

## 专题 06 分式不等式和绝对值不等式的解法



▶ 考点剖析 .....	2
(一) 分式不等式的解法 .....	2
(二) 绝对值不等式的解法 .....	3
▶ 过关检测 .....	3
A 组 双基过关 .....	3
B 组 巩固提高 .....	4
C 组 综合训练 .....	5
D 组 拓展延伸 .....	6



### (一) 知识回顾

1. 集合的区间表示法;
2. 一元二次不等式的解法;
3. 一元二次不等式、一元二次方程及二次函数的关系.

### (二) 引入

解不等式  $(x+4)(x-1) < 0$

法 1: 一元二次方程、一元二次不等式、二次函数之间的关系.

法 2: 转化为一元一次不等式组求解.

## 二、知识梳理

### (一) 分式不等式的解法

形如  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  或  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  (其中  $f(x)$ 、 $g(x)$  为整式且  $g(x) \neq 0$ ) 的不等式称为 **分式不等式**

(fractional inequality) .

通常, 我们把分式不等式转化为求解, 注意接下来第一步把 **最高次项的系数化为正数**.

$$(I) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$(II) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

对于不是标准形式的, 要先化到形如  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  或  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  再按照上面的方法求解.

(二) 绝对值不等式的解法

$$|x| = \begin{cases} x & (\text{当 } x > 0 \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } x = 0 \text{ 时}) \\ -x & (\text{当 } x < 0 \text{ 时}) \end{cases}$$

$|x|$  表示实数  $x$  在数轴上所对应的点到原点的距离. 因此, 求不等式  $|x| < a (a > 0)$  的解集就是求在数轴上到原点的距离小于  $a$  的点所对应的实数  $x$  的集合.

	$ x  < a$ 的解集	$ x  > a$ 的解集
$a > 0$	$(-a, a)$	$(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$
$a < 0$	$\emptyset$	$R$
$a = 0$	$\emptyset$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



## » 考点剖析

### (一) 分式不等式的解法

例 1. 解不等式:  $\frac{x+3}{4-x} > 0$ .

例 2. 解不等式:  $\frac{x+1}{3x-2} \geq 2$ .

例 3. 解不等式:  $\frac{x+8}{x^2+2x+3} < 2$ .

【注】当分母恒大于零或恒小于零时, 可以直接应用不等式的基本性质 3 去分母, 转化为整式不等式求解.

例 4. 解关于  $x$  的不等式  $\frac{x-a}{x-a^2} \leq 0$ .

例 5. (1) 解不等式  $\frac{(x+1)(x-1)}{x-2} > 0$ ; (2)  $\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-2)^3} > 0$ ; (3)  $\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x-2)^3} \geq 0$ .

## (二) 绝对值不等式的解法

例 6. 求下列不等式的解集.

(1)  $|2x-3| < 5$

(2)  $|x^2-3x| > 4$

(3)  $\left| \frac{2x-3}{x+2} \right| > 1$

(4)  $\left| \frac{2x-3}{x+2} \right| > \frac{2x-3}{x+2}$

例 7. (1) 解不等式  $x^2 - |x| - 2 < 0$

(2) 解不等式  $|x+1| + |x-2| > 5$ .

## » 过关检测

### A 组 双基过关

【难度系数：★ 时间：8 分钟 分值：20 分】

1. (23-24 高一上·上海浦东新·期末) “ $x > 1$ ”是“ $\frac{1}{x} < 1$ ”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. (23-24 高一上·上海·期中) 不等式  $\frac{x-5}{x+4} < 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

