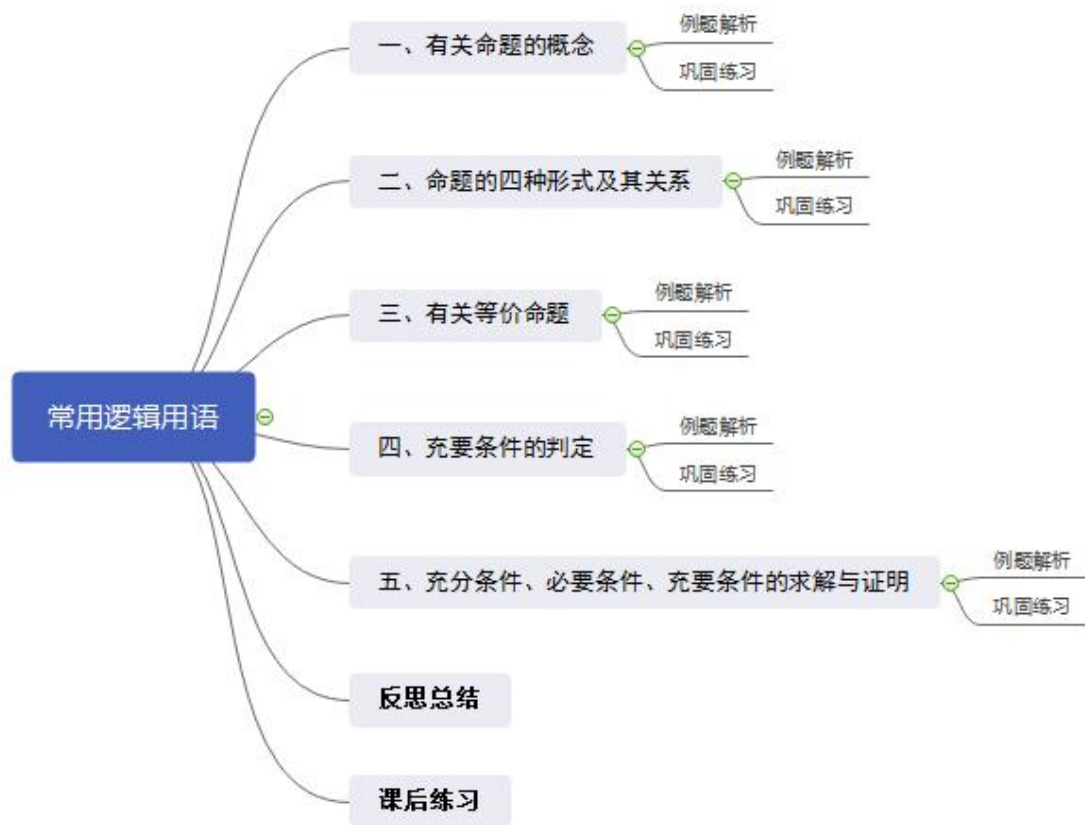


## 专题03 常用逻辑用语（1）

命题，充分条件与必要条件



### 知识梳理

#### 一、命题的概念

1、一般地，我们把可以判断真假的语句叫做命题。

2、命题通常用陈述句表示，正确的命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题。

3、一般地，如果命题 $\alpha$ 成立可以推出命题 $\beta$ 也成立，那么就说由 $\alpha$ 可以推出 $\beta$ ，记作 $\alpha \Rightarrow \beta$ 。

相反的，如果 $\alpha$ 成立不能推出 $\beta$ 成立，那么就说由 $\alpha$ 不可以推出 $\beta$ ，记作 $\alpha \nRightarrow \beta$ 。

4、如果  $\alpha \Rightarrow \beta$ ，并且  $\beta \Rightarrow \alpha$ ，那么就说  $\alpha$  与  $\beta$  等价，记作  $\alpha \Leftrightarrow \beta$ 。

