2007～2016十年间基于数学史的高考数学试题分析

陈莎莎，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，200062）

摘　要：对2007～2016十年间全国各地高考数学试卷中基于数学史的试题进行统计分析，发现其所涉及的数学史料可以分为作图工具、几何图形、数学命题、数学问题和思想方法五类，其所用到的提问策略仅包括再现式、自由式两种，其具有关注中国古代数学、“链接”现行教材内容、史料类型比较集中、提问策略比较单一等特点。由此得到：基于数学史的高考数学试题命制需要挖掘更丰富的数学史料，运用更灵活的提问策略，发挥更多的数学史教育价值。

关键词：数学史　高考试题　史料类型　提问策略　命题建议

教育部《关于2017年普通高考考试大纲修订内容的通知》要求“充分发挥高考命题的育人功能和积极导向作用”，并提出“在数学试题中增加数学文化的内容”。数学文化在高考数学试题中的渗透主要体现在数学史、数学精神、数学应用三个方面。作为数学文化的一部分，数学史融入高考数学试题无疑能够发挥育人的功能，并且可以促进数学教育工作者对数学史的学习和研究，丰富他们的数学史素材，提高他们的数学史素养，改变数学教育对数学史“高评价、低应用”的现象。

数学史在高考试题中的渗透尽管并不常见，但也并非毫无踪迹可寻。考察2007～2016十年间全国各地的高考数学试卷，可以发现每年都会出现基于数学史的试题，其中尤以湖北省的试卷最为突出。另外，对于基于数学史的高考数学试题，已

有文献的研究大多数以内容和解法的赏析为主。那么，这些试题应用了哪些数学史材料？采用了哪些提出问题的策略？有什么特点？本文试图对此做出分析，并由此得到启示。

一、试题基本情况统计

2007～2016 十年间全国各地高考数学试卷中基于数学史的试题的基本情况统计如表1所示。从中可见，历年高考数学试卷中均有基于数学史的试题，十年共有 51 道。其中，代数问题 26 道，解析几何问题 14 道，立体几何问题 6 道，平面几何问题 4 道，概率问题 1 道。

表 1

年份	地区	科别/题次	数学史内容	所属领域
2007	北京	理 13	赵爽弦图	代数
	江苏	理 19	蝴蝶定理	解析几何
	湖南	理 15	杨辉三角	代数
	湖北	理 21	贝努利不等式	代数
2008	江苏	理 13	阿波罗尼斯圆	解析几何
	四川	理 12	阿波罗尼斯圆	解析几何
	江苏	理 17	费马点	代数
	山东	理 22	阿基米德三角形	解析几何
	江西	文 22	蝴蝶定理	解析几何
2009	湖北	文理 10	毕达哥拉斯形数	代数
	湖北	理 15	角谷猜想	代数
	陕西	理 22	斐波那契数列	代数
	福建	理 15	斐波那契数列	代数
	福建	文 14	贝特朗悖论	概率
2010	天津	理 10	四色定理	代数
	江苏	理 17	米勒问题	代数
	江苏	理 18	蝴蝶定理	解析几何
	浙江	理 19	杨辉三角	代数
	湖北	理 15	帕普斯模型	代数

续表

年份	地区	科别/题次	数学史内容	所属领域
2011	北京	理 8	皮克定理	平面几何
	北京	理 14	卡西尼卵形线	解析几何
	湖北	理 13、文 9	“竹九节”问题	代数
	湖北	理 15	四色定理	代数
	江西	文 10	勒洛三角形	平面几何
2012	上海	文 14	斐波那契数列	代数
	湖北	文 17	毕达哥拉斯形数	代数
	湖北	理 10	开立圆术	立体几何
	江西	理 6	卢卡斯数列	代数
2013	全国Ⅰ	理 17	布洛卡点	平面几何
	上海	理 13	祖暅原理	立体几何
	江苏	理 17	阿波罗尼斯圆	解析几何
	湖北	文 16	“天池盆测雨”问题	立体几何
	湖北	文 17	皮克定理	平面几何
	湖北	理 12	角谷猜想	代数
	广东	理 20	阿基米德三角形	解析几何
2014	安徽	理 3	斐波那契数列	代数
	安徽	理 21	贝努利不等式	代数
	湖北	理 14	毕达哥拉斯形数	代数
	湖北	理 9、文 10	求“盖”术	立体几何
	湖北	文 17	阿波罗尼斯圆	解析几何
	陕西	理 14	欧拉定理	立体几何
	广东	文理 20	蒙日圆	解析几何
2015	全国Ⅰ	文理 6	“为米几何”问题	代数
	全国Ⅱ	文理 8	更相减损术	代数
	湖北	文理 2	“米谷粒分”问题	代数
	湖北	理 19、文 20	阳马和鳖臑	立体几何
	湖北	理 21	舒腾的椭圆规	解析几何

