

Sprawozdanie

Projekt C, przedmiot: Metody Obliczeniowe

Mateusz Macięga
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
kierunek Informatyka
grupa 21
nr indeksu: 94017

1. Temat projektu:

Zagadnienie z warunkiem początkowym i brzegowym obejmuje:
równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2},$$

określone dla współrzędnej $x \in [0, +\infty)$ oraz czasu $t \in [0, t_{\max})$,
warunek początkowy $U(x,0) = 0$ oraz

warunki brzegowe $U(0,t) = 1$, $U(+\infty, t) = 0$.

Zagadnienie to może opisywać transport ciepła, w pręcie pół-nieskończonym, o współczynniku transportu ciepła D , po raptownym podwyższeniu temperatury na jednym końcu pręta w chwili $t = 0$.

Rozwiązanie analityczne tego zagadnienia ma postać:

$$U(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right),$$

gdzie $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$, a $\operatorname{erf}(z)$ jest tzw. funkcją błędu:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-w^2) dw.$$

Do obliczeń numerycznych przedział nieskończony x należy zastąpić przedziałem skończonym $[0, a]$, gdzie

$$a \geq 6\sqrt{Dt_{\max}}.$$

Do obliczenia funkcji $\operatorname{erf}(z)$ z dokładnością bliską dokładności maszynowej dla zmiennych typu double należy zastosować pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.

Parametry:

$$t_{\max} = 2, D = 1$$

Algorytmy:

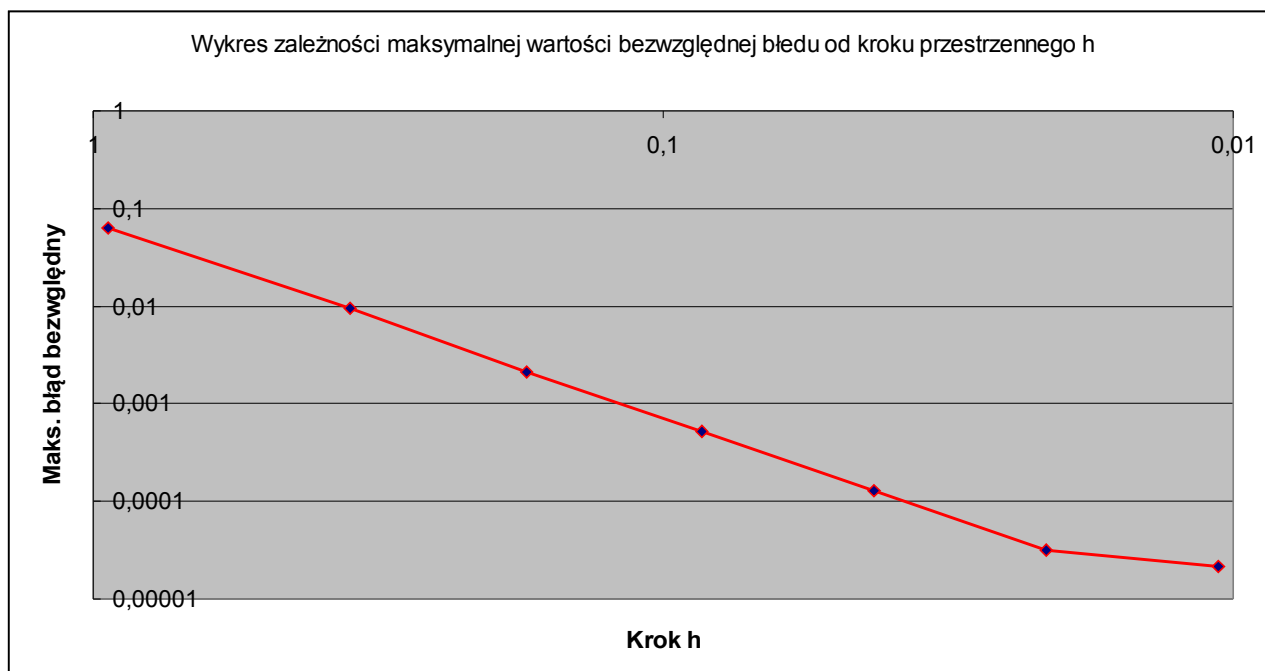
Dyskretyzacja: Metoda pośrednia Laasonen

Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych: Dekompozycja LU macierzy pełnej, Algorytm Thomasa

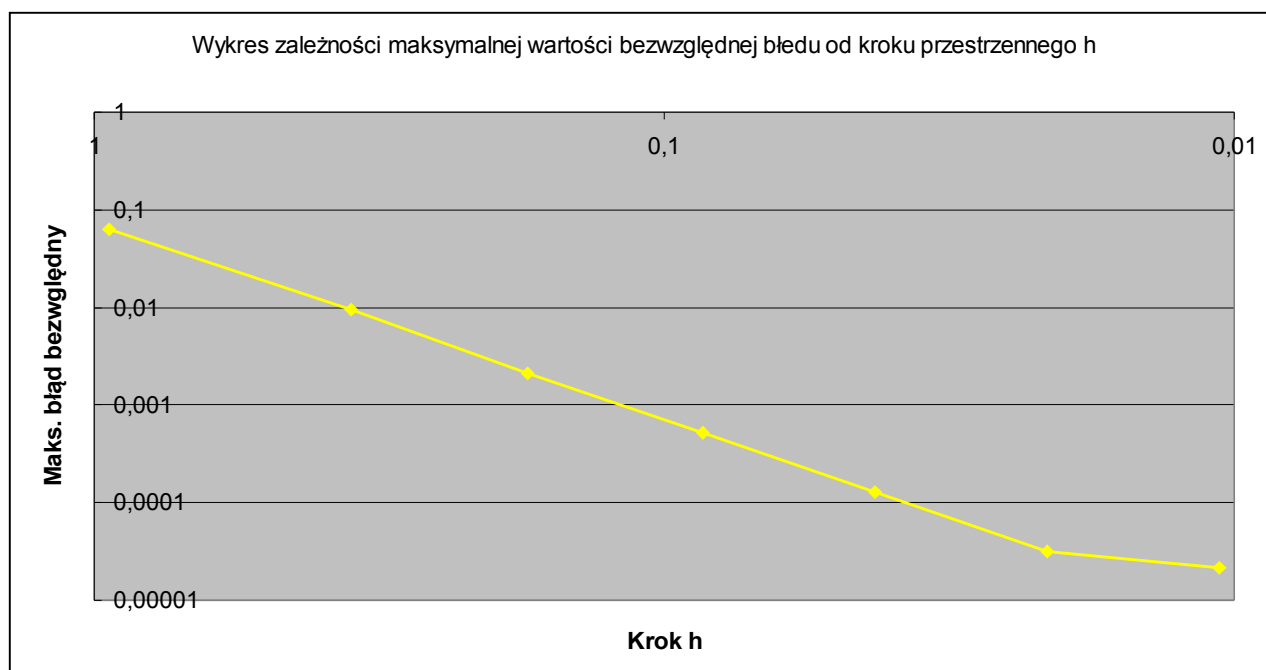
2. Wykresy

I. Wykres zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu, obserwowanej dla t_{\max} w funkcji kroku przestrzennego h (w skali logarytmicznej).

