}}{4\sin B}+\frac{\sqrt{2}}{4\sin A}>\sqrt{2}$，三角形内角的正弦都是正数，变形化简：$\frac{1}{4\sin B}+\frac{1}{4\sin A}>1$，$\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A}>4$，貌似没什么明显的矛盾，再换个思路。

有长度时依然优先考虑利用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，选项 A 恰好证明了$\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$，可以设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{t}$，则$\sin A=at$，$\sin B=bt$，$\sin C=ct$，代入选项 A 中的等式得$ct=a^2t^2+b^2t^2$，代入$c=\sqrt{2}$并化简得$a^2+b^2=\frac{\sqrt{2}}{t}$，都算到这里了，索性直接把三角形全解出来算了！于是来到前文的正式解析中，尝试解出三角形的全部信息。

三、填空题

12. 若直线$y=2x+5$是曲线$y=e^x+x+a$的切线，则$a=$.

解析：本题已知一条直线的方程，还已知该直线是一个含参数的曲线的切线，求参数的值。利用切线的定义表示出斜率与切点坐标的关系，然后跟直线方程比较并列出等式关系即可。

曲线$y=e^x+x+a$的切线的斜率为该函数的导数，$y'=e^x+1$，斜率与参数a无关，已知切线$y=2x+5$的斜率为 2，可得$e^x+1=2$，解得$x=0$，将$x=0$代入曲线的表达式可得切点的纵坐标为$y=e^0+0+a=a+1$，切点坐标为$(0,a+1)$，切点在切线上，将切点坐标代入切线方程：$a+1=2\times0+5$，解得$a=4$，本题填 4。

评价：中等，需要熟练掌握曲线切线、切点的几何含义和表达式的关系，本题的思路较简单直接，由于导数在整个高中数学中是较难的块面，导致整体难度为中等。

13. 若一个等比数列的前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为.

解析：本题已知一个等比数列，可以列出含首项和公比这 2 个参数的通项公式，还已知该数列的前 4 项和为 4、前 8 项和为 68，可以列出 2 个等式，求数列的公比，2 个参数 2 个等式通常能求解，就用该思路求解。

设该等比数列的首项为 a_1，公比为 q，其通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$，前 n 项和公式为$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，由前 4 项和为 4 可得$\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=4$，由前 8 项和为 68 可得$\dfrac{a_1(1-q^8)}{1-q}=68$，让两个等式两边相除可以消去 a_1，然后解方程：$\dfrac{1-q^8}{1-q^4}=\dfrac{68}{4}$，对左边的分子用下平方差公式：$\dfrac{(1+q^4)(1-q^4)}{1-q^4}=17$，继续化简解方程：$1+q^4=17$，$q^4=16$，$q=\pm2$，本题填$\pm2$。

评价：较简单，只需要掌握基本的等比数列的定义和通项公式，按部就班地根据已知信息列方程、解方程即可。

14. 一个箱子里有 5 个球，分别以 1~5 标号，若有放回取三次，记至少取出一次的球的个数 X，则$E(X)=$.

解析：本题已知一个箱子里有 5 个球并且分别标了序号，有放回地取三次，是独立重复试验，求至少取出一次的球的个数的期望。需要分别求出至少取出一次的球只有 1 个（三次取出同一个球）、至少取出一次的球有 2 个（一个球 2 次

另一个球 1 次）、至少取出一次的球有 3 个（三次都不一样）的概率，然后利用期望的定义计算：各数量乘以概率再求和。

首先，5 个球，有放回地取 3 次，总共有$5\times5\times5=125$种可能。

情况 1：至少取出一次的球只有 1 个，即三次取同一个球，只有 5 种可能，即 3 次都取 1 号、3 次都取 2 号……3 次都取 5 号。

情况 2：至少取出一次的球有 2 个，有 3 种模式：aab、aba、baa，每一对 a-b 有 $\mathbf{A}_5^2=5\times4=20$ 种可能（如两次 1 号和一次 2 号、两次 2 号和一次 1 号、两次 1 号和一次 3 号、两次 3 号和一次 1 号……两次 4 号和一次 5 号、两次 5 号和一次 4 号），3 种模式各有 20 种可能，共$3\times20=60$种可能。

情况 3：至少取出一次的球有 3 个，即 3 次都不一样，有 $\mathbf{A}_5^3=5\times4\times3=60$ 种可能。

以上三种情况共计$5+60+60=125$种可能，等于$5\times5\times5=125$种可能的总情况数没有遗漏。

各情况的概率分别为$\frac{5}{125}=\frac{1}{25}$、$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$、$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$，可得至少取出一次的球的个数的期望为$E(X)=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{12}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{61}{25}$，本题填$\frac{61}{25}$。

评价：中等或较难，需要同时对概率和期望的概念与运算都足够熟悉，并且“至少取出一次的球的个数”有些拗口，需要一定的理解能力。

四、解答题

15. 为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表

超声波检查结果 / 组别	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

（1）记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p，求 p 的估计值；

（2）依据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解析：本题是关于一对变量的相关性检验，这对变量是是否患病与超声波检查的结果，相关性检验没有什么套路技巧，只需要记住公式和概念的含义，套公式和利用概念分析即可。

