2025 年新课标 II 卷数学超详解（by Rqcen）

提示：试题来源于网络，部分题目可能与真题不同，只能先解答网络版，请勿作为估分依据，题目难度评价分很较简单、较简单、中等、较难、很难 5 档。

一、单项选择题

1. 样本数据 2，8，14，16，20 的平均数为（）

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

解析：已知 5 个样本数据，需选出它们的平均数，平均数就是所有数据加起来再除以样本总数，$\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=\dfrac{60}{5}=12$，本题选 C。

评价：很简单，利用平均数的定义计算即可。

2. 已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$（）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. -1　　D. 1

解析：本题已知一个复数，需选出关于该复数的表达式化简后的结果，利用 i 的定义和复数的运算法则化简即可，$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，本题选 A。

评价：较简单，化简过程中甚至不需要使用平方差公式，不要粗心算错 $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$。

3. 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\,|\,x^3=x\}$，则 $A\bigcap B=$（）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$　　C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

解析：已知两个集合，其中一个已知具体元素，另一个已知元素满足的等式，需选出这两个集合的交集，先利用 B 中的元素满足的等式求出具体数字，再利用交集的定义求交集即可。

B 中的元素未限定数域，默认为实数域，需满足等式 $x^3=x$，$x^3-x=0$，$x(x+1)(x-1)=0$，$x=0$ 或 $x=-1$ 或 $x=1$，即 $B=\{-1,0,1\}$，$A\bigcap B$ 由 A 与 B 共有的元素组成，比较两个集合中的元素可知 0 和 1 是它们共有的，即 $A\bigcap B=\{0,1\}$，本题选 D。

评价：较简单，本题考察集合中元素的表示方式、交集的概念、解一个虽然少见但并不难的方程。

4. 不等式$\frac{x-4}{x-1}\geq 2$的解集是（）

A. $\{x\mid -2\leq x\leq 1\}$　　B. $\{x\mid x\leq -2\}$　　C. $\{x\mid -2\leq x<1\}$　　D. $\{x\mid x>1\}$

解析：已知一个分式不等式，需选出该不等式的解集，解不等式即可。先移项，让不等式的一边为 0：$\frac{x-4}{x-1}-2\geq 0$，通分并化简：$\frac{x-4-2(x-1)}{x-1}\geq 0$，$\frac{-x-2}{x-1}\geq 0$，$\frac{x+2}{x-1}\leq 0$，需要分子和分母一个为正另一个为负，或分子为 0，即$\begin{cases}x+2>0\\x-1<0\end{cases}$或$x+2=0$，解得$-2\leq x<1$，用集合的方式表示为$\{x\mid -2\leq x<1\}$，本题选 C。

评价：较简单，非常基本的分式不等式。

5. 在$\triangle ABC$中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则$A=$（）

A. 45°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 135°

解析：已知一个三角形的三条边长，需选出其中一个角的大小，可以利用余弦定理求出该角的余弦值，再利用余弦值找到对应的角度。*∠A 的对边为 BC*，将各边长代入余弦定理$\cos A=\frac{|AB|^2+|BC|^2-|AC|^2}{2|AB|\cdot|BC|}=\frac{\sqrt{6}^2+(1+\sqrt{3})^2-2^2}{2\sqrt{6}\cdot(1+\sqrt{3})}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，该余弦值对应的角为 45°，本题选 A。

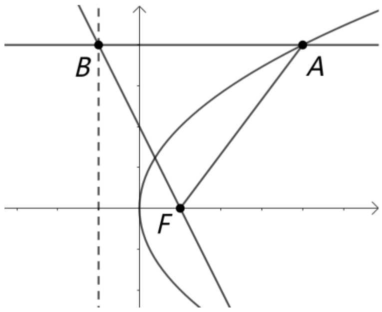
评价：较简单，只要掌握余弦定理就能列出计算表达式，化简过程中需要对含无理数的表达式较为熟悉。

6. 设抛物线 C：$y^2=2px\,(p>0)$的焦点为 F，点 A 在 C 上，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B，若直线 BF 的方程为$y=-2x+2$，则$|AF|=$（）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析：已知一个抛物线的标准方程和它的焦点，抛物线的参数$p>0$，可知开口向右，还已知抛物线上的一个点 A，过该点做抛物线准线的垂线，垂足为 B，还已知垂足与焦点连线的方程，需选出点 A 与焦点间的距离。

先画出大致图像，因为已知全部信息的是直线 BF，所以先画出 BF 的大致位置，它经过点$(0,2)$和$(1,0)$，然后画出抛物线及其焦点和准线，焦点就是斜线与 x 轴的交点，准线与已知斜线的交点为 B，经过点 B 的水平线与抛物线的交点为 A，如下图所示。



其中 F 恰好是抛物线的焦点，焦点在 x 轴上，由此可知 F 的坐标即为 $(1,0)$，由此可得 $p=2$，抛物线的方程为 $y^2=4x$，准线为 $x=-1$，把 $x=-1$ 代入直线 BF 的方程可得垂足 B 的坐标为 $(-1,4)$。因为 AB 与准线垂直，所以 A 的纵坐标也为 4，设 A 的坐标为 $(a,4)$，代入抛物线方程得 $4^2=4a$，解得 $a=4$，A 到准线的距离为 $|4-(-1)|=5$，由抛物线的定义可知 $|AF|$ 等于 A 到准线的距离，也为 5，本题选 C。

评价：中等，如果熟练掌握抛物线的定义，会让计算大为简化，如果没能使用抛物线的定义，会有一定的计算量但不大，整体分析思路也不复杂。

7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_3=6$，$S_5=-5$，则 $S_6=$（）

A. −20　　B. −15　　C. −10　　D. −5

解析：已知一个等差数列的前三项和和前五项和，求前六项和，可以设出该数列的首项和公差，然后根据前三项和和前五项和列出两个方程，解出首项和公差，再代入等差数列的前 n 项和公式即可。

设首项为 a_1，公差为 d，前 n 项和公式为 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$，代入已知数据可得 $3a_1+\dfrac{3(3-1)d}{2}=6$，$5a_1+\dfrac{5(5-1)d}{2}=-5$，分别化简下：$a_1+d=2$，$a_1+2d=-1$，两个等式相减可解得 $d=-3$，代入其中一个等式可解得 $a_1=5$，代入前 6 项和的求和公式得 $S_6=6\times5+\dfrac{6\times(6-1)\times(-3)}{2}=-15$，本题选 B。