- Metoda pośrednia Laasonen + algorytm Thomasa



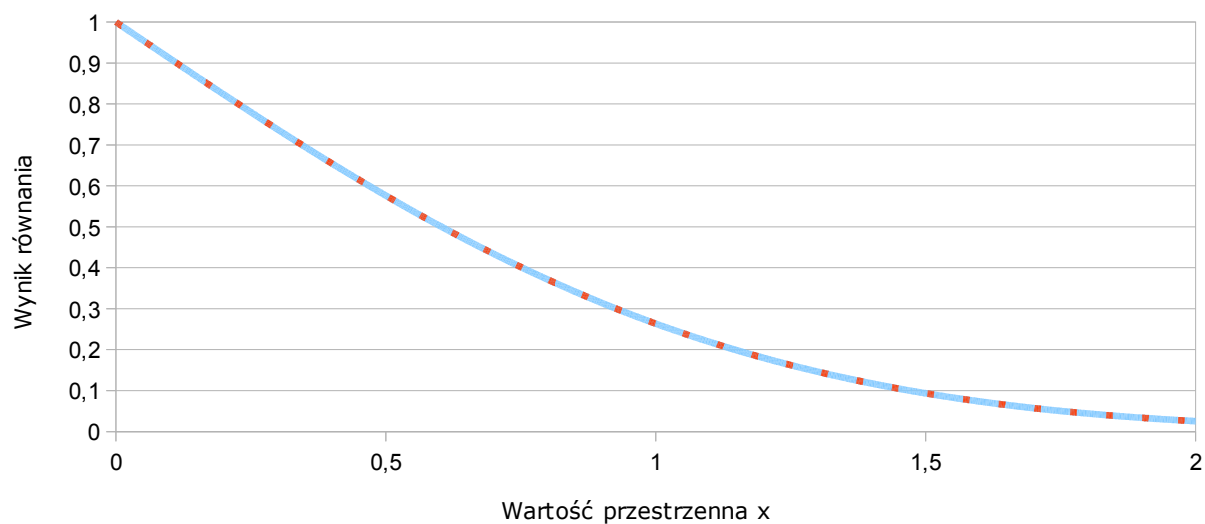
- Metoda pośrednia Laasonen + Dekompozycja LU



II. Wykresy rozwiązań numerycznych i analitycznych dla wybranych wartości czasu t

- Metoda pośrednia Laasonen + algorytm Thomasa
 - Wykres dla $t = 0,4$

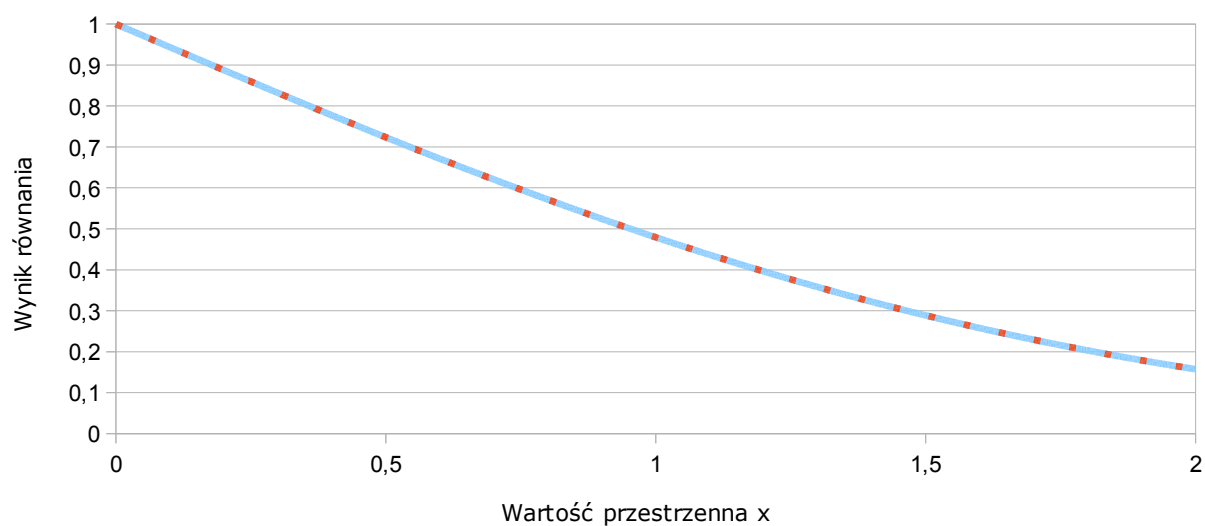
Wykres rozwiązania analitycznego oraz numerycznego dla $t = 0,4$



