专题 07 基本不等式及其应用

考点聚焦

重点速记

（一）知识回顾

1. 分式不等式的解法；

2. 一元二次不等式的解法；

3. 绝对值不等式的解法.

（二）引入

1. 给一根长度给定的铁丝，围成的各种封闭图形中，何时面积最大？

2. 如果长度为 16，围成的的矩形中，何时面积最大？

二、知识梳理

【难度系数：★★★　　参考时间：15 min】

（一）平均值不等式及其应用

1. 常用不等式　对任意**实数** a 和 b，有 $a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

证明：$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$　$\left.\begin{array}{l}\text{当}a=b\text{时},(a-b)^2=0\\ \text{当}a\ne b\text{时},(a-b)^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$

2. 平均值不等式　对任意**正数** a 和 b，有 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

证明：$\because \dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\ge 0$　　$\therefore \dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$　　　当且仅当 $a=b$ 时，$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

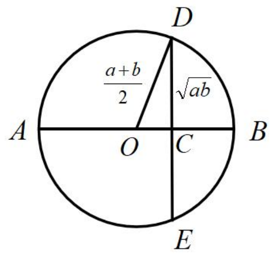
综上，对任意正数 a 和 b，有 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$.

【注】①我们称 $\dfrac{a+b}{2}$ 为正数 a 和 b 的算术平均值，称 $\sqrt{ab}$ 为正数 a 和 b 的几何平均值，因而，此不等式又可叙述为：两个正数的算术平均值大于等于它们的几何平均值.

② $a^2+b^2\ge 2ab$ 和 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的：前者只要求 a 和 b 都是实数，而后者要求 a 和 b 都是正数.

③ “当且仅当”的含义是充要条件.

④ 平均值不等式的几何意义是“半径不小于半弦”. 以长为 $a+b$ 的线段为直径作圆 O，在直径 AB 上取点 C，使 $AC=a$，$CB=b$，过点 C 作垂直于直径 AB 的弦 DE，那么 $CD^2=CA\cdot CB$，即 $CD=\sqrt{ab}$，这个圆的半径为 $OD=\dfrac{a+b}{2}$，显然 $OD\ge CD$，即 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ ，当且仅当点 C 与圆心 O 重合，即 $a=b$ 时取等.



（二）三角不等式

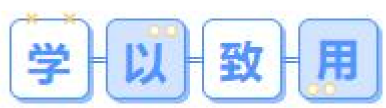
根据三角形中<u>两边之和大于第三边</u>的事实，我们可以类比得到下面的不等式：

> **定理** 两个实数的绝对值的和大于等于他们和的绝对值，即对任意的实数 a、b，有
> $$|a|+|b|\ge|a+b|,$$
> 当且仅当 $ab\ge 0$ 时等号成立.

证明：因为 $|a|+|b|\ge|a+b|$ 等价于 $(|a|+|b|)^2\ge(|a+b|)^2$，

即 $a^2+2|ab|+b^2\ge a^2+2ab+b^2$，也即 $2|ab|\ge 2ab$，

所以三角不等式成立，当且仅当 $ab\ge 0$ 时等号成立.



»考点剖析

（一）平均值不等式及其应用

例 1. 已知 $x>0$，求证：$x+\dfrac{1}{x}\geq 2$，并指出等号成立的条件.

例 2. 已知 $ab>0$，求证：$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$，并指出等号成立的条件.

例 3. 设 $x\in R$，求二次函数 $y=x(4-x)$ 的最大值.

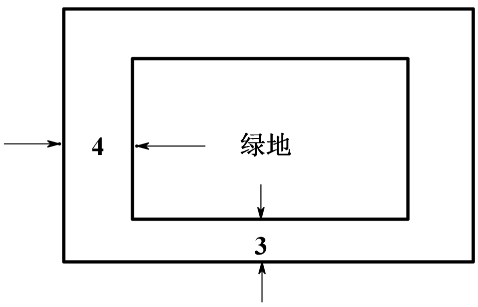
例 4. 设 a 、b 为正数，且 $a+2b=1$，比较 ab 的值与 $\dfrac{1}{8}$ 的大小.

例 5. 证明：

（1）在周长为常数的所有矩形中，正方形的面积最大；

（2）在面积相同的所有矩形中，正方形的周长最小.

例 6. 某新建居民小区欲建一面积为 700 m^2 的矩形绿地，并在绿地四周铺设人行道，设计要求绿地长边外人行道宽 3 m，短边外人行道宽 4 m. 如图所示，问如何设计绿地的长与宽，才能使人行道的占地面积最小.



（二）三角不等式

例 7. 已知 a 、b 为实数，求证：$|a+b|+|a-b|\geq 2|a|$.

