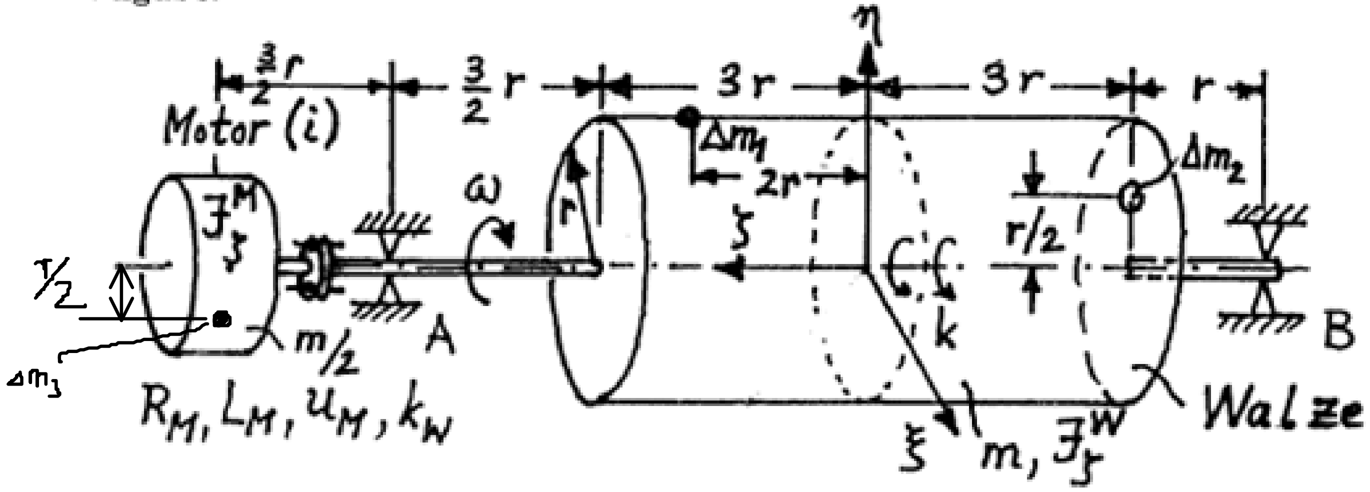
Aufgabe Rotordynamik

Freitag, 25. Juni 2021 06:55

Maschinendynamik (Thema: Starre Rotoren)

Aufgabe:



Ein starrer Rotor besteht aus einer homogenen zylindrischen Walze (Radius r, Länge $6r$, Masse m und axiales Massenträgheitsmoment $J_\zeta^W = 3mr^2$), der über zwei masselose Wellenstümpfe der Länge $3r/2$ und r zentrisch ohne Fluchtfehler unverschiebbar gelagert ist. Durch ein aufmontiertes Gerät bzw. eine nicht näher spezifizierte konstruktive Maßnahme ergeben sich an den gekennzeichneten Stellen eine punktförmige Zusatzmasse $\Delta m_1 = m/20$ bzw. eine lokale Aussparung (Materialentnahme $\Delta m_2 = m/30$). Der Rotor wird über eine masselose starre Verbindung ($3r/2$) durch einen (vollständig ausgewuchteten) Elektromotor (Masse $m/2$, axiales Massenträgheitsmoment $J_\zeta^M = mr^2$) angetrieben. Die konstanten Daten des Motors sind Induktivität L_M, Ohmscher Widerstand R_M und Wandlerkonstante k_W. Die konstante Klemmenspannung ist u_M. Der gesamte Bewegungswiderstand wird proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω angenommen (Proportionalitätskonstante k).

1. Unter Angabe des resultierenden Trägheitsmoments J_ζ^{ges} gebe man die Bewegungsgleichungen des dynamischen Systems in Winkelgeschwindigkeit ω und Strom i an und führe sie auf eine Einzeldifferentialgleichung in ω zurück. Man löse sie für das Anlaufen des Rotors aus dem Stillstand (mit zusätzlich $i(t = 0) = 0$).

2. Unter Angabe von m_{ges} berechne man die Lage des aktuellen Schwerpunkts (e_ξ, e_η, e_ζ) und die Deviationsmomente $J_{\xi\zeta}^{ges}, J_{\eta\zeta}^{ges}$ und daraus (für stationären Betrieb $\omega = \text{const}$) die Lagerkräfte $A_{\xi,\eta}$ und $B_{\xi,\eta}$ auf den Rotor in positive Richtungen des mitrotierenden ξ, η, ζ-Systems.

3. Man bestimme die Größe (und die Lage) geeigneter Ausgleichsmassen (auf dem Außenradius der Stirnflächen des Zylinders) zur vollständigen statischen und dynamischen Wuchtung.