· Rozwiązanie numeryczne — Rozwiązanie analityczne

- Wykres dla $t = 1$

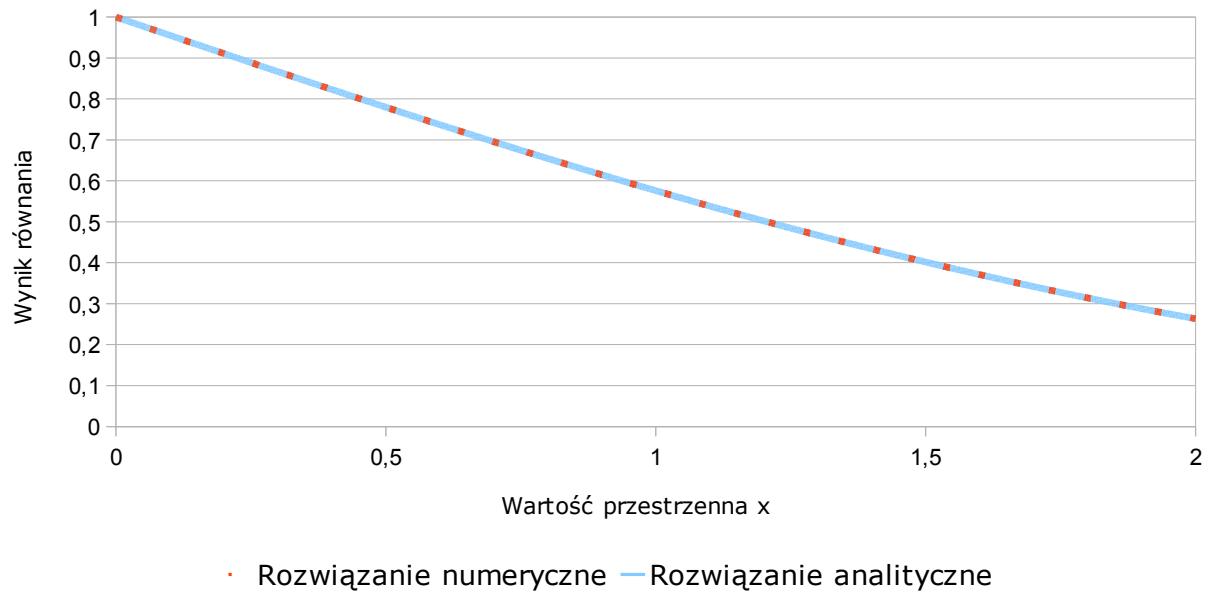
Wykres rozwiązania analitycznego oraz numerycznego dla $t = 1$



· Rozwiązanie numeryczne — Rozwiązanie analityczne

- Wykres dla $t = 1,6$

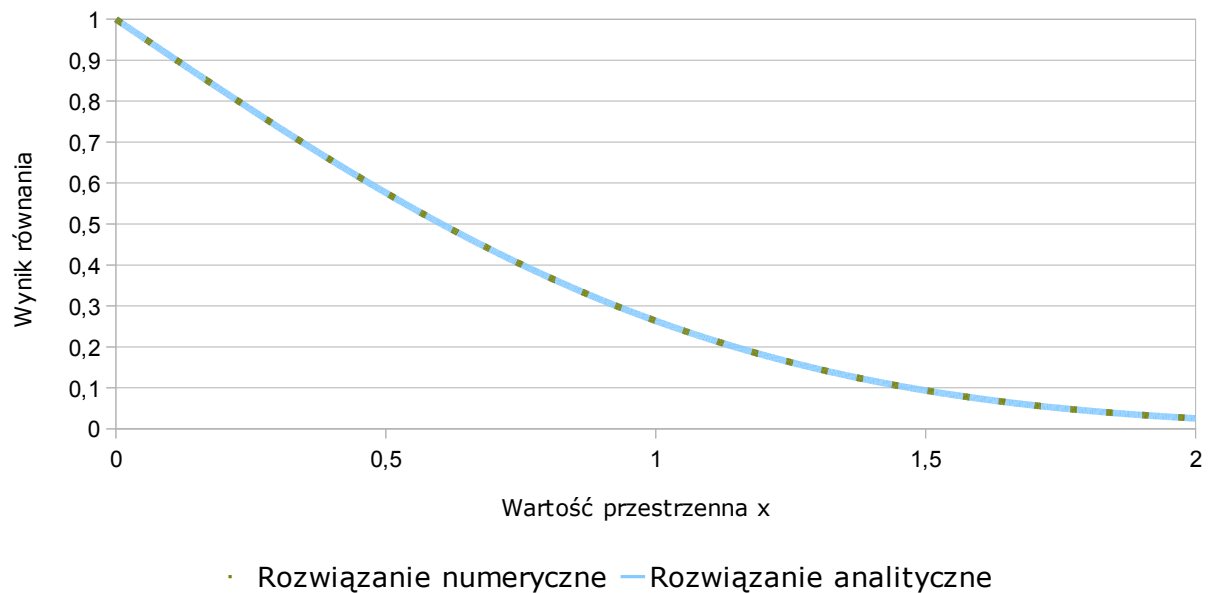
Wykres rozwiązania analitycznego oraz numerycznego dla $t = 1,6$



