

## 专题 05 一元二次不等式的解法

### 考 点 聚 焦

1. 掌握一元二次不等式的解法；
2. 知道一元二次不等式可以转化为一元一次不等式组；
3. 厘清一元二次方程、一元二次不等式与二次函数的关系；
4. 学会用区间的形式表示不等式的解集.

### 重 点 速 记

#### 一、应知应会

##### (一) 知识回顾

1. 作差法比较两个实数的大小；
2. 不等式的基本性质.

##### (二) 典例测试

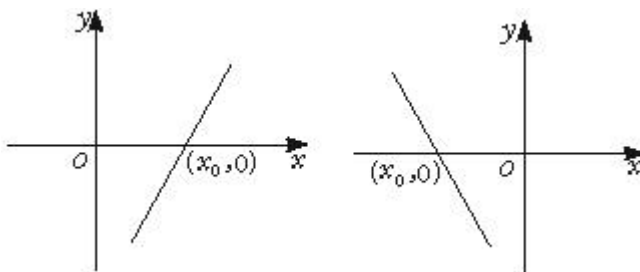
1. 设  $n > -1$ ，且  $n \neq 1$  则  $n^3 + 1$  与  $n^2 + n$  的大小关系是\_\_\_\_\_.
2.  $0 < x < 1$ ，则  $\sqrt{x}, \frac{1}{x}, x, x^2$  从小到大的排列是\_\_\_\_\_.
3. 已知  $-2 < a < b < 3, -2 < c < 0$ ，则  $c(a-b)$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
4.  $a$  是互异的四个正数  $a, b, c, d$  中最大的数，且  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，则  $a+d$  与  $b+c$  的大小关系是\_\_\_\_\_.

##### (三) 引入

以前我们学习过一元一次不等式的解法，结合一次函数的图像我们能够得到一元一次不等式  $ax+b > 0$  解集如下：

(1) 当  $a > 0$  时，一元一次不等式  $ax+b > 0$  的解集是  $\{x|x > x_0\}$ ，一元一次不等式  $ax+b < 0$  的解集是  $\{x|x < x_0\}$ .

(2) 当  $a < 0$  时，一元一次不等式  $ax+b > 0$  的解集是  $\{x|x < x_0\}$ ；一元一次不等式  $ax+b < 0$  的解集是  $\{x|x > x_0\}$ .



一元二次不等式的形式是怎么样的呢？又如何求解呢？

## 二、知识梳理

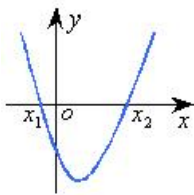
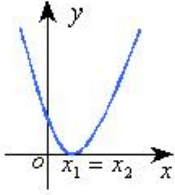
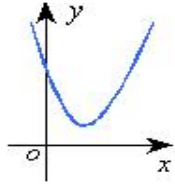
### (1) 一元二次不等式

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次，这样的不等式叫做一元二次不等式 (*second order inequality with one unknown*)，它的一般形式为  $ax^2 + bx + c > 0$  或  $ax^2 + bx + c < 0$  ( $a \neq 0$ )。

### (2) 一元二次不等式的解法

法 1: 把  $ax^2 + bx + c > 0$  或  $ax^2 + bx + c < 0$  ( $a \neq 0$ ) 先分解因式，借用初中学过的积的符号法则将其实现等价转化一次不等式组，进而求出其解集的并集。

法 2: 利用一元二次不等式与二次函数、一元二次方程的内在关系，结合二次函数的图像，研究不等式在  $\Delta > 0$ 、 $\Delta < 0$  和  $\Delta = 0$  时各种解集的情况。

$a > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根	有两实根 $x = x_1$ 或 $x = x_2$	有两相等的实根 $x = x_1 = x_2$	无实根
不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$\{x   x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	$R$
不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集	$\{x   x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

思考：若  $a < 0$ ，则一元二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  及  $ax^2 + bx + c < 0$  其解集如何？



## » 考点剖析

例 1. 求不等式的解集 (1)  $2x^2 - 3x - 2 > 0$ ; (2)  $-3x^2 + x + 1 > 0$ .

例 2. 解下列不等式:

$$(1) 9x^2 + 6x + 1 > 0; \quad (2) 4x - x^2 < 5; \quad (3) 2x^2 + x + 1 \leq 0.$$

例 3. 解关于  $x$  的不等式:

$$(1) x^2 - 2x + 1 - a^2 \geq 0 \quad (2) ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$$

例 4. 解不等式组: 
$$\begin{cases} 3x^2 - 7x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases}.$$

例 5. 某服装公司生产的衬衫, 每件定价 80 元, 在某城市年销售 8 万件. 现该公司在该市设立代理商来销售衬衫. 代理商要收取代销费, 代销费为销售金额的  $r\%$  (即每销售 100 元收取  $r$  元). 为此, 该衬衫每件价格要提高到  $\frac{80}{1-r\%}$  元才能保证公司利润, 由于提价每年将少销售  $0.62r$  万件, 如果代理商每年收取的代理费不小于 16 万, 求  $r$  的取值范围.