（1）超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p，用超声波检查且患病的人数 180 除以超声波检查不正常的总人数 200 即可，$p=\dfrac{180}{200}=0.9$；

（2）将列联表中的数据带入到 K^2 的公式中求值，如果值足够小就表明零假设成立，即超声波检查结果与患该疾病无关，如果值足够大就表明零假设不成立，即超声波检查结果与患该疾病有关，且错误的概率不小于表中对应的值。

$$K^2=\frac{1000\times(20\times20-180\times780)^2}{800\times200\times200\times800}=\frac{(2\times2-18\times78)^2}{80\times2\times2\times8}=\frac{(1-9\times39)^2}{80\times2}=\frac{350^2}{160}=765.625$$

远大于 $\alpha=0.001$，表明超声波检查结果与患该疾病有关。

评价：较简单，相关性分析往往都很直接，没有套路技巧，记住公式和概念就能做对。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

（1）证明：数列 $\{na_n\}$ 是等差数列；

（2）给定正整数 m，设函数 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求 $f'(-2)$.

解析：题干中给出了一个数列的首项和相邻两项的等式关系，第（1）问要证明这个数列乘以项数构成的数列是等差数列，第二问用数列构造了一个函数，求一个导函数的值。

（1）可以利用等差数列的定义，证明 $(n+1)a_{n+1}-na_n$ 是常量，利用已知等式把 a_{n+1} 替换成 a_n 的表达式，然后化简即可。

由 $\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$ 可得 $a_{n+1}=\dfrac{na_n}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}$，

$(n+1)a_{n+1}-na_n=(n+1)(\dfrac{na_n}{n+1}+\dfrac{1}{n+1})-na_n=na_n+1-na_n=1$，

（以防万一，最好把首项求出来）$1\times a_1=3$，

（以防万一，再算出两三项检验下，$a_2=1\times(\dfrac{3}{1+1}+\dfrac{1}{1\times(1+1)})=2$，$2a_2=4$，

$a_3=2\times(\dfrac{2}{2+1}+\dfrac{1}{2\times(2+1)})=\dfrac{5}{3}$，$3a_2=5$，应该没问题）

即数列 $\{na_n\}$ 是以 3 为首项，公差为 1 的等差数列。

（2）函数 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ 的解析式中有数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项，需要知道 $\{a_n\}$ 的通项公式，可以利用第（1）问的结论，利用等差数列的通项公式变形来求，$\{na_n\}$ 是以 3 为首项，公差为 1 的等差数列，可得 $na_n=3+(n-1)\times1=n+2$，可得 $a_n=1+\dfrac{2}{n}$，代入函数解析式可得：$f(x)=(1+\dfrac{2}{1})x+(1+\dfrac{2}{2})x^2+\cdots+(1+\dfrac{2}{m})x^m$，直接求导好像有些麻烦，得找一下规律。

设 $f(x)$ 中的第 i 项为 $f_i(x)=a_ix^i=(1+\dfrac{2}{i})x^i$，它的导数为 $f_i'(x)=(1+\dfrac{2}{i})x^i=$ $(1+\dfrac{2}{i})ix^{i-1}=(i+2)x^{i-1}$，将该规律应用到 $f(x)$ 的每一项，$f(x)$ 的导数等于相加的每一项的导数之和：$f'(x)=(1+2)+(2+2)x+(3+2)x^2+\cdots+(m+2)x^{m-1}$，可以发现每一项的系数构成等差数列，$f'(x)=3+4x+5x^2+\cdots+(m+2)x^{m-1}$，代入 $x=-2$ 可得 $f'(-2)=3+4\times(-2)+5\times(-2)^2+\cdots+(m+2)\times(-2)^{m-1}$，利用推导等比数列求和公式的方法，$(-2)\times f'(-2)=3\times(-2)+4\times(-2)^2+5\times(-2)^3+\cdots+(m+2)\times(-2)^m$，让 $f'(-2)$ 与 $(-2)\times f'(-2)$ 的表达式相减：

$$f'(-2)-(-2)\times f'(-2)=[3+4\times(-2)+5\times(-2)^2+\cdots+(m+2)\times(-2)^{m-1}]-$$
$$[3\times(-2)+4\times(-2)^2+5\times(-2)^3+\cdots+(m+2)\times(-2)^m]$$

等式左边为 $3f'(-2)$，等式右边把两个中括号中 x 次数相同的项组合在一起：

$$3f'(-2)=3+(4-3)\times(-2)+(5-4)\times(-2)^2+\cdots+[(m+2)-(m-1)]\times(-2)^{m-1}$$
$$-(m+2)\times(-2)^m$$