续表

年份	地区	科别/题次	数学史内容	所属领域
2016	全国Ⅱ	理 8、文 9	秦九韶算法	代数
	四川	理 6	秦九韶算法	代数
	四川	文 20	蝴蝶定理	解析几何
	山东	文 21	蝴蝶定理	解析几何

二、试题涉及史料分析

梅磊、史嘉老师将数学文化融入高考数学试题的取材分为数学时事、数学游戏、数学名人、数学名著、数学名题、数学猜想、数学图形、数学符号、数学应用、数学思想方法十类。在此基础上，我们可以对基于数学史的高考数学试题所选取的数学史料进行归类分析，从而将上述 51 道试题所涉及的数学史料分为作图工具、几何图形、数学命题、数学问题和思想方法五类。

（一）作图工具

依据数学史上的作图工具而编制试题只有 2015 年湖北理科卷第 21 题。

试题 1 （2015 年湖北理科卷第 21 题）一种作图工具如图 1 所示。O 是滑槽 AB 的中点，短杆 ON 可绕 O 转动，长杆 MN 通过 N 处的铰链与 ON 连接，MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动，且 $DN=ON=1$，$MN=3$。当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时，带动 N 绕 O 转动一周（D 不动时，N 也不动），M 处的笔尖画出的曲线记为 C。以 O 为原点、AB 所在直线为 x 轴建立，如图 2 所示的平面直角坐标系。

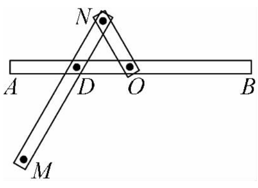


图 1

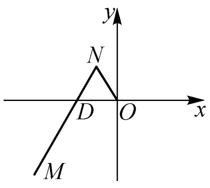


图 2

（1）求曲线 C 的方程；

（2）设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P、Q 两点。若动直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点，试探究：$\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由。

17 世纪荷兰数学家舒腾（F. van Schooten，1615～1660）在《数学练习》（1657）中介绍了多种椭圆作图工具（椭圆规），如图 3 所示。在前两种椭圆规中，杆 AB 可绕 A 转动，$AB=a$；杆 BE 通过 B 处铰链与 AB 连接，$BE=b$；