## 二、四种命题形式

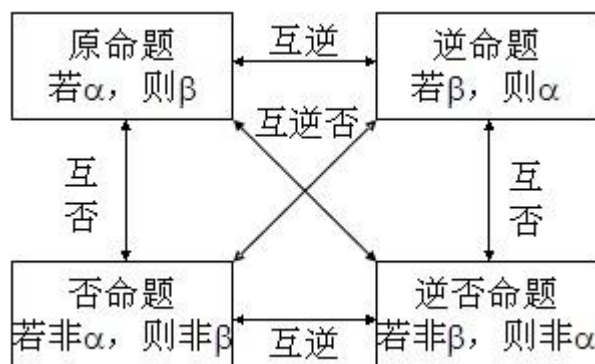
1、一个数学命题用条件  $\alpha$ ，结论  $\beta$  表示就是“如果  $\alpha$ ，那么  $\beta$ ”，把结论与条件交换，就得到一个新命题“如果  $\beta$ ，那么  $\alpha$ ”，我们把这个命题叫做原命题的逆命题。

2、如果一个命题的条件与结论分别是另一个命题的条件与结论的否定，我们把这两个命题叫做互否命题。如果其中一个叫做原命题，那么另外一个叫做原命题的否命题。

3、命题  $\alpha$ 、 $\beta$  的否定分别记作  $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\beta}$ 。

4、如果把原命题“如果  $\alpha$ ，那么  $\beta$ ”结论的否定作条件，把条件的否定作结论，那么就可以得到一个新命题，我们将它叫做原命题的逆否命题。

5、四种命题形式及其相互关系：



6、常见结论的否定形式：（拓展内容）

原结论	否定形式	原结论	否定形式
是	不是	至少有一个	没有
都是	不都是	至多有一个	至少有二个
大于	小于或等于	至少有 $n$ 个	至多有 $n-1$ 个
小于	大于或等于	至多有 $n$ 个	至少有 $n+1$ 个

对所有的 $x$ 成立	存在 $x$ 不成立	$p$ 或 $q$	非 $p$ 且非 $q$
对任何的 $x$ 不成立	存在 $x$ 成立	$p$ 且 $q$	非 $p$ 或非 $q$

### 三、充要条件

#### 1、充分条件与必要条件：

一般地，用  $\alpha$ 、 $\beta$  分别表示两个命题，如果  $\alpha$  成立，可以推出  $\beta$  也成立，即  $\alpha \Rightarrow \beta$ ，那么  $\alpha$  叫做  $\beta$  的充分条件。 $\beta$  叫做  $\alpha$  的必要条件。

#### 2、充要条件：

如果既有  $\alpha \Rightarrow \beta$ ，又有  $\beta \Rightarrow \alpha$ ，即有  $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ，那么  $\alpha$  既是  $\beta$  的充分条件又是  $\beta$  的必要条件，这时我们就说  $\alpha$  是  $\beta$  的充要条件。

### 例题解析

#### 一、有关命题的概念

【例1】判断下列语句是否是命题：

(1)张三是四川人；(2) $10^{10}$  是个很大的数；(3) $x^2 + 2x = 0$ ；(4) $x^2 + 6 > 0$ ；(5) $1+1 > 2$ ；

【例2】判断下列语句是不是命题，若是，判断出其真假，若不是，说明理由.

(1) 矩形难道不是平行四边形吗？

(2) 垂直于同一条直线的两条直线必平行吗？

(3) 求证： $x \in R$ ，方程  $x^2 + x + 1 = 0$  无实根.

(4)  $x > 5$

---

(5) 人类在2020年登上火星.

【例3】下面有四个命题：①若 $-a$ 不属于 $\mathbf{N}$ ，则 $a$ 属于 $\mathbf{N}$ ；②若 $a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$ ，则 $a+b$ 的最小值为2；③ $x^2+1=2x$ 的解可表示为 $\{1, 1\}$ ．其中真命题的个数为（ ）

- A. 0个                      B. 1个                      C. 2个                      D. 3个

【例4】下列判断中正确的是（ ）.