恰好可以让中间一系列项的系数都减成 1，就能利用等比数列求和公式：

$$3f'(-2)=3+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{m-1}-(m+2)\times(-2)^m$$

$$3f'(-2)=3+\frac{(-2)\times[1-(-2)^{m-1}]}{1-(-2)}-(m+2)\times(-2)^m$$

$$3f'(-2)=3+\frac{-2-(-2)^m}{3}-(m+2)\times(-2)^m$$

$$3f'(-2)=3-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(-2)^m-(m+2)\times(-2)^m$$

$$3f'(-2)=\frac{7}{3}-(m+\frac{7}{3})\times(-2)^m$$

$$f'(-2)=\frac{7}{9}-(\frac{m}{3}+\frac{7}{9})\times(-2)^m$$

评价：中等，第（1）问较简单，利用等差数列的定义和已知条件简单推导即可，第（2）问较难，较容易利用第（1）问结论求出数列的通项公式和函数的

解析式、导函数的解析式，但将导函数解析式求和化简需要一定的技巧或者套路。

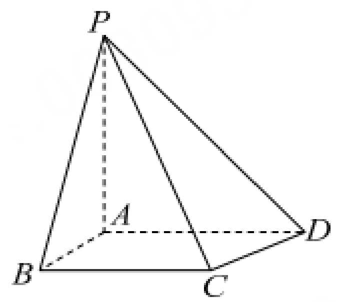
17. 如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面$ABCD$，$BC\parallel AD$，$AB\perp AD$，

（1）证明：平面$PAB\perp$平面PAD；

（2）若 $PA=AB=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{3}+1$，$BC=2$，P、B、C、D 在同一个球面上，设该球面的球心为 O.

（i）证明：O 在平面 $ABCD$ 上；

（ii）求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



解析：本题考察立体几何，比较简单的关系可以利用立体几何的定理证明，比较复杂的关系特别是涉及数量关系通常建立坐标系利用向量分析计算。本题给出的是四棱锥，是相对比较简单的几何体，还已知一条棱与底面垂直，底面中也有垂直关系，并且两组垂直关系交汇于同一点 A，可以据此建立坐标系。下面开始具体作答。

（1）要证明 平面$PAB\perp$平面PAD，只需要证明其中一个平面内的某条直线垂直于另一个平面内的两条相交直线即可。

因为$PA\perp$平面$ABCD$，所以$PA\perp AB$，又因为$AB\perp AD$，且 PA 与 AD 相交于点 A，可得 AB 与平面 PAD 内的两条相交直线垂直，所以 $AB\perp$平面PAD，又因为 AB 在平面 PAB 内，所以 平面$PAB\perp$平面PAD。

（2）已知了一些具体长度，可以考虑建坐标系了，还已知 P、B、C、D 在同一个球面上且球心为 O，需要证明 O 在平面 $ABCD$ 上，以及求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值，其中第 ii 问应该不难，列出坐标代入余弦定理公式就行，第一问涉及到没有画出的球并证明球心在平面上，要么需要求出球心坐标，要么需要利用非坐标化的立体几何定理，优先考虑相对不太需要技巧和灵活性的求坐标的方法，同时寻找可以让条件简化的几何关系。

要证明 4 个点在同一个球面上，可以尝试找出球心，证明球心到这 4 个点的距离相等。对于球，球面上的 3 个点可以确定一个平面，这个平面截取球面得到一个圆，圆心与球心的连线与该圆面垂直。题目已经给出了 B、C、D 所在的平

面，可以先找出这个圆的圆心（设为 M）的坐标，题目要证明球心就在这个平面内，那么这个圆心就是球心，只需利用垂直关系和 B、C、D 所在的圆的半径都相等找出 O 的坐标，即可完成证明。

（i）以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{AD}$ 为 y 轴正方向，$\overrightarrow{AP}$ 为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系，由已知数据和平行、垂直关系可得部分点的坐标为 $A(0,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$D(0,\sqrt{3}+1,0)$，$C(\sqrt{2},2,0)$。B、C、D 所在的圆的圆心在平面 $ABCD$ 内，设圆心为 $M(m_1,m_2,0)$，M 到 B、C、D 的距离相等，所以 M 在线段 BC、CD、BD 的中垂线的交点处。

接下来只分析平面 xAy，设 $B(\sqrt{2},0)$ 与 $C(\sqrt{2},2)$ 的中点为 N，可得 $N(\sqrt{2},1)$，又因为直线 BC 与 x 轴垂直，可得其中垂线 MN 的方程为 $y=1$，可得M在平面 xAy 内的坐标为 $M(m_1,1,0)$，再利用 M 到 B 和 D 的距离相等得到等式 $MB=MD$，即 $\sqrt{(m_1-\sqrt{2})^2+(1-0)^2}=\sqrt{(m_1-0)^2+[1-(\sqrt{3}+1)]^2}$，解方程：$(m_1-\sqrt{2})^2+1=m_1^2+3$，$m_1^2-2\sqrt{2}m_1+2+1=m_1^2+3$，$m_1=0$，即 $M(0,1,0)$（圆心竟然在 y 轴上！以防万一分别计算下 $MB=\sqrt{(0-\sqrt{2})^2+(1-0)^2}=\sqrt{3}$，$MD=\sqrt{(m_1-0)^2+[1-(\sqrt{3}+1)]^2}=\sqrt{3}$，$MC=\sqrt{(0-\sqrt{2})^2+(1-2)^2}=\sqrt{3}$，$M$ 到 B、C、D 的距离相等，的确如此，接下来只要证明 MP 也是 $\sqrt{3}$ 就形）

$MP=\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2+(0-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，即平面 $ABCD$ 上的点 $M(0,1,0)$ 到 P、B、C、D 的距离都为 $\sqrt{3}$，点 M 就是球心 O。

（ii）$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$，设 AC 与 PO 的夹角为 θ，由余弦定理可得 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PO}\right|}=\dfrac{\left|\sqrt{2}\times0+2\times1+0\times(-\sqrt{2})\right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$。

评价：中等，立体几何图形有非常规则的平行和垂直关系，第（1）问的证明很基础，第（2）问建立坐标系和求点的坐标较简单，第（i）问证明四点共球面少有难度，需要一定的立体几何能力，具体计算和第（ii）问求余弦都较简单。

18. 设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），椭圆的下顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$，且椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）已知动点 P 不在 y 轴上，动点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AR|\cdot|AP|=3$.