评价：较简单，熟练掌握等差数列的求和公式，利用已知数据列方程、解方程即可。

8. 已知 $0<\alpha<\pi$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=$（）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

解析：已知一个不大于平角的角和该角一半的余弦值，需选出该角减去$\frac{\pi}{4}$的角的正弦值，可以先利用诱导公式、倍角公式求出该角的正弦值和余弦值，再利用差角公式求出要求的三角函数。

已知$0<\alpha<\pi$，所以$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$，可得$\sin\frac{\alpha}{2}>0$，由$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$可得$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，可得$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=(\frac{\sqrt{5}}{5})^2-(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2=-\frac{3}{5}$，由差角公式可得$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{3}{5})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，本题选 D。

评价：中等，本题需熟练基本的诱导公式（勾股定理）、倍角公式、差角公式，并对角的范围与对应三角函数的范围较熟悉，运算本身不难。

二、多选题

9. 记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，q为$\{a_n\}$的公比，$q>0$，若$S_3=7$，$a_3=1$，则（）

A. $q=\frac{1}{2}$　　B. $a_5=\frac{1}{9}$　　C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

解析：已知一个等比数列，公比大于 0，还已知它的前 3 项和和第 3 项，需选出正确的选项，思路与上一题相似，设出该数列的首项和公比，然后根据两个数据列出两个方程，解出首项和公比，再逐个验证各选项即可。

设首项为a_1，公比为q，可得$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=7$，$a_3=a_1q^2=1$，前者可以利用立方差公式化简下：$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{a_1(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}=a_1(1+q+q^2)=7$，用该等式除以另一个等式可以消去$a_1$：$\frac{a_1(1+q+q^2)}{a_1q^2}=\frac{7}{1}$，化简并解方程（只保留正数）：$\frac{1+q+q^2}{q^2}=7$，$1+q+q^2=7q^2$，$6q^2-q-1=0$，$(3q+1)(2q-1)=0$，$q=\frac{1}{2}$，代入$a_3$的表达式可得$a_1=\frac{1}{q^2}=4$，即$a_n=4(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^{n-3}}$，逐个分析判断各选项。

选项 A，$q=\frac{1}{2}$，正确，备选。

选项 B，$a_5=\frac{1}{9}$，代入等比数列的通项公式：$a_5=\frac{1}{2^{5-3}}=\frac{1}{4}$，错误，排除。

选项 C，$S_5=8$，代入等比数列的前 n 项和公式：$S_5=\frac{4\times[1-(\frac{1}{2})^5]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{4}$，错误，排除。

选项 D，$a_n+S_n=8$，代入等比数列的通项公式和前 n 项和公式并化简：

$a_n+S_n=\frac{1}{2^{n-3}}+\frac{4\times[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-3}}+8-\frac{1}{2^{n-3}}=8$，正确，备选。

本题选 AD。

评价：中等，本题只需要熟练掌握等比数列的通项公式、前 n 项和公式等基本概念，并能进行普通难度的分析与化简即可。

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则（）

A. $f(0)=0$

B. $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geq 2$，当且仅当 $x\geq\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

解析：已知一个定义域为全体实数的奇函数，还已知当 $x>0$ 时的解析式，解析式为一个多项式和指数相乘，再加一个常数，需选出正确的选项，直接逐个分析判断各选项。

选项 A，$f(0)=0$，虽然已知的函数解析式不包含 $x=0$，但奇函数的定义式 $f(x)=-f(-x)$ 要求满足 $f(0)=-f(-0)=-f(0)$，即 $f(0)=0$，正确，备选。

选项 B，$x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$，设 $x<0$，则 $-x>0$，代入已知解析式并化简可得 $f(-x)=[(-x)^2-3]e^{-x}+2=(x^2-3)e^{-x}+2$，由奇函数的定义式可得 $f(x)=-f(-x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$，正确，备选。

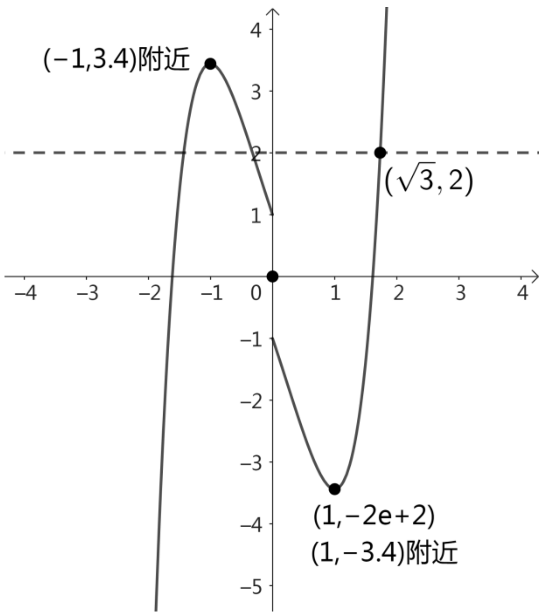
选项 C，$f(x)\geq 2$，当且仅当 $x\geq\sqrt{3}$，需要分析函数的单调性，奇函数只需要分析一半就行，另一半对称过去即可，就分析已知解析式和覆盖了本选项的 $x>0$ 范围吧，先求导数：$f'(x)=2xe^2+(x^2-3)e^x=(x^2+2x-3)e^x$ 把左边括号里写成二次函数基本形式为 $f'(x)=[(x+1)^2-4]e^x$，把左边括号写成因式分解形式为 $f'(x)=(x+3)(x-1)e^x$。由于限定了 $x>0$，所以不需要考虑 $x<-3$ 的情况，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数递增，当 $x=1$

时，为 $f(x)$ 的一个极小值，选项 A 中已经确定了 $f(0)=0$，当 x 取非常接近 0 的正数时（$x\to 0^+$），$f(x)\to(0^2-3)e^0+2=-1$，此后 $f(x)$ 递减，直到 $x=1$ 时，$f(1)=(1^2-3)e^1+2=-2e+2\approx -2\times 2.7+2=-3.4$（$e\approx 2.7$），此后 $f(x)$ 递增，$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3}^2-3)e^{\sqrt{3}}+2=2$，但是对称的另一半 $f(-1)=-f(1)\approx 3.4$，在该点附近函数值也比 2 大，错误，排除。

选项 D，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，选项 C 中求出了 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，利用奇函数的对称性可知 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点，正确，备选。

