矩阵

1.矩阵的概念

矩阵表示

矩阵是一个二维数组，具有 m 行和 n 列。它的元素可以通过两个索引 i 和 j 来访问，表示第 i 行第 j 列的元素。

例如，一个 3×3 的矩阵 A 可以表示为：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

剩余系映射

剩余系是模运算的结果集。例如，对于模 n 的运算，剩余系包括 0 到 $n-1$ 之间的所有整数。

如果我们将矩阵的元素映射到一个剩余系中，可以表示为：

$$a_{ij} \equiv f(i,j) \pmod{n}$$

这里的 $f(i,j)$ 是一个函数，将行 i 和列 j 映射到一个整数。

具体示例

假设我们有一个 3×3 的矩阵，其中每个元素都是通过行和列的索引映射到模 3 的剩余系。

$$B_{mat} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

在这个矩阵中，每个元素 a_{ij}有角标

$$(i,j)$$

与角标之和

$$k = i + j$$

一个有序集合

$$A = \{0,1,2,1,2,0,2,0,1\}$$

将有序集合A中的每一个元素都映射到B_{mat}中

$$A_k = a_{(k \div 3)(k\%3)}$$

例如：

$$A_0 = a_{00}$$
$$A_1 = a_{01}$$
$$A_2 = a_{02}$$
$$A_3 = a_{10}$$

抽象到一般情况

首先我们有一个有着N个元素集合

$$A = \{A_0, A_1, A_2, A_3.....\}$$

把这个集合映射到 $rows \times cols$ 的矩阵，其中$N = rows \times cols$

每个元素都是通过行和列的索引映射到模 $cols$ 的剩余系。

$$B_{mat} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

在这个矩阵中，每个元素 a_{ij}有角标

$$(i, j)$$

与角标之和

$$k = i + j$$

将有序集合A中的每一个元素都映射到B_{mat}中

$$A_k = a_{(k \div cols)(k\%cols)}$$

找到 **在哪一个剩余系**

$$k \div cols$$

找到 **在这个剩余系中的位置**

$$k \% cols$$

代码示例

```java
public class Test {
    public static void main(String[] args) {
        int[] vector = new int[]{0, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 2, 3, 4};

        // 新建一个4x3的矩阵
        int rows = 4;
        int cols = 3;
        int[][] matrix = new int[rows][cols];

        for (int i = 0; i < vector.length; i++) {
            matrix[i / cols][i % cols] = vector[i];
        }

        // 打印这个4x3矩阵
        System.out.println("Original 4x3 Matrix:");
        for (int i = 0; i < matrix.length; i++) {
            for (int j = 0; j < matrix[i].length; j++) {
                System.out.print(matrix[i][j] + " ");
            }
            System.out.println();
        }

        // 将4x3矩阵转化为3x4矩阵
        int newRows = 3;
        int newCols = 4;
        int[][] nmatrix = new int[newRows][newCols];

        for (int i = 0; i < vector.length; i++) {
            nmatrix[i / newCols][i % newCols] = matrix[i / cols][i % cols];
        }

        // 打印这个3x4矩阵
        System.out.println("Transformed 3x4 Matrix:");
        for (int i = 0; i < nmatrix.length; i++) {
            for (int j = 0; j < nmatrix[i].length; j++) {
                System.out.print(nmatrix[i][j] + " ");
            }
            System.out.println();
        }
    }
```

```
}
```

2. 矩阵的叉乘

2.1 基本的矩阵叉乘

我们有两个矩阵A和B

$$A = m \times k$$

$$B = k \times n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

矩阵的乘积C=AXB

$$C = m \times n$$

矩阵C的每个元素都由公式所得

$$C[i][j] = \sum_{t=1}^{k} A[i][t] \times B[t][j]$$

矩阵C一共有m X n个元素，因此需要计算 m X n 次

Algorithm 1 Matrix Multiplication

Require: Matrices A of size $m \times k$ and B of size $k \times n$

Ensure: Matrix C of size $m \times p$ such that $C = A \times B$

Initialize C as an $m \times p$ matrix with all elements set to 0
for $i = 0$ to m **do**
  for $j = 0$ to n **do**
    for $t = 0$ to k **do**

$$C[i][j] = A[i][k] \times B[k][j]$$

    end for
  end for
end for

算法复杂度计算

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + k \\ &= T(n-2) + k + k \\ &= \underbrace{k + k + k + \cdots + k}_{m \times n} \\ &= m \times n \times k = O(n^3) \end{aligned}$$

2.2 基于分治思想的叉乘计算

假设A,B,C都是 n X n 大小的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}$$

A,B,C都可以分割为四个子矩阵

以A矩阵为例

$$a_{ij} = \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

对于矩阵C

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix} = A \times B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}$$

$$c_{00} = a_{00} \times b_{00} + a_{01} \times b_{10}$$

$$c_{01} = a_{00} \times b_{01} + a_{01} \times b_{11}$$

$$c_{10} = a_{10} \times b_{00} + a_{11} \times b_{10}$$

$$c_{11} = a_{10} \times b_{01} + a_{11} \times b_{11}$$

矩阵C的每一个子矩阵都是由A和B的子矩阵叉乘而来，进而得到问题的递推关系式

$$T(n) = \begin{cases} 8 \times T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2) & ,n \geq 2 \\ \Theta(1) & ,n = 1 \end{cases}$$

展开递归关系式

$$T(n) = 8 \times T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$$
$$T(\frac{n}{2}) = 8 \times T(\frac{n}{2^2}) + \Theta(\frac{n^2}{2^2})$$