（i）设 $P(m,n)$，求 R 的坐标（用 m,n 表示）；

（ii）设 O 为坐标原点，Q 是 C 上的动点，直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍，求 $|PQ|$ 的最大值.

解析：本题是关于椭圆的解析几何题，第（1）问看上去很简单，第（2）问的第（i）问似乎可以比较容易地列出等式，第（ii）问似乎可以利用椭圆的第三定义较为简便地计算，如果没学过或者忘记的话，利用已知条件应该也能计算。

（1）由 $a>b>0$ 可知椭圆的焦点和长轴在 x 轴上，由椭圆的下顶点为 A 可得点 A 的坐标为 $(0,-b)$，由椭圆的右顶点为 B 可得点 B 的坐标为 $(a,0)$，由 $|AB|=\sqrt{10}$ 可得 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，即 $a^2+b^2=10$，由椭圆的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 可得 $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，即 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{8}{9}$，联立两个方程，结合 $a>b>0$ 可解得 $a=3$，$b=1$，椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$。顺便可得 $A(0,-1)$，$B(3,0)$。

（2）根据题意画出示意图，椭圆的焦点为 $(\pm\sqrt{9-1},0)$，即 $(\pm 2\sqrt{2},0)$（大约在 $(\pm 2.8,0)$ 附近），左右顶点为 $(\pm 3,0)$，上下顶点为 $(0,\pm 1)$。先随便画个点 P，由于只要求不在 y 轴上，为了方便计算就画在第一象限，画得稍微远一点，然后画出射线 AP，R 在 AP 上且满足 $|AR|\cdot|AP|=3$，感觉第（i）问不需要借助图像也能计算，那就先计算吧，图等做第（ii）问再继续画全。

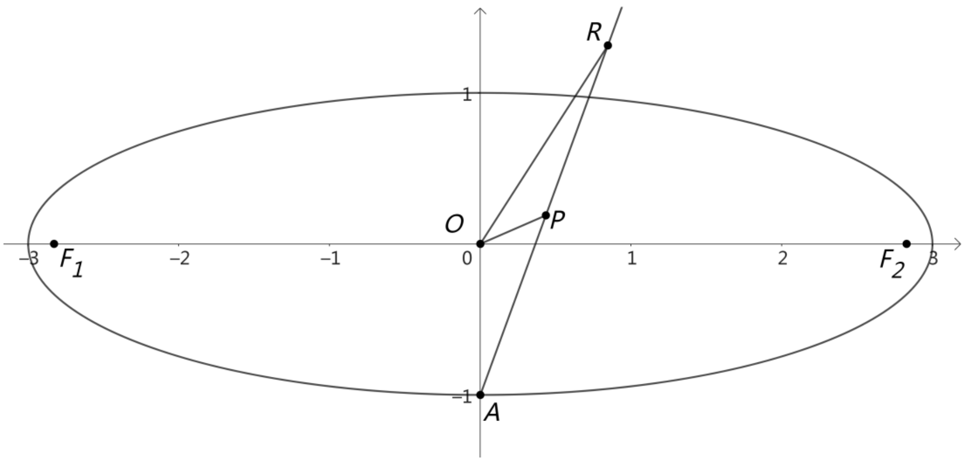
（i）设点 R 的坐标为 (r_1,r_2)，由动点 R 在射线 AP 上可得 $\overrightarrow{AR}\parallel\overrightarrow{AP}$，其中 $\overrightarrow{AR}=(r_1,r_2+1)$，$\overrightarrow{AP}=(m,n+1)$，因为 P 不在 y 轴上，所以 $m\neq 0$，可得 $\dfrac{r_2+1}{r_1}=\dfrac{n+1}{m}$，又因为 $|AR|\cdot|AP|=3$，结合 $\overrightarrow{AR}\parallel\overrightarrow{AP}$ 不需要列出计算复杂的距离公式，可以设 $\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AP}$，可得 $r_1=km$，$r_2+1=k(n+1)$，还可得 $|AR|\cdot|AP|=|kAP|\cdot|AP|=k|AP|^2=k[m^2+(n+1)^2]=3$，解得 $k=\dfrac{3}{m^2+(n+1)^2}$，可得 $r_1=\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2}$，$r_2+1=\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}$，$r_2=\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1=\dfrac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}$，$R$ 的坐标为 $\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}\right)$。

（ii）继续作图，Q 在椭圆上，位置先不容易确定，直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍将 P 和 Q 的位置进行了限制，把 P 画得低一点离原点稍近些，R 在射线 OP 上稍微远一些高一些的位置，（如果反过来 P 远 R 近的话，就不能在第一象限同时满足 $|AR|\cdot|AP|=3$ 和 OR 斜率是 OP 斜率 3 倍了，由于椭圆的对称性，P 和 R 在 y 轴左侧对称的位置，得到的距离关系跟在 y 轴右侧一致，另外