Lösung Maschinendynamik, Aufgabe zum Thema "starre Rotoren" (1)

1. Beweg.-glchn. und deren Lösung

Aus Vorlesung : $J_J^{ges}\dot{\omega} + k\omega = k_W i$, (1)

$L_M i^{\cdot} + R_M i = u_M - k_W \omega$. (2)

mit $\underline{\underline{J_J^{ges}}} = J_J^Z + J_J^M + \Delta m_1 r^2 - \Delta m_2 \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \Delta m_3 \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{971}{240} m r^2}}$

Aus (1) : $i = \frac{J_J^{ges}}{k_W}\dot{\omega} + \frac{k}{k_W}\omega$ und diff. : $i^{\cdot} = \frac{J_J^{ges}}{k_W}\ddot{\omega} + \frac{k}{k_W}\dot{\omega}$

und in (2) : $L_M\left(\frac{J_J^{ges}}{k_W}\ddot{\omega} + \frac{k}{k_W}\dot{\omega}\right) + R_M\left(\frac{J_J^{ges}}{k_W}\dot{\omega} + \frac{k}{k_W}\omega\right) = u_M - k_W\omega$

d.h. $\underline{\underline{L_M\frac{J_J^{ges}}{k_W}\ddot{\omega} + \left(L_M\frac{k}{k_W} + R_M\frac{J_J^{ges}}{k_W}\right)\dot{\omega} + \left(R_M\frac{k}{k_W} + k_W\right)\omega = u_M}}$

od. $\ddot{\omega} + 2D\omega_1\dot{\omega} + \omega_1^2\omega = \varepsilon_M$ mit $\omega_1^2 = \frac{R_M + k_W^2}{L_M J_J^{ges}}$

$2D\omega_1 = \frac{L_M k + R_M J_J^{ges}}{L_M J_J^{ges}}$

und $\varepsilon_M = \frac{u_M \cdot k_W}{L_M J_J^{ges}}$.

wenn (was meist zutrifft) angenommen wird : $\underline{D > 1}$

$\omega(t) = \omega_H(t) + \omega_p(t)$ mit $\omega_H(t)$ aus Exp.ansatz : $\omega_H(t) = Ce^{\lambda t}$

$\rightsquigarrow \lambda^2 + 2D\omega_1\lambda + \omega_1^2 = 0$, d.h. $\lambda_{1,2} = -D\omega_1 \pm \omega_1\sqrt{D^2-1}$

Damit : $\omega_H(t) = C_1 e^{(-D\omega_1 + \omega_1\sqrt{D^2-1})t} + C_2 e^{(-D\omega_1 - \omega_1\sqrt{D^2-1})t}$

$\omega_p(t)$ über Ansatz vom Typ d. re. Seite : $\omega_p(t) = \omega_S = \text{const}$

$\rightsquigarrow \omega_1^2\omega_S = \varepsilon_M$, d.h. $\omega_p(t) = \frac{\varepsilon_M}{\omega_1^2}$

Also : $\omega(t) = C_1 e^{(-D\omega_1 + \omega_1\sqrt{D^2-1})t} + C_2 e^{(-D\omega_1 - \omega_1\sqrt{D^2-1})t} + \frac{\varepsilon_M}{\omega_1^2}$

Anpass. an ABn : $\omega(0) = C_1 + C_2 + \frac{\varepsilon_M}{\omega_1^2} \stackrel{!}{=} 0$ (I)

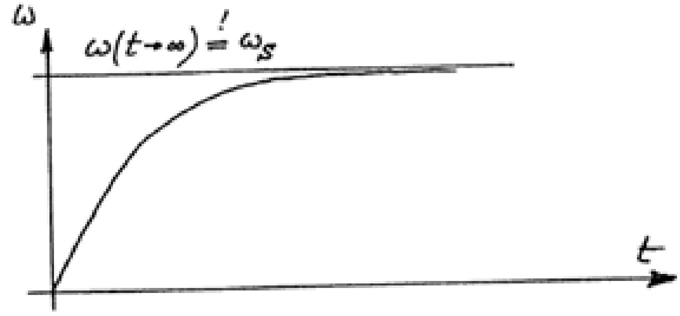
$i(0) = 0 \rightsquigarrow \dot{\omega}(0) = (-D\omega_1 + \omega_1\sqrt{D^2-1})C_1 + (-D\omega_1 - \omega_1\sqrt{D^2-1})C_2 \stackrel{!}{=} 0$ (II)

$\overset{\text{aus}}{\underset{(II)}{\rightsquigarrow}}$ $C_2 = \underbrace{\frac{-D\omega_1 + \omega_1\sqrt{D^2-1}}{D\omega_1 + \omega_1\sqrt{D^2-1}}}_{a} C_1$ und in (I): $C_1 = \frac{-\varepsilon_M}{\omega_1^2(1+a)} \rightsquigarrow C_2 = \frac{-a\,\varepsilon_M}{\omega_1^2(1+a)}$

