Бенчмаркинг. Часть 2.

Лекция 3

Содержание

https://t.me/+2kGsBQZcdBQxNDAy

Финансовый рынок Блэка-Шоулса

Fischer Black, Myron Scholes, The pricing of Options and Corporate Liabilities, 1973

- BS-рынок
- Вычисление цены опционов Европейского типа
- Нобелевская премия, 1997
- Широкое распространение на практике, часть бенчмарков

Предположения

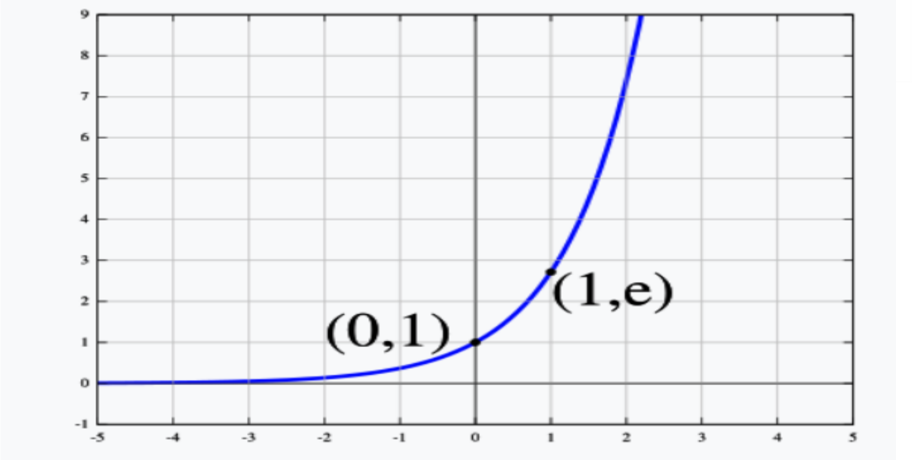
- Цена акции описывается геометрическим броуновским движением
- Нет выплат дивидендов
- Константная процентная ставка в банке
- Нет премий за покупку или продажу ценных бумаг
- Нет ситуации арбитража

А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. В 2 томах

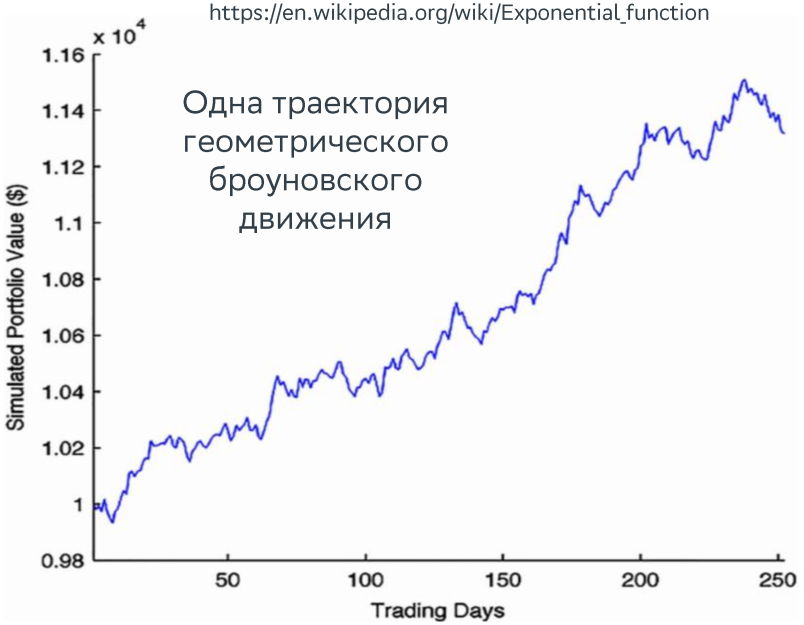
Финансовый рынок Блэка-Шоулса

Стандартный диффузионный (B,S) – рынок

- **Банковский счет:** $dBk_t = r\, Bk_t dt,\ Bk_0 > 0, r > 0$
- **Акция:** $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma B_t), S_0 > 0$ - геометрическое броуновское движение
    - μ – норма возврата, $\mu > 0$
    - σ – волатильность, $\sigma > 0$
    - $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – Винеровский процесс