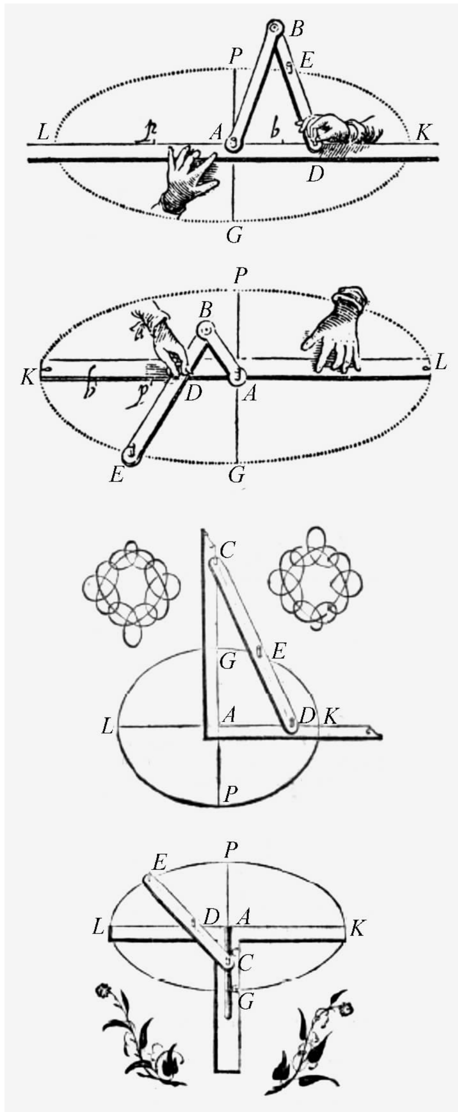


图 3

BE 上的钉子 D 可沿横轴 KL 移动，$AB=BD$。不难发现，当 D 在 KL 上移动时，E 处的笔尖即画出了椭圆。

（二）几何图形

几何图形的对称、运动、突变等体现着数学的美。依据数学史上的几何图形而编制的试题共有 4 道。比如，2007 年北京理科卷第 13 题源自《周髀算经》中的“弦图”，采用出入相补原理使勾股定理不证自明；2010 年湖北理科卷第 15 题以《数学汇编》中的帕普斯模型揭示了基本不等式的几何意义；2015 年湖北理科卷第 19 题（文科卷第 20 题）则源自《九章算术》“商功”章中的“阳马”和“鳖臑”图形，充满趣味（当然，题目对这两个词语的含义进行了现代文解释）。

试题 2 （2011 年江西文科卷第 10 题）如图 4，一个“凸轮”放置于直角坐标系 x 轴上方，其“底端”落在原点 O 处，一顶点及中心 M 在 y 轴的正半轴上，它的外围由以正三角形的顶点为圆心、以正三角形的边长为半径的三段等弧组成。今使“凸轮”沿 x 轴正向滚动。在滚动过程中，“凸轮”每时每刻都有一个“最高点”，其中心 M 也在不断移动位置，则在滚动一周的过程中，将“凸轮”“最高点”和中心 M 所形成的图形按上、下放置，应大致为 （　　）

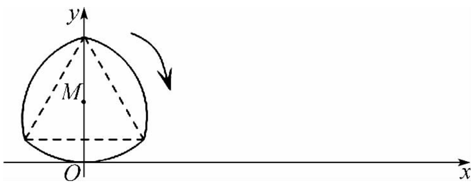
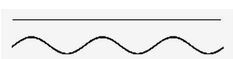


图 4



A.

B.

C.

D.

此题涉及的图形（“凸轮”）被称为勒洛三角形。据说，19 世纪德国机械工程师勒洛（F. Reuleaux，1829～1905）为了寻找一个在任意方向上均可通过按钮孔但又不是圆形的按钮，发现了该三角形。它是定宽曲线所能构成的最小图形，因其定宽性被称为“和圆一样的三角形”。它还有一个有趣的性质：宽度相等的定宽曲线有相同的周长。20 世纪德国工程师万克尔（F. H. Wankel，1902～1988）利用勒洛三角形的性质，制造出第一台转子发动机样机。值得一提的是，此题中的曲线是通过勒洛三角形的滚动而得到的，实际上是一种摆线。历史上，继圆锥曲线之后，数学家关注得最多的曲线便是摆线。摆线源自滚动，形状各异、性质美妙、应用广泛；解决摆线问题需要平面几何、三角函数、解析几何等相关知识的支撑。除了此题之外，2010 年北京理科卷第 14 题、2011 年江西理科卷第 10 题、2012 年山东理科卷第 16 题均是与摆线有关的问题。

（三）数学命题

数学中的定义、公理、定理、公式、性质、法则等都是数学命题。依据数学史上的数学命题而编制的试题最多，共有 35 道。当中涉及许多定理（如蝴蝶定理）、公式（如开立圆术）以及猜想（如角谷猜想）。

试题 3 （2013 年上海理科卷第 13 题）在 xOy 平面上，将两个半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1(x\geqslant1)$ 和 $(x-3)^2+y^2=1(x\geqslant3)$、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D，如图 5 中阴影部分。记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω，过点 $(0,y)(|y|\leqslant1)$ 作 Ω 的水平截面，所得截面的面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体，得出 Ω 的体积值为________。

此题源自《九章算术》“少广”章李淳风注中的“祖暅之开立圆术”。在李淳风注中，祖暅提出：“夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不

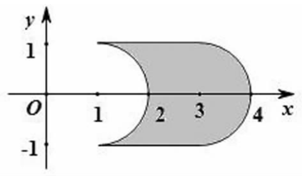


图 5

容异。”意思是：诸立体凡等高处截面积相等，则其体积必相等。此题将不好计算的水平截面分为一个平放的圆柱和一个长方体，巧妙地绕开了难以直接计算的体积，体现了数学史教育价值的“方法之美”。