- Metoda pośrednia Laasonen + Dekompozycja LU

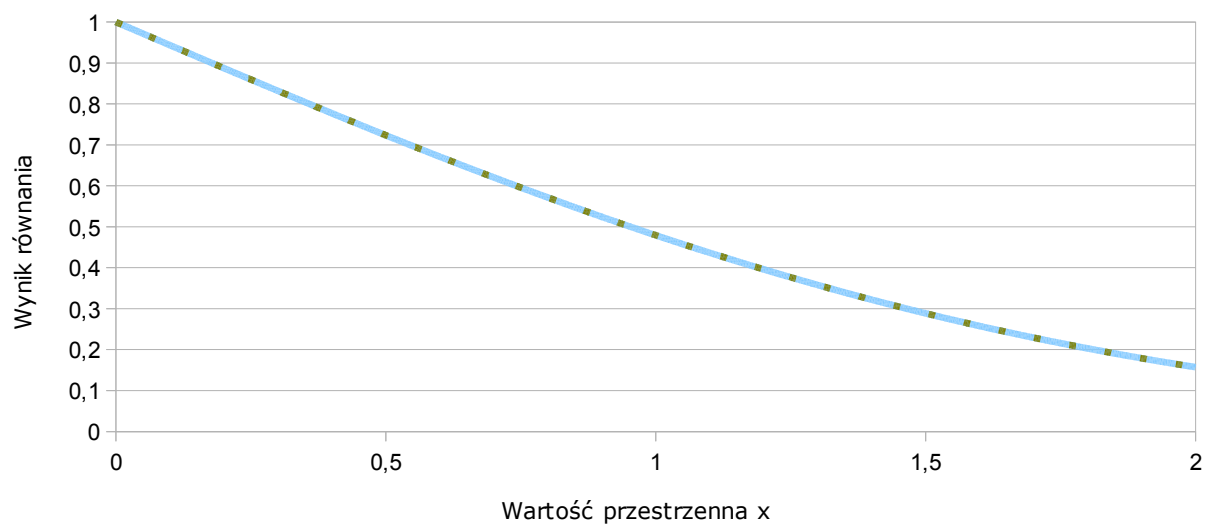
- Wykres dla $t = 0,4$

Wykres rozwiązania analitycznego oraz numerycznego dla $t = 0,4$



○ Wykres dla $t = 1$

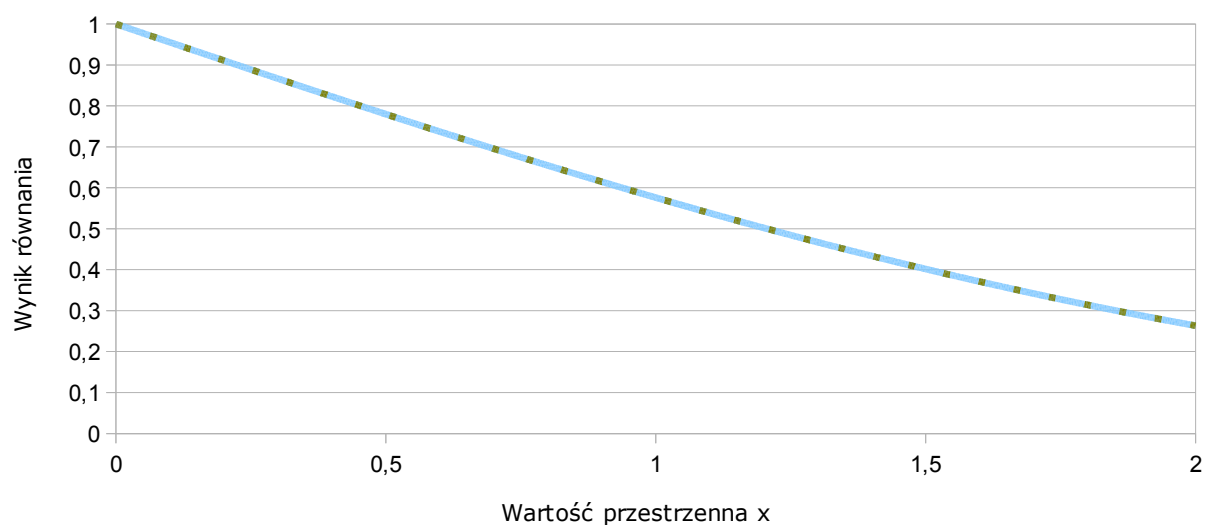
Wykres rozwiązania analitycznego oraz numerycznego dla $t = 1$