例 6. (1) 若不等式  $(1-m)x^2 - 4x + 6 > 0$  的解集是  $\{x | -3 < x < 1\}$ , 求  $m$  的值;

(2) 已知不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集为  $\{x | 2 < x < 3\}$ , 求不等式  $cx^2 - bx + a > 0$  的解集.

例 7. (1) 已知  $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + 4$ ,

I. 如果对一切  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;

II. 如果对  $x \in [-3, 1]$ ,  $f(x) > 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

(2) 已知关于  $x$  的不等式  $(k^2 + 4k - 5)x^2 + 4(1-k)x + 4 > 0$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

## »过关检测

### A 组 双基过关

【难度系数：★ 时间：8 分钟 分值：20 分】

1. (23-24 高一上·上海·期末) 函数  $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$ ,  $x \in [-1, 8]$  的最小值是\_\_\_\_\_.
2. (23-24 高一上·上海虹口·期末) 若一元二次不等式  $x^2 + ax + b < 0$  的解集为  $(1, 2)$ , 则实数  $b =$ \_\_\_\_\_.
3. (23-24 高一上·上海普陀·期中) 不等式  $4x^2 + ax + 4 > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
4. (23-24 高一上·上海长宁·期中) 不等式  $x^2 - x + 1 \geq 0$  的解集为\_\_\_\_\_.
5. (23-24 高一上·上海浦东新·期中) 若关于  $x$  的不等式  $x^2 - ax + b < 0$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 的解集为  $(-1, 2)$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_.
6. (23-24 高一上·上海普陀·期中) 不等式  $|x - 2| < |2x + 1|$  的解集是\_\_\_\_\_.
7. (23-24 高一上·上海闵行·期中) 不等式  $x^2 - 6x + 10 > 0$  的解集为\_\_\_\_\_.
8. (23-24 高一上·上海浦东新·期中) 已知条件  $\alpha: x \leq m$ , 条件  $\beta: x^2 - x \leq 0$ , 若  $\alpha$  是  $\beta$  的必要条件, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
9. (23-24 高一上·上海浦东新·期中) 关于  $x$  的不等式  $2x^2 + ax + b < 0$  的解集为  $(2, 3)$ , 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.
10. (23-24 高一上·上海·期中) 已知一元二次不等式  $x^2 - ax + 3 < 0$  的解集为  $(1, 3)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

B 组 巩固提高

【难度系数：★★ 时间：10 分钟 分值：20 分】

11. (23-24 高一上·上海·期中) 已知实数  $a < b$ , 关于  $x$  的不等式  $x^2 - (a+b)x + ab + 1 < 0$  的解集为  $(x_1, x_2)$ , 则实数  $a, b, x_1, x_2$  从小到大的排列顺序是\_\_\_\_\_.
12. (23-24 高一下·上海·开学考试) 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 - x + a < 0$  的解集非空, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
13. (23-24 高一下·上海·开学考试) 若对于任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $ax^2 - ax + 1 > 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
14. (23-24 高一下·上海闵行·阶段练习) 已知函数  $f(x) = ax^2 + 2ax - 3$  对任意实数  $x$  都有  $f(x) < 0$  成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
15. (23-24 高一上·上海·期末) 对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $ax^2 - 2ax + 12 > 0$  都成立, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
16. (23-24 高一上·上海杨浦·期末) 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + 3ax + a - 2 < 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_.
17. (22-23 高一上·上海奉贤·期末) 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ . 方程  $x^2 + abx + (a+b) = 0$  的解集为  $\{m, n\}$ , 其中  $0 < m < n$ , 则不等式  $(a+b)x^2 - abx + 1 < 0$  的解集为\_\_\_\_\_.
18. (23-24 高一上·上海杨浦·期末) (1) 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 - 5x + b < 0$  的解集是  $\{x | 2 < x < 3\}$ , 求  $a, b$  的值;  
(2) 解关于  $x$  的不等式  $(x-c)(x-6) > 0$  ( $c \in \mathbf{R}$ ).

19. (23-24 高一上·上海·期中) 命题甲: 集合  $M = \{x | kx^2 - 2kx + 1 = 0\}$  为空集; 命题乙: 关于  $x$  的不等式  $x^2 + (k-1)x + 4 > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ . 若命题甲、乙都是真命题, 求实数  $k$  的取值范围.

20. (23-24 高一上·上海·阶段练习) 已知函数  $f(x) = ax^2 - 3x + 2$ .

(1) 若不等式  $f(x) > -2$  的解集为区间  $(-4, 1)$ , 求实数  $a$  的值;

(2) 当  $a < 0$  时, 求关于  $x$  的不等式  $f(x) > ax - 1$  的解集.

