

第四章 数组

- ◆ 数组的定义和特点
- ◆ 数组的顺序存储结构
- ◆ 矩阵的压缩存储



本章小结

课后作业

数组

🏠 数组可以看作是一种特殊的线性表，即线性表数据元素本身又是一个线性表。

🏠 数组的定义和特点

🕷 定义

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} (a_{11}) & (a_{12}) & (\dots) & (\dots) & (a_{1n}) \\ (a_{21}) & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ (\dots) & \dots & \dots & \dots & (\dots) \\ (a_{m1}) & (a_{m2}) & (\dots) & (\dots) & (a_{mn}) \end{bmatrix}$$

🕷 数组特点

- ✓ 数组结构固定，数组行列数不可变
- ✓ 数据元素同构

🕷 数组运算

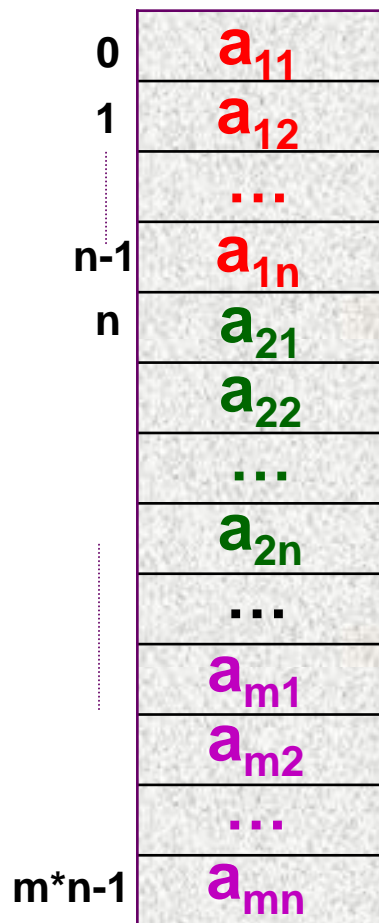
- ✓ 给定一组下标，存取/修改相应的数据元素
- ✓ 一般不进行插入/删除操作

