

## 1.4.1 Изучение физического маятника

Тимур Байдюсенов Б01-302

29.09.2023

### 1 Аннотация

В работе определяется справедливость формул периода колебаний для физического маятника и значение  $g$ . Во время выполнения работы исследовалась зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции. При обработке результатов оценил погрешность прямых и косвенных измерений.

### 2 Теоретические сведения

Физический маятник - любое твёрдое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M \quad (1)$$

где  $J$  - момент инерции маятника,  $\varphi$  - угол отклонения маятника от положения равновесия,  $t$  - время,  $M$  - момент сил, действующих на маятник

По теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника вычисляется по формуле:

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2 \quad (2)$$

Момент силы тяжести, действующий на маятник:

$$M = -mga \sin \varphi \quad (3)$$

При малых углах  $\varphi$  формула приобретает вид:

$$M \approx -mga\varphi \quad (4)$$

Подставляя выражение для  $J$  и  $M$  в (1), получаем уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}} \quad (6)$$

Период колебаний находится по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \quad (7)$$

Период колебаний маятника без груза находится по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g(1 + \frac{m_{\text{ПР}}}{m_{\text{СТ}}})x_{\text{Ц}}}} \quad (8)$$

Период колебаний маятника с грузом находится по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + m_{\Gamma} y^2}{gMx_{\text{Ц}}}} \quad (9)$$

### 3 Оборудование

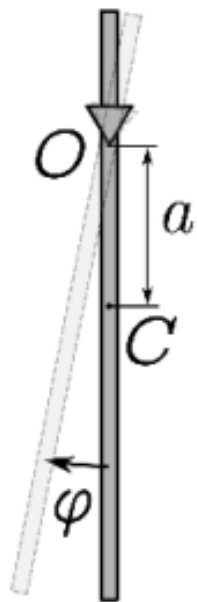


Рис. 1: А: Стержень как физический маятник

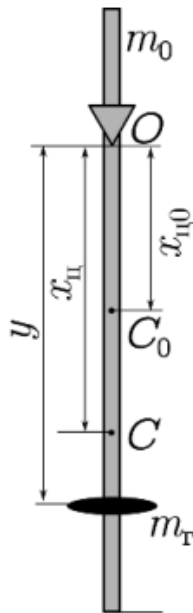


Рис. 2: Б: Маятник с дополнительным грузом

Систематические погрешности приборов:

Штангенциркуль:  $\Delta_{\text{ШТ}} = \pm 0.05$  мм

Линейка :  $\Delta_{\text{Л}} = \pm 0.5$  мм

Секундомер :  $\Delta_{\text{С}} = \pm 0.005$  с

Весы :  $\Delta_{\text{В}} = \pm 0.005$  г

## 4 Результаты измерений и обработка данных

Измерение оборудования:

$m_{\text{Гр}} = 315,9$  г, масса груза

$m_{\text{СТ}} = 890,8$  г, масса стержня

$m_{\text{Пр}} = 76,0$  г, масса призмы

$l_{\text{СТ}} = 996$  мм, длина стержня

Таблица 1: Результаты измерения периода колебаний

номер	t, с
1	30,75
2	30,75
3	30,70
4	30,72
5	30,77
6	30,70
7	30,71
8	30,74
9	30,73
10	30,74
$\bar{t}, \text{ с}$	30,73
$\sigma_t^{\text{случ}}$	0,025
$\sigma_t^{\text{сист}}$	0,005
$\sigma_t^{\text{полн}}$	0,026

Вычислим  $\sigma_t^{\text{случ}}$  по формуле:

$$\sigma_t^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (t_i - \bar{t})^2} \quad (10)$$

Вычислим  $\sigma_t^{\text{полн}}$  по формуле:

$$\sigma_t^{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_t^{\text{случ}2} + \sigma_t^{\text{сист}2}} \quad (11)$$

Используя погрешность  $\sigma_t$  измерения времени, оценим число колебаний  $n$ , по которому следует измерять период, чтобы относительная погрешность измерений была не хуже, чем  $\epsilon \approx 0,1\%$

$$n = \frac{\sigma_t}{T\epsilon_T} = \frac{0,026}{1,5 \cdot 10^{-3}} \approx 17 \quad (12)$$

Таблица 2: Результаты измерения периода для установки А(без груза)