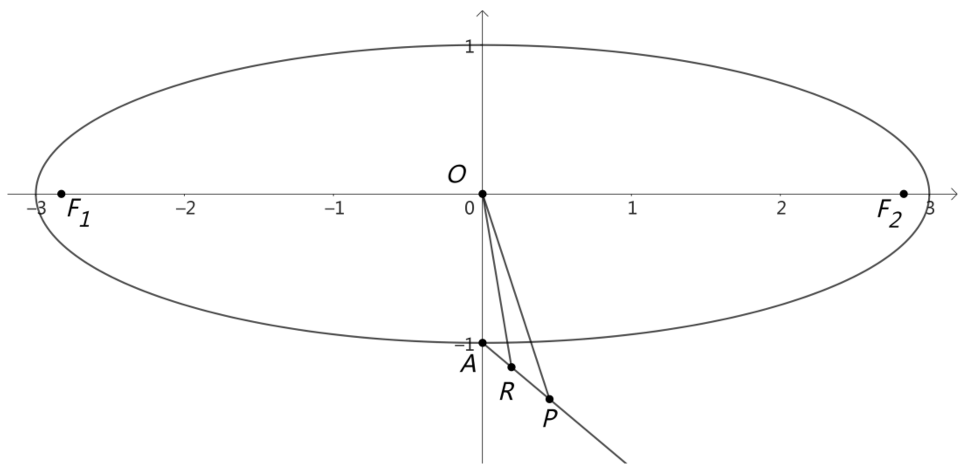
还有可能 P 和 R 在第四象限的情况）。

本小问相当于找出满足条件的 P 的范围，再找出它与椭圆上点的最远距离的一对点，先作出 P、R 需要满足要求的大致图形。

P 和 R 在第一象限的情况：



P 和 R 在第四象限的情况：

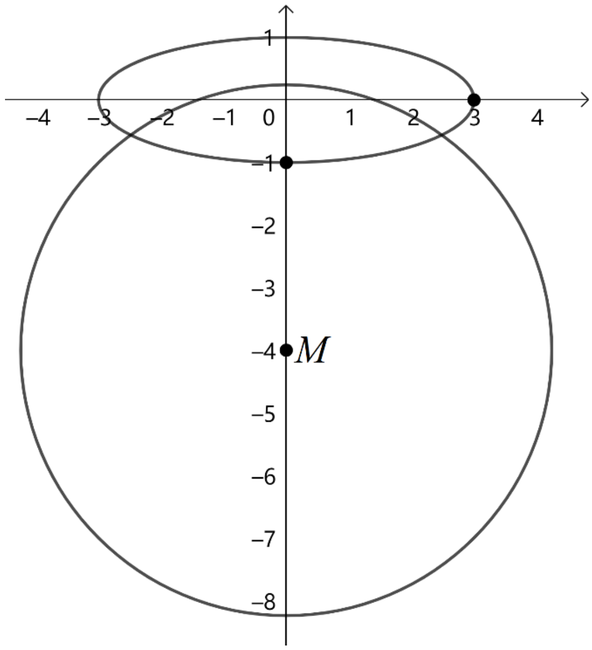


先利用限制条件 $|AR|\cdot|AP|=3$ 和 OR 斜率是 OP 斜率 3 倍求 P 的范围。已知 P 的坐标为 $P(m,n)$，第（i）问已求出 R 的坐标为 $R(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2},\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2})$，

直线 OR 的斜率为 $\dfrac{\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}}{\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}}$，直线 OP 的斜率为 $\frac{n}{m}$，由前者是后者的 3 倍可得 $\dfrac{\frac{-m^2-n^2+n+2}{m^2+(n+1)^2}}{\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}}=\frac{3n}{m}$，进行化简：$\frac{m(-m^2-n^2+n+2)}{m^2+(n+1)^2}=\frac{9mn}{m^2+(n+1)^2}$，

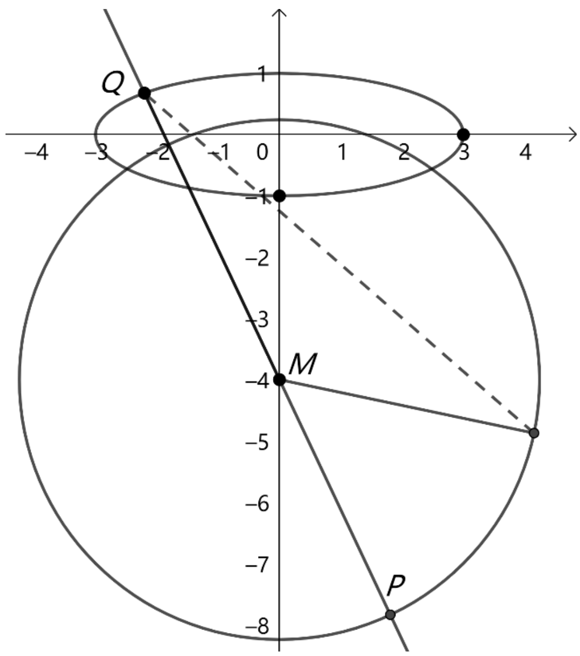
$-m^2-n^2+n+2=9n$，$m^2+n^2+8n-2=0$，$m^2+(n+4)^2=18$，可知 P 的轨迹为圆心为 $M(0,-4)$、半径为 $r=3\sqrt{2}$ 的圆，且题目要求 P 不在 y 轴上，先画出简图观