数组的顺序存储结构

可随机存取任一元素

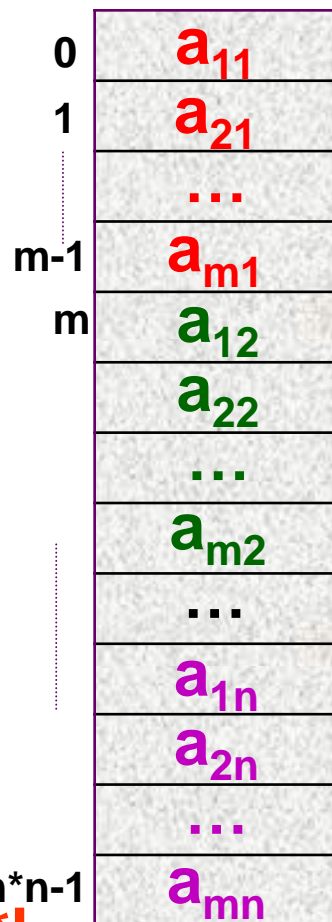
次序约定——将多维数组以某种次序存储在一维内存中

以行序为主序: BASIC、PASCAL、C

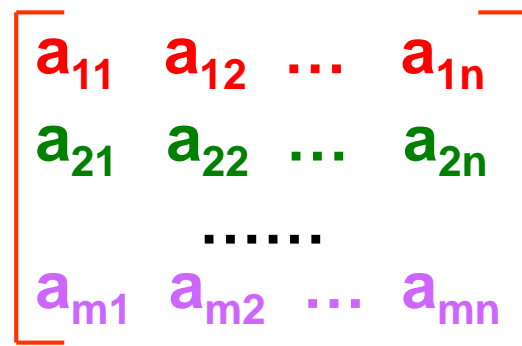


$$\text{Loc}(a_{ij}) = \text{Loc}(a_{11}) + [(i-1)n + (j-1)] * L$$

以列序为主序: FORTRAN



$$\text{Loc}(a_{ij}) = \text{Loc}(a_{11}) + [(j-1)m + (i-1)] * L$$



Back

矩阵的压缩存储

在数值分析中，经常出现一些阶数很高的矩阵，同时在矩阵中有很多值相同的元素或零元素，可对这些矩阵进行压缩存储。

压缩存储的基本思想——

值相同的元素分配一个存储空间；

零元素不分配空间

压缩存储后，若能得到元素 a_{ij} 的存储地址，则仍具有随机存取功能。

特殊矩阵 { 对称矩阵
三角矩阵
对角矩阵

值相同的元素或零元素分布有规律

非零元少且分布无规律

稀疏矩阵



特殊矩阵压缩存储后，是否还具有随机存取功能？

Back

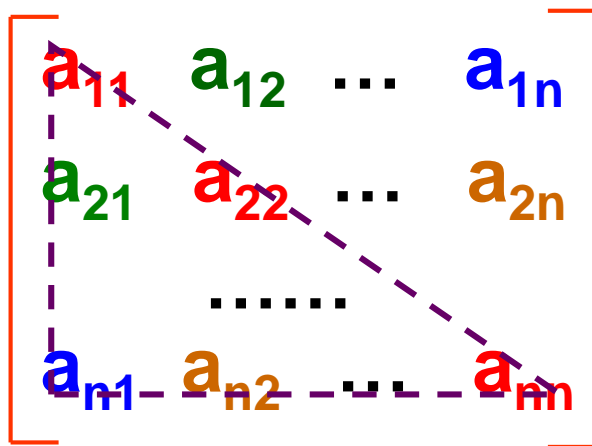
矩阵的压缩存储



特殊矩阵



对称矩阵



$$a_{ij} = a_{ji}$$

压缩存储

元素个数:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Loc}(a_{ij}) = \text{Loc}(a_{11}) + \left[\frac{i(i-1)}{2} + (j-1) \right] * L \quad (i \geq j)$$

$$\text{Loc}(a_{ij}) = \text{Loc}(a_{11}) + \left[\frac{j(j-1)}{2} + (i-1) \right] * L \quad (i < j)$$

按行序为主序

a_{11}
a_{21}
a_{22}
a_{31}
a_{32}
a_{33}
.....
a_{n1}
.....
a_{nn}

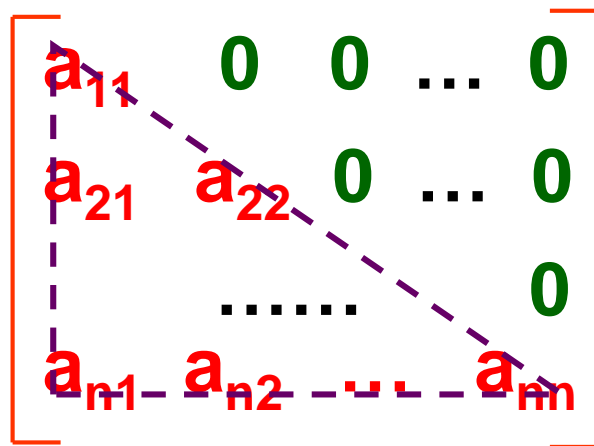


压缩存储

矩阵的压缩存储

特殊矩阵

三角矩阵



压缩存储
元素个数: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{Loc}(a_{ij}) = \text{Loc}(a_{11}) + \left[\frac{i(i-1)}{2} + (j-1) \right] * L \quad (i \geq j)$$