номер	a, м	$x_{Ц}$ , м	n	$t_n$ , с	T, с	g, м/с <sup>2</sup>
1	0,28	0,217	20	33,62	1,681	9,55
2	0,242	0,221	20	31,81	1,5905	10,47
3	0,253	0,234	20	32,67	1,6335	9,373
4	0,267	0,248	20	30,95	1,5475	9,85
5	0,249	0,232	20	31,38	1,569	10,24
6	0,256	0,237	20	32,46	1,623	9,37
7	0,263	0,244	20	31,21	1,5605	9,85
8	0,247	0,229	20	31,96	1,598	10,00

Для установки А вычислим g по формуле:

$$g = 4\pi^2 \frac{l^2/12 + a^2}{T^2 x_{Ц} (1 + \frac{m_{ПР}}{m_{СТ}})} \quad (13)$$

Определим погрешность по формуле:

$$\sigma_g = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{l}{6T^2 x_{Ц} (1 + \frac{m_{ПР}}{m_{СТ}})} \sigma_l\right)^2 + \left(\frac{2a}{T^2 x_{Ц} (1 + \frac{m_{ПР}}{m_{СТ}})} \sigma_a\right)^2 + \left(-2 \frac{l^2/12 + a^2}{T^3 x_{Ц} (1 + \frac{m_{ПР}}{m_{СТ}})} \sigma_T\right)^2 + \left(-\frac{l^2/12 + a^2}{T^2 x_{Ц}^2 (1 + \frac{m_{ПР}}{m_{СТ}})} \sigma_{x_{Ц}}\right)^2 + \left(-\frac{l^2/12 + a^2}{T^2 x_{Ц}} \frac{m_{СТ}}{(m_{ПР} + m_{СТ})^2} \sigma_{m_{ПР}}\right)^2 + \left(\frac{l^2/12 + a^2}{T^2 x_{Ц}} \frac{m_{ПР}}{(m_{ПР} + m_{СТ})^2} \sigma_{m_{СТ}}\right)^2} \quad (14)$$

Усредним значения g, получим:  $g_{a,ср} = 9,84 \pm 0,07$  м/с<sup>2</sup>

Таблица 3: Результаты измерения периода для установки Б(с грузом)

номер	y, м	$x_{Ц}$ , м	n	$t_n$ , с	T, с	g, м/с <sup>2</sup>
1	0,392	0,261	20	31,64	1,582	9,69
2	0,437	0,274	20	31,91	1,5955	10,18
3	0,496	0,289	20	33,74	1,687	9,96
4	0,606	0,315	20	37,05	1,8525	9,82
5	0,579	0,31	20	36,64	1,832	9,62
6	0,56	0,303	20	35,22	1,761	10,10
7	0,53	0,296	20	34,33	1,7165	10,14
8	0,596	0,306	20	36,61	1,8305	9,90

Для установки Б вычислим  $g$  по формуле:

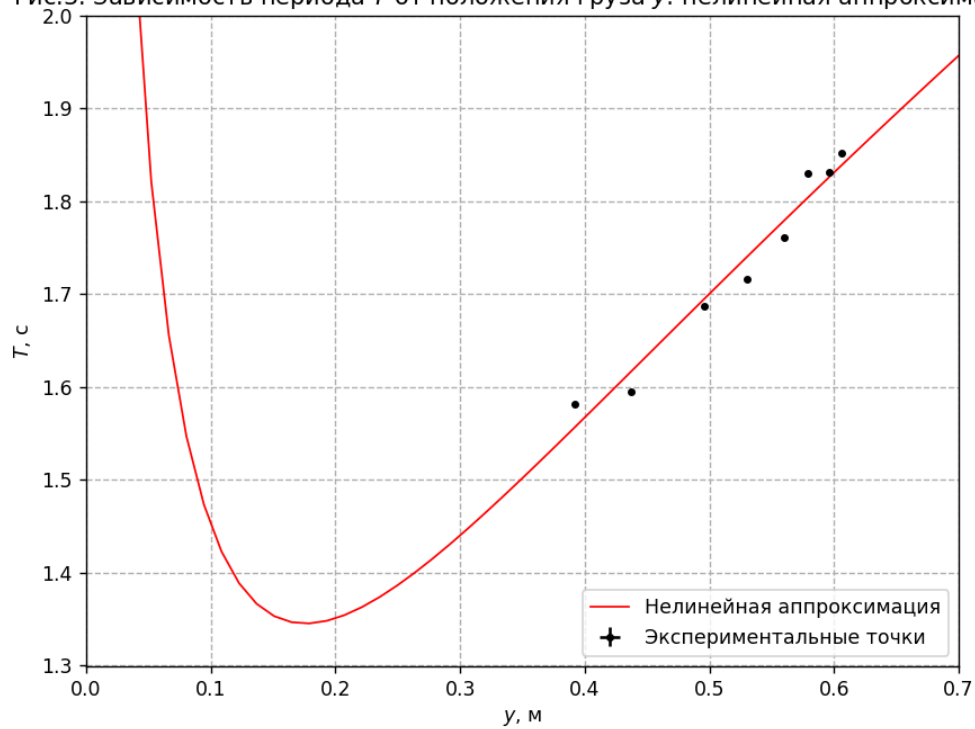
$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{J_0 + m_{\Gamma} y^2}{M x_{\Gamma}} \quad (15)$$