本题选 ABD。

评价：中等或较难，本题综合考察奇函数的性质、函数的导数、对函数的综合分析判断，利用到的知识点都不难，但是需要全面的知识和一定的综合分析能力。下图为利用选项 C 求出来的单调性规律、极值点、个别函数值、奇函数的对称性绘制的该函数的图像。



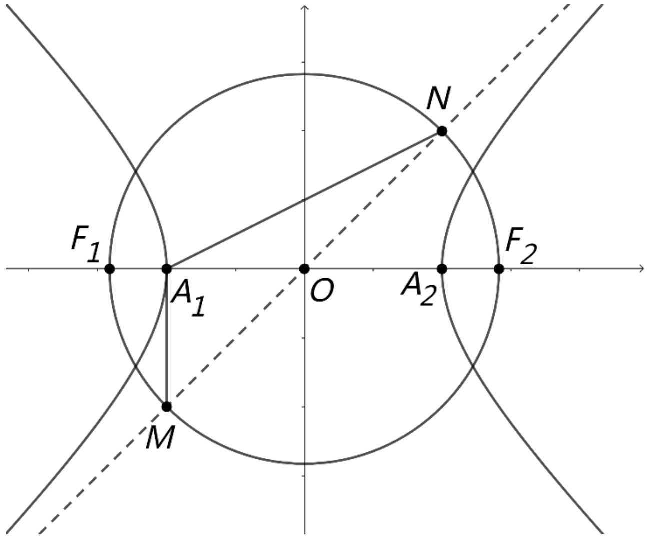
11. 双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0, b>0$）的左、右焦为 F_1、F_2，左、右顶点分别为 A_1、A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M、N 两点，且 $\angle NA_1M=\frac{5\pi}{6}$，则（）

A. $\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$　　　　B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$　　　　D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

解析：已知一个双曲线的标准方程，焦点在 x 轴上，还已知以焦点为直径的

圆，由有对称性可知圆心就是原点（标记为 O），圆 O 与双曲线的一条渐近线交于两点（画个斜率为正的渐近线，由对称性可知两条渐近线的情况相同），还已知一个角的大小，需选出正确的选项。先画出大致图像，基本形状差不多就行。



已知的具体数据只有 $\angle NA_1M=\frac{5\pi}{6}$，先利用双曲线及其渐近线、圆的性质和该数据，尝试求参数 a 和 b，至少能求出 a 与 b 的数量关系，尽可能多地掌握整个图形的更多基本数据后，再分析判断各选项。

设双曲线的半焦距为 c，则 $a^2+b^2=c^2$，圆 O 的方程为 $x^2+y^2=c^2=a^2+b^2$，由双曲线的标准方程可得渐近线 MN 的方程为 $y=\frac{b}{a}x$，（双曲线的渐近线经过中心 O，可知 MN 是圆 O 的一条直径），将渐近线方程代入圆 O 的方程得到关于 x 的方程：$x^2+(\frac{b}{a}x)^2=a^2+b^2$，解得 $x=\pm a$，$y=\frac{b}{a}\cdot\pm a=\pm b$，即点 M、N 的坐标分别为 $M(-a,-b)$，$N(a,b)$，可知 M 在 A_1 正下方，N 在 A_2 正上方，三角形 MA_1A_2 和 NA_1A_2 都是直角三角形。由 $\angle NA_1M=\frac{5\pi}{6}$ 可得 $\angle MA_1A_2=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$，$NA_2=b$，$A_1A_2=2a$，$\tan\angle MA_1A_2=\frac{b}{2a}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{3}a$，双曲线的方程可以表示为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{12a^2}=1$，渐近线方程为 $y=\pm 2\sqrt{3}x$。接下来逐个分析判断各选项。

选项 A，$\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$，由求得的数量关系可得 $\overrightarrow{MA_1}=(0,b)$，$\overrightarrow{MA_2}=(2a,b)$，由余弦定理可得 $\cos\angle A_1MA_2=\frac{0\times 2a+b\cdot b}{\sqrt{b^2}+\sqrt{(2a)^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{4a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{4a^2+(2\sqrt{3}a)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由常用余弦函数的值可知 $\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$，正确，备选。

选项 B，$|MA_1| = 2|MA_2|$，由选项 A 中求得的表达式可得 $|MA_1| = b = 2\sqrt{3}a$，$|MA_2| = \sqrt{(2a)^2 + b^2} = \sqrt{4a^2 + (2\sqrt{3}a)^2} = 4a$，$|MA_1| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|MA_2|$，错误，排除。

选项 C，C 的离心率为 $\sqrt{13}$，由 $b = 2\sqrt{3}a$ 可得 $c = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+(2\sqrt{3}a)^2}}{a} = \sqrt{13}$，正确，备选。

选项 D，当 $a = \sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$，选项 A 中已求得 $\overrightarrow{MA_1} = (0, b)$，$\overrightarrow{MA_2} = (2a, b)$，还可得 $\overrightarrow{NA_1} = (-2a, -b)$，$\overrightarrow{NA_2} = (0, -b)$，$MA_1$ 与 NA_2、MA_2 与 NA_1 分别平行且相等，NA_1MA_2 是平行四边形，其面积等于三角形 A_1NA_2 的 2 倍，而三角形 A_1NA_2 的面积等于底边 A_1A_2 与高（N 的纵坐标）的乘积的一半，当 $a = \sqrt{2}$ 时，$b = 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{6}$，$A_1A_2 = 2a = 2\sqrt{2}$，高为 $b = 2\sqrt{6}$，$S_{NA_1MA_2} = 2S_{NA_1A_2} = 2 \times \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$，正确，备选。

本题选 ACD。

评价：中等或较难，本题需要对双曲线及其渐近线、圆等图形的性质和参数较熟悉，并且需要一定的几何分析能力，本题的情形较特殊和容易分析计算，整体难度不算大。

三、填空题

12. 已知平面向量 $\vec{a} = (x, 1)$，$\vec{b} = (x-1, 2x)$，若 $\vec{a} \perp \vec{a} - \vec{b}$，则 $|\vec{a}| =$.

解析：已知两个向量坐标的表达式，且两个向量的坐标中只有 1 个共同的参数 x，还已知关于这两个向量的一个垂直关系，求其中一个向量的模。可以将垂直关系转化为坐标运算，得到一个方程，解出参数 x，就能求出向量的坐标和模。

由 $\vec{a} \perp \vec{a} - \vec{b}$ 可得 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$，其中 $\vec{a} - \vec{b} = (x - (x-1), 1 - 2x) = (1, 1-2x)$，可得 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = x + 1 - 2x = 0$，解得 $x = 1$，即 $\vec{a} = (1, 1)$，则 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$，本题填 $\sqrt{2}$。

评价：较简单，掌握向量坐标的基本运算和垂直关系等价于数量积为 0 即可。

13. 若 $x = 2$ 是函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0) =$.