识别模式

$$T(\frac{n}{2^k}) = 8 \times T(\frac{n}{2^{k+1}}) + \Theta(\frac{n^2}{2^{k+1}})$$

当递归终止时

$$\frac{n}{2^k} = 1 \rightarrow k = \log n$$

带入计算

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^2 + 2n^2 + 2^2n^2 + \cdots + 2^{logn} \times n^2 \\
&= n^2 \times (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{logn}) \\
&= n^2 \times \frac{1 - 2^{logn}}{1 - 2} \\
&= n^2 \times (2^{logn} - 1) \\
&= n^2 \times 2^{\log n} - n^2 \\
&= n^2 \times n^{\log_2 2} - n^2 \\
&= n^3 - n^2
\end{aligned}
$$

得到结论

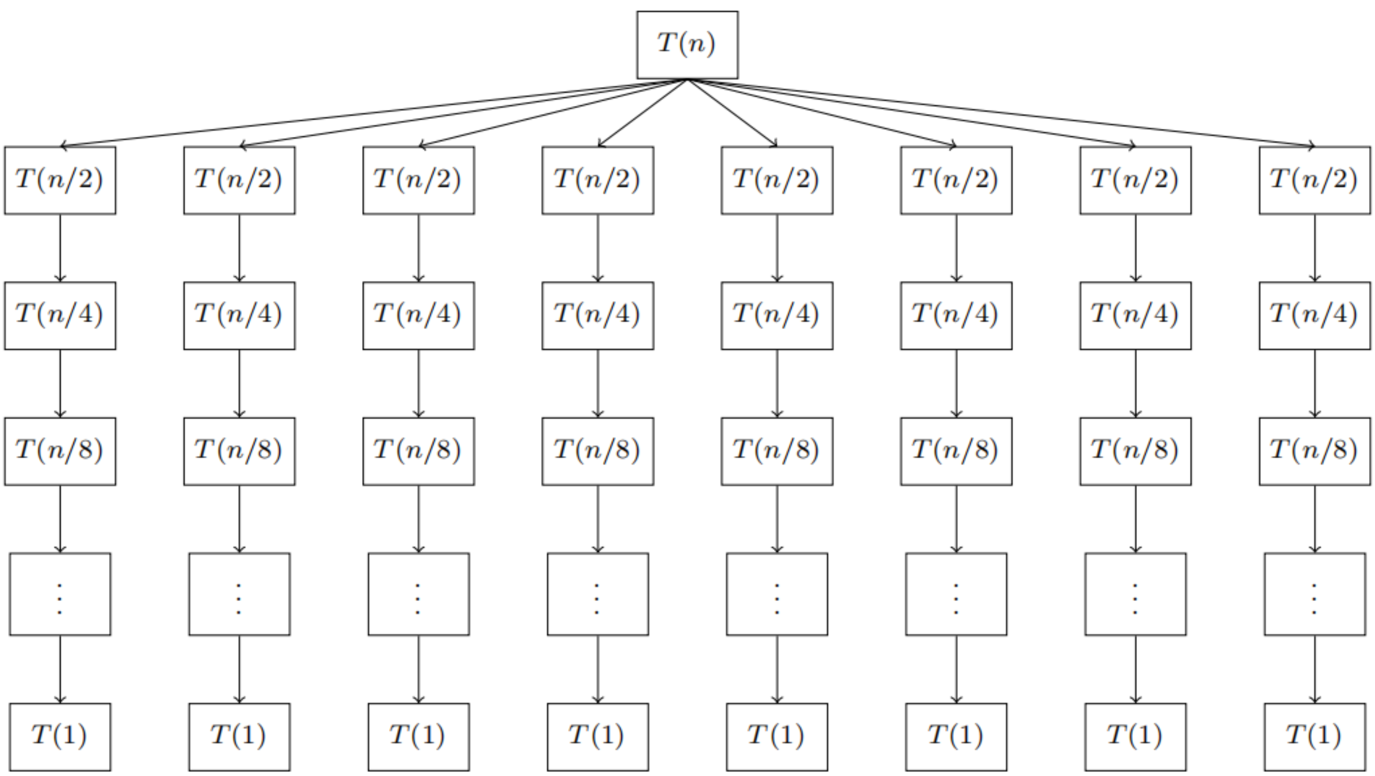
$$T(n) = \Theta(n^3)$$

虽然时间复杂度是相同的，但是可以看出分治算法的矩阵乘法要比普通的算法快

2.3 Strassen算法

Strassen算法同样是分治思想的算法，只是对将递归的规模进行了优化

基于分治思想的叉乘计算的递归树



这里可以看见树的每层都有8个节点，递归深度是logn

如果进一步减小递归树的节点数量就可以将时间复杂度降低

观察递归树节点数量的来源

对于矩阵C

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix} = A \times B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix}$$

$$c_{00} = a_{00} \times b_{00} + a_{01} \times b_{10}$$

$$c_{01} = a_{00} \times b_{01} + a_{01} \times b_{11}$$

$$c_{10} = a_{10} \times b_{00} + a_{11} \times b_{10}$$

$$c_{11} = a_{10} \times b_{01} + a_{11} \times b_{11}$$

观察到每一次调用乘积都会增加一个节点，只要能减少调用乘积的次数就可以减少节点的数量

为了减少乘法次数，Strassen算法引入了七个辅助矩阵 M：

$$M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$

$$M_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$

$$M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$

$$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$

$$M_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$

$$M_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$$

$$M_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

。

组合结果矩阵

利用这七个辅助矩阵，结果矩阵 C 的各个子矩阵可以表示为：

$$C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

$$C_{12} = M_3 + M_5$$

$$C_{21} = M_2 + M_4$$

$$C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$$

- [x] 推导过程