где  $J_0 = \frac{m_{\text{СТ}} l_{\text{СТ}}^2}{12} + m_{\text{СТ}} a^2$

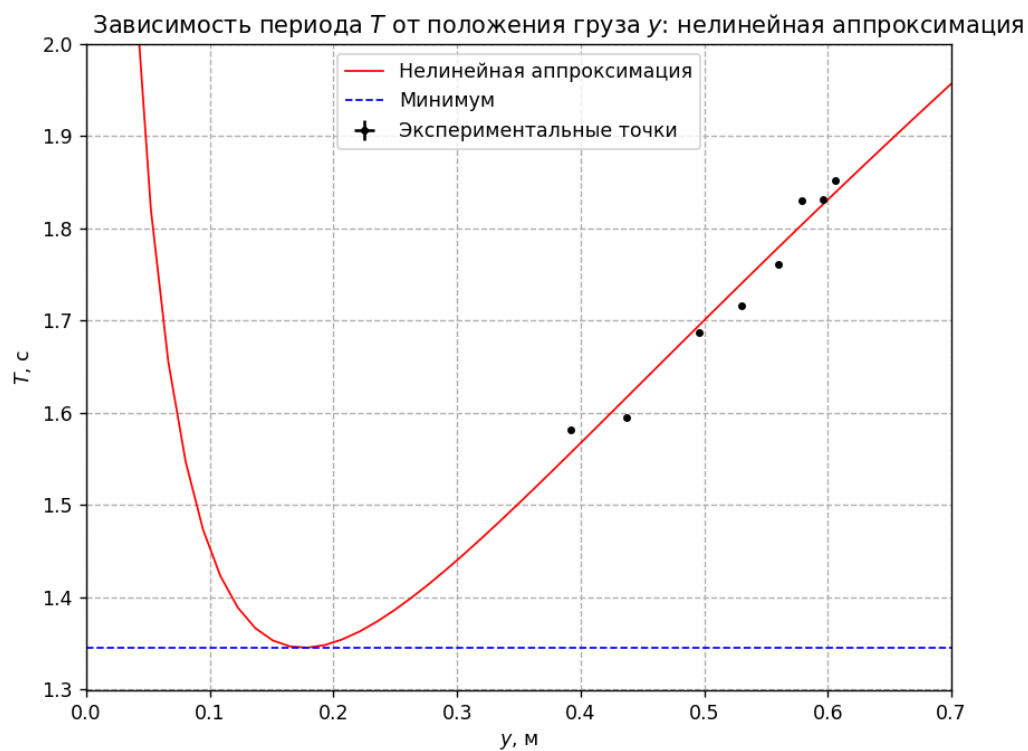
Усредним значения  $g$ , получим:  $g_{\text{б,ср}} = 9,93 \pm 0,07 \text{ м/с}^2$

Построим график зависимости  $T(y)$ :

Рис.3. Зависимость периода  $T$  от положения груза  $y$ : нелинейная аппроксимация