· Rozwiązanie numeryczne — Rozwiązanie analityczne

○ Wykres dla $t = 1,6$

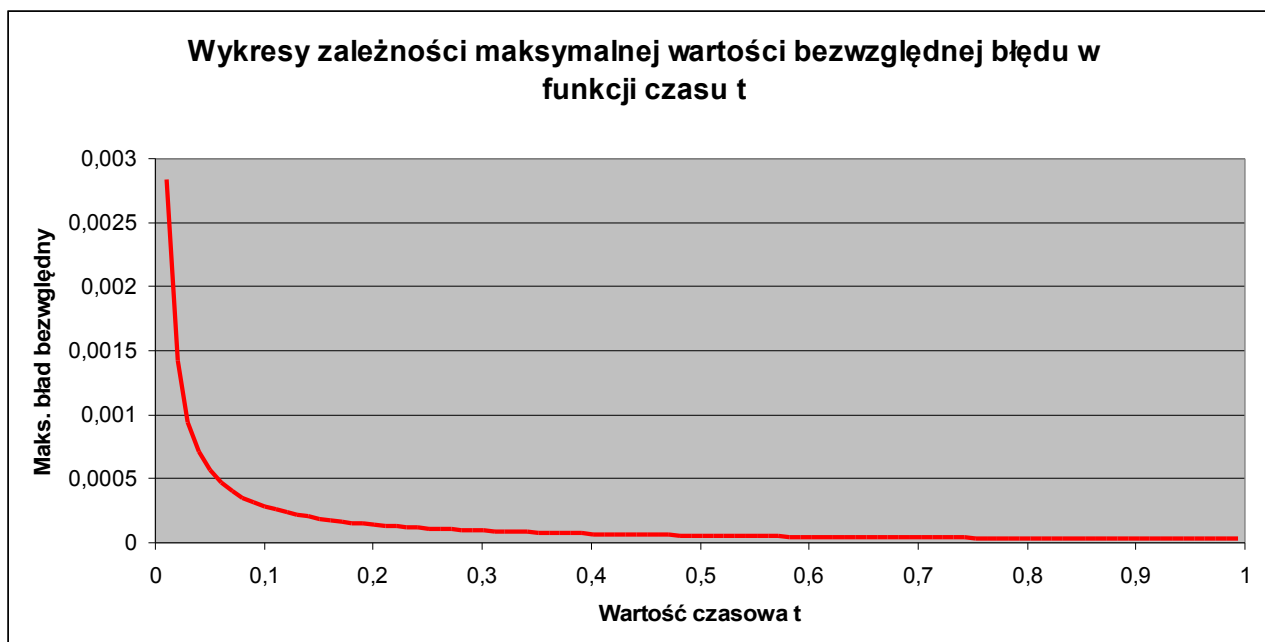
Wykres rozwiązania analitycznego oraz numerycznego dla $t = 1,6$