$$a_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

按行序为主序

a_{11}
a_{21}
a_{22}
a_{31}
a_{32}
a_{33}
.....
a_{n1}
.....
a_{nn}



压缩存储

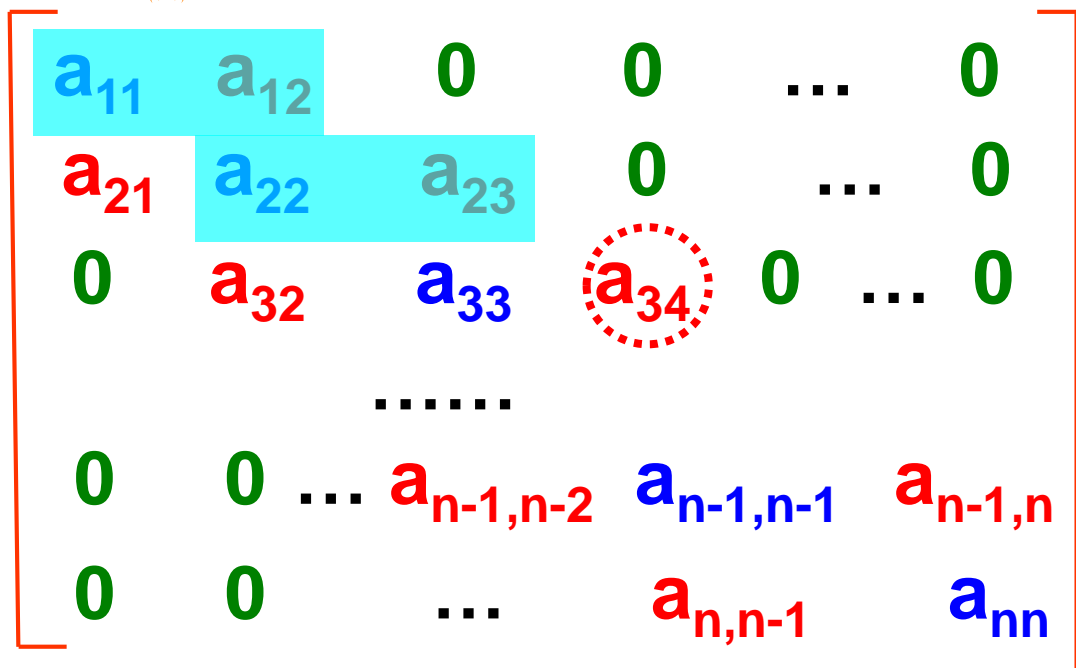
矩阵的压缩存储



特殊矩阵



对角矩阵



按行序为主序

a_{11}
a_{12}
a_{21}
a_{22}
a_{23}
a_{32}
a_{33}
a_{34}
\dots
$a_{n,n-1}$
a_{nn}

压缩存储元素个数: $(n-2) \times 3 + 4 = 3n - 2$

$$\text{Loc}(a_{ij}) = \text{Loc}(a_{11}) + [2(i-1) + (j-1)] * L \quad (|i-j| \leq 1)$$