察下，如下图所示。



从图上看似乎 P 位于圆的最下方时，与椭圆上某个点的距离最远，但题目明确 P 不在 y 轴上，那么只能找别的位置。

如果 Q 在圆 M 外，那么 Q 与圆 M 上一点距离的最大值，都是直线 MQ 与圆 M 的交点中离 Q 较远的那个，等于圆的半径与 MQ 的距离之和，圆 M 上其他点与 Q 的距离都小于这个和（三角形的两边之和大于第三边），且这个最大距离一定大于圆 M 的直径。如果 Q 在圆 M 内，则 Q 到圆 M 上任意一点的最大距离都小于圆的直径。如下图所示。



由此可知需要 Q 在圆 M 外，且 $|PQ|$ 的最大值等于 $|QM|+r$，现在只要找出让 $|QM|$ 取最大值的点 Q 即可，此时用参数方程更简便，因为可以利用三角函数

化简可能会容易。设椭圆上的点 Q 的坐标为 $Q(3\cos\alpha,\sin\alpha)$，可得：

$$|QM|^2=(3\cos\alpha-0)^2+[\sin\alpha-(-4)]^2=9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+8\sin\alpha+16=$$

$$9(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha+8\sin\alpha+16=-8\sin^2\alpha+8\sin\alpha+25=-8(\sin\alpha-\frac{1}{2})^2+27$$

当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$|QM|$ 取最大值 $\sqrt{27}$，即 $3\sqrt{3}$，所以 $|PQ|$ 的最大值为 $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$。

评价：本题较难，第（1）问较简单，熟练掌握椭圆的定义和各参数即可，第（2）问的第（i）问难度中等，如果对共线向量的性质足够熟悉会很容易，如果不够熟悉则可能计算量会较大，第（ii）问需要足够全面的平面几何知识，需要能充分利用已知信息尽可能缩小限定范围找出规律，还需要熟练掌握圆外一点到圆上一点的最大距离的固定规律。

19. 设函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$.

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 的最大值；

（2）给定 $\theta\in(0,\pi)$，设 a 为实数，证明：存在 $y\in(a-\theta,a+\theta)$，使得 $\cos y\le\cos\theta$；

（3）若存在 t 使得对任意 x，都有 $5\cos x-\cos(5x+t)\le b$，求 b 的最小值.

解析：终于来到压轴题了，估计会比较难，题干的已知函数是两个余弦函数相减，可以考虑利用倍角公式或和角公式化简，走一步看一步吧。

（1）求函数的最大值，先考虑利用导数：

$f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=5(\sin 5x-\sin x)$，积化和差忘记了，用和角公式和差角公式也能化简，利用 $5x=3x+2x$，$x=3x-2x$，用和角公式和差角公式化简：

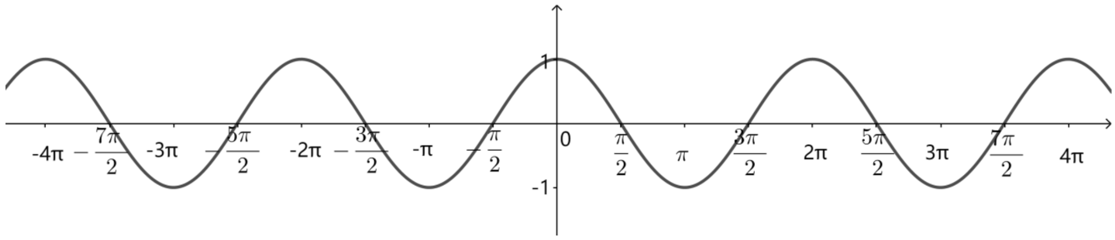
$$\begin{aligned}&5(\sin 5x-\sin x)=5[\sin(3x+2x)-\sin(3x-2x)]\\&=5(\sin 3x\cos 2x+\sin 2x\cos 3x-\sin 3x\cos 2x+\sin 2x\cos 3x)\\&=10\sin 2x\cos 3x\end{aligned}$$

在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上，其中 $2x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，恒有 $\sin 2x\ge 0$，而 $3x\in[0,\frac{3\pi}{4}]$，$\cos 3x$ 在 $[0,\frac{\pi}{6})$ 上大于 0，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时等于 0，当 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 时小于 0，综上，$f'(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{6})$ 上大于 0，在 $x=\frac{\pi}{6}$ 时等于 0，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上小于 0，可得 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{6})$ 上递增，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上递减，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时取最大值，为 $f(x)=5\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}=3\sqrt{3}$。

（2）本小问的含义看起来有些绕，得耐心地分析下，先给定了一个弧度 $\theta\in(0,\pi)$，它的大小范围在正弦或余弦函数的半个周期，由给了个实数 a，没特