例 8. 已知 a,b 为实数，求证：$|a|-|b|\le|a-b|$，并指出等号成立的条件.

例 9. 证明：$|x-3|+|x-5|\geq 2$ 对所有实数 x 恒成立，并求等号成立时 x 的取值范围.

»过关检测

A 组　双基过关

【难度系数：★　时间：8 分钟　　分值：20 分】

1．（23-24 高一上·上海普陀·期中）设 $x\in\mathbf{R}$，对于使 $-x^2+2x\leqslant M$ 恒成立的所有常数 M 中，我们把 M 的最小值 1 叫做 $-x^2+2x$ 的上确界．若 $a,b\in(0,+\infty)$，且 $a+b=1$，则 $-\dfrac{1}{2a}-\dfrac{2}{b}$ 的上确界为（　）

A．-2　　B．$-\dfrac{9}{2}$　　C．$-\dfrac{5}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

2．（23-24 高一上·上海静安·期中）$|x-3|+|x-7|\geq a$ 对所有实数 x 恒成立，则 a 的取值范围是______.

3．（22-23 高一上·上海闵行·期末）已知 $b\in\mathbf{R}$，且 $b\neq 0$，若不等式 $|x+b|+|x-b|\geq k|b|$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的最大值是___________.

4．（22-23 高一上·上海黄浦·期中）若 $|x-1|+|x-2|\geq m$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为___________.

5．（21-22 高一上·上海浦东新·期末）已知问题："$|x+3|+|x-a|\geq 5$ 恒成立，求实数 a 的取值范围".两位同学对此问题展开讨论：小明说可以分类讨论，将不等式左边的两个绝对值打开；小新说可以利用三角不等式解决问题.请你选择一个适合自己的方法求解此题，并写出实数 a 的取值范围___________.

6．（23-24 高一上·上海·阶段练习）已知 a，b 都是正数，则 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a+b}{b}$ 的最小值为________.

7．（2023 高一·上海·专题练习）已知 $0<a<1$，$0<b<1$，则 $a+b$，$2\sqrt{ab}$，a^2+b^2，$2ab$ 中哪一个最大？

B 组　巩固提高

【难度系数：★★　时间：10 分钟　　分值：20 分】

8．（23-24 高一上·上海·期末）为提高生产效率，某公司引进新的生产线投入生产，投入生产后，除去成本，每条生产线生产的产品可获得的利润 s（单位：万元）与生产线运转时间 t（单位：年）满足二次函数关系：

$s=-2t^2+40t-98$，现在要使年平均利润最大，则每条生产线运行的时间 t 为（　）年．

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

9．（23-24 高一上·上海浦东新·期末）已知 $a>0$，关于 x 的不等式 $\left(ax-a^2-6\right)(x-2)<0$ 的解集为 M，设 $N=M\cap\mathbf{Z}$，当 a 变化时，集合 N 中的元素个数最少时的集合 N 为______．

10．（23-24 高一上·上海·期末）设 a、b 为正数，且 $a+2b=1$，则 ab ____________ $\frac{1}{8}$（填"≤，≥，<，>"）

11．（23-24 高一上·上海奉贤·期末）设 a、b 为正数，且 a 与 $2b$ 的算术平均值为 1，则 a 与 $2b$ 的几何平均值最大值为______.

12．（23-24 高一上·上海嘉定·期末）已知 $x\in\mathbf{R}$，则函数 $y=x(4-x)$ 的最大值为_________.

13．（23-24 高一上·上海·期末）已知实数 x,y 满足 $|3x-2y|+|y-x|=|2x-y|$ 且 $y\neq0$，则 $\frac{x}{y}$ 的最小值是_____

14．（23-24 高一上·上海虹口·期末）若存在实数 x 使得不等式 $|x+1|+|x-a|\le2$ 成立，则实数 a 的取值范围是__________.

15．（23-24 高一上·上海闵行·期末）已知关于 x 的不等式 $|x+1|+|x-a|\le5$ 有解，则实数 a 的取值范围为__________.

16．（23-24 高一上·上海浦东新·期中）若关于 x 的不等式 $|x-2|+|x+1|\ge a$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的最大值是___________.

C 组　综合训练

【难度系数：★★★　时间：15 分钟　分值：30 分】

17．（23-24 高一上·上海嘉定·期中）对任意给定的实数 a，b，有 $|a|-|b|\le|a-b|$，且等号当且仅当（　）成立．

A．$ab\leqslant0$　　B．$a(a-b)\ge0$　　C．$ab\ge0$　　D．$b(a-b)\ge0$

18．（23-24 高一上·上海·阶段练习）已知 $a>0$，$b>0$，若 $2a+b=1$，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为（　）

A．7　　B．9　　C．11　　D．13

19．（23-24 高一下·上海·阶段练习）若关于 x 的不等式 $|x-1|-|x+2|\le a$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，则实数 a 的取值范围是______；

20．（23-24 高一上·上海·期末）已知函数 $f(x)=|x-3|,g(x)=-|x+4|+m$，若函数 $f(x)$ 的图像恒在函数 $g(x)$ 图像的上方，则 m 的取值范围为_________.