https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function

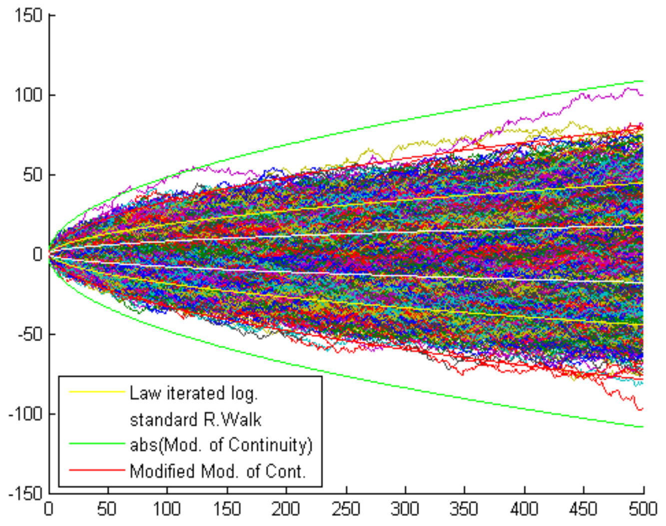


https://www.researchgate.net/figure/A-sample-path-of-geometric-Brownian-motion-process_fig3_29044153

Финансовый рынок Блэка-Шоулса

Винеровский процесс $B = (B_t)_{t \geq 0}$

- Броун, 1827: хаотические перемещения частичек цветочной пыльцы в жидкости
- Башелье, 1900: описание цен фин. активов на парижском рынке ценных бумаг
- Эйнштейн, 1905: физ.-мат. модель движения
- Формальный предел для процесса случайных блужданий:
  - $M_t = x + \sqrt{\delta} \sum_{i=1}^{[\frac{t}{\delta}]} \xi_i$, $[.]$ - целая часть числа, $(\xi_i)_{i \geq 1}$ - последовательность независимых сл.в., $E\xi_i = 0, D\xi_i = 1$, $t \in [0,1]$
- $B_0 = 0, P - \text{п. н}$
- $B_{t+u} - B_t$: 1) не зависит от B_s, $s < t, u \geq 0$, 2) $N(0, u)$
- B_t - непрерывная функция времени
- $limsup_{t \to \infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{2tln \ln t}} = 1, \;\; P - \text{п. н.}$



https://i.sstatic.net/c6GQl.png

Финансовый рынок Блэка-Шоулса

Элементы стохастического исчисления (без множества деталей)

- **Интеграл по B:** $I_t(f) \equiv \int_{(0,t]} f_s dBs$
- **Для простых функций:** $I_t(f) = \int_{(0,t]} f_s(\omega)dBs = \sum_i Y_i(\omega)(B_{s_i\wedge t} - B_{r_i\wedge t})$, $a\wedge b = \min(a,b)$
  - Простая функция – линейная комбинация элементарных функций $f_t(\omega) = Y_0(\omega)\mathrm{I}_{\{0\}}(t) + \sum_i Y_i(\omega)\,\mathrm{I}_{(r_i,s_i]}(t)$
  - Примеры элементарных функций: $f_t(\omega) = Y(\omega)\mathrm{I}_{\{0\}}(t), f_t(\omega) = Y(\omega)\mathrm{I}_{(r,s]}(t)$
  - $\mathrm{I}_{\{0\}}(t) = 1, iff\ t = 0;\quad \mathrm{I}_{(r,s]}(t) = 1, iff\ t \in (r,s]$– индикаторная функция
- **Процесс Ито:** $X_t = X_0 + \int_0^t a_s(\omega)ds + \int_0^t b_s(\omega)dB_s$
- **Формула Ито:** $F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t \left[\frac{dF}{\mathrm{ds}} + a_s(\omega)\ \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2}b_s^2(\omega)\ \frac{d^2F}{d^2x}\right] ds + \int_0^t \frac{dF}{dx} b_s(\omega)dB_s$
  - **Пример:** $dB_t^2 = dt +\ 2\,B_t dB_t$
- **Частный случай процессов Ито – диффузионный процесс**: $a_s(\omega) = a_s\big(X_s(\omega)\big), b_s(\omega) = b_s\big(X_s(\omega)\big)$
  - **Пример:** $S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$ - решение уравнения $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma s B_t), S_0 > 0$