别说明，又给了 $y\in(a-\theta,a+\theta)$，它的范围的中点 a，再分别向下或向上延伸 θ，如果 θ 接近最小值 0，那么 y 的范围也很小几乎等于 a，如果 θ 接近最大值 π，那么 y 的范围接近正弦或余弦函数的一个周期 2π，要证明的是存在这么个 y，使得它的余弦小于等于取值范围的一半的 θ 的余弦：$\cos y\le\cos\theta$。

设 $g(y)=\cos y-\cos\theta$，由于解析式中只有基本的余弦函数，可以规定 $a\in[-\pi,\pi]$，超出该范围的 a 可以利用余弦函数的周期性用相同的规律分析，现在要证明 $g(y)=\cos y-\cos\theta$ 存在小于等于 0 的函数值，可以利用余弦函数的单调性分析，先画个基本的余弦函数看看，如下图所示。



因为刚才利用周期性限制了 $a\in[-\pi,\pi]$，以及题目规定了 $\theta\in(0,\pi)$，所以 y 的取值范围可以分为下列几种情况：（1）y 的取值范围只在递增区间 $(-\pi,0)$ 内，（2）y 的取值范围只在递减区间 $[0,\pi]$ 内，（3）y 的取值范围在最高点 $\cos 0=1$ 及两侧但没到最低点的区间内，（4）y 的取值范围在最低点 $\cos\pi=-1$ 及两侧但没到最高点的区间内，（5）y 的取值范围在最低点 $\cos(-\pi)=-1$ 及两侧但没到最高点的区间内，（6）y 的取值范围包含最高点 $\cos 0=1$ 和最低点 $\cos\pi=-1$ 的区间内。

其中情况（4）（5）（6）只需让 y 取最低点对应的自变量，即可得到余弦函数的最小值-1，就能满足 $\cos y\le\cos\theta$。

对于情况（1）y 的取值范围只在递增区间 $(-\pi,0)$ 内，此时需要满足 $-\pi<a<0$，$-\pi<a-\theta$，$a+\theta<0$，$\theta<\frac{\pi}{2}$（区间长度的一半不能比 $\frac{\pi}{2}$ 大，否则将大于余弦函数最大的单调区间），此时当 $y=a-\theta$ 时 $g(y)$ 取最小值，为 $\cos(a-\theta)-\cos\theta=\cos(\theta-a)-\cos\theta$，其中 $a-\theta\in(-\pi,0)$，因此 θ 和 $\theta-a$ 都在区间 $[0,\pi]$ 内，这段区间余弦函数递减，由 $-\pi<a<0$ 可知 $\theta-a>\theta$，所以 $\cos(\theta-a)<\cos\theta$，即 $\cos y<\cos\theta$。

对于情况（2）y 的取值范围只在递减区间 $[0,\pi]$ 内，此时需要满足 $0<a<\pi$，$0<a-\theta$，$a+\theta<\pi$，$\theta<\frac{\pi}{2}$，最低点为 $g(a+\theta)=\cos(a+\theta)$（题目规定 $a-\theta$ 取不到，作为取不到的临界点），在区间 $[0,\pi]$ 内余弦函数递减，$a+\theta>\theta$，$\cos y<\cos\theta$。

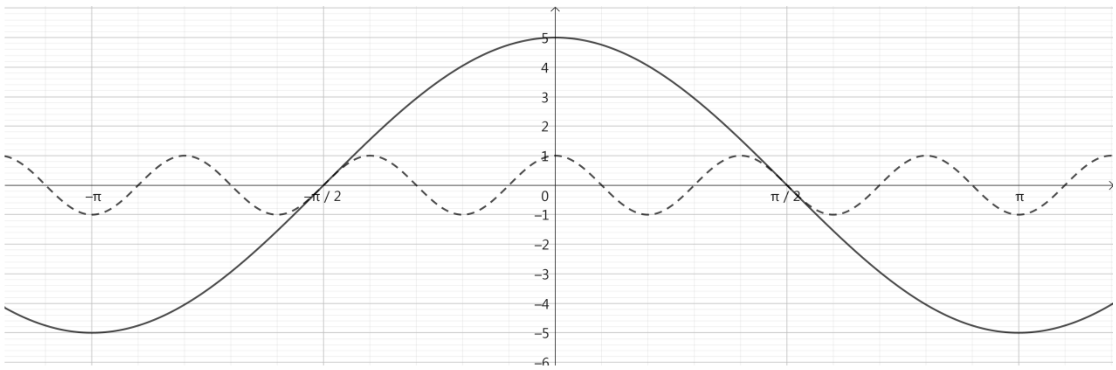
对于情况（3）y 的取值范围在最高点 $\cos 0=1$ 及两侧但没到最低点的区间内，如果最低点是左侧的 $g(a-\theta)=\cos(a-\theta)$（题目规定 $a-\theta$ 取不到，作为取不到的

临界点），那么应当满足 $-\pi < a < 0$（否则最低点就是右侧的 $g(a+\theta)=\cos(a+\theta)$ 了）和 $a-\theta > -\pi$，由此可得 $-\pi < a-\theta < -\theta < 0$，该区间内余弦函数递增，可得 $\cos(a-\theta) < \cos(-\theta) = \cos\theta$。同理，如果最低点是右侧的 $g(a+\theta)=\cos(a+\theta)$，此时应当满足 $0 < a < \pi$（否则最低点就是左侧的 $g(a-\theta)=\cos(a-\theta)$ 了），由此可得 $0 < -\theta < a-\theta < \pi$，该区间内余弦函数减，可得 $\cos(a-\theta) < \cos(-\theta) = \cos\theta$。