解析：已知一个解析式中含参数 a 的函数，还已知 $x = 2$ 是一个极值点，求当 $x = 0$ 时的函数值，需要求出解析式中的 a，需要利用 $x = 2$ 是一个极值点的特点，极值点是函数在该点左右两侧的函数值不同的点，可以利用导数求解。函数

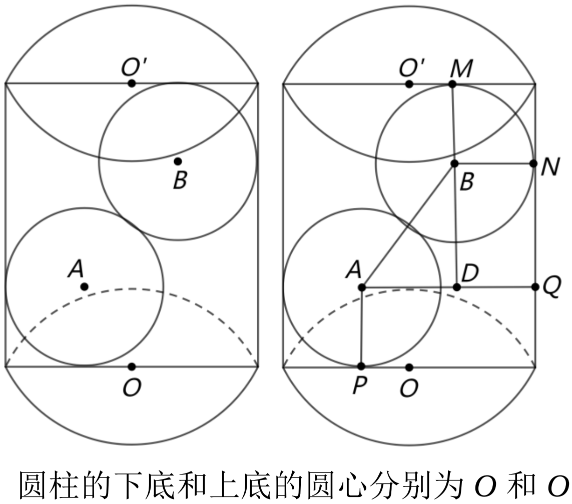
解析式写成了 3 个一次式相乘的形式，既可以先把它展开成一般的多项式再求导，也可以利用函数相乘的导数运算法则求导数，虽然后者的计算量稍小一点，但个人更喜欢化成一般形式：$f(x)=(x^2-3x+2)(x-a)=x^3-ax^2-3x^2+3ax+2x-2a=x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a$，导函数为 $f'(x)=3x^2-2(a+3)x+(3a+2)$，极值点的导函数为 0，可得 $f'(2)=3\times2^2-2(a+3)\times2+(3a+2)=0$，解方程 $12-4(a+3)+(3a+2)=0$，$a=2$，即 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$，则 $f(0)=-1\times(-2)^2=-4$，本题填−4。

评价：中等，需要掌握函数的极大值点对应导函数为 0，以及基本的导数的求法。

14. 一个底面半径为 4 cm，高为 9 cm 的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为 cm.

解析：已知一个圆柱容器，且该容器的底面半径和高都已知，内有两个半径相等的铁球，求铁球的最大半径。

先画出大致的可能情形，注意到该圆柱的底面半径与高的一半差不多，侧面上看比较接近正方形，高略微高一些，如下图左所示，两个球应该斜挨着架起来，可以让半径尽可能大，此时两个球分别与圆柱的上下底面、侧面相切。如果球更大，那么就会超过上下底面，或者超出侧面。



如上图右所示，圆柱的下底和上底的圆心分别为 *O* 和 *O'*，小球的球心分别为 *A* 和 *B*，球 *B* 与圆柱上底面相切于点 *M*、与侧面相切于点 *N*，球 *A* 与圆柱下底面相切于点 *P*，从球心 *A* 做 *BN* 的平行线与侧面相交于点 *Q*，则 *AQBN* 共平面，从 *B* 向 *AQ* 引垂线，垂足为 *D*。设球 *A* 与球 *B* 的半径都为 *r*，单位都是 cm，计算过程中不需要专门考虑。

由图中的几何关系可知，$AP=BM=BN=r$，$AB=2r$，把 AQ 延伸一个 r 后等于底面圆的直径，所以 AQ 等于底面圆的直径减去球的半径 $AQ=2\times4-r=8-r$，可以看出：AD 等于底面圆的直径减去 2 个球的半径

$AQ=2\times4-2r=8-2r$，BD 等于圆柱的高减去 2 个球半径 $BD=9-2r$，对直角三角形 ABD 使用勾股定理：$AB^2=AD^2+BD^2$，代入相应长度的表达式得 $(2r)^2=(8-2r)^2+(9-2r)^2$，解方程：$4r^2=64-32r+4r^2+81-36r+4r^2$，$4r^2-68r+145=0$，$r=\dfrac{68\pm\sqrt{68^2-4\times4\times145}}{8}=\dfrac{68\pm4\sqrt{17^2-145}}{8}=\dfrac{17\pm12}{2}$，$r=14.5$ 或 $r=2.5$，前者比圆柱的底面直径和高都大，舍去，$r=2.5$，本题填 2.5。

评价：中等或较难，本题需要较好的空间想象力和空间直觉（或生活经验），能直接想象出满足要求的具体情形，具体的分析和计算并不难。

四、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$（$0<\varphi<\pi$），$f(0)=\dfrac{1}{2}$.

（1）求 φ；

（2）设函数 $g(x)=f(x)+f(x-\dfrac{\pi}{6})$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

解析：已知一个含参数 φ 的余弦函数，还已知一个自变量对应的函数值，求参数的值和由该函数构造的另一个函数的值域和单调区间，利用余弦函数的性质和平移与伸缩变换的规律分析计算即可。

（1）将 $(0,\dfrac{1}{2})$ 代入函数解析式得到方程：$f(0)=\cos(2\times0+\varphi)=\dfrac{1}{2}$，$\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$，因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$。

（2）$f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$，$g(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+\cos[2(x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\pi}{3}]=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+\cos2x$，

利用和角公式展开：$=\cos2x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin2x\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos2x$，

代入相应的三角函数值：$=\dfrac{1}{2}\cos2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\cos2x=\dfrac{3}{2}\cos2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x$，

把两个三角函数化成一个三角函数：$=\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\dfrac{1}{2}\sin2x)=\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos2x-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin2x)=\sqrt{3}\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$，其中 $\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的取值范围为 $[-1,1]$，则 $g(x)$ 的值域为 $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$。

$g(x)=\sqrt{3}\cos(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 是将 $\cos x$ 先水平向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再水平压缩为原

