专题08 《不等式》复习

考点聚焦

考点剖析 3

题型一　比较大小 3

题型二　利用不等式的性质求取值范围 3

题型三　解一元二次不等式 3

题型四　利用基本不等式证明不等式 3

过关检测 4

A组　双基过关 4

B组　巩固提高 4

C组　综合训练 5

D组　拓展延伸 7

重点速记

一、知识梳理

（一）基本内容

1. 不等式的性质：（1）对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$　　（2）传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$

（3）加法法则：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$；$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$

（4）乘法法则：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$；$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$

（5）倒数法则：$a>b,ab>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　（6）乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n\left(n\in N^*\text{且}n>1\right)$

（7）开方法则：$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\left(n\in N^*\text{且}n>1\right)$

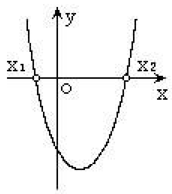
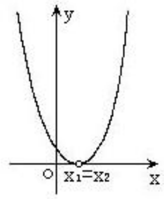
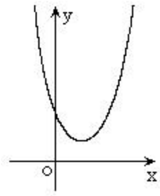
2. 应用不等式的性质比较两个实数的大小——作差法

3. 一元二次不等式及其解法：$ax^2+bx+c>0\text{或}ax^2+bx+c<0\left(a\neq 0\right)$的解集：

设相应的一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$的两根为$x_1,x_2\text{且}x_1\leq x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，

则不等式的解的各种情况如下表：

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a>0\right)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a>0\right)$ 的解集	有两相异实根 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0\left(a>0\right)$ 的解集	$\left\{x\middle\|x<x_1\text{或}x>x_2\right\}$	$\left\{x\middle\|x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0\left(a>0\right)$ 的解集	$\left\{x\middle\|x_1<x<x_2\right\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

4. 分式不等式和绝对值不等式的解法

（1）分式不等式可以转化为整式不等式，同样接下来第一步把最高次项的系数化为正数，对于 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 转化的方法有两种：一种是转化为不等式组 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$；一种是转化为 $f(x)g(x)>0$.

【注】对于不是标准形式的，要先<u>移项通分</u>化到形如 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 再按照上面的方法求解.

（2）绝对值的不等式有两种常见的解法：一种是根据绝对值的意义作分类讨论，即 $|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\-a & (a<0)\end{cases}$；二是当不等式的<u>两边都为非负</u>时，两边平方，去掉绝对值号后再求解.

5. 平均值不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

（1）对任意正数 a 和 b，有 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立【积定和最小】

（2）对任意正数 a 和 b，有 $ab\leq(\dfrac{a+b}{2})^2$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立【和定积最大】

6. 三角不等式：$|a|+|b|\geq|a+b|$，当且仅当 $ab\geq 0$ 时等号成立

（二）应注意的问题

1. 应用不等式的性质时，要注意性质成立的条件；

2. 解一元二次不等式，要和一元二次方程以及二次函数结合；

3. 平均值不等式$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$成立的条件是：“一正二定三相等”.

学以致用

»考点剖析

题型一　比较大小

例 1. （1）$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$_____$6+2\sqrt{6}$；　　（2）$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$______$\left(\sqrt{6}-1\right)^2$；

（3）$\frac{1}{\sqrt{5}-2}$_______$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$；　　（4）$(a+3)(a+5)$_____$(a+2)(a-4)$，$a>0$；

（5）$\left(x^2+1\right)^2$____$x^4+x^2+1(x\neq0)$

题型二　利用不等式的性质求取值范围

例 2. 如果$30<x<42,16<y<24$，则

（1）$x+y$的取值范围是___________；（2）$x-2y$的取值范围是___________；

（3）xy的取值范围是_____________；（4）$\frac{x}{y}$的取值范围是_______________.

例 3. 已知函数$f(x)=ax^2-c$，满足$-4\leq f(1)\leq-1$，$-1\leq f(2)\leq5$，那么$f(3)$的取值范围是______

题型三　解一元二次不等式

例 4. 解不等式：（1）$2x^2+7x-4>0$　　　（2）$-x^2+8x-3>0$

例 5. 已知关于x的方程$(k-1)x^2+(k+1)x+k+1=0$两个相异实根，求实数k的取值范围.

题型四　利用基本不等式证明不等式

例 6. 求证$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq(ac+bd)^2$.

例 7. （1）若 $x>0,y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=1$，求：I. xy 的最小值；II. $x+y$ 的最小值.

（2）求 $f\left(x\right)=4x+\frac{9}{x-5}\left(x>5\right)$ 的最小值.

»过关检测

A 组　双基过关

【难度系数：★　时间：8 分钟　分值：20 分】

1. （23-24 高一下·上海·开学考试）对于实数 a，b，c，"$ac^2>bc^2$"是"$a>b$"的（　）条件

A．充分不必要　　B．必要不充分

C．充要　　D．既不充分也不必要

2. （23-24 高一上·上海闵行·期末）已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则"$a>1,b>1$"是"$ab>1$"的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3. （22-23 高一上·上海松江·期末）设 x，$y\in\left(0,+\infty\right)$，且 $x+4y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为（　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

4. （23-24 高一上·上海宝山·期末）不等式 $\frac{2x-1}{3x+1}>0$ 的解集为________.