### C 组 综合训练

【难度系数: ★★★ 时间: 15 分钟 分值: 30 分】

21. (23-24 高一上·上海黄浦·期中) 设  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 如  $[4.1] = 4$ ,  $[-1.1] = -2$ , 则不等式  $[x]^2 - [x] - 6 \leq 0$  的解集是 ( )

- A.  $[-3, 4]$       B.  $[-2, 4]$       C.  $[-3, 4)$       D.  $[-2, 4)$

22. (23-24 高一上·上海·期中) 已知: 一元二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集为  $(-3, 2)$ , 则不等式  $cx^2 + bx + a > 0$  的解集为 ( )

- A.  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$       B.  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$       C.  $\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$       D.  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

23. (23-24 高一下·上海·开学考试) 设  $a \in \mathbf{R}$ , 若  $x > 0$  时均有  $(x-1)(x^2 + ax - 1) \geq 0$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

24. (23-24 高一上·上海·期末) 设  $a \in \mathbf{R}$ , 若关于  $x$  的不等式  $x^2 - ax < 0$  的解集是区间  $(0, 1)$  的真子集, 则  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

25. (23-24 高一上·上海嘉定·期末) 已知  $b, c \in \mathbf{R}$ , 关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集为  $(-2, 3)$ , 则  $bc = \underline{\hspace{2cm}}$ . (用  $a$  表示)

26. (23-24 高一上·上海·期中) 对于任意实数  $x$ , 不等式  $ax^2 + 2ax - (a+2) < 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

27. (23-24 高一上·上海·期中) 已知  $y_1 = m(x-2m)(x+m+3)$ ,  $y_2 = x-1$ .

(1) 若  $m = 1$ , 解关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} y_1 > 0 \\ y_2 < 0 \end{cases}$ ;

(2) 若对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $y_1 < 0$  或  $y_2 < 0$  成立, 求  $m$  的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 存在  $x < -4$ , 使得  $y_1 y_2 < 0$ , 求  $m$  的取值范围.

28. (23-24 高一上·上海·期中) 已知关于  $x$  的不等式:  $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0 (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 当  $a = -2$  时, 求不等式的解集;

(2) 当  $a \geq 0$  时, 求不等式的解集;

(3) 命题  $P$ : 若二次不等式  $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$  的解集为空集, 命题  $Q$ :  $x^2 - 2x - a^2 + a + 1 > 0$  对任意实数  $x$  都成

立，若  $P, Q$  中至少有一个真命题，求实数  $a$  的取值范围.

29. (23-24 高一上·上海·期中) 解关于  $x$  的不等式:  $x^2 - (2a+2)x + 4a > 0$ .

30. (23-24 高一上·上海嘉定·期中) 已知  $a < 2$ , 关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} (3-2x)(3x+2) > 0 \\ x^2 - (a+2)x + 2a \geq 0 \end{cases}$  没有实数解, 求实数  $a$  的取值范围.

## D 组 拓展延伸

【难度系数: ★★★ 时间: 20 分钟 分值: 30 分】31. (23-24 高一上·上海虹口·阶段练习) 设  $a, b$  是实数, 定义:  $a \odot b = a^2b + ma^2 - 9a - 9b + 1 (m \in \mathbf{R})$ . 则满足不等式  $1 \odot (2 \odot (\dots (2022 \odot 2023) \dots)) \leq 1$  的实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $m \geq 1$       B.  $m \leq \frac{20\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$       C.  $m \leq \frac{913}{329}$       D.  $1 \leq m \leq \frac{329+432\sqrt{3}}{361}$

32. (22-23 高一上·上海长宁·期中) 关于  $x$  的不等式  $(3x+1)^2 < ax^2$  的整数解恰有 3 个, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

33. (23-24 高一上·上海浦东新·期末) 已知函数  $g(x) = mx^2 - 2mx + n (m > 0, n > 0)$ , 在  $x \in [1, 2]$  时最大值为 2, 最小值为 1. 设  $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ .

(1) 求实数  $m, n$  的值;

(2) 若存在  $x \in [-1, 1]$ , 使得不等式  $g(2^x) - k \cdot 4^x + 1 < 0$  成立, 求实数  $k$  的取值范围;

(3) 若关于  $x$  的方程  $f(\log_3 x) + \frac{2a}{\log_3 x} - 3a - 1 = 0$  有四个不同的实数解, 求实数  $a$  的取值范围.

34. (22-23 高一上·上海宝山·阶段练习) 定义区间  $(c, d), [c, d), (c, d], [c, d]$  的长度均为  $d - c$ , 其中  $d > c$ .

(1) 若关于  $x$  的不等式  $2ax^2 - 12x - 3 > 0$  的解集构成的区间的长度为  $\sqrt{6}$ , 求实数  $a$  的值;

(2) 已知实数  $a, b (a > b)$ , 求  $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \geq 1$  解集构成的各区间长度和;

(3) 已知关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} |x-3| < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{tx+3t}} > \frac{1}{2} \end{cases}$  的解集构成的各区间长度和为 6, 求实数  $t$  的取值范围.

35. (22-23 高一上·上海宝山·阶段练习) (1) 求证: 已知  $a, b, x, y \in (0, +\infty)$ ,  $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ , 并指出等号成立的条件;

(2) 求证: 对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 关于  $x$  的两个方程  $x^2 - 5x + m = 0$  与  $2x^2 + x + 6 - m = 0$  至少有一个方程有实数根 (反证法证明);

(3) 求证: 使得不等式对一切实数, 都成立的充要条件是, 且.