- A. “12是偶数且是18的约数”是真命题      B. “方程 $x^2+x+1=0$ 没有实数根”是假命题  
C. “存在实数 $x$ ，使得 $|x+2| \leq 3$ 且 $x^2 > 16$ ”是真命题  
D. “三角形的三个内角的和大于或等于 $120^\circ$ ”是假命题

【例5】对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，定义它们之间的一种“距离”：

$\|AB\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ ．给出下列三个命题：

- ①若点 $C$ 在线段 $AB$ 上，则 $\|AC\| + \|CB\| = \|AB\|$ ；  
②在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，则 $\|AC\|^2 + \|CB\|^2 = \|AB\|^2$ ；  
③在 $\triangle ABC$ 中， $\|AC\| + \|CB\| > \|AB\|$ ．

其中真命题的个数为（ ）

- A. 1个                      B. 2个                      C. 3个                      D. 4个

### 【巩固训练】

1、判断命题真假：如果 $|a| < 2$ ，那么 $a < 2$ （ ）

---

2、若  $x \in [2, 5]$  和  $x \in \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$  都是假命题，则  $x$  的范围是\_\_\_\_\_

3、已知  $A, B$  是两个集合，下列四个命题：

①  $A$  不包含于  $B \Leftrightarrow$  对任意  $x \in A$ , 有  $x \notin B$  ②  $A$  不包含于  $B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

③  $A$  不包含于  $B \Leftrightarrow A$  不包含  $B$  ④  $A$  不包含于  $B \Leftrightarrow$  存在  $x \in A, x \notin B$ ，其中真命题的序号是\_\_\_\_\_

4、下面有四个命题：①集合  $N$  中最小的数是1；②若  $-a$  不属于  $N$ ，则  $a$  属于  $N$ ；③若  $a \in N, b \in N$ , 则  $a+b$  的最小值为2；④  $x^2 + 1 = 2x$  的解可表示为  $\{1, 1\}$ . 其中真命题的个数为  
( )

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

## 二、命题的四种形式及其关系

【例6】命题“若  $x = y$ ，则  $|x| = |y|$ ”，写出它的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假。

【例7】有4个命题：（1）没有男生爱踢足球；（2）所有男生都不爱踢足球；（3）至少有一个男生不爱踢足球；（4）所有女生都爱踢足球；其中是命题“所有男生都爱踢足球”的否定是\_\_\_\_\_

---

【例8】写出命题“若 $a, b$ 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数”的逆命题，否命题，逆否命题，并判断它们的真假.

【例9】写出下列命题的逆命题，否命题，逆否命题，并判断它们的真假.

- (1) “负数的平方是正数”；
- (2) “若 $a$ 和 $b$ 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数”；
- (3) “当 $c>0$ 时，若 $a>b$ ，则 $ac>bc$ ”；
- (4) “若 $x+y=5$ ，则 $x=3$ 且 $y=2$ ”；

【例10】已知命题 $p$ ：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实负根，命题 $q$ ：方程 $4x^2+(m-2)x+1=0$ 无实根；若 $p$ 与 $q$ 中有且仅有一个为真命题，求实数 $m$ 的取值范围.

【巩固训练】

---

1、有下列四个命题：

- ① “若  $x+y=0$ ，则  $x, y$  互为相反数” 的逆命题；
- ② “全等三角形的面积相等” 的否命题；
- ③ “若  $q \leq 1$ ，则  $x^2+2x+q=0$  有实根” 的逆否命题；
- ④ “等边三角形的三个内角相等” 逆命题；

其中真命题的个数为 ( )

- A. 1                  B. 2                  C. 3                  D. 4

2、原命题：“设  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，若  $a > b$ ，则  $ac^2 > bc^2$ ” 以及它的逆命题、否命题、逆否命题中，真命题共有 ( ) 个.

- A. 0                  B. 1                  C. 2                  D. 4

3、命题：“若  $x^2 < 1$ ，则  $-1 < x < 1$ ” 的逆否命题是 ( )

- A. 若  $x^2 \geq 1$ ，则  $x \geq 1$  或  $x \leq -1$                   B. 若  $-1 < x < 1$ ，则  $x^2 < 1$   
C. 若  $x > 1$  或  $x < -1$ ，则  $x^2 > 1$                   D. 若  $x \geq 1$  或  $x \leq -1$ ，则  $x^2 \geq 1$

4、有下列四个命题：①命题“若  $xy=1$ ，则  $x, y$  互为倒数” 的逆命题；②命题“面积相等的三角形全等” 的否命题；③命题“若  $m \leq 1$ ，则  $x^2-2x+m=0$  有实根” 的逆否命题；④命题“若  $A \cap B = B$ ，则  $A \subseteq B$ ” 的逆否命题.