5. （23-24 高一上·上海·期末）函数 $f\left(x\right)=2x^2-4x+7$，$x\in\left[-1,8\right]$ 的最小值是______.

6. （23-24 高一上·上海·期中）已知正实数 a,b 满足 $ab=4$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的最小值是______.

7. （23-24 高一上·上海浦东新·阶段练习）已知 $x>5$，则 $x+\frac{1}{x-5}$ 的最小值是______.

8. （22-23 高一上·上海宝山·阶段练习）已知 a、$b\in\mathrm{R}$，且 $a^2+4b^2=1$，则 ab 的最大值是____________.

B 组　巩固提高

【难度系数：★★　时间：10 分钟　分值：20 分】

9. （23-24 高一上·上海闵行·期末）若 $xy=1\left(x,y\in\mathrm{R}\right)$，则 x^2+y^2 的最小值为__________.

10. （23-24 高一上·上海·期中）对任意满足$a+b=2$的正实数a,b，不等式$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}>m$恒成立，则实数$m$的取值范围是______.

11.（23-24 高一下·上海·开学考试）若对于任意$x\in\mathbf{R}$，$ax^2-ax+1>0$恒成立，则实数a的取值范围是______.

12. （23-24 高一下·上海·开学考试）已知关于x的不等式$ax^2-x+a<0$的解集非空，则实数a的取值范围是______.

13. （23-24 高一上·上海·期末）已知a、b、$c\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的（　）条件

A．充要　　B．充分非必要　　C．必要非充分　　D．既非充分也非必要

14. （23-24 高一下·上海·开学考试）设$a,b\in\mathbf{R}$，若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则（　）.

A．$a<b$　　B．$|a|<|b|$　　C．$a+b>ab$　　D．$2^a<2^b$

15. （23-24 高一下·上海闵行·阶段练习）已知函数$f(x)=ax^2+2ax-3$对任意实数x都有$f(x)<0$成立，则实数a的取值范围是______.

16. （23-24 高一上·上海浦东新·期末）已知对于实数x，y，满足$|2x+y|\le 1$，$|x-y|\le 2$，则$|4x+5y|$的最大值为______.

17.（21-22 高一上·上海嘉定·期末）已知a,b,c都是实数，一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有两个非零实根x_1,x_2，且$b=2c$，则$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=$______.

18. （22-23 高一上·上海奉贤·期末）（1）已知a、$b\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+2b^2+1\ge 2b(a+1)$，并写出等号成立的条件.

（2）若正数a、b的算术平均值是 2，求$a+1$、$b+1$的几何平均值的最大值.

C 组　综合训练

【难度系数：★★★　时间：15 分钟　分值：30 分】

19. （23-24 高一上·上海杨浦·期末）如果$a>b>0$，那么下列式子中一定成立的是（　）

A．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B．$a^2<b^2$　　C．$\frac{a}{b}<1$　　D．$a^2>ab$

20. （23-24 高一上·上海普陀·期中）已知$a>b>0$，那么，当代数式$a^2+\frac{9}{b(a-b)}$取最小值时，$a+2b$的值为（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{6}$

21. （23-24 高一上·上海·期中）已知a、b均为正实数，则“$a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$”是“$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=4$”的（　）条件.

A．充分非必要　B．必要非充分　　C．充分必要　　　D．既非充分又非必要

22．(23-24 高一下·上海嘉定·阶段练习)若不等式$-2<x^2+mx-m^2<1$的解集为$(n,2)$，则$m+n=$__________.

23．（23-24 高一下·上海·开学考试）对任意$x,y\in[0,+\infty)$，且$x\neq y$，不等式$\left|\sqrt{x+c}-\sqrt{y+c}\right|<|x-y|$恒成立，则实数$c$的取值范围为______.

24．（23-24 高一下·上海·开学考试）已知$p:x^2-(2a+3)x+a(a+3)\le 0$，$q:|x-1|<1$，若$p$是$q$的必要不充分条件，则实数$a$的取值范围是_____.

25．（23-24 高一下·上海·开学考试）设$a\in\mathbf{R}$，若$x>0$时均有$(x-1)(x^2+ax-1)\ge 0$，则$a=$_____.

26．（23-24 高一上·上海嘉定·期末）已知$b,c\in\mathrm{R}$，关于x的不等式$ax^2+bx+c<0$的解集为$(-2,3)$，则$bc=$________.(用a表示)

27．（23-24 高一上·上海·阶段练习）已知$0<x<4$，则$\dfrac{1}{4-x}+\dfrac{2}{x}$的最小值为________.