21．(22-23 高一上·上海·期末)已知 $1\le a\le b\le2$，记 $\frac{3}{a}+b$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M^2-m^2=$________.

22．（23-24 高一上·上海奉贤·期末）如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，AD 垂直于斜边 BC，且

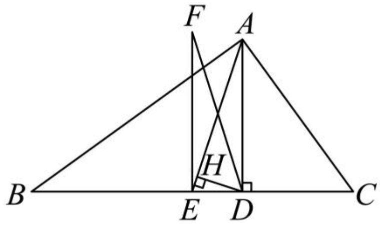
垂足为D，设BD及CD的长度分别为a和$b(a\neq b)$，E是BC的中点，点B绕点E顺时针旋转90°后得到点F，过D点作DH垂直于AE，且垂足为H．有以下三个命题：

①由图知$AD<AE$，即可以得到不等式$\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$；

②由图知$AH<AD$，即可以得到不等式$\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$；

③由图知$FE<FD$，即可以得到不等式$\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$；

以上三个命题中真命题的是______.（写出所有正确命题的序号）



23．（23-24高一上·上海·期末）已知$x>0$，$y>2$，且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-2}=a$，若$x+y$的最小值为4，则实数$a$的值为___________.

24．（23-24高一上·上海·阶段练习）对于直角坐标平面上的两个点$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，记$d\left(P,Q\right)=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|$.

(1)若点$A\left(x,y\right)$在函数$y=2x-1$图像上，点B的坐标为$\left(0,1\right)$，求满足$d\left(A,B\right)\geq 3$的x的集合；

(2)若$A\left(1,3\right),B\left(2,5\right)$，点$C\left(x,y\right)$是直角坐标平面上的任意一点，求$d\left(A,C\right)+d\left(B,C\right)$的最小值，并指出取得最小值时的点$C\left(x,y\right)$的集合.

25．（23-24高一上·上海·期末）（1）解不等式$\left|x-2\right|+\left|2x+1\right|\leq 4$；

（2）证明：$\left|2x-4\right|+\left|2x+1\right|\geq 5$对所有实数$x$恒成立，并指出等号成立时$x$的取值范围.

26．（23-24高一上·上海·期中）已知$a>0$，$b>0$.

(1)比较a^3+b^3与a^2b+b^2a的大小；

(2)若$a+b=1$，求$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$的最小值.

D组　拓展延伸

【难度系数：★★★　时间：20分钟　分值：30分】27．（23-24高一上·上海浦东新·期中）已知实数$k>0$，则
$\left(2 \quad\right)\left(\quad 2\right)$的最大值为______.

28．（21-22高一上·上海浦东新·期中）设$x,y\in\mathbf{R}$，若$|x|+|x-4|+|y|+|y-1|\leq 5$，则$2x-3y+xy$的取值范围为___________.

29．（23-24高一上·上海浦东新·期中）问题：正实数a，b满足$a+b=1$，求$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值.其中一种解法是：$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+b)=1+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}+2\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$且$a+b=1$时，即$a=\sqrt{2}-1$且$b=2-\sqrt{2}$时取等号.学习上述解法并解决下列问题：

(1)若正实数x，y满足$x+y=1$，求$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$的最小值；

(2)若实数a，b，x，y满足$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求证：$a^2-b^2\le(x-y)^2$；

(3)求代数式$M=\sqrt{3m-5}-\sqrt{m-2}$的最小值，并求出使得M最小的m的值.

30．（23-24高一上·上海·期中）设在二维平面上有两个点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，它们之间的距离有一个新的定义为$D(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$，这样的距离在数学上称为曼哈顿距离或绝对值距离．在初中时我们学过的两点之间的距离公式是$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，这样的距离称为欧几里得距离（简称欧氏距离）或直线距离.

(1)已知A,B两个点的坐标为$A(2x,1)$，$B(3,2)$，如果它们之间的曼哈顿距离不大于3，那么x的取值范围是多少？

(2)已知A,B两个点的坐标为$A(x,a)$，$B(3,x)$，如果它们之间的曼哈顿距离要恒大于2，那么a的取值范围是多少？

(3)若点$A(x,y)$在函数$y=\log_3 x$图象上且$x\in \mathrm{Z}$，点B的坐标为$(9,1)$，求$D(A,B)$的最小值并说明理由.