来的$\frac{1}{2}$，再沿竖直拉伸为原来的$\sqrt{3}$， $\cos x$递增区间为$[-\pi+2k\pi, 2k\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$，下同），递减区间为$[2k\pi, \pi+2k\pi]$，水平平移后递增区间变为$[-\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+2k\pi]$，即$[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+2k\pi]$，递减区间变为$[-\frac{\pi}{6}+2k\pi, -\frac{\pi}{6}+\pi+2k\pi]$，即$[-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi]$，水平压缩后递增区间变为$[-\frac{7\pi}{12}+k\pi, -\frac{\pi}{12}+k\pi]$，递减区间变为$[-\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{5\pi}{12}+k\pi]$，竖直拉伸后单调区间不变，综上，$g(x)$的递增区间为$[-\frac{7\pi}{12}+k\pi, -\frac{\pi}{12}+k\pi]$，递减区间为$[-\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{5\pi}{12}+k\pi]$，其中$k\in\mathbf{Z}$。

评价：中等，本题需要熟练掌握三角函数的平移和伸缩变换，将同一弧度的带系数的两个三角函数的和或差化为一个三角函数。

16. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$($a>b>0$)的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

（1）求 C 的方程;

（2）过点$(0,-2)$的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，O 为坐标原点，若$\triangle OAB$的面积为$\sqrt{2}$，求$|AB|$.

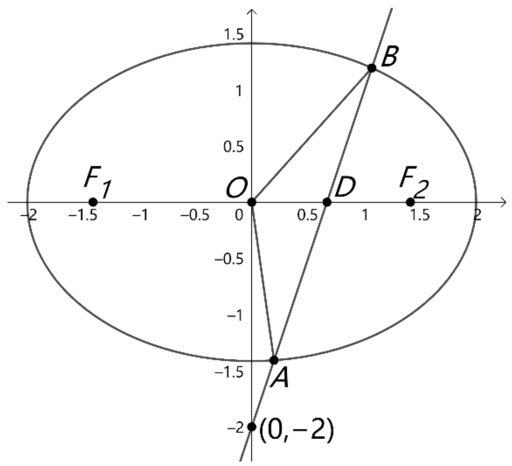
解析：本题已知一个椭圆的含参数的基本方程，由$a>b>0$可知长轴在 x 轴上，还已知离心率和长轴长，这两个数据足以求出椭圆的标准方程，第（2）问稍复杂，做完第（1）问再详细分析。

（1）椭圆的离心率为$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为$2a=4$，可得$a=2$，代入离心率的等式$\frac{\sqrt{2^2-b^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$b=\sqrt{2}$，$C$ 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$。

（2）先画出大致图形，椭圆的半焦距为$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$，左右焦点分别为$F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，在画一条经过点$(0,-2)$的直线，为了方便先让斜率为正（斜率为负时与斜率为正时左右对称），与椭圆的交点为 A，B，如下页图所示。

已知$\triangle OAB$的面积为$\sqrt{2}$，可以设直线 l 的斜率为 k，列出其点斜式方程，再利用三角形的面积列出等式关系，接触斜率 k，如果中间能利用椭圆的性质或定义让计算简化更好，不能的话只要细心计算也能得到结果。

另外，由于点$(0,-2)$在椭圆外，所以不需要考虑直线 l 水平的情况，当 l 竖直的时候，O、A、B 三点共线，无法构成三角形，也不需要考虑。



设 l 的斜率为 k（$k>0$），则其方程为 $y=kx-2$，设 D 为 l 与 x 轴的交点，则 $\triangle OAB$ 可以分为 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OBD$ 两个三角形，底边都是 OD，高分别为 A、B 纵坐标的绝对值，$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAD}+S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}|OD|\cdot|y_A|+\frac{1}{2}|OD|\cdot|y_B|=\frac{1}{2}|OD|(|y_A|+|y_B|)$ $=\frac{1}{2}|OD|\cdot|y_A-y_B|=\frac{k}{2}|OD|\cdot|x_A-x_B|$。

其中 $|OD|$ 为 D 的横坐标的绝对值，将 $y=0$ 代入 l 的方程可得 $0=kx-2$，$x=\frac{2}{k}$，即 $D(\frac{2}{k},0)$，$|OD|=\frac{2}{k}$。

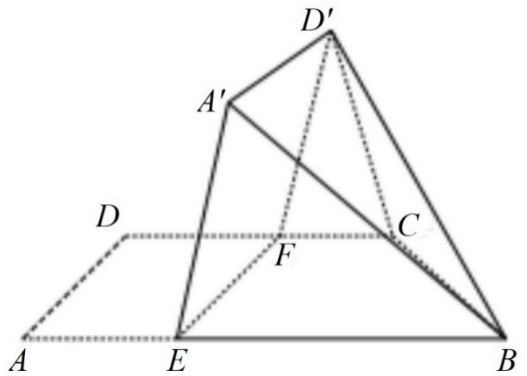
将 l 的方程代入 C 的方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{(kx-2)^2}{2}=1$，化简：$x^2+2(kx-2)^2=4$，$(2k^2+1)x^2-8kx+4=0$，$x=\frac{8k\pm\sqrt{(8k)^2-16(2k^2+1)}}{2(2k^2+1)}=\frac{4k\pm2\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}$，该方程的两个解即为 A、B 的横坐标，代入前面求得的 $\triangle OAB$ 面积的表达式和已知数据可得等式：$\frac{k}{2}\cdot\frac{2}{k}\cdot\left|\frac{4k+2\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}-\frac{4k-2\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}\right|=\sqrt{2}$，解方程：$\left|\frac{4\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}\right|=\sqrt{2}$，$\frac{16(2k^2-1)}{(2k^2+1)^2}=2$，$16k^2-8=(2k^2+1)^2$，$4k^4-12k^2+9=0$，$(2k^2-3)^2=0$，$k^2=\frac{3}{2}$，$k=\frac{\sqrt{6}}{2}$，可得 $|AB|=\sqrt{k^2+1}|x_1-x_2|$，其中 $|x_1-x_2|$ 可以利用刚才表示面积时得到的等式 $\frac{k}{2}\cdot\frac{2}{k}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2}$ 直接得到 $|x_1-x_2|=\sqrt{2}$，则 $|AB|=\sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+1}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$。

评价：中等，本题需要对椭圆的主要参数和性质、直线的方程、交点和距离的求法较熟悉，分析思考的难度和计算量适中。

17. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle DAB = 90°$，F 为 CD 的中点，E 在 AB 上，$EF \parallel AD$，$AB = 3AD$，$CD = 2AD$.将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°.

（1）证明：$A'B \parallel 平面CD'F$；

（2）求平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.