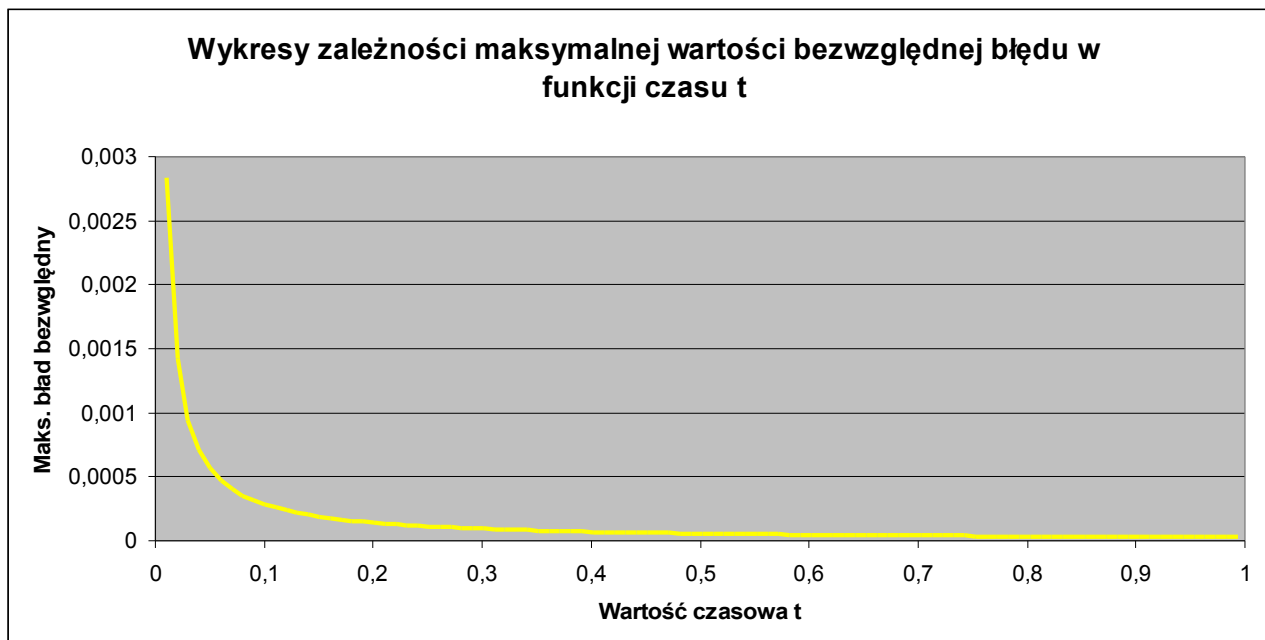
· Rozwiązanie numeryczne — Rozwiązanie analityczne

III. Wykresy zależności maksymalnej wartości bezwzględnej błędu w funkcji czasu t .

- Metoda pośrednia Laasonen + algorytm Thomasa



- Metoda pośrednia Laasonen + Dekompozycja LU



3. Wnioski

Wykorzystywane przeze mnie metody rozwiązywania układów równań liniowych są metodami dokładnymi. Dlatego też wyniki otrzymane przy wykorzystaniu algorytmu Thomasa i dekompozycji LU są identyczne w wyniku czego powyższe wykresy dla rozwiązań tymi metodami są takie same.

Z pierwszego wykresu możemy odczytać, że im mniejszy krok zmiennej przestrzennej x tym mniejszy jest maksymalny błąd bezwzględny. Rząd dokładności wynosi: 2,006786273. Jest on bardzo bliski jej wartości teoretycznej.

Kolejne wykresy przedstawiają wartości analityczne i obliczone dla pewnych wartości zmiennej czasowej t . Jak możemy zauważyć wartości te są bardzo do siebie zbliżone. Świadczy to o dobrej dokładności zastosowanej metody. Wpływ na różnice po między rozwiązaniami analitycznymi a obliczonymi mają błędy obcięcia i zaokrąglenia, których nie da się uniknąć.

Na ostatnich dwóch wykresach możemy zauważyć, że dla początkowych wartości zmiennej czasowej spadek wartości błędów jest znaczący, możemy na tej podstawie wywnioskować, że błędy nie są przenoszone z poprzednich poziomów na kolejne. Dla kolejnych wartości t wartość błędu jest na bardzo niskim poziomie.