Projekt Metody Obliczeniowe

Piotr Gębala
Informatyka WFMiI
gr.22
nr.indeksu: 93983

1.Temat projektu.

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:
równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \pi^2 \sin(\pi x)\right]$$

określone dla współrzędnej przestrzennej: $x \in [0, 1]$ oraz czasu $t \in [0, t_{\max}]$.

warunek początkkowy: $U(x,0) = 0$

warunki brzegowe: $U(0,t) = 0,\; U(1,t) = 0$

Zagadnienie to może opisywać powstanie stanu ustalonego dla stężenia substancji o współczynniku dyfuzji D, w membranie o grubości 1 i przenikalnych ściankach, w wyniku ucieczki substancji z membrany wskutek transportu dyfuzyjnego, oraz powstawania tej substancji wewnątrz membrany.

Rozwiązanie analityczne tego równania: $U(x,t) = \left[1 - \exp\,(-\pi^2 Dt)\right]\sin(\pi x)$

Parametry: $t_{\max} = 0.5,\; D = 1$

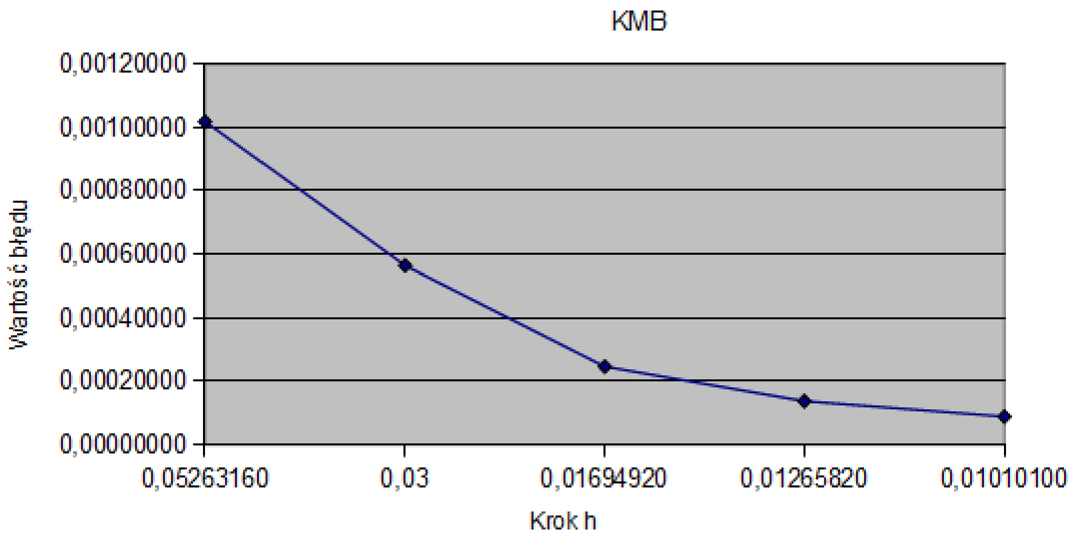
Dyskretyzacja:
- Klasyczna Metoda Bezpośrednia
- Metoda Pośrednia Laasonen

Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych:
- Algorytm Thomasa

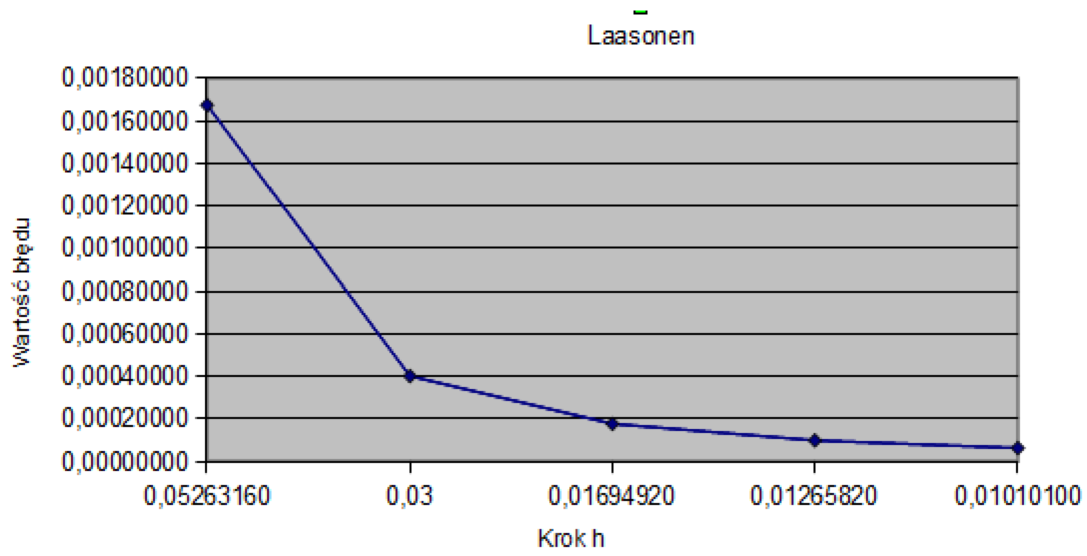
2.Wykresy.

a). Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu obserwowanej dla tmax, w funkcji kroku przestrzennego h.

Dla KMB:

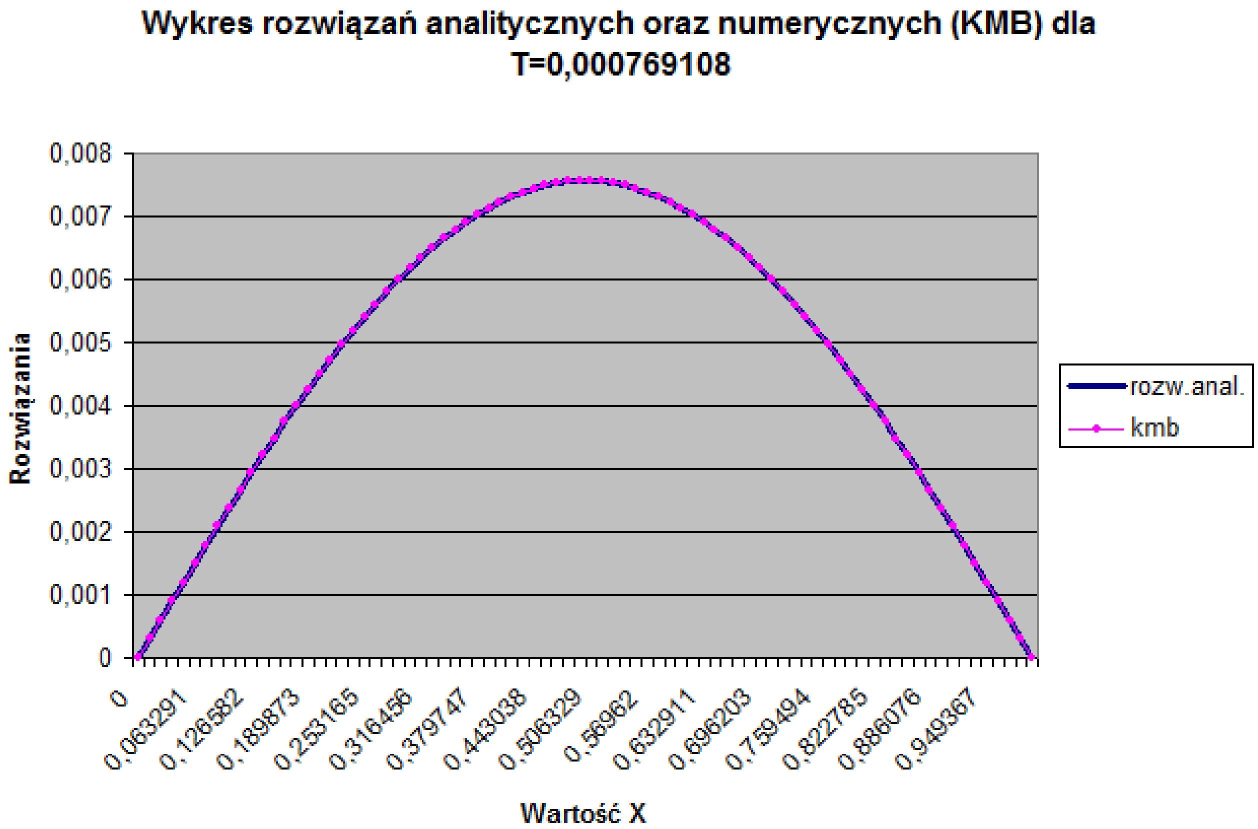


Dla Laasonen + Thomas:

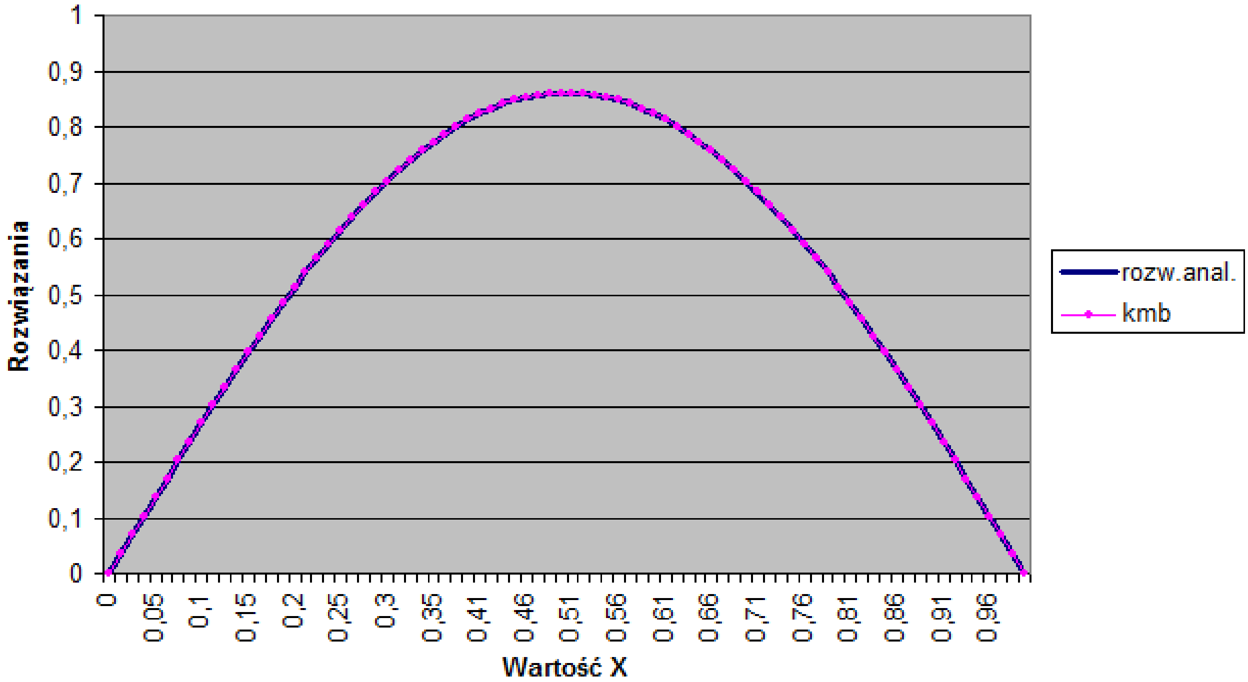


b). Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla kilku wybranych wartości czasu t z całego przedziału t.