解析：已知 $ABCD$ 是一个四边形，它有一组对边平行，还有一个直角，是个直角梯形，虽然不如矩形“整齐”但也还行。还已知 F 为 CD 的中点，可以得到一组相等关系，E 在 AB 上且 $EF \parallel AD$，那么 $AEFD$ 为矩形。还已知 $AB = 3AD$，$CD = 2AD$，知道了四边形 $ABCD$ 中的几条边的长度比例，可以用一个参数表示部分边长。

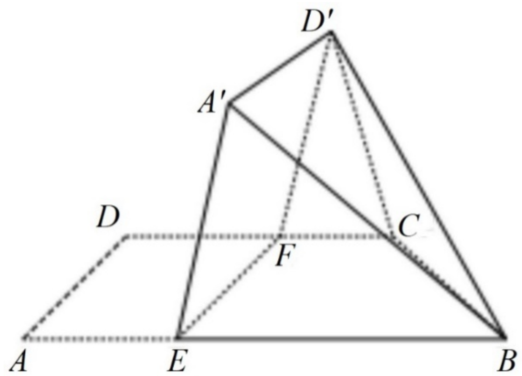
将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°，这个翻折产生了立体几何关系，翻折后的平面 $EFD'A'$ 也是矩形，各边长与翻折前的边长相等，另外还知道了一个二面角。

以上是题干的基本信息，接下来开始解答各小问。

（1）证明：$A'B \parallel 平面CD'F$，要证明直线与平面平行，通常考虑证明直线与平面内的某条直线平行即可，但 $A'B$ 是翻折后的连线，不太容易找到与它平行的直线，那么可以尝试证明 $A'B$ 所在的某个平面与 $平面CD'F$ 平行，也能得到 $A'B \parallel 平面CD'F$ 的结论，从图中观察平面 $A'BE$ 可能与 $平面CD'F$ 平行，就以此为切入点。

因为 $AB \parallel CD$，$EF \parallel AD$，$\angle DAB = 90°$，所以 $EFDA$ 为矩形，又因为将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，所以 $EFD'A'$ 也是矩形，所以 $A'E \parallel D'F$，所以 $A'E \parallel 平面CD'F$。由 $AB \parallel CD$ 还可得 $AB \parallel 平面CD'F$，所以 $平面A'EB \parallel 平面CD'F$，所以 $A'B \parallel 平面CD'F$。

（2）求平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值，先仔细观察题图，没发现很方便的欧式几何方法，好在已知条件中有较多的平行、垂直、边长比例、角度数据，可以建立坐标系计算，为方便观察把题图再放一下。



以 F 为原点，$\overrightarrow{FE}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{FC}$ 为 y 轴正方向，垂直于平面 $ABCD$ 竖直向上为 z 轴正方向，FC 的长度为单位“1”建立空间直角坐标系，因为 F 为 CD 的中点，所以 $FD=FC=1$，因为 $CD=2AD$，所以 $AD=\frac{1}{2}CD=1$，因为 $AB=3AD$，所以 $AB=3$，已证 $AEFD$ 为矩形，所以 $AD=AE=EF=1$，所以 $BE=2$，因为 $EFD'A'$ 为 $EFD'A'$ 翻折得到，所以 $A'D'=A'E=D'F=1$，利用上述数据，结合 $EFD'A'$ 与 $EFCB$ 的二面角为 60°，可得图中各点坐标为 $F(0,0,0)$，$E(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,-1,0)$，$A(1,-1,0)$，$B(1,2,0)$，$D'(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$A'(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$。

设平面 BCD' 的法向量为 $\vec{n}_1=(a,b,1)$，法向量与平面内的两个相交向量 $\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CD'}=(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 垂直：$\begin{cases} a+b=0 \\ -\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \end{cases}$，解得 $\vec{n}_1=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$。

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\vec{n}_2=(p,q,1)$，法向量与平面内的两个相交向量 $\overrightarrow{FE}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{FD'}=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 垂直：$\begin{cases} p=0 \\ \frac{1}{2}q+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \end{cases}$，解得 $\vec{n}_2=(0,-\sqrt{3},1)$。

设平面 BCD' 与 $EFD'A'$ 的二面角为 θ，由余弦定理可得 $\left|\cos<\vec{n}_1,\vec{n}_2>\right|=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}$

$$=\left|\frac{-\sqrt{3}\times 0+\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+1\times 1}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}^2+1^2}\sqrt{0^2+(-\sqrt{3})^2+1^2}}\right|=\frac{\sqrt{7}}{7}$$，则 $\sin<\vec{n}_1,\vec{n}_2>=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{7}}{7})^2}=\frac{\sqrt{42}}{7}$。

评价：中等或较难，本题的图形虽然看起来较复杂，但包含多组平行、垂直、相等关系，如果有较好的空间想象力，可以很容易找到第（1）问的思路，第（2）问用建立坐标系、求平面的法向量、利用余弦定理的常规思路即可，没有特殊的难点。

18.已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$， $k\in(0,\frac{1}{3})$.

（1）证明： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的极值点和唯一的零点；

（2）设 x_1，x_2 分别为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极值点和零点.

（i）设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，证明： $g(t)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；

（ii）比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明.

解析：已知一个有对数和多项式组成的函数，解析式中还有参数并限定了参数的范围，没有太多可分析的，直接解答各小问。

（1）要证明关于较复杂的函数的极值点和零点的问题，优先考虑用导数，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-3kx^2=\frac{-3kx^3-3kx^2+x^2+x-x-1+1}{x+1}=-\frac{3kx^2(x+1-\frac{1}{3k})}{x+1}$，因为 $k\in(0,\frac{1}{3})$，所以 $0<\frac{1}{3k}-1<+\infty$，当 $x\in(0,\frac{1}{3k}-1)$ 时 $f'(x)>0$， $f(x)$ 递增，当 $x\in(\frac{1}{3k}-1,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，当 $x=\frac{1}{3k}-1$ 时 $f'(x)=0$，为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的极值点。

$f(0)=\ln(1+0)-0+\frac{1}{2}0^2-k0^3=0$，此后 $f(x)$ 递增， $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{3k}-1)$ 都大于 0，直到 $x=\frac{1}{3k}-1$ 时开始递减，当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to-\infty$，因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点。

（2）极值点为 $x=\frac{1}{3k}-1$ 的点，即 $x_1=\frac{1}{3k}-1$，零点为 $\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3=0$ 的点，先尝试化简下： $\ln(1+x)=kx^3-\frac{1}{2}x^2+x$， $\ln(1+x)=x(kx^2-\frac{1}{2}x+1)$，再继续化简或变形就要比较麻烦了，先继续解答题目。