$a_{ij}=0$

其它




压缩存储

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵

稀疏矩阵的定义

稀疏矩阵的顺序压缩存储



顺序压缩存储后，
稀疏矩阵是否还能
随机存取？

三元组表

行逻辑链接的顺序表

伪地址表示法

顺序压缩存储
后，稀疏矩阵
失去了随机存
取功能

稀疏矩阵的转置

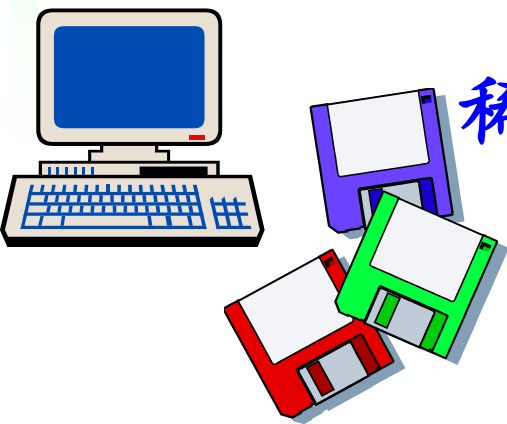
按原矩阵 M 的列序转置

快速转置

稀疏矩阵的链式压缩存储

带行指针向量的单链表表示

十字链表



Back

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵

 定义：非零元较零元少，且分布没有一定规律的矩阵。

假设 m 行 n 列的矩阵含 t 个非零元素

$$\delta = \frac{t}{m \times n}$$

通常认为 $\delta \leq 0.05$ 的矩阵为稀疏矩阵

稀疏因子

 压缩存储原则：只存储每个非零元的行、列下标及其值和矩阵的行列维数

M 由 $\{(1,2,12), (1,3,9), (3,1,-3),$
 $(3,6,14), (4,3,24), (5,2,18),$
 $(6,1,15), (6,4,-7)\}$

和矩阵维数 $(6,7)$ 唯一确定

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 7}$$



稀疏矩阵

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的顺序压缩存储

 三元组表

i	j	e
---	---	---

三元组结构

```
typedef struct
{   int i, j;           //非零元的行、列下标
    ElemType e;        //非零元的值
} Triple;
```

稀疏矩阵结构

```
#define MAXSIZE 100 //非零元最大个数
typedef struct
{   Triple data[MAXSIZE + 1];
                                //三元组表, data[0]未用
    int mu, nu, tu; //矩阵行、列数、非零元个数
} TSMatrix;
```

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的顺序压缩存储

三元组表

行列下标

非零元值

	i	j	e
0	6	7	8
1	1	2	12
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

ma.data

TSMatrix ma;

data[0]号单元未用
或存放矩阵**行列维数**和**非零元个数**

矩阵行数: **ma.mu=6**

矩阵列数: **ma.nu=7**

非零元个数: **ma.tu=8**

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 7}$$

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的顺序压缩存储

三元组表

行列下标

非零元值

	i	j	e
0	6	7	8
1	1	2	12
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

ma.data

TSMatrix ma;

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 7}$$

三元组表又称有序的双下标法，特点：

- 非零元在表中按行序有序存储
- 便于进行依行顺序处理的矩阵运算
- 若需存取某非零元，需从头查找。

如何存取 $M[i][j]$? 如取 $M[4][3]$ 的值

三元组表法中， $M[i][j]$ 的存储位置与其下标无关，而取决于之前的非零元个数，因此需要从头查找。

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的顺序压缩存储

带行逻辑链接的顺序表——带行链接信息的三元组表

增加一个数组 $rpos[MaxRC+1]$ ($MaxRC$ 为行数)

$rpos[i]$ 表示第 i 行第 1 个非零元在三元组表中的下标，有：

$\begin{cases} rpos[1]=1 & \text{第1行第1个非零元在三元组中的下标为1} \\ rpos[i]=rpos[i-1]+ \text{第} i-1 \text{行非零元个数} \quad (i \geq 2) \end{cases}$

$rpos[0]$ 不用或
存矩阵行数

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 7}$$

M.rops	
0	6
1	1
2	3
3	3
4	5
5	6
6	7

0	6	7	8
1	1	2	12
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

ma.data

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的顺序压缩存储

带行逻辑链接的顺序表——带行链接信息的三元组表

增加一个数组 $rpos[MaxRC+1]$ ($MaxRC$ 为行数)

$rpos[i]$ 表示第 i 行第 1 个非零元在三元组表中的下标，有：

$$\begin{cases} rpos[1]=1 \\ rpos[i]=rpos[i-1]+ \text{第 } i-1 \text{ 行非零元个数} \quad (i \geq 2) \end{cases}$$