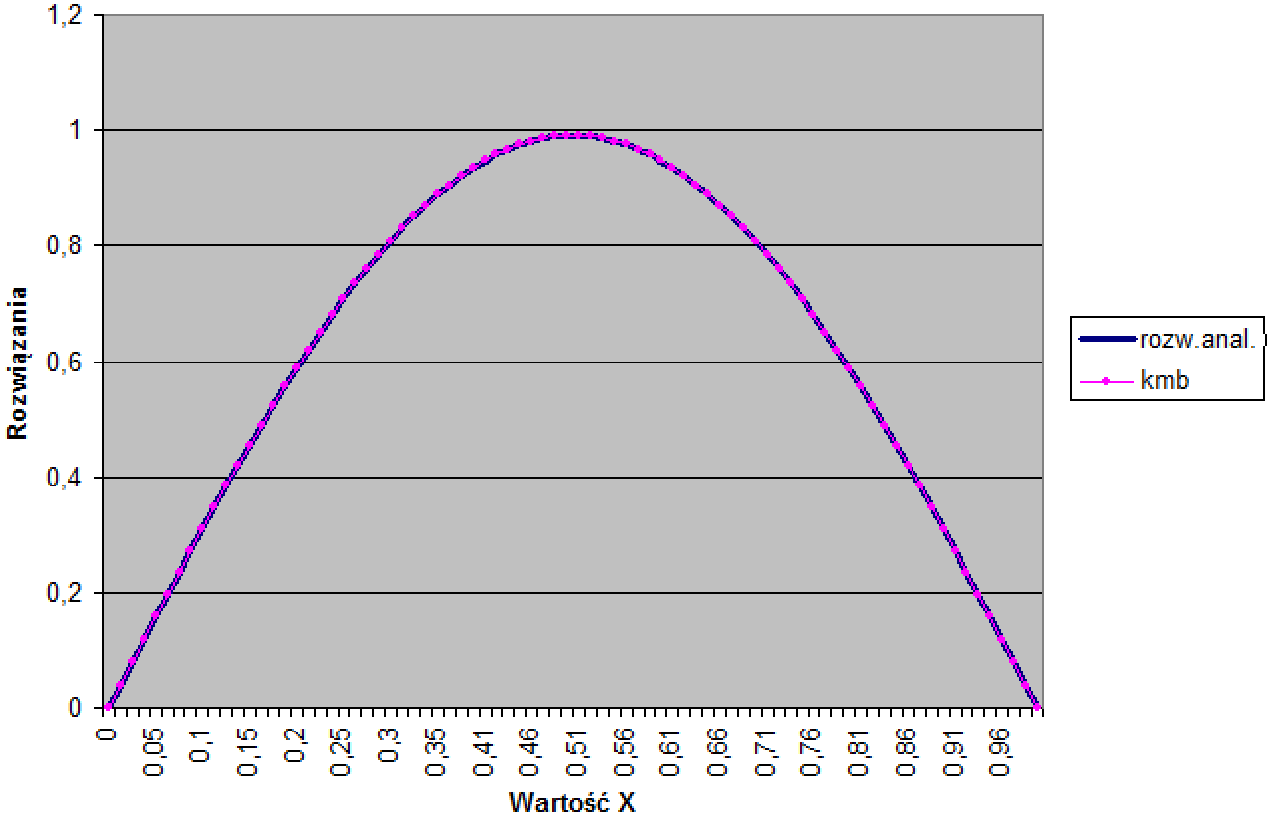
Dla KMB:



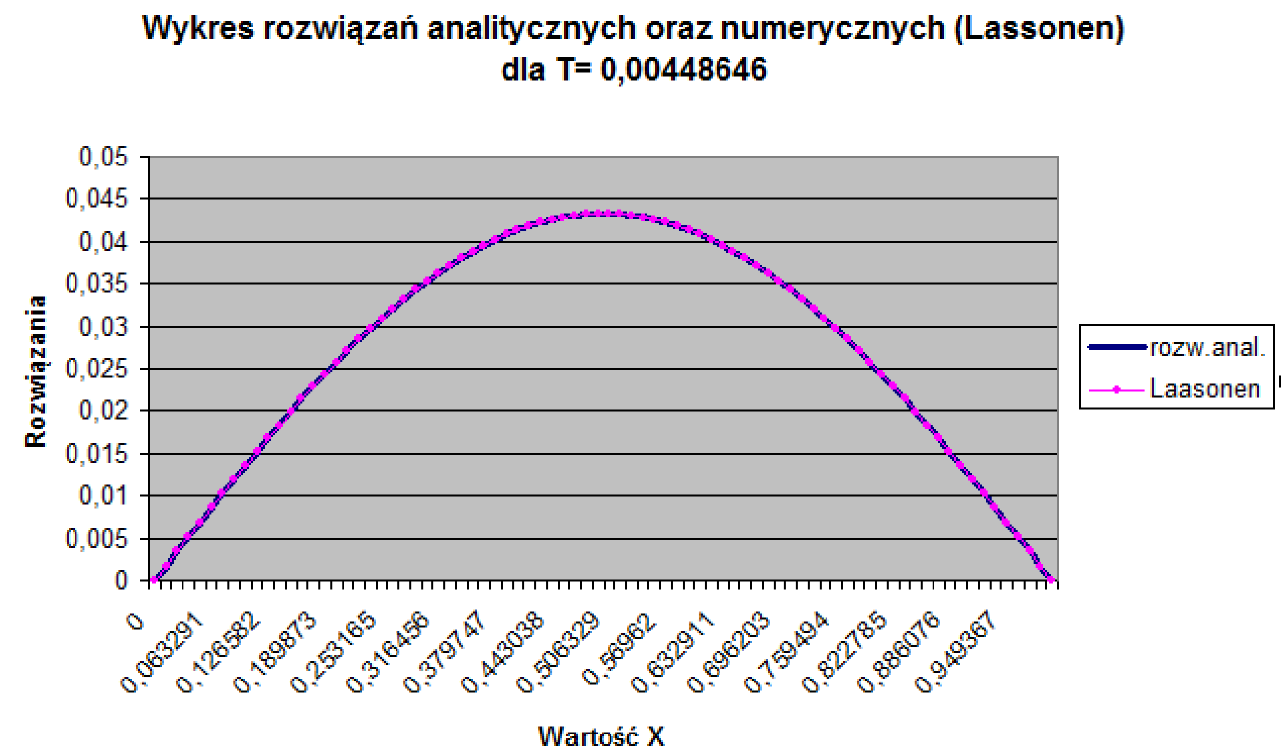
Wykres rozwiązań analitycznych oraz numerycznych (KMB) dla T=0,20016