（四）数学问题

这里所说的“数学问题”主要是指数学史上的数学名题和优秀数学著作中的数学问题。依据数学史上的数学问题而编制的试题共有 5 道，主要涉及我国古代数学名著中的数学问题。比如，2013 年湖北文科卷第 16 题以《数书九章》中的“天池盆测雨”问题为背景，2015 年全国Ⅰ理科（文科）卷第 6 题以《九章算术》中的“为米几何”问题为背景，2015 年湖北理科（文科）卷第 2 题则以《九章算术》中的“米谷粒分”问题为背景，等等。

试题 4 （2010 年江苏理科卷第 17 题）某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H（单位：m），示意图如图 6。垂直放置的标杆 BC 的高度 $h=4$ m，仰角 $\angle ABE=\alpha$，$\angle ADE=\beta$。

（1）该小组已经测得一组 α、β 的值，$\tan\alpha=1.24$，$\tan\beta=1.20$，请据此算出 H 的值；

（2）该小组分析若干测得的数据后，认为适当调整标杆到电视塔的距离 d（单位：m），使 α 与 β 之差较大，可以提高测量精确度。若电视塔的实际高度为 125 m，试问 d 为多少时，$\alpha-\beta$ 最大？

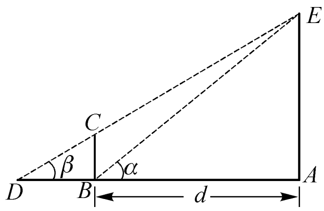


图 6

此题由米勒问题改编而成。15 世纪德国数学家米勒（J. Muller，1436～1476）在给爱尔福特大学教授罗德的信（1471）中提出了下面的问题：一根垂直悬挂的杯子，从地面上哪点看上去最长（也就是视角最大）？这个问题被认为是数学史上第一个极值问题。更一般的情况如下：已知点 A、B 是 $\angle MON$ 的边 ON 上的两个定点，点 C 是边 OM 上的动点，则当 C 在何处时，$\angle ACB$ 最大？对于该问题，运用切割线定理，可得当且仅当 $\triangle ABC$ 的外接圆与边 OM 相切于点 C 时，$\angle ACB$ 最大，即米勒定理。上述试题可以通过米勒定理巧妙地求解，体现了“方法之美”。

（五）思想方法

这里所说的“思想方法”是指证明命题或解决问题所用的数学思想以及算法。依据数学史上的思想方法而编制的试题共有 6 道。比如，2009 年湖北理科（文科）卷第 10 题、2014 年湖北理科卷第 14 题以“毕达哥拉斯形数”为背景，2016 全国Ⅱ理科卷第 8 题（文科卷第 9 题）、2016 年四川理科卷第 6 题以“秦九韶算法”为背景，等等。

试题 5 （2012 年湖北文科卷第 17 题）传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上画点或用小石子表示数。他们研究过如图 7 所示的三角形数。将三角形数 1，3，6，10，…记为数列 $\{a_n\}$，将可被 5 整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列 $\{b_n\}$。可以推测：

（1）$b_{2\,012}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的第________项；

（2）$b_{2k-1}=$________。（用 k 表示）

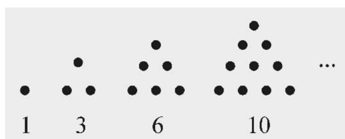


图 7

此题源自古希腊毕达哥拉斯学派(公元前6世纪)的形数思想。毕达哥拉斯学派关于形数的研究强烈地反映了他们将数作为几何思维元素的精神。此题让可被5整除的三角形数形成新数列,将形数思想与数列通项公式的考查恰如其分地结合了起来。

三、试题提问策略分析

根据已知情境或已知问题提出新问题的具体策略有四种:条件操作(改变已知条件)、目标操作(改变要求目标)、对称互换(将已知条件和要求目标互换)、新旧链接(对现有问题进行扩充,让新问题的解决依赖于现有问题的解决)。在此基础上,我们可以将基于数学史的数学问题的提问策略分成七种:再现式、情境式、条件式、结论式、对称式、链接式、自由式。下面,以《九章算术》中的"勾股容方"问题为例,给出利用各种策略可以提出的代表性问题。

再现式　今有勾五步,股十二步,问勾中容方几何。

情境式　有一块直角三角形空地,直角边长分别为8米和12米。现要在该空地上建一个正方形花坛,要求面积最大,求花坛的边长。

条件式　(1)已知直角三角形的两条直角边长分别为7米和25米,求与其有公共直角的内接正方形的边长;