3. (23-24 高三上·上海·期中) 关于  $x$  的不等式  $\frac{4x}{3x-1} < 1$  的解是\_\_\_\_\_.
4. (21-22 高一上·上海宝山·阶段练习) 不等式  $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
5. (22-23 高一上·上海宝山·阶段练习) 关于  $x$  的不等式  $\frac{x-23}{x-20} \leq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
6. (23-24 高一上·上海·期末) 函数  $y = x + \frac{3}{4x}$  ( $x > 0$ ) 的最小值是\_\_\_\_\_.
7. (23-24 高一上·上海浦东新·期末) 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 且  $\frac{a}{b} = 2$ , 则  $b + \frac{2}{a}$  的最小值为\_\_\_\_\_.
8. (23-24 高一上·上海金山·期中) 已知  $a$  为正数, 比较大小:  $\frac{a^2 + 2a + 1}{a}$  \_\_\_\_\_ 4.
9. (23-24 高一上·上海黄浦·期中) 不等式  $|x-1| \geq 1$  的解集是\_\_\_\_\_.
10. (23-24 高一上·上海松江·期末) 解下列不等式:
- (1)  $\frac{4x-9}{x-1} > 3$ ;
- (2)  $|x-6| < 2x$ .

## B 组 巩固提高

【难度系数: ★★ 时间: 10 分钟 分值: 20 分】

11. (23-24 高一上·上海青浦·期末) 已知  $a > 0, b > 0$  且  $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$ , 则下列结论正确的是 ( )
- ①  $a > 1$ ;
- ②  $ab$  的最小值为 16;
- ③  $a+b$  的最小值为 8;
- ④  $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b}$  的最小值为 2.
- A. ①②④      B. ①②③      C. ①②      D. ②③④
12. (23-24 高一上·上海·期中) 若实数  $a, b$  满足  $b > a > 0$ , 下列不等式中恒成立的是 ( )
- A.  $2a + \frac{b}{2} \geq 2\sqrt{ab}$       B.  $2a + \frac{b}{2} \leq 2\sqrt{ab}$
- C.  $2a + \frac{b}{2} < 2\sqrt{ab}$       D.  $2a + \frac{b}{2} > 2\sqrt{ab}$
13. (23-24 高一上·上海·期中) 已知  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $(x-2)(x-3) \leq 0$  成立”是“ $|x-2| + |x-3| = 1$  成立”的\_\_\_\_\_条件.
14. (23-24 高一上·上海浦东新·期末) 方程  $|x-1| + |x-2| = |2x-3|$  的解集为\_\_\_\_\_.

15. (23-24 高一上·上海青浦·期末) 设实数  $x > 1$ , 当代数式  $2x + \frac{1}{x-1}$  取最小值时,  $x$  的值为\_\_\_\_\_.
16. (23-24 高一上·上海·期末) 若关于  $x$  的不等式  $kx^2 - 2kx + 3 > 0$  对一切实数  $x$  都成立, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
17. (23-24 高一上·上海·期末) 不等式  $\frac{2}{x^2} > 3x - 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
18. (23-24 高一上·上海奉贤·期末) 不等式  $\frac{5x+3}{x-1} \leq 3$  的解集用区间表示为\_\_\_\_\_.
19. (23-24 高一上·上海虹口·期末) 已知  $\alpha: \frac{2}{x+1} > 1$ ,  $\beta: m \leq x \leq 2$ , 若  $\alpha$  是  $\beta$  的充分条件, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
20. (23-24 高一上·上海·阶段练习) 求下列不等式(组)的解集:
- (1)  $|x-1| \geq 4$ ;
- (2) 
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ \frac{x-3}{2x+1} < 0 \end{cases}.$$

### C 组 综合训练

【难度系数: ★★★ 时间: 15 分钟 分值: 30 分】

21. (23-24 高一上·上海·期中) 不等式  $\frac{x^{2023}(x-2)^{2025}}{(x+1)^{2026}} \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
22. (23-24 高一上·上海闵行·期中) 已知关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} \frac{x-a}{x-1+a} < 0 \\ x+3a > 1 \end{cases}$  的整数解恰好有两个, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
23. (23-24 高一上·上海闵行·阶段练习) 对任意实数  $x$ , 若不等式  $|x-1| + |x-a| \geq a$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
24. (23-24 高一上·上海闵行·期末) 设集合  $A = \{x | |2x-1| < 3\}$ ,  $B = \{x | x^2 - (b+1)x + b \leq 0\}$ .
- (1) 若  $b = 4$ , 试用区间表示集合  $A, B$ , 并求  $A \cup B$ ;
- (2) 若  $B = [1, 5]$ , 求不等式  $\frac{bx+1}{x-b} > 0$  的解集.
25. (23-24 高一上·上海奉贤·期中) (1) 已知集合  $A = \{x | |x-a| < 2\}$ ,  $B = \left\{x \left| \frac{2x-1}{x+2} < 1 \right.\right\}$ , 且  $A \subseteq B$ , 求实数  $a$  的取值范围;
- (2) 已知集合  $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + px + q \leq 0\}$ , 若  $A \cup B = \mathbf{R}$  且  $A \cap B = [-2, -1)$ , 求  $p+q$  的