Финансовый рынок Блэка-Шоулса

Модель Хестона (часть STAC-A2 спецификаций)

- Волатильность зависит от времени и случая
- **Банковский счет:** $dBk_t = r\,Bk_t dt,\ \ Bk_0 > 0, r > 0$
- **Акция:** $dS_t = S_t\left(\mu dt + \sqrt{v_t} B_t^1\right), S_0 > 0$
- **Волатильность:** $dv_t = k(\theta - v_t)dt + q\sqrt{v_t} dB_t^2, \mathrm{v}_0 > 0$
    - процесс **Орнштейна-Уленбека**
    - θ – волатильность цены акции на длинном интервале времени
    - k – скорость возврата v_t к θ
    - q – “волатильность волатильности”, определяет разброс колебаний v_t
    - ρ – коэффициент корреляции между B_t^1и B_t^2, $t > 0$
    - $2\,k\,\theta > q^2$

Определение опциона

Опцион Европейского типа

- Контракт между двумя сторонами, дающий право покупателю купить (продать) акцию по фиксированной цене K в фиксированный момент в будущем
- Определяется фиксированным временем исполнения T и функцией выплат F_T и $x^+ = \max(x, 0)$
- **Опцион покупателя (call):** $F_T = (S_T - K)^+$, цена опциона $C_T = e^{-rT}E(S_T - K)^+$
- **Опцион продавца (put):** $F_T = (K - S_T)^+$, цена опциона $P_T = e^{-rT}E(K - S_T)^+$
- **Формула Блэка- Шоулса**:
  - Call: $C_T = S_0\Phi(y_+) - Ke^{-rT}\Phi(y_-)$
  - Put: $P_T = -S_0[1 - \Phi(y_+)] + Ke^{-rT}[1 - \Phi(y_-)]$
  - $y_\pm = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + T(r \pm \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}$, $\Phi = \Phi(\mathrm{x})$ – функция стандартного нормального распределения
  - Call-Put паритет: $P_T = C_T - S_0 + Ke^{-rT}$

Определение опциона

Опцион Американского типа

- Контракт между двумя сторонами, дающий право покупателю купить (продать) акцию по фиксированной цене в любой момент до фиксированного момента в будущем. Контракт может быть предъявлен к исполнению только один раз.
- Определяется предельным временем исполнения T, фактическим временем исполнения $\tau \leq T$ и функцией выплат F_τ
- **Опцион покупателя (call)**: $F_\tau = (S_\tau - K)^+$
- **Опцион продавца (put)**: $F_\tau = (K - S_\tau)^+$

Некоторые численные методы для решения задачи:

- Биномиальный/Триномиальный
- Конечных разностей
- Регрессия на базе метода наименьших квадратов (**часть STAC-A2 спецификаций**)

Определение Греков

Часть А2 спецификаций

- Меры риска производных финансовых активов
- Характеристики, определяющие чувствительность цены опциона к финансовым параметрам
- Обозначаются с помощью букв греческого алфавита

Грек	Определение
Delta	$\frac{dC}{dS}$
Vega	$\frac{dC}{d\,\sigma}$
Theta	$\frac{dC}{d\,\tau}$
Rho	$\frac{dC}{d\,r}$
Gamma	$\frac{d^2C}{d\,^2S}$