第 1 行第 1 个非零元在三元组中的下标为 1

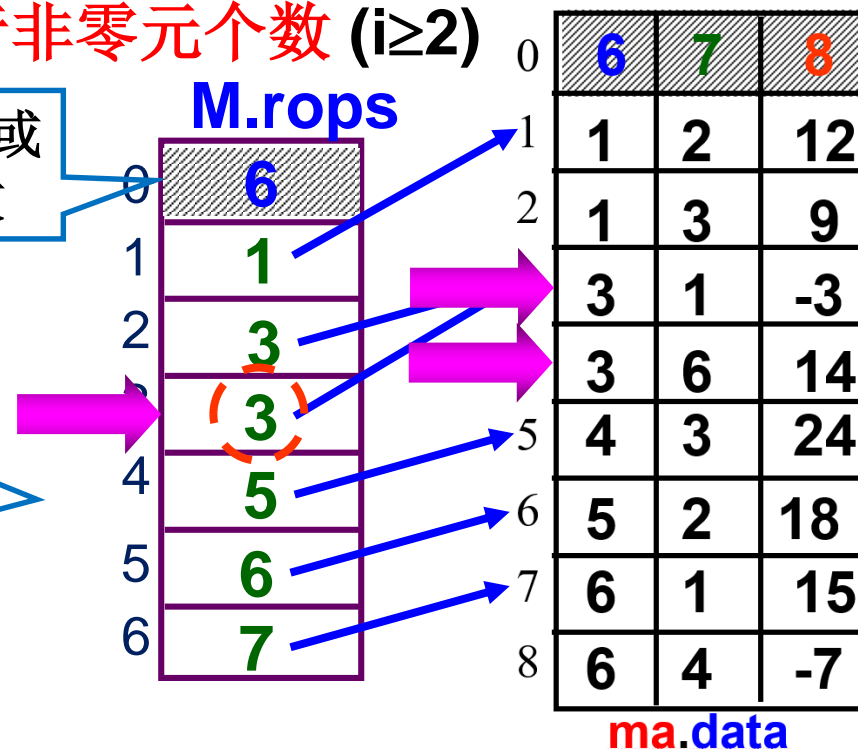


如何存取
 $M[i][j]$?

如取 $M[3][6]$ 的值

查找 $M[i][j]$ ，从第 i 行第 1 个非零元开始，找至第 $i+1$ 行第一个非零元之前。

$rpos[0]$ 不用或
存矩阵行数



矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的顺序压缩存储

伪地址表示法

伪地址：行优先存储时，包括零元素在内的元素相对位置

伪地址

非零元值

addr e

矩阵行列维数

伪地址能够表示元素在矩阵中的位置

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 7}$$

0	6	7
1	2	12
2	3	9
3	15	-3
4	20	14
5	24	24
6	30	18
7	36	15
8	39	-7

M.data

0	a_{11}
1	a_{12}
...	...
n-1	a_{1n}
n	a_{21}
	a_{22}
...	...
	a_{2n}
...	...
	a_{m1}
	a_{m2}
...	...
m*n-1	a_{mn}

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的顺序压缩存储

伪地址表示法

伪地址：行优先存储时，包括零元素在内的元素相对位置

如何存取 $M[i][j]$?

如取 $M[3][6]$ 的值

$$\text{伪地址} = 2 * 7 + 6 = 20$$

$M =$

0	12	9	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
-3	0	0	0	0	14	0
0	0	24	0	0	0	0
0	18	0	0	0	0	0
15	0	0	-7	0	0	0

6x7



稀疏矩阵

m*n-1

0	a_{11}
1	a_{12}
...	...
n-1	a_{1n}
n	a_{21}
	a_{22}
...	...
	a_{2n}
...	...
	a_{m1}
	a_{m2}
...	...
	a_{mn}

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的转置

问题：已知稀疏矩阵 **M** 的三元组表，求其转置矩阵 **T** 的三元组表

问题分析：一般矩阵 **M** 的转置

$$M_{mu \times nu} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1nu} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mu1} & a_{mu2} & \dots & \dots & a_{munu} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{blue arrow}} T_{nu \times mu} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1mu} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{nu1} & a'_{nu2} & \dots & \dots & a'_{numu} \end{bmatrix}$$

```
for(col=0;col<nu;col++)
```

```
    for(row=0;row<mu;row++)
```

```
        T[col][row]=M[row][col];
```