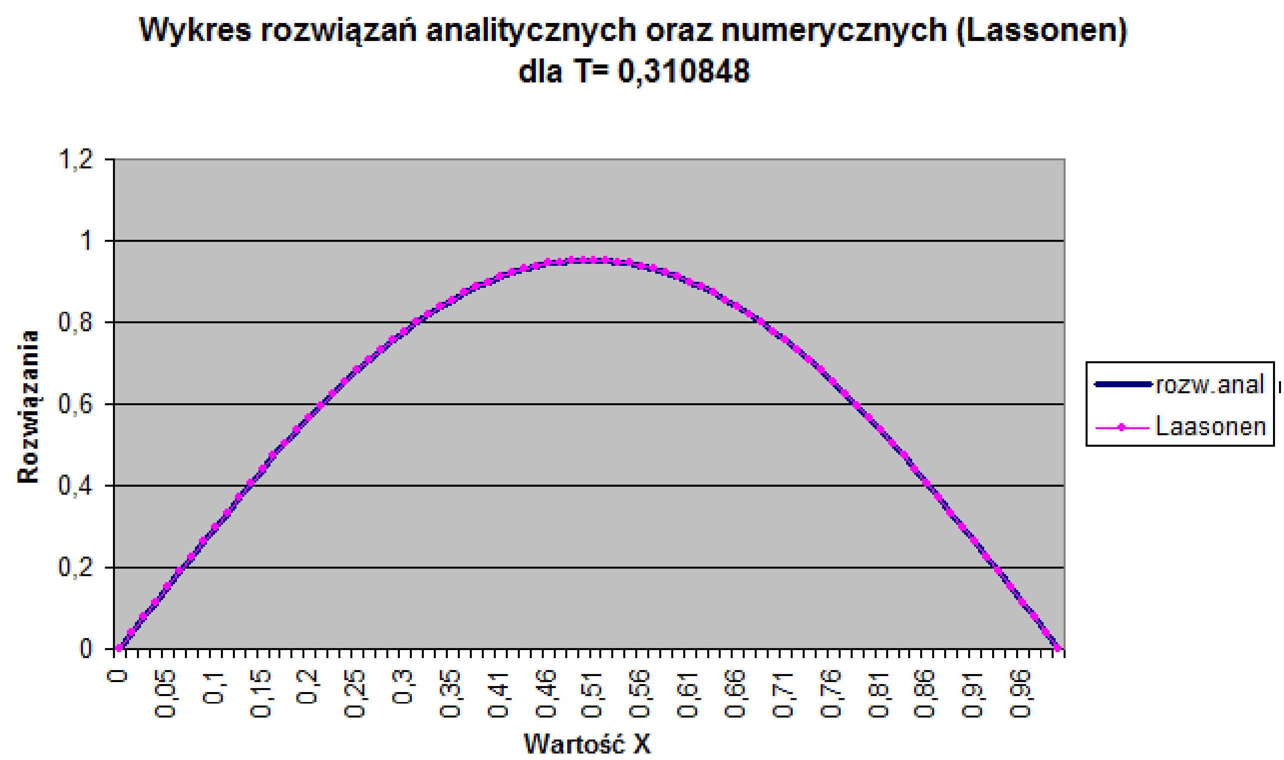


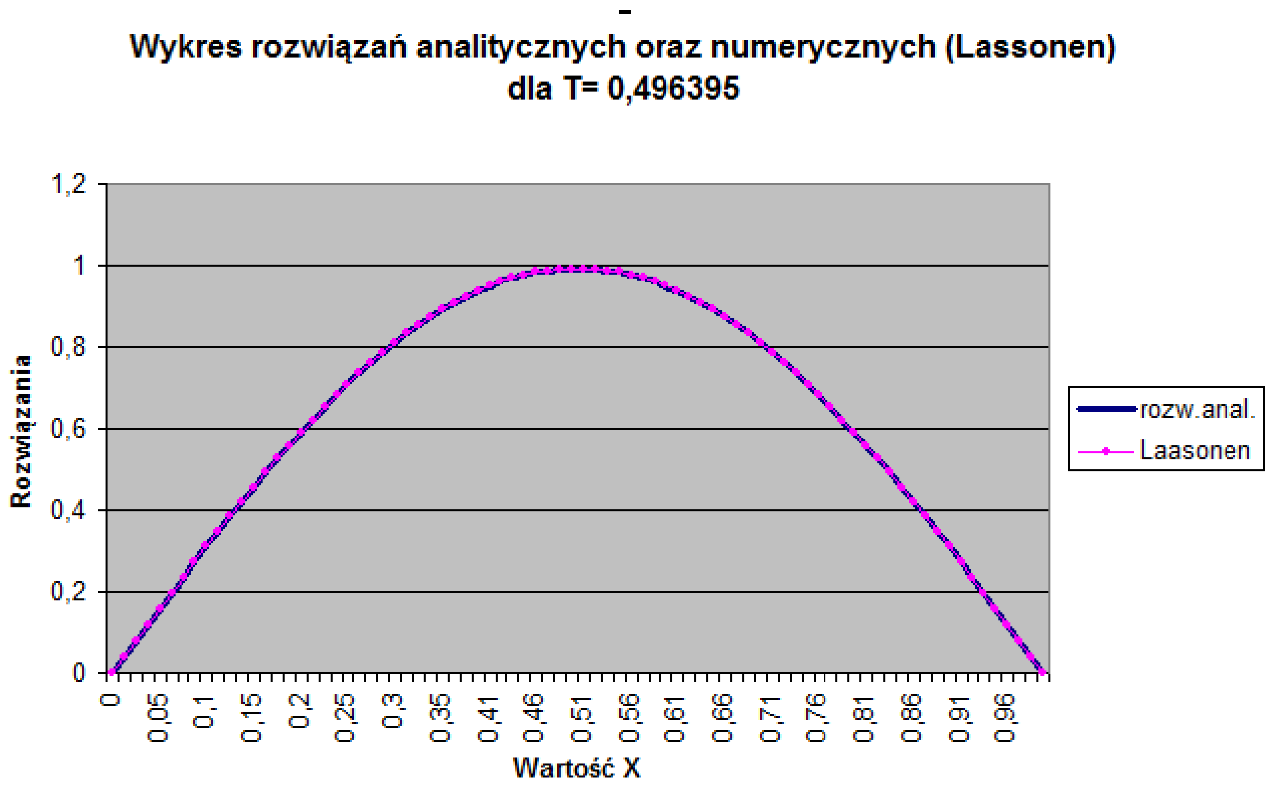
Wykres rozwiązań analitycznych oraz numerycznych (KMB) dla T=0,477039



Dla Laasonen + Thomas:

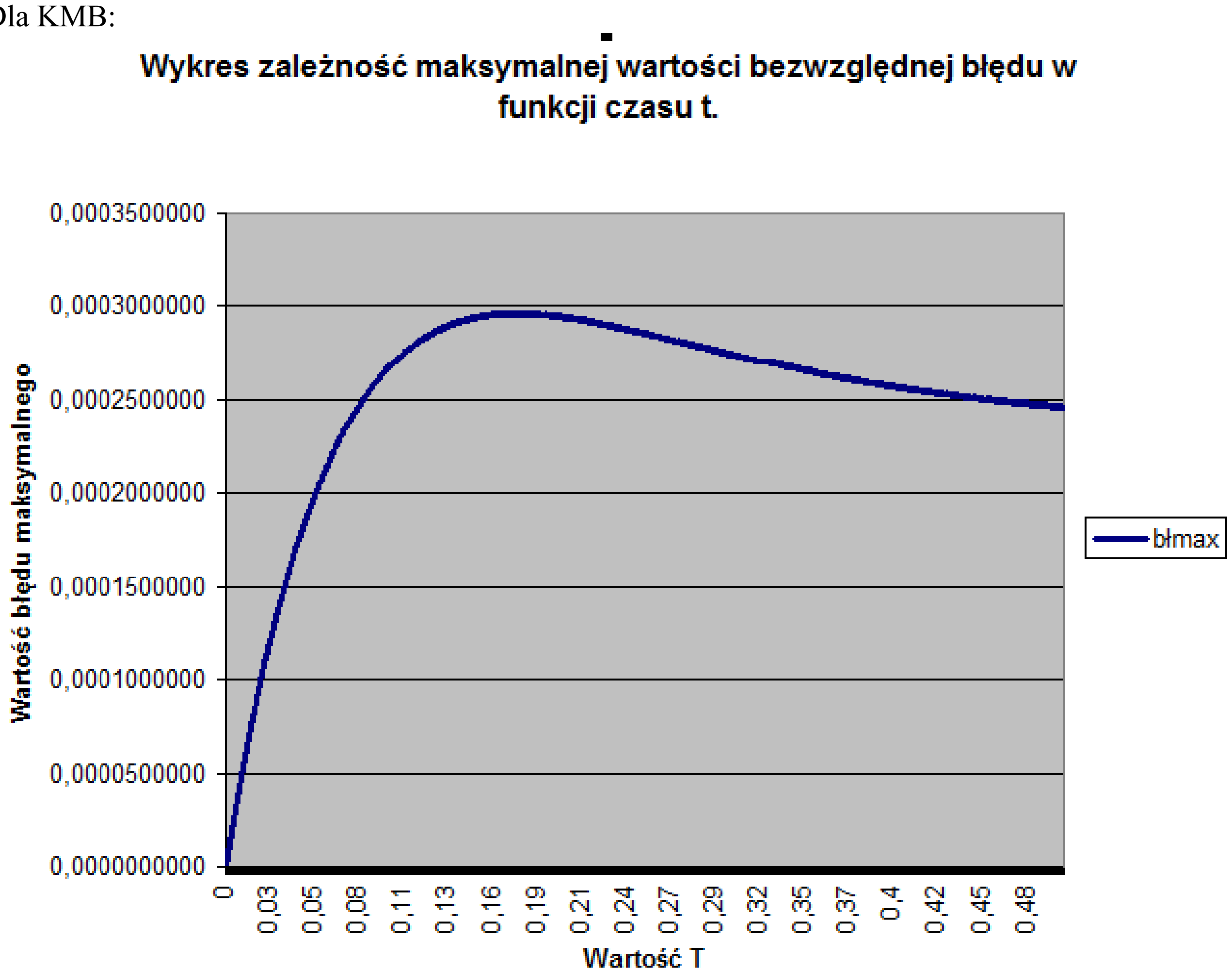




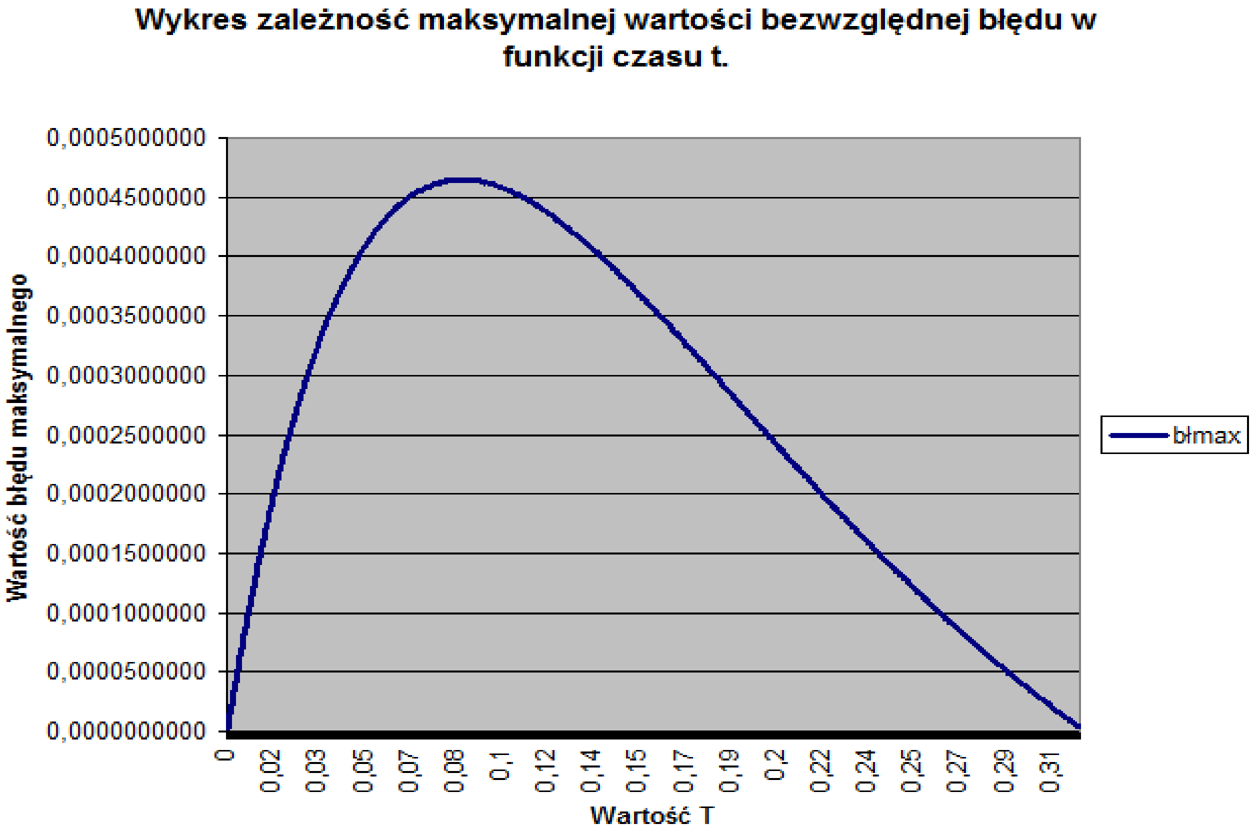


c). Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t.

Dla KMB:



Dla Laasonen + Thomas:



3.Wnioski.
Równanie wykorzystane w projekcie różniło się nieco od standardowego. Musiałem więc zmodyfikować nieco wzory wykorzystane do rozwiązań numerycznych.

Wzór na kolejne elementy macierzy A dla Klasycznej metody bezpośredniej:
A[i][j] = (lambda * A[i-1][j-1]) + (A[i-1][j] * (1-(2*lambda))) + (lambda * A[i-1][j+1]) + (lambda * PI^2 * sin(PI * x) * h^2);

Wzory na elementy macierzy trójprzekątniowej A:
A[j][j] = - (1 + 2 * lambda);
A[j][j+1] = lambda;
A[j][j-1] = lambda;
b[j] = - A[i-1][j] – (lambda * PI^2 * h^2 * sin(x * PI));

a). Z pierwszych wykresów wynika, że maksymalna wartość błędu dla tmax maleje wraz ze zmniejszaniem kroku h. Widzimy, że błąd maleje szybciej w metodzie pośredniej Laasonen.
Rzędy dokładności wynoszą dla KMB: 2,00467286, oraz dla Laasonen: 1,99696047.

b). Na wykresach widzimy porównanie wyników analitycznych oraz numerycznych. Wyniki są podobne co świadczy o tym, że wybrane metody działają poprawnie. Ewentualne błędy wynikają z z zaokrągleń oraz błędów odcięcia.

c). Na pierwszym wykresie widzimy, że dla Klasycznej metody bezpośredniej błąd zmniejsza się wraz ze wzrostem czasu t. Na drugim wykresie możemy jednak zaobserwować dużo szybsze spadek błędu wraz ze wzrostem czasu.