Примеры конфигураций задач

1. **Масштабируемость системы**
   - Фиксированное кол-во акций (5) и шагов по времени (10)
   - Изменяемое кол-во Монте Карло траекторий: 5K, 10K, 100K, 150K, 200K
- **Мощность системы**
   - Фиксированное кол-во шагов по времени (10) и Монте Карло траекторий (10K)
   - Поиск максимального кол-ва акций, которые полностью обрабатываются за 10мин
- **Энергопотребление системы**
   - В условиях теста «мощность системы» измерение (удельного, на одну акцию) энергопотребления (Кдж)
- **Масштабируемость системы по кол-ву вычислительных устройств**
   - Фиксированное кол-во акций, шагов по времени, Монте Карло траекторий
   - Измерение ускорения из-за дополнительных вычислительных мощностей (например, кол-ва ядер)

TABLE I. STAC-A2.v0.5.GREEKS.* RESULTS (IN SECONDS) WITH VARYING PATHS (5 ASSETS, 10 TIMESTEPS)

	Number of Paths				
	5K	**10K**	**100K**	**150K**	**200K**
System 1	0.11	0.23	2.75	4.13	5.66
System 2	0.07	0.14	1.62	2.35	3.32

Intel® 64 mode, KMP_AFFINITY=compact, LP64 mode of Intel® MKL. Build options: icl –xSSE4.2 –openmp (System 1), icl –xAVX –openm (System 2).

TABLE II. COMPARISON OF INTEL ARCHITECTURES USING STAC-A2.v0.5.GREEKS.CAPACITY AND STAC-A2.v0.5.GREEKS.EFFICIENCY

	System 1	**System 2**	**Percentage difference**
Mean Watts consumed	380	375	-1%
Kilojoules consumed	228	225	-1%
ASSET CAPACITY (Assets completed)	66	79	20%
ASSET EFFICIENCY (Assets per kilojoule)	0.29	0.35	21%

10 time steps, 10K paths. Intel(R) Composer XE 2013. Intel® 64 mode, KMP_AFFINITY=compact, LP64 mode of Intel® MKL. Build options: icl –xSSE4.2 –openmp (System 1), icl –xAVX –openm (System 2).

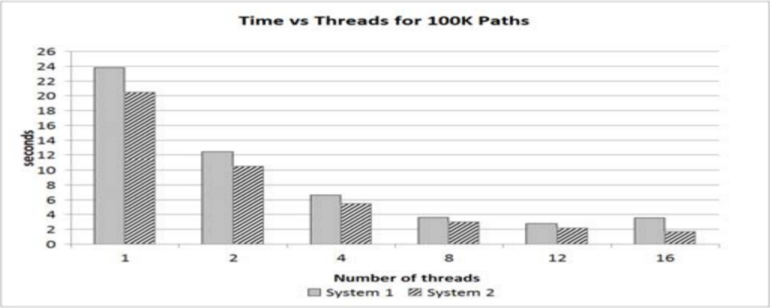


Figure 2 – Speed vs SUT Scale (Threads) for Intel Architectures using STAC-A2.v0.5.GREEKS.*

https://stacresearch.com/sites/default/files/d5root/SC12_submission_stac.pdf

Декомпозиция задач на строительные блоки

- Математические функции (sqrt, exp,…)
- Генераторы распределений (равномерное, Гауссово, логнормальное)
- Линейная алгебра (Холецкий, умножение матрица-вектор)
- Интегрирование стохастических дифференциальных уравнений
- Регрессия/метод наименьших квадратов
- …

Домашнее задание (на выбор один пункт)

- Реализовать формулу Блэка-Шоулса для опциона покупателя
  - $r = 0.05,\ \sigma = 0.1,\ S_0 = 100,\ K = 100,$ T= 1
- Предусмотреть случай расчета $n = 1000$ опционов, наборы параметров которых заранее подготовлены по самостоятельно выбранному правилу
- Сгенерировать графики 1000 траекторий Винеровского процесса
  - $\mathrm{T} = 1, \delta = 0.0001$
- Сгенерировать графики 1000 траекторий процесса Орнштейна-Уленбека
  - $\mathrm{T} = 1, v_0 = 10, k = 10, \theta = 50, q = 1, \delta = 0.0001$