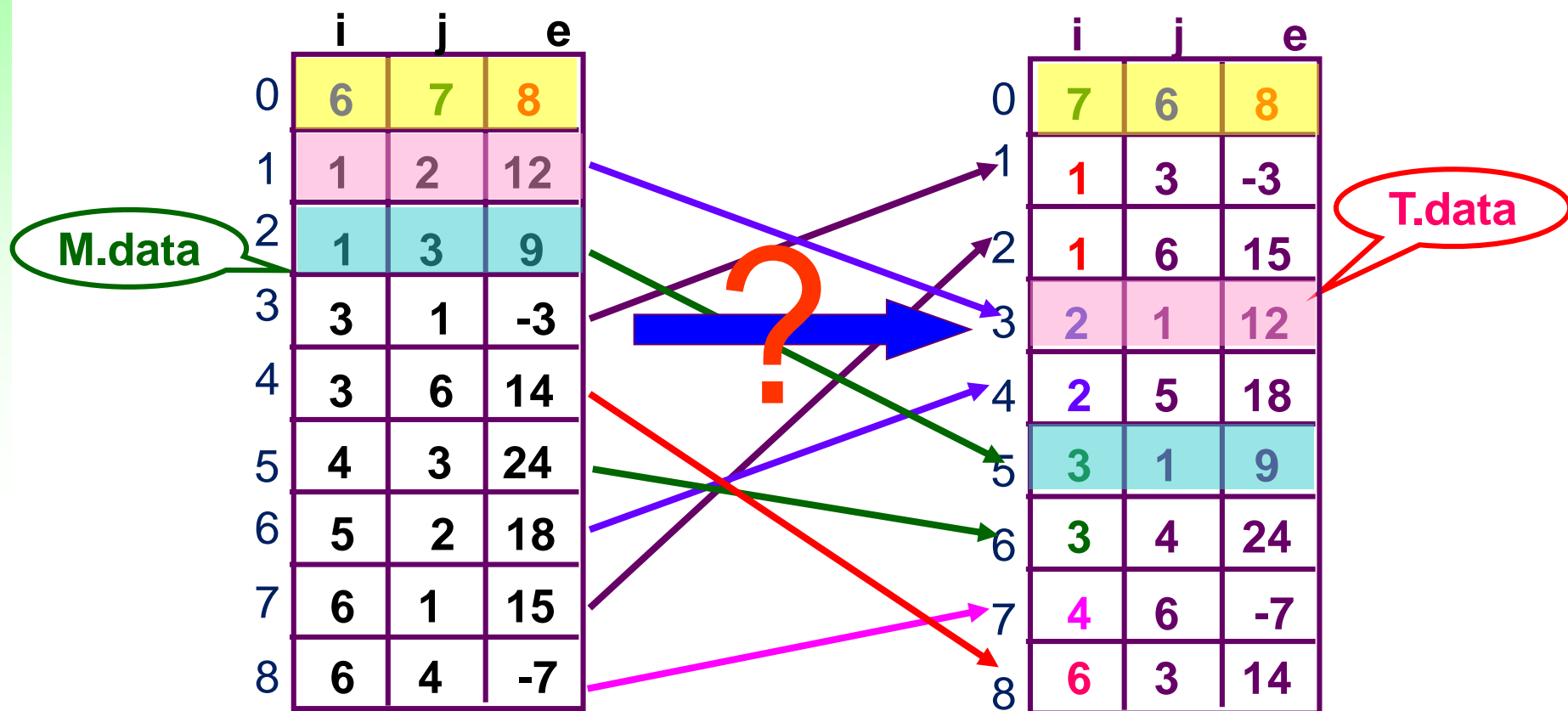
```
T(n)=O(mu×nu)
```

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的转置

问题：已知稀疏矩阵 **M** 的三元组表，求其转置矩阵 **T** 的三元组表

问题分析：压缩存储后矩阵 **M** 的转置