(2)已知直角三角形的两条直角边长分别为a和b,求其内接正方形的边长。

结论式　(1)已知直角三角形的两条直角边长分别为5和12,求其内接正方形的面积;

(2)已知直角三角形的两条直角边长分别为5和12,求其内接正方形的对角线长。

对称式　已知直角三角形的内接正方形边长为$\frac{60}{17}$,斜边长为13,求其直角边长。

链接式　已知直角三角形的两条直角边长分别为a和b,根据内接正方形边长与a和b之间的关系,证明$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$。

自由式　(1)利用尺规,作一个已知直角三角形的内接正方形;

(2)若直角三角形的两条直角边长分别为a和b,则其内接正方形边长为$\frac{ab}{a+b}$。你觉得古人是如何得到这个结果的?

通过分析可以发现,上述51道试题所用到的提问策略仅包括再现式、自由式两种。

(一)再现式策略

再现式策略就是直接提及数学史背景,直接采用史料中"原汁原味"的问题、解法等,加以直译(以便于考生理解),然后再现(主要以选择或填空题形式),其对应的数学史运用方式是复制式。有4道试题采用了再现式策略,比如2013年湖北文科卷第16题、2015年全国Ⅰ理科(文科)卷第6题、2015年湖北理科(文科)卷第2题。

试题6　(2011年湖北理科卷第13题)《九章算术》"竹九节"问题:现有一根9节的竹子,自上而下各节的容积成等差数列,上面4节的容积共3升,下面3节的容积共4升,则第5节的容积为________升。

此题即为《九章算术》"均输"章中的"竹九节"问题。原文为:"今有竹九节,下三节容四升,上四节容三升。问:中间二节欲均容,各多少?'此题通过直译的方式将原题再现,同时为了便于填空题的考查,将求解各节竹子容积的问题改为求解第5节竹子容积的问题。

(二)自由式策略

自由式策略就是根据一则数学史料(如历史上的数学故事、数学命题、数学问题、数学方法等)来提出数学问题,将条件和目标都

重新设定。有些试题明确指出了数学史料的来源;有些试题则未明确指出,只有在解决、挖掘的过程中才能感受到。其余的47道试题采用了自由式策略。

试题7 (2012年湖北理科卷第10题)我国古代数学名著《九章算术》中的“开立圆术”曰:“置积尺数,以十六乘之,九而一,所得开立方除之,即立圆径。”“开立圆术”相当于给出了已知球的体积V,求其直径d的一个近似公式:$d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$。人们还用过一些类似的近似公式。根据$\pi=3.14159\cdots$判断,下列近似公式中最精确的一个是 ( )

A. $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$　　B. $d\approx\sqrt[3]{2V}$

C. $d\approx\sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$　　D. $d\approx\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

此题源自《九章算术》“少广”章中的“开立圆术”。原文是对“今有积四千五百尺。问:为立圆径几何”问题的解答。此题给出《九章算术》原文并加以解释,再结合历史上曾经使用过的相关近似公式,将我国古代几个圆周率的近似值融入其中。此题对原题进行了自由式改编,对球体积公式进行了考查。对照球体积的正确公式,选项A、B、C、D所对应的圆周率近似值分别为$\frac{27}{8}$、古率$\frac{3}{1}$、徽率$\frac{157}{50}$和祖冲之约率$\frac{22}{7}$,可见其越来越精确。

四、试题特点归纳总结

纵观2007~2016十年间全国各地高考数学试卷中基于数学史的试题,不难发现以下特点:

第一,51道试题中,有14道(约占27%)涉及中国古代数学,主要来源于《九章算术》《数书九章》《算数书》等重要文献。将中国古代数学名著中的内容融入高考数学试题,可以起到弘扬传统文化、培养爱国情怀的作用。

第二,51道试题中,有不少对现行高中数学教材中的数学文化内容进行了“链接”(即以教材中的有关内容为命题素材)。比如,2015年湖北理科卷第21题(椭圆作图工具)与苏教版高中数学选修2-1中的阅读材料“猫的运动轨迹与达·芬奇椭圆仪”相“链接”;2010年湖北理科卷第15题(帕普斯模型)同时与苏教版和人教版高中数学必修5“基本不等式”一节的“探究基本不等式的几何解释”部分相“链接”;2009年湖北理科(文科)卷第10题(毕达哥拉斯学派的形数思想)与人教版高中数学必修5“数列的概念与简单表示”一节的引入部分相“链接”;2016年全国Ⅱ理科卷第8题(秦九韶算法)和2015年全国Ⅱ理科卷第8题(更相减损术)分别与人教版高中数学必修3“算法案例”一节的两个算法案例相“链接”。这样可以凸显公平原则,引导师生回归课本,重视基础知识与经典问题。