其中是真命题的是\_\_\_\_\_ (填上你认为正确的命题的序号).

---

5. 原命题的否命题是“三条边相等的三角形是等边三角形”，原命题的逆命题是\_\_\_\_\_

### 三、有关等价命题

【例12】与命题“ $x, y, z$ 不全是负数”等价的命题是（ ）

- A、 $x, y, z$ 中至少有一个是正数    B、 $x, y, z$ 全不是负数  
C、 $x, y, z$ 中只有一个是负数    D、 $x, y, z$ 中至少有一个是非负数

【例13】与“一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有一正根、一负根”等价的命题是（ D ）

- A、 $\frac{b}{a} > 0$     B、 $\frac{b}{a} < 0$     C、 $\frac{c}{a} > 0$     D、 $\frac{c}{a} < 0$

【例14】命题：已知 $a, b$ 为实数，若 $x^2 + ax + b \leq 0$ 有非空解集，则 $a^2 - 4b \geq 0$ 。写出该命题的逆命题，否命题，逆否命题，并判断这些命题的真假？

【例15】下列命题改写成“若 $p$ ，则 $q$ ”的形式，并写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假。



---

(1) 方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的解是  $x = 3$ ;

(2)  $a, b, c, d$  是实数,  $a = b, c = d$ , 可以得到  $a + c = b + d$ ;

(3) 对顶角相等.

### 【巩固训练】

1、下列四个说法:

①一个命题的逆命题为真, 则它的逆否命题一定为真;

②命题“设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 若  $a + b \neq 6$ , 则  $a \neq 3$  或  $b \neq 3$ ”是一个假命题;

③“ $x > 2$ ”是“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件;

④一个命题的否命题为真, 则它的逆命题一定为真.

其中说法不正确的序号是\_\_\_\_\_.

2、 $a, b, c$  中至少有一个是非负实数的等价命题是 ( )

A、 $a, b, c$  中全不是负数

B、 $a, b, c$  中只有一个是负数

C、 $a, b, c$  中至少有一个是正数

D、 $a, b, c$  不全是负数

3、设 $a, b$ 两个实数,能推出“ $a, b$ 中至少有一个大于1”的条件是 ( )

- (A)  $a+b>1$       (B)  $a+b=2$       (C)  $ab>1$       (D)  $a+b>2$

#### 四、充要条件的判定

【例16】对任意实数 $a, b, c$ , 在下列命题中, 真命题是 ( )

- A. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的必要条件  
B. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的必要条件  
C. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的充分条件  
D. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的充分条件

【例17】若“ $a \geq b \Rightarrow c > d$ ”和“ $a < b \Rightarrow e \leq f$ ”都是真命题, 其逆命题都是假命题, 则“ $c \leq d$ ”是“ $e \leq f$ ”的 ( )

- A. 必要非充分条件      B. 充分非必要条件  
C. 充分必要条件      D. 既非充分也非必要条件

【例18】已知命题 $P: -4 < k < 0$ ; 命题 $q$ : 函数 $y = kx^2 - kx - 1$ 的值恒为负. 则命题 $P$ 是命题 $q$ 成立的 ( )

- A. 充分但不必要条件      B. 必要但不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

【例19】已知集合 $M = \{x | x < 3 \text{ 或 } x > 5\}$ ,  $P = \{x | (x-a)(x-8) \leq 0\}$ .

- (1) 求实数 $a$ 的取值范围, 使它成为 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的充要条件;  
(2) 求实数 $a$ 的一个值, 使它成为 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个充分但不必要条件;  
(3) 求实数 $a$ 的取值范围, 使它成为 $M \cap P = \{x | 5 < x \leq 8\}$ 的一个必要但不充分条件.