以上证明了所有情况下都存在 $y \in (a-\theta, a+\theta)$，使得 $\cos y \le \cos\theta$。

（3）由于基本的余弦函数的最小正周期为 2π，可以只考虑 $t \in [0, 2\pi]$，如果超出该范围只需平移进来即可，看看它们的图像，t 的作用是将 $y=\cos 5x$ 左右平移，题目要求的是将 $y=\cos 5x$ 左右平移后，前者减去后者的差都小于某个值，即求两个函数的最大差值的最小值。由第（1）问可知当 $t=0$ 时 $5\cos x - \cos 5x \le 3\sqrt{3}$，这个最小值至少不会比 $3\sqrt{3}$ 大。

利用余弦函数的基本形状和特征点，先在同一个坐标系中画出 $y=5\cos x$ 和 $y=\cos 5x$，如下图所示。



其中 $y=5\cos x$ 固定，$y=\cos 5x$ 可以来回左右平移，找出平移后两者差值的最大值，并找到各位置取得的最大差值中的最小。由于这两个函数都是周期函数，并且 $y=\cos 5x$ 是把 $y=5\cos x$ 横向压缩 5 倍，所以每相邻 2π 区间内的情况都相同，只需要分析一个区间内的情况即可，选择在原点附近且有对称性的 $[-\pi, \pi]$ 区间。

另外，在 $[-\pi, \pi]$ 区间中，$y=5\cos x$ 与 $y=\cos 5x$ 差值的最大值应当在 $y=5\cos x$ 的值较大的部分，大约在 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 区间内，超出这个区间后 $y=5\cos x$ 只会越来越小，而 $y=\cos 5x$ 又开始进入新的周期进行升降。

仔细观察个函数 $f_1(x)=5\cos x$ 和 $f_2(x)=\cos 5x$，当 $x=0$ 时，$f_1(0)=5\cos 0=5$，$f_2(0)=\cos 0=1$，$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=5-1=4$，此后两个函数开始递减，其中 $f_1(x)$ 的导数为 $f_1'(x)=-5\sin x$，$f_2(x)$ 的导数为 $f_2'(x)=-5\sin 5x$，在刚开始 $x \in [0, \frac{\pi}{10}]$ 阶段，两个函数的导数都小于 0，因为 $5x > x$，所以 $-5\sin 5x < -5\sin x$，

始终 $f_2(x)$ 比 $f_1(x)$ 递减得快，差值 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ 始终逐渐增大，根据第（1）问求出的当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$ 取最大值，表面从 $x=\frac{\pi}{6}$ 开始 $f_1(x)=5\cos x$ 递减的速度比 $f_2(x)=\cos 5x$ 递减的速度快，差值 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ 开始减小。

现在将 $f_2(x)=\cos 5x$ 进行平移，平移后 $f_1(x)=5\cos x$ 与 $f_3(x)=\cos(5x+t)$ 减小的速率相等的临界点——即从 $f_3(x)=\cos(5x+t)$ 减小得更快变为 $f_1(x)=5\cos x$ 减小得更快的临界点，就是 $5\cos x-\cos(5x+t)$ 的最大值点，即导数 $f_1'(x)=-5\sin x$ 与 $f_3'(x)=-5\sin(5x+t)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{10}]$ 相等的点，可得等式 $-5\sin x=-5\sin(5x+t)$，$\sin x=\sin(5x+t)$，$x=\pi-(5x+t)$，$x=\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6}$，即当 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6}$ 时，$h(x)=5\cos x-\cos(5x+t)$ 取最大值 $h_{\max}(x)=5\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6})-\cos[5(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6})+t]=5\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6})-\cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{t}{6})$，把它看作关于 t 的函数，$h(t)=5\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6})-\cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{t}{6})=5\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6})+\cos(\pi-\frac{5\pi}{6}+\frac{t}{6})=6\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6})$，平移的程度 t 不能大于 $\frac{\pi}{10}$，否则会破坏“$f_2(x)$ 比 $f_1(x)$ 递减得快的初始状态”，在 $t\in[0,\frac{\pi}{10}]$ 区间内 $h(t)=6\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{6})$ 递增，当 $t=0$ 时 $h_{\max}(t)=6\cos\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$。

如果让 $t<0$，则图像平移的方向变为反方向，由于余弦函数为偶函数，将导致另一侧的差值发生同样的变化，所以 $t=0$ 时的图像就是差值 $5\cos x-\cos(5x+t)$ 的最大值最小的情况，即 $b=3\sqrt{3}$。

评价：很难。本题作为压轴题难度很高，其中第（1）问难度中等，需要熟练掌握导数和三角恒等变换，第（2）问较难或很难，需要能读懂题目的含义，并且清晰地掌握具体图像，第（3）问很难，需要对三角函数有非常详细透彻全面的掌握，包括增减快慢的变化规律、平移变换、周期性等多个方面，本问也可以利用三角恒等变换进行分析推导，但是技巧性和计算难度很大，需要非常高超的三角恒等变换能力。