第三,51道试题涉及的史料类型在较为丰富的基础上也呈现出较为集中的特点,其中数学命题所占比例特别大,其他类型所占比例都较小。这可能是因为数学命题是数学知识的基本形式,相关内容和素材特别丰富,是命题者最熟悉的,也比较容易挖掘和获得。

第四,51道试题都是采用再现式或自由式策略提问的,其中自由式策略所占比例特别大,再现式策略所占比例比较小。提问策略比较单一可能是因为命题者更关注数学史内容的挖掘和融入以及数学文化命题导向的实现,而忽视对试题的进一步雕琢和打磨。

五、试题命制改进建议

根据以上分析,我们可以得到以下试题命制的改进建议:

第一,基于数学史的高考数学试题命制需要挖掘更丰富的数学史料。虽然之前的试

题所运用的数学史料较为多样，但是面对数千年的世界数学史，这些史料不过是沧海一粟。例如，之前的试题所涉及的中世纪欧洲数学只有斐波那契数列，而斐波那契的《计算之书》是 13 世纪初百科全书式的数学著作，书中的数学问题十分丰富，如“棋盘问题”（第一格放一粒麦子，以后各格所放麦粒数是前面所有格子之和的两倍）等就是典型的高中数学问题。

第二，基于数学史的高考数学试题命制需要运用更灵活的提问策略。命题者完全可以从史料出发，创设现实生活情境，凸显数学的应用性；结合教材所学内容，对问题条件和结论进行适当地改编和扩充，链接式地提出问题，扩展至多个考点的考查——可以连续（分层）设问，通过解答题的形式进行考查。例如，2017 届江西省百校联盟高三 2 月联考中有一题，先介绍《数书九章》中的“三斜求积”公式，再给出三角形的周长和三个内角的正弦之比，要求三角形的面积。该问题即采用了条件式策略，将《数书九章》中原题的条件“三边长”改为了“周长和三内角正弦值之比”，并保持目标不变，仍为求三角形面积。

第三，基于数学史的高考数学试题命制需要发挥更多的数学史教育价值。高考题中的数学史材料可以引导学生运用有关数学概念、定理、思想和方法来解决问题，从而体现“知识之谐”“方法之美”；可以提升学生的数学阅读和理解能力，从而实现“能力之助”；可以呈现数学的问题之源、数学的社会功能以及数学与现实世界的联系等，从而体现“文化之魅”；还可以呈现数学家的探索与挫折，从而实现“德育之效”。例如，可以基于棱柱概念的数学史命制如下试题：

以下是历史上数学家曾经给出过的棱柱的各种定义：(1)有两个面为全等的多边形，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；(2)有两个面为平行且全等的多边形，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；(3)有两个面为全等且对应边平行的多边形，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；(4)有两个面的对应边平行且相等，其余各面均为平行四边形的多面体称为棱柱；(5)有两个面为平行、全等且对应边平行的多边形，其余各面均为以全等多边形对应边为底的平行四边形，这样的多面体称为棱柱。上述定义中正确的个数为 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

这道题呈现了数学家的错误，揭示了数学活动的本质，促进了棱柱概念的理解，具有多方面的教育价值。

参考文献：

[1] 陈昂，任子朝. 突出理性思维，弘扬数学文化——数学文化在高考试题中的渗透[J]. 中国考试，2015(3).

[2] 梅磊，史嘉. 例谈数学文化融入高考试题的意义和途径[J]. 中学数学教学参考（上旬），2015(1).

[3] Schooten，F. van. *Exercitationum Mathematicarum* [M]. Lvgd Batav：Johannis Elsevirii，1657.

[4] Posamentier，A. S.，Lehmann，I. *Pi：A biography of the world's most mysterious number* [M]. Amherst NY：Prometheus Books，2004.

[5] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，2004.

[6]【以】Maor，E. 三角之美[M]. 曹雪林，边晓娜译. 北京：人民邮电出版社，2010.

[7] Dörrie，H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics：Their History and Solution* [M]. New York：Dover Publications，1965.

[8] 李文林. 数学史概论[M]. 北京：高等教育出版社，2011.