---

【巩固训练】

1、 $a < 0$  是方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0$  至少有一个负数根的 ( )

- A. 必要不充分条件                      B. 充分不必要条件  
C. 充分必要条件                          D. 既不充分也不必要条件

2、若  $A: a \in \mathbb{R}, |a| < 1$ ,  $B: x$  的二次方程  $x^2 + (a+1)x + a - 2 = 0$  的一个根大于零, 另一根小于零, 则  $A$  是  $B$  的 ( )

- A. 充分不必要条件              B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

3、已知  $a, b, c, d$  为实数, 且  $c > d$ . 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a - c > b - d$ ” 的 ( )

- A. 充分而不必要条件              B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件                          D. 既不充分也不必要条件

五、充分条件、必要条件、充要条件的求解与证明

【例20】已知条件  $P: |x+1| > 2$ , 条件  $q: x > a$ , 且  $\neg P$  是  $\neg q$  的充分不必要条件, 则  $a$  的取值范围可以是 ( )

- A.  $a \geq 1$                       B.  $a \leq 1$                       C.  $a \geq -1$                       D.  $a \leq -3$

---

【例21】给出以下四个条件：①  $ab > 0$ ；②  $a > 0$  或  $b > 0$ ；③  $a + b > 2$ ；④  $a > 0$  且  $b > 0$ . 其中可以作为“若  $a, b \in \mathbf{R}$ ，则  $a + b > 0$ ”的一个充分而不必要条件的的是\_\_\_\_\_.

【例22】已知不等式  $|x - m| < 1$  成立的充分不必要条件是  $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ ，则  $m$  的取值范围是

( )

A.  $\{m \mid -\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}\}$

B.  $\{m \mid m < \frac{1}{2}\}$

C.  $\{m \mid -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{4}{3}\}$

D.  $\{m \mid m \geq \frac{4}{3}\}$

【例23】已知命题  $p: \left|1 - \frac{x-1}{3}\right| \leq 2$ ； $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ ，若  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要非充分条件，求实数  $m$  的取值范围.

---

【例24】已知  $a > 0$ ，函数  $f(x) = ax - bx^2$ ，

(1) 当  $b > 0$  时，若对任意  $x \in \mathbf{R}$  都有  $f(x) \leq 1$ ，证明： $a \leq 2\sqrt{b}$ ；

(2) 当  $b > 1$  时，证明：对任意  $x \in [0, 1]$ ， $|f(x)| \leq 1$  的充要条件是  $b-1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$ ；

(3) 当  $0 < b \leq 1$  时，讨论对任意  $x \in [0, 1]$ ，都有  $|f(x)| \leq 1$  的充要条件.

【巩固训练】

1、可以作为“若  $a, b \in \mathbf{R}$ ，则  $a+b > 0$ ”的一个充分而不必要条件的的是（ ）

- A.  $ab > 0$       B.  $a > 0$  或  $b > 0$       C.  $a > 0$  且  $b > 0$       D.  $ab > 1$

2、设  $\alpha, \beta$  是方程  $x^2 - ax + b = 0$  的两个实根，试分析  $a > 2, b > 1$  是两根  $\alpha, \beta$  均大于1的什么条件？

---

3、求证：关于  $x$  的方程  $x^2 + 2ax + b = 0$  有实数根，且两根均小于 2 的一个充分条件是  $a \geq 2$  且  $|b| \leq 4$ 。

## 反思总结

命题和充要条件是高中数学的重要内容，在高考中占有很高的地位。历年高考命题中，充分条件和必要条件已经成了高考考查的一个热点，虽然这一部分在课本中只占一小节内容，定义也很简单，但它涉及的知识面很广，几乎渗透了高中数学的每一个角落；充要条件是数学中极其重要的一个概念，有关充要条件问题的求解是解题的一个难点，解这类问题需熟练掌握条件的概念，理解其含义，结合题设条件正确地分清条件与结论。在高考数学卷中，判断充要条件的问题常出现在选择题中，一般会与函数、不等式、立体几何等知识结合起来进行考查。

