Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Numeryczne", Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz

Projekt A	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in (-\infty, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D \tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D\tau}\right)$, gdzie $\tau << t_{max}$, oraz

warunki brzegowe $U(-\infty, t) = 0$, $U(+\infty, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać transport dyfuzyjny, w ośrodku nieskończonym, substancji o współczynniku dyfuzji D, początkowo zlokalizowanej w pobliżu płaszczyzny $x = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(\tau + t)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(\tau + t)}\right]$.

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[-a, a]$, gdzie $a \geq 6\sqrt{D(\tau + t_{max})}$.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:

$t_{max} = 2$, $\tau = 0.1$, $D = 1$.

Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Numeryczne", Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz

Projekt B	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in [0, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = 1$, oraz

warunki brzegowe $U(0, t) = 0$, $U(+\infty, t) = 1$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w pręcie pół-nieskończonym, o współczynniku transportu ciepła D, po raptownym obniżeniu temperatury na jednym końcu pręta w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$, gdzie erf($z$) jest tzw. funkcją błędu:

$$\mathrm{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)\,dw\,.$$

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[0, a]$, gdzie $a \geq 6\sqrt{Dt_{max}}$. Do obliczenia funkcji erf(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:

$t_{max} = 2$, $D = 1$.

Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Numeryczne", Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz

Projekt C	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in [0, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = 0$, oraz

warunki brzegowe $U(0,t) = 1$, $U(+\infty, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w pręcie pół-nieskończonym, o współczynniku transportu ciepła D, po raptownym podwyższeniu temperatury na jednym końcu pręta w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$, gdzie erfc(z) = 1 – erf(z), a erf(z) jest tzw. funkcją błędu: $\mathrm{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)\,dw$.

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[0, a]$, gdzie $a \geq 6\sqrt{Dt_{max}}$. Do obliczenia funkcji erf(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.
(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).
(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:
$t_{max} = 2$, $D = 1$.

Laboratorium komputerowe z przedmiotu “Metody Numeryczne”, Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz

Projekt D	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right]$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in [r, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = 1$, oraz

warunki brzegowe $U(r,t) = 0$, $U(+\infty, t) = 1$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w ośrodku wokół kuli o promieniu r, przy współczynniku transportu ciepła D, po raptownym obniżeniu temperatury kuli w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = 1 - \frac{r}{x}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x-r}{2\sqrt{Dt}}\right)$, gdzie erfc(z) = 1 – erf(z), a erf(z) jest tzw. funkcją błędu: $\mathrm{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)\,dw$.

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[r, r + a]$, a drugi warunek brzegowy zastąpić warunkiem $U(r+a,t) = 1 - \frac{r}{r+a}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{Dt}}\right)$. Do obliczenia funkcji erfc(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:

$t_{max} = 2$, $r = 1$, $a = 10$, $D = 1$.

Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Numeryczne", Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz

Projekt E	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in (-\infty, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = \begin{cases} 1 \; dla \; x < 0 \\ 0 \; dla \; x \geq 0 \end{cases}$, oraz

warunki brzegowe $U(-\infty, t) = 1$, $U(+\infty, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w ośrodku nieskończonym o współczynniku transportu ciepła D, po raptownym zetknięciu dwóch połówek ośrodka o różnej temperaturze, w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$, gdzie erfc($z$) = 1 – erf($z$), a erf($z$) jest tzw. funkcją błędu: $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)\,dw$.

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[-a, a]$, gdzie $a \geq 6\sqrt{Dt_{max}}$. Do obliczenia funkcji erfc(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:

$t_{max} = 2$, $D = 1$.

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in (-\infty, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = \begin{cases} 0 \; dla \; x < 0 \\ \exp(-x/b) \; dla \; x \geq 0 \end{cases}$, gdzie $b > 0$, oraz

warunki brzegowe $U(-\infty, t) = 0$, $U(+\infty, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w ośrodku nieskończonym o współczynniku transportu ciepła D, po raptownym zetknięciu dwóch połówek ośrodka o różnych rozkładach temperatur, w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{Dt}{b^2} - \frac{x}{b}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{2Dt/b - x}{2\sqrt{Dt}}\right)$, gdzie

erfc(z) = 1 – erf(z), a erf(z) jest tzw. funkcją błędu: $\mathrm{erf}\,(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)\,dw$.

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[-a, a]$, gdzie $a \geq 6\sqrt{Dt_{max}}$. Do obliczenia funkcji erfc(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.
(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).
(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:
$t_{max} = 1$, $b = 0.1$, $D = 1$.

Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Numeryczne", Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz	
Projekt G	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in (-\infty, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = \begin{cases} 1 \; dla \; |x| < b \\ 0 \; dla \; |x| \geq b \end{cases}$, oraz

warunki brzegowe $U(-\infty, t) = 0$, $U(+\infty, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w ośrodku nieskończonym o współczynniku transportu ciepła D, po raptownym zetknięciu trzech części ośrodka o różnej temperaturze (ogrzanej warstwy o grubości $2b$, oraz zimnych zewnętrznych pół-nieskończonych obszarów), w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x+b}{2\sqrt{Dt}}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x-b}{2\sqrt{Dt}}\right)$, gdzie erf($z$) jest tzw. funkcją błędu: $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-w^2)\,dw$.

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[-a, a]$, gdzie $a \geq b + 6\sqrt{Dt_{max}}$. Do obliczenia funkcji erf(z) z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu **double** należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:

$t_{max} = 2$, $b = 1$, $D = 1$.

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in [0, 1]$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = \sin(\pi x)$, oraz

warunki brzegowe $U(0,t) = 0$, $U(1,t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać ucieczkę, wskutek transportu dyfuzyjnego, substancji o współczynniku dyfuzji D, początkowo nierównomiernie rozłożonej w membranie o grubości 1 i przenikalnych ściankach.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \exp(-\pi^2 Dt)\sin(\pi x)$.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\, \delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

----

Parametry:

$t_{max} = 0.5$, $D = 1$.

Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Numeryczne", Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz

Projekt I	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \pi^2 \sin(\pi x)\right]$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in [0, 1]$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = 0$, oraz

warunki brzegowe $U(0, t) = 0$, $U(1, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać powstanie stanu ustalonego dla stężenia substancji o współczynniku dyfuzji D, w membranie o grubości 1 i przenikalnych ściankach, w wyniku ucieczki substancji z membrany wskutek transportu dyfuzyjnego, oraz powstawania tej substancji wewnątrz membrany.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = \left[1 - \exp\left(-\pi^2 Dt\right)\right]\sin(\pi x)$.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:

$t_{max} = 0.5$, $D = 1$.

Laboratorium komputerowe z przedmiotu "Metody Numeryczne", Wykład: dr hab. inż. L.Bieniasz

Projekt J	

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:

równanie różniczkowe cząstkowe $\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, określone dla współrzędnej przestrzennej $x \in [0, 1]$ oraz czasu $t \in [0, t_{max}]$,

warunek początkowy $U(x,0) = 1 + \cos(\pi x)$, oraz

warunki brzegowe $\dfrac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial U(1,t)}{\partial x} = 0$.

Zagadnienie to może opisywać wyrównywanie się różnic stężeń, wskutek transportu dyfuzyjnego, substancji o współczynniku dyfuzji D, początkowo nierównomiernie rozłożonej w membranie o grubości 1 i nieprzenikalnych ściankach.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać: $U(x,t) = 1 + \exp(-\pi^2 D t)\cos(\pi x)$.

Należy rozwiązać to zagadnienie stosując zaznaczoną niżej kombinację algorytmów numerycznych oraz podane wartości parametrów. Należy przyjąć ustaloną wartość $\lambda = D\,\delta t/h^2$, możliwie najbliższą $\lambda = 0.4$ dla metody bezpośredniej lub $\lambda = 1$ dla metod pośrednich (uwaga na ograniczenia stabilności numerycznej!). Rozwiązania numeryczne należy porównać z analitycznymi i wyznaczyć błędy bezwzględne rozwiązań numerycznych. Jeżeli poniżej zaznaczono dwa alternatywne algorytmy, to wówczas w programie należy zrealizować oba, a uzyskane wyniki porównać.

Do zaliczenia projektu należy wykonać:

(1) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla t_{max}, w funkcji kroku przestrzennego h (najlepiej w skali logarytmicznej, o ile to możliwe). Należy sprawdzić, czy zależność jest zgodna z teoretycznym rzędem dokładności i wyjaśnić ewentualne niezgodności. Do dalszych wykresów należy dobrać krok czasowy (i przestrzenny) tak, aby uzyskać możliwie jak najlepszą dokładność rozwiązania w czasie obliczeń nie przekraczającym około jednej minuty, dla najszybszego z rozważanych wariantów obliczeń. Wyniki numeryczne oraz rozwiązania analityczne i błędy odpowiadające tej sytuacji należy zapisać w zbiorze, w postaci sformatowanej umożliwiającej przeglądanie wyników.

(2) Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t (rozwiązania numeryczne punktami, rozwiązania analityczne linią ciągłą).

(3) Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t. Należy wyjaśnić ewentualnie obserwowane zmiany błędu w czasie.

Algorytmy:

Dyskretyzacja:	Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
☐ Klasyczna metoda bezpośrednia	☐ Dekompozycja LU macierzy pełnej
☐ Metoda pośrednia Laasonen	☐ Algorytm Thomasa
☐ Metoda pośrednia Cranka-Nicolson	☐ Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

---

Parametry:

$t_{max} = 0.5$, $D = 1$.