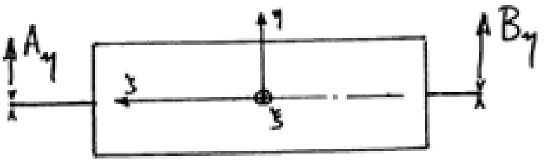
Endgültig: $$\omega(t) = \frac{\varepsilon_M}{\omega_1^2}\left[\frac{-1}{1+a}e^{(-D\omega_1+\omega_1\sqrt{D^2-1})t} - \frac{a}{1+a}e^{(-D\omega_1-\omega_1\sqrt{D^2-1})t} + 1\right]$$ 2

Stationärer Zustand: $$\omega(t\to\infty) = \frac{\varepsilon_M}{\omega_1^2} \quad (\omega_H(t\to\infty)\to 0)$$
$$= \frac{u_M}{\frac{k}{k_w}R_M + k_w}$$

Qualitative Skizze:



2. Gesamtmasse, Schwerpkt.lage, Dev.momente, Lagerkräfte



Aussparung
$$m_{ges} = \frac{3m}{2} + \Delta m_1 - \Delta m_2 + \Delta m_3$$
$$\rightsquigarrow m_{ges} = \frac{23}{15}m$$

$$m_{ges}e_\zeta = \Delta m_1\cdot 2r + (-\Delta m_2)(-3r) + \Delta m_3\cdot(6r) \rightsquigarrow e_\zeta = \frac{9}{46}r$$
Aussparung negative Koord.
$$m_{ges}e_\eta = \Delta m_1\cdot r + (-\Delta m_2)\cdot\frac{r}{2} + \Delta m_3\left(-\frac{r}{2}\right) \rightsquigarrow e_\eta = \frac{3}{184}r$$, außerdem $e_\xi = 0$

Def. Ausspar. Δm_i in η,ζ-Ebene
$$J_{\eta\zeta} = -\left[\Delta m_1(2r)\cdot r - \Delta m_2(-3r)\left(\frac{r}{2}\right) + \Delta m_3(6r)\left(-\frac{r}{2}\right)\right] = -\frac{1}{10}mr^2 \qquad J_{\xi\zeta} = 0$$

Wegen $e_\xi = J_{\xi\zeta} = 0$: $A_\xi = B_\xi = 0$

Außerdem: $$A_\eta + B_\eta + m_{ges}\cdot e_\eta\cdot\omega^2 = 0, \quad (a)$$
$$-A_\eta\cdot\frac{9}{2}r + B_\eta\cdot 4r = \frac{1}{10}mr^2\omega^2. \quad (b)$$

③

Aus (a): $A_\eta = -\left(B_\eta + m_{ges} e_\eta \cdot \omega^2\right) = -\left(B_\eta + \frac{23}{920} m r \omega^2\right)$

und in (b): $\left(B_\eta + \frac{23}{920} m r \omega^2\right) \frac{9}{2} r + B_\eta \cdot 4r = \frac{1}{10} m r^2 \omega^2$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{B_\eta = -\frac{1}{80} m r \omega^2}} \quad \rightsquigarrow \underline{\underline{A_\eta = -\frac{1}{80} m r \omega^2}}$$

3. Ausgleichsmassen Δm_A, Δm_B

Offensichtlich: Lage von Δm_A, Δm_B auch in η,ζ-Ebene

Vermutung (im angegebenen Koord.system): $\eta_A = -r$, $\eta_B = +r$

Damit Ausgleichsbedingungen (für statisches und dynam. Auswuchten):

(1) $m_{ges} e_\eta \omega^2 + \Delta m_A (-r) \omega^2 + \Delta m_B \cdot r \cdot \omega^2 = 0$,

(2) $J_{\eta\zeta} \omega^2 + \left[-\Delta m_A (-r)(3r)\omega^2\right] + \left[-\Delta m_B (r)(-3r)\omega^2\right] = 0$.

Aus (1): $\Delta m_A = \frac{e_\eta}{r} m_{ges} + \Delta m_B = \frac{m}{40} + \Delta m_B$ und damit in (2):

$$-\frac{1}{10} m r^2 \omega^2 + \left(\frac{m}{40} + \Delta m_B\right) 3r^2\omega^2 + \Delta m_B 3r^2 \omega^2 = 0$$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{\Delta m_B = \frac{m}{240}}} \quad \text{und damit} \quad \underline{\underline{\Delta m_A = \frac{7}{240} m}}$$

d.h. beide sind an den bezeichneten Stellen <u>Zusatzmassen</u>!