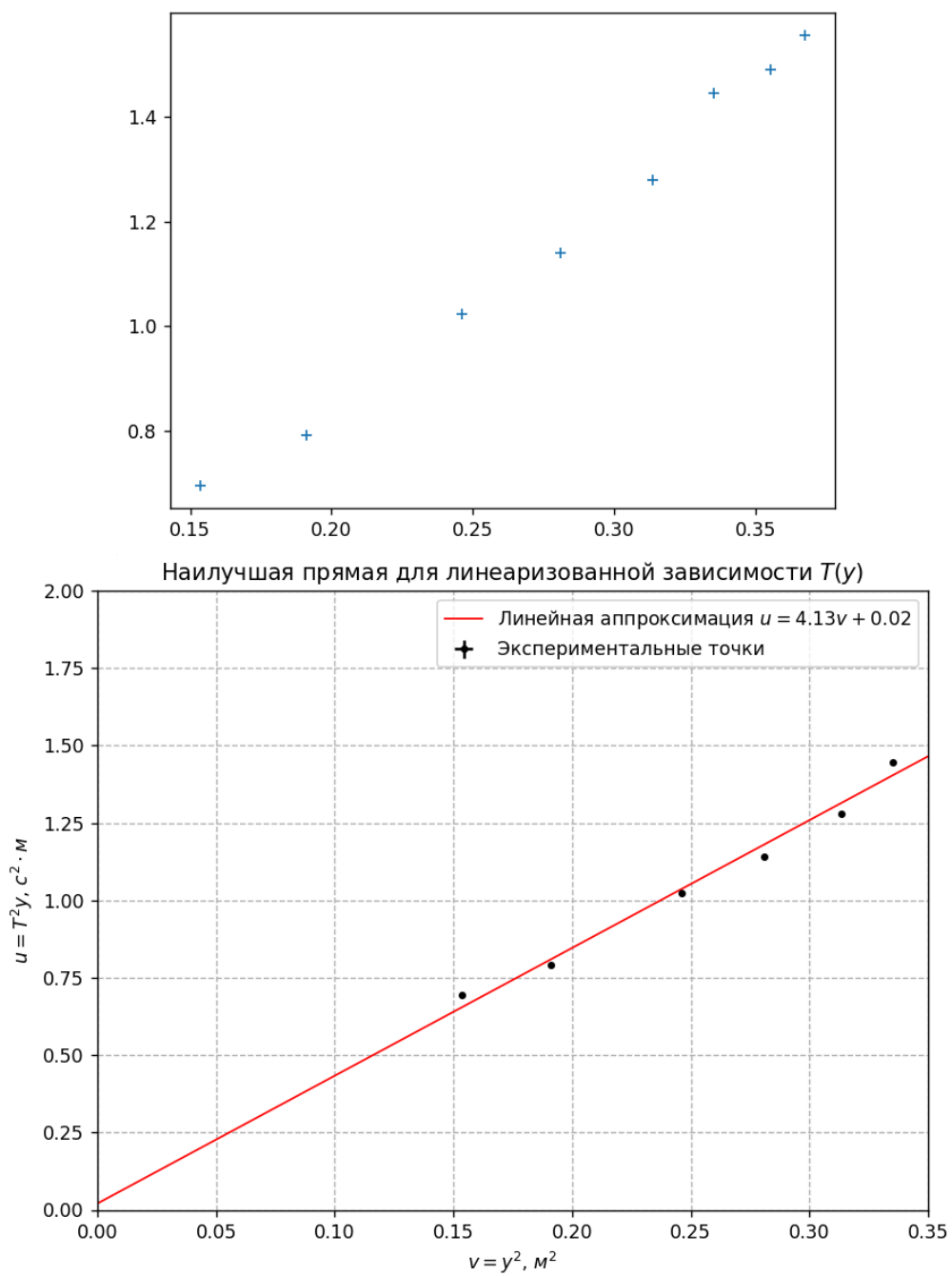
Найдем минимум с помощью графика:



$T_{min} = 1,345$  с согласно графику, что согласуется с теоретическим расчетом ( $T_{min} = 1,52$  с). Однако измерение с помощью графика имеет существенную погрешность.

Построим график в координатах  $u = T^2y$ ,  $v = y^2$ :





Определим  $g$  с помощью графика, методом наименьших квадратов и

оценим погрешность. В итоге получим,

$$g = 9,565 \pm 0,39 \text{ м/с}^2$$

## 5 Вывод

Определил справедливость формул периода колебаний для физического маятника и значение  $g$ . Во время выполнения работы исследовал зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции. При обработке результатов оценил погрешность прямых и косвенных измерений. В результате в обоих случаях были получены значения действительному: среднее арифметическое:  $g_{b,ср} = 9,93 \pm 0,07/2$ , по МНК:  $g = 9,565 \pm 0,39 \text{ м/с}^2$ .