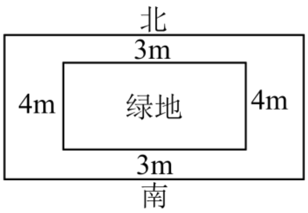
28．（23-24 高一上·上海·期中）已知$y_1=m(x-2m)(x+m+3)$，$y_2=x-1$.

(1)若$m=1$，解关于x的不等式组$\begin{cases}y_1>0\\y_2<0\end{cases}$；

(2)若对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$y_1<0$或$y_2<0$成立，求m的取值范围；

(3)在（2）的条件下，存在$x<-4$，使得$y_1y_2<0$，求m的取值范围.

29．（22-23 高一上·上海奉贤·期末）某新建居民小区欲建一面积为$700\mathrm{m}^2$的矩形绿地，并在绿地四周铺设人行道．设计要求绿地外南北两侧人行道宽 3m，东西两侧人行道宽 4m，如图所示（图中单位：m）．设矩形绿地的南北侧边长为 x 米．



(1)当人行道的占地面积不大于$418\mathrm{m}^2$时，求 x 的取值范围；

(2)问 x 取多少时，才能使人行道的占地面积最小．（结果精确到 0.1m）.

30．（23-24 高一上·上海·期中）问题：正数a,b满足$a+b=1$，求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$的最小值．其中一种解法是：

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)(a+b)=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}+2\ge 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2a}{b}$且$a+b=1$时，即$a=\sqrt{2}-1$且$b=2-\sqrt{2}$时取等号．学习上述解法并解决下列问题：

(1)若正实数 x，y 满足$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=1$，求$x+y$的最小值；

(2)若实数 a，b，x，y 满足$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，试比较$a^2-b^2$和$(x-y)^2$的大小，并指明等号成立的条件；

(3)利用（2）的结论，求代数式$M=\sqrt{3m-5}-\sqrt{m-2}$的最小值，并求出使得M最小的m的值.

D组　拓展延伸

【难度系数：★★★　时间：20分钟　分值：30分】31．（23-24高一上·上海徐汇·期中）已知实数x，y，z满足$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=1$，则下列说法错误的是（　　）

A．xyz的最大值是$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　B．$x+y+z$的最大值是$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

C．x的最大值是$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$x+y$的最大值是$\sqrt{2}$

32．（23-24高一上·上海松江·期中）高一的珍珍阅读课外书籍时，发现笛卡尔积是代数和图论中一个很重要的课题.对于非空数集A，B，定义$A\otimes B=\{(x,y)\mid x\in A\text{且}y\in B\}$，将$A\otimes B$称为“$A$与$B$的笛卡尔积”

(1)若$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{-1,1\}$，求$A\otimes B$和$B\otimes A$；

(2)试证明：“$A_1\otimes A_2=A_2\otimes A_1$”是“$A_1=A_2$”的充要条件；

(3)若集合H是有限集，将集合H的元素个数记为$|H|$.已知$|A_1\otimes A_2|=m^3\left(m\in\mathbf{N}^*\right)$，且存在实数$a$满足$\sqrt{\dfrac{|A_1\otimes A_1|+|A_2\otimes A_2|}{|A_2\otimes A_1|}}\ge a$对任意$m\in\mathrm{N}^*$恒成立.求$a$的取值范围，并指明当$a$取到最值时$|A_1|$和$|A_2|$满足的关系式及$m$应满足的条件.

33．（23-24高一上·上海浦东新·期末）已知函数$g(x)=mx^2-2mx+n(m>0,n>0)$，在$x\in[1,2]$时最大值为2，最小值为1．设$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$．

(1)求实数m，n的值；

(2)若存在$x\in[-1,1]$，使得不等式$g\left(2^x\right)-k\cdot 4^x+1<0$成立，求实数$k$的取值范围；

(3)若关于x的方程$\boldsymbol{f\left(|\log_3 x|\right)+\dfrac{2a}{|\log_3 x|}-3a-1=0}$有四个不同的实数解，求实数$a$的取值范围.

34．（2023高一·上海·专题练习）（1）已知$x>0,y>0$，且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，求$x+y$的最小值；

（2）已知正实数x,y满足$2x+y+6=xy$，求xy的最小值；

（3）已知实数x,y满足$x^2+y^2+xy=1$，求$x+y$的最大值.

35．（23-24高一上·上海普陀·期中）设t是不小于1的实数.若对任意$a,b\in[-1,t]$，总存在$c,d\in[-1,t]$，使得$(a+c)(b+d)=1$，则称这样的t满足“性质1”

(1)分别判断$t>2$和$1\le t<\dfrac{3}{2}$时是否满足“性质1”;

(2)先证明:若$u,v\ge\dfrac{1}{2}$，且$u+v\ge\dfrac{5}{2}$，则$uv\ge1$；并由此证明当$\dfrac{3}{2}\le t\le2$时，对任意$a,b\in[-1,t]$，总存在

$c_1, d_1 \in [-1, t]$，使得$(a+c_1)(b+d_1) \geq 1$.

(3)求出所有满足“性质 1”的实数 t