## 课后练习

一、填空题：

1、设  $A: x_1, x_2$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的两实数根；  $B: x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ，则  $A$  是  $B$  的 \_\_\_\_\_ 条件。

---

2、“ $x(x-y) > 0$ ”是“ $\frac{y}{x} < 1$ ”成立的\_\_\_\_\_条件。

3、已知命题：“ $a, b \in R$ , 且  $a + b < 0$ ”

(1) 该命题的一个充分非必要条件是\_\_\_\_\_；

(2) 该命题的一个必要非充分条件是\_\_\_\_\_。

4、命题“面积不相等的两个三角形不全等”的逆否命题是\_\_\_\_\_。

5、“ $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ ”是“ $a + b \neq 3$ ”成立的\_\_\_\_\_条件。

6、“ $|x + y| < 2$ ”是“ $|x| < 1$ 且 $|y| < 1$ ”的\_\_\_\_\_条件。

---

7、定义：若对定义域  $D$  上的任意实数  $x$  都有  $f(x)=0$ ，则称函数  $f(x)$  为  $D$  上的零函数．根据以上定义，“ $f(x)$  是  $D$  上的零函数或  $g(x)$  是  $D$  上的零函数”为“ $f(x)$  与  $g(x)$  的积函数是  $D$  上的零函数”的\_\_\_\_\_条件．

二、选择题：

8、设  $m, n$  是整数，则“ $m, n$  均为偶数”是“ $m+n$  是偶数”的 ( )

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

9、若非空集合  $A, B, C$  满足  $A \cup B = C$ ，且  $B$  不是  $A$  的子集，则 ( )

A. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件但不是必要条件

B. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件但不是充分条件

C. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充要条件

D. “ $x \in C$ ”既不是“ $x \in A$ ”的充分条件也不是“ $x \in A$ ”必要条件

10、命题“若  $p$  不正确，则  $q$  不正确”的逆命题的等价命题是 ( )

A. 若  $q$  不正确，则  $p$  不正确

B. 若  $q$  不正确，则  $p$  正确

C. 若  $p$  正确，则  $q$  不正确

D. 若  $p$  正确，则  $q$  正确



---

11、设全集为 $U$ ，有以下四个命题：

(1)  $A \cap B = A$     (2)  $C_U A \supseteq C_U B$     (3)  $C_U B \cap A = \Phi$     (4)  $C_U A \cap B = \Phi$

其中是命题  $A \subseteq B$  的充要条件的有\_\_\_\_\_个。 ( )

- A、1个                  B、2个                  C、3个                  D、4个

12、已知 $p$ 是 $r$ 的充分不必要条件， $s$ 是 $r$ 的必要条件， $q$ 是 $s$ 的必要条件，则 $p$ 是 $q$ 的 ( )

- A、充分不必要条件                  B、必要不充分条件  
C、充要条件                          D、既不充分也不必要条件

13、若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的定义域都是 $R$ ，则 $f(x) > g(x) (x \in R)$ 成立的充要条件是 ( )

- A、有一个 $x \in R$ ，使 $f(x) > g(x)$   
B、有无数多个 $x \in R$ ，使 $f(x) > g(x)$   
C、对 $R$ 中任意的 $x$ ，使 $f(x) > g(x) + 1$   
D、 $R$ 中不存在 $x$ 使 $f(x) \leq g(x)$

14、下列命题中正确的是 ( )

- ① “若 $x^2 + y^2 \neq 0$ ，则 $x, y$ 不全为零”的否命题  
② “正多边形都相似”的逆命题  
③ “若 $m > 0$ ，则 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的逆否命题  
④ “若 $x - \sqrt{3}$ 是有理数，则 $x$ 是无理数”的逆否命题

- A. ①②③④                  B. ①③④                  C. ②③④                  D. ①④

---

三、解答题：

15、（充分必要条件的判断）指出下列各组命题中， $p$ 是 $q$ 的什么条件？

（1）在 $\triangle ABC$ 中， $p$ ：  $A > B$      $q$ ：  $BC > AC$ ；

（2）已知 $x, y \in \mathbb{R}$ ，  $p$ ：  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$      $q$ ：  $(x-1)(y-2) = 0$