（i）设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，证明：$g(t)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减。只涉及 x_1，刚才已分析得知 $x_1=\frac{1}{3k}-1$，先化简 $g(t)$ 的解析式：$g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)=$

$$=[\ln(1+x_1+t)-x_1-t+\frac{1}{2}(x_1+t)^2-k(x_1+t)^3]-[\ln(1+x_1-t)-x_1+t+\frac{1}{2}(x_1-t)^2-k(x_1-t)^3]$$

$$=\ln(1+x_1+t)-\ln(1+x_1-t)-2t+2x_1t-6kx_1^2t-2kt^3=\ln\frac{1+x_1+t}{1+x_1-t}-2t+2x_1t-6kx_1^2t-2kt^3,$$

即 $g(t)=\ln\frac{1+x_1+t}{1+x_1-t}-2t+2x_1t-6kx_1^2t-2kt^3$， 再代入 $x_1=\frac{1}{3k}-1$：

$$g(t)=\ln\frac{1+\frac{1}{3k}-1+t}{1+\frac{1}{3k}-1-t}-2t+2(\frac{1}{3k}-1)t-6k(\frac{1}{3k}-1)^2t-2kt^3$$

$$=\ln\frac{\frac{1}{3k}+t}{\frac{1}{3k}-t}-2t+\frac{2}{3k}t-2t-\frac{2}{3k}t+4t-6kt-2kt^3$$

$$=\ln\frac{1+3kt}{1-3kt}-6kt-2kt^3$$

要证明复杂函数 $g(t)$ 的单调性，还是利用导数，为了方便求导，把前边的对数拆开成减法 $g(t)=\ln(1+3kt)-\ln(1-3kt)-6kt-2kt^3$ 再求导：$g'(t)=\frac{3k}{1+3kt}-\frac{-3k}{1-3kt}$ $-6k-6kt^2=\frac{6k}{(1+3kt)(1-3kt)}-6k-6kt^2=6k\frac{1-(1-9k^2t^2)(t^2+1)}{(1+3kt)(1-3kt)}=6kt^2\frac{9k^2t^2+9k^2-1}{(1+3kt)(1-3kt)}$，

对于区间 $(0,x_1)$，即 $(0,\frac{1}{3k}-1)$，及 $k\in(0,\frac{1}{3})$，其中 $1-3kt>1-3k(\frac{1}{3k}-1)=3k>0$，$1+3kt>0$，$6kt^2>0$，$9k^2t^2+9k^2-1<9k^2(\frac{1}{3k}-1)^2+9k^2-1=18k^2-6k=6k(3k-1)$，其中 $6k>0$，$3k-1<3\times\frac{1}{3}-1<0$，所以 $9k^2t^2+9k^2-1<0$，所以 $g'(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 小于 0，$g(t)$ 在该区间单调递减。

（ii）比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明。其中 $2x_1$ 易求得，为 $2x_1=\frac{2}{3k}-2$，刚才分析了 x_2 需要满足等式 $\ln(1+x_2)=kx_3^2-\frac{1}{2}x_2^2+x_2$，利用该等式难以得到 x_2 的值或大致范围，换个思路，第（1）问已经证明了 $f(x)$ 在区间 $(x_1,+\infty)$ 递减，且 $2x_1$ 和 x_2 都属于该区间，那么 $f(2x_1)$ 与 $f(x_2)=0$ 的大小关系跟 $2x_1$ 与 x_2 的大小关系相反，能得知 $f(2x_1)$ 的正负号就行。

第（i）问中证明了 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，由 $x>0$ 可得 $g(0)>g(x_1)$，即 $f(x_1)-f(x_1)>f(2x_1)-f(0)$，$f(2x_1)<f(0)=0$，所以 $f(2x_1)<f(x_2)$，$2x_1>x_2$。

评价：较难或很难，需要全面且深入地掌握导数的求法和应用、基本初等函数的单调性和连续性，本题进行化简的计算量较大，并且需要能敏锐地发现最后小问可以利用前面小问的结论。

19. 甲、乙两位同学进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分。设每个球甲获胜的概率为 $p(\frac{1}{2}<p<1)$，乙获胜的概率为 q， $p+q=1$，且各球的胜负相互独立，对正整数 $k\geq 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

（1）求 p_3，p_4（用 p 表示）；

（2）若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p；

（3）证明：对任意正整数 m， $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

解析：已知两位同学练习乒乓球，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分，还分别给出了甲、乙获胜的概率的参数，并明确了是独立重复试验，最后定义了两个变量，分别为打完几次球后甲比乙多得 2 分和乙比甲多得 2 分的概率。第（1）和第（2）小问中打球的场次较少，先解答这两个小问同时摸索规律。

（1）p_3 为打完 3 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，甲比乙至少多得 2 分只有甲 3 胜一种情况，概率为 p^3，

p_4 为打完 4 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，甲比乙至少多得 2 分可分为 2 种情况：甲 4 胜，甲 3 胜 1 负，其中甲 4 胜的概率为 p^4，甲 3 胜 1 负的概率为 $\mathbf{C}_4^3 p^3(1-p)=4p^3(1-p)$，综上， $p_4=p^4+4p^3(1-p)=4p^3-3p^4$。

（2）同理， $q_3=q^3=(1-p)^3$， $q_4=4q^3-3q^4=4(1-p)^3-3(1-p)^4$，代入 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$ 得：$\frac{4p^3-3p^4-p^3}{4(1-p)^3-3(1-p)^4-(1-p)^3}=4$，解方程：$\frac{3p^3-3p^4}{3(1-p)^3-3(1-p)^4}=4$，$\frac{p^3(1-p)}{(1-p)^3[1-(1-p)]}=4$， $\frac{p^2}{(1-p)^2}=4$，已知 $\frac{1}{2}<p<1$，对等式两边同时取正的平方根： $\frac{p}{1-p}=2$，解得 $p=\frac{2}{3}$。

（3）要证明对任意正整数 m， $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$，可以分别证明两个不等式： $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$ 和 $p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$，先尝试求出用 p 表示各元素的表达式 p_n-q_n，