值;

(3) 已知  $k \in \mathbf{R}$ , 当  $k$  变化时, 求不等式  $(kx - k^2 - 4)(x - 4) > 0$  的解集.

26. (23-24 高一上·上海·期中) 已知代数式  $|x+2|$  和  $|ax-b|$ .

(1) 若  $a=2, b=2$ , 求不等式  $|x+2| + |ax-b| < 7$  的解集;

(2) 若  $a=1, b=3$ , 证明  $|x+2|, |ax-b|$  中至少有一个数不小于  $\frac{5}{2}$ ;

(3) 若  $a > 0$ , 不等式  $|x+2| + |ax-b| \geq \frac{3}{2}x+1$  对任意实数  $x$  恒成立, 试确定实数  $a, b$  满足的条件.

27. (23-24 高一上·上海浦东新·期中) 设  $x, y, z$  为互不相同的实数, 对于  $\left| \frac{1+yz}{y-z} + \frac{1+zx}{z-x} + \frac{1+xy}{x-y} \right|$ ,

(1) 令  $a = \frac{1+yz}{y-z}, b = \frac{1+xy}{x-y}$ , 用  $a, b$  表示  $\frac{1+zx}{z-x}$

(2) 求  $\left| \frac{1+yz}{y-z} + \frac{1+zx}{z-x} + \frac{1+xy}{x-y} \right|$  的最小值.

28. (23-24 高一上·上海普陀·期中) (1) 若  $x > 1$ , 求  $y = 2x - 5 + \frac{1}{x-1}$  的最小值;

(2) 解不等式:  $|x+2| - |3-2x| < 1$ ;

(3) 已知  $(k+1)x^2 + (k+1)x + \frac{5}{4} > 0$  对一切实数  $x$  都成立, 求实数  $k$  的取值范围.

## D 组 拓展延伸

【难度系数: ★★★ 时间: 20 分钟 分值: 30 分】29. (23-24 高一上·上海浦东新·期中) 根据三角不等式我们可以证明:

$|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$ , 当且仅当  $ab \geq 0, bc \geq 0, ca \geq 0$  时等号成立. 若等式

$|ax+by+cz| + |bx+cy+az| + |cx+ay+bz| = |x| + |y| + |z|$  对任意  $x, y, z \in \mathbf{R}$  都成立, 则符合要求的有序数组  $(a, b, c)$  数量为 ( )

A. 有且仅有 6 组

B. 有且仅有 12 组

C. 大于 12 组, 但为有限多组

D. 无穷多组

30. (23-24 高一上·上海·期中) 已知不等式  $\left| x^2 + \frac{1}{x} \right| + \left| x^2 - \frac{1}{x} \right| + ax \geq 2x - 8$  恒成立, 则实数  $a$  不可能是 ( )

A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

31. (23-24 高一上·上海闵行·期中) 对于两个实数  $a, b$ , 规定  $a*b = |a-b|$ ,

(1) 证明: 关于  $x$  的不等式  $x*2 + x*3 \geq 1$  解集为  $\mathbf{R}$ ;

(2) 若关于  $x$  的不等式  $x*1 - x*(2a) > 1$  的解集非空, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 设关于  $x$  的不等式  $x*a < \frac{-ax^2 + 20}{2}$  的解集为  $A$ , 试探究是否存在自然数  $a$ , 使得不等式  $x^2 + x - 2 < 0$  与

$x^* \frac{1}{2} < \frac{x+2}{2}$  的解集都包含于  $A$ ，若不存在，请说明理由，若存在，请求出满足条件的  $a$  的所有值.