当 n 为偶数时，设 $n=2m$，甲比乙至少多得 2 分有下列情况：

情况 1：甲全胜，概率为 $\mathbf{C}_{2m}^0 p^{2m}$，

情况 2，甲胜 $2m-1$ 负 1， $2m-1-1>2$，概率为 $\mathbf{C}_{2m}^1 p^{2m-1}(1-p)$，

情况 3，甲胜 $2m-2$ 负 2， $2m-2-2>2$，概率为 $\mathbf{C}_{2m}^2 p^{2m-2}(1-p)^2$

……

情况 $m-1$，甲胜 $2m-(m-2)=m+2$ 负 $m-2$， $(m+2)-(m-2)=4$，概率为

$\mathbf{C}_{2m}^{m-2}p^{m+2}(1-p)^{m-2}$，

情况 m，甲胜 $2m-(m-1)=m+1$ 负 $m-1$，$(m+1)-(m-1)=2$，概率为 $\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}$，

不包括情况 $m+1$，甲胜 $2m-m=m$ 负 m，$m-m=0$。

综上，可得：

$$p_{2m}=\mathbf{C}_{2m}^{0}p^{2m}+\mathbf{C}_{2m}^{1}p^{2m-1}(1-p)+\mathbf{C}_{2m}^{2}p^{2m-2}(1-p)^2+\cdots\cdots+\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}$$

接下来再打 1 球，其中情况$1\sim m-1$，无论甲是否取胜，都仍满足甲比乙至少多得 2 分，只有情况 m，必须甲胜才能满足，如果甲负就不满足了，而原本不满足的情况$m+1$，即使下一场甲胜也不满足，所以：

$$\begin{aligned}p_{2m+1}&=\mathbf{C}_{2m}^{0}p^{2m}+\mathbf{C}_{2m}^{1}p^{2m-1}(1-p)+\mathbf{C}_{2m}^{2}p^{2m-2}(1-p)^2+\cdots\cdots+\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}\cdot p\\&=\mathbf{C}_{2m}^{0}p^{2m}+\mathbf{C}_{2m}^{1}p^{2m-1}(1-p)+\mathbf{C}_{2m}^{2}p^{2m-2}(1-p)^2+\cdots\cdots+\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}\\&\quad-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}(1-p)\\&=p_{2m}-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m}\end{aligned}$$

$$p_{2m+1}-p_{2m}=-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m}$$

同理可得：

$$q_{2m}=\mathbf{C}_{2m}^{0}(1-p)^{2m}+\mathbf{C}_{2m}^{1}(1-p)^{2m-1}p+\mathbf{C}_{2m}^{2}(1-p)^{2m-2}p^2+\cdots\cdots+\mathbf{C}_{2m}^{m-1}(1-p)^{m+1}p^{m-1}$$

$$q_{2m+1}=q_{2m}-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}(1-p)^{m+1}p^{m}$$

$$q_{2m+1}-q_{2m}=-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}(1-p)^{m+1}p^{m}$$

可得 $(p_{2m+1}-p_{2m})-(q_{2m+1}-q_{2m})=-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m}-[\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m}(1-p)^{m+1}]=$ $\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m}(1-p)^{m}(1-p-p)=\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m}(1-p)^{m}(1-2p)$，已知$\dfrac{1}{2}<p<1$，$1-2p<0$，其他因子都大于 0,所以$(p_{2m+1}-p_{2m})-(q_{2m+1}-q_{2m})<0$,可得 $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$。

利用相同的思路，打完 $2m$ 球后再打 2 球，其中情况$1\sim m-1$，即使甲 2 场全负，都仍满足甲比乙至少多得 2 分，只有情况 m，必须甲 2 场全胜或 1 胜 1 负才能满足，如果甲负就不满足了，而原本不满足的情况$m+1$，如果接下来甲 2 场全胜也能满足，所以：

$$\begin{aligned}p_{2m+2}&=\mathbf{C}_{2m}^{0}p^{2m}+\mathbf{C}_{2m}^{1}p^{2m-1}(1-p)+\mathbf{C}_{2m}^{2}p^{2m-2}(1-p)^2+\cdots\cdots\\&\quad+\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}\cdot[\mathbf{C}_{2}^{2}p^2+\mathbf{C}_{2}^{1}p(1-p)]+\mathbf{C}_{2m}^{m}p^{m}(1-p)^{m}\cdot\mathbf{C}_{2}^{2}p^2\\&=p_{2m}-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}\mathbf{C}_{2}^{0}(1-p)^2+\mathbf{C}_{2m}^{m}p^{m}(1-p)^{m}\cdot\mathbf{C}_{2}^{2}p^2\\&=p_{2m}-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m+2}+\mathbf{C}_{2m}^{m}p^{m+2}(1-p)^{m}\end{aligned}$$

$$p_{2m+2}-p_{2m}=-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m+2}+\mathbf{C}_{2m}^{m}p^{m+2}(1-p)^{m}$$

同理可得：$q_{2m+2}-q_{2m}=-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}(1-p)^{m+1}p^{m+2}+\mathbf{C}_{2m}^{m}(1-p)^{m+2}p^{m}$，

$$
\begin{aligned}
&(p_{2m+2}-p_{2m})-(q_{2m+2}-q_{2m})\\
&=[-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m+2}+\mathbf{C}_{2m}^{m}p^{m+2}(1-p)^{m}]-[-\mathbf{C}_{2m}^{m-1}(1-p)^{m+1}p^{m+2}+\mathbf{C}_{2m}^{m}(1-p)^{m+2}p^{m}]\\
&=\mathbf{C}_{2m}^{m-1}[(1-p)^{m+1}p^{m+2}-p^{m+1}(1-p)^{m+2}]+\mathbf{C}_{2m}^{m}[p^{m+2}(1-p)^{m}-(1-p)^{m+2}p^{m}]\\
&=\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m+1}[p-(1-p)]+\mathbf{C}_{2m}^{m}p^{m}(1-p)^{m}(p^{2}-(1-p)^{2}]\\
&=\mathbf{C}_{2m}^{m-1}p^{m+1}(1-p)^{m+1}(2p-1)+\mathbf{C}_{2m}^{m}p^{m}(1-p)^{m}(2p-1)
\end{aligned}
$$

求和的两项中各因子都大于 0，所以$(p_{2m+2}-p_{2m})-(q_{2m+2}-q_{2m})>0$，可得$p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$。

综上即得证$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$。

评价：较难或很难，本题前两小问较简单，最后问的分析和化简较复杂，但只是化简和找规律的过程复杂，并没有难以相出思路的艰难。实际上作者在答题时，尝试了分别求p_n-q_n的表达式并化简（化简失败），又尝试了利用第二问的中间结论$\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\dfrac{p^2}{(1-p)^2}$找规律（找规律失败）等思路，又尝试了上述思路后终于完成。