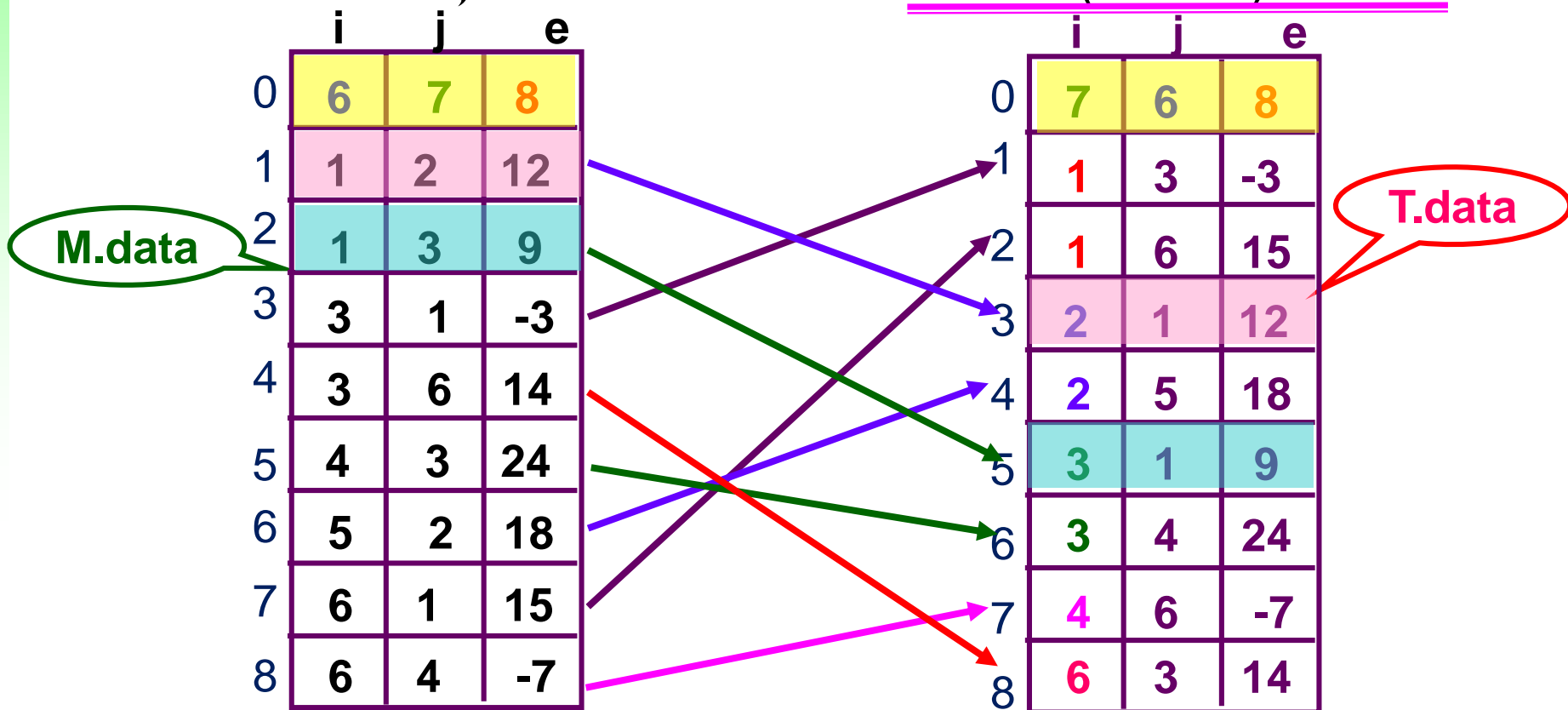


矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的转置

求解思路：

- ① 将矩阵行、列数互换，非零元个数不变
- ② 将每个三元组中的*i*和*j*相互调换，非零元值不变
- ③ 重新排序，使T.data中元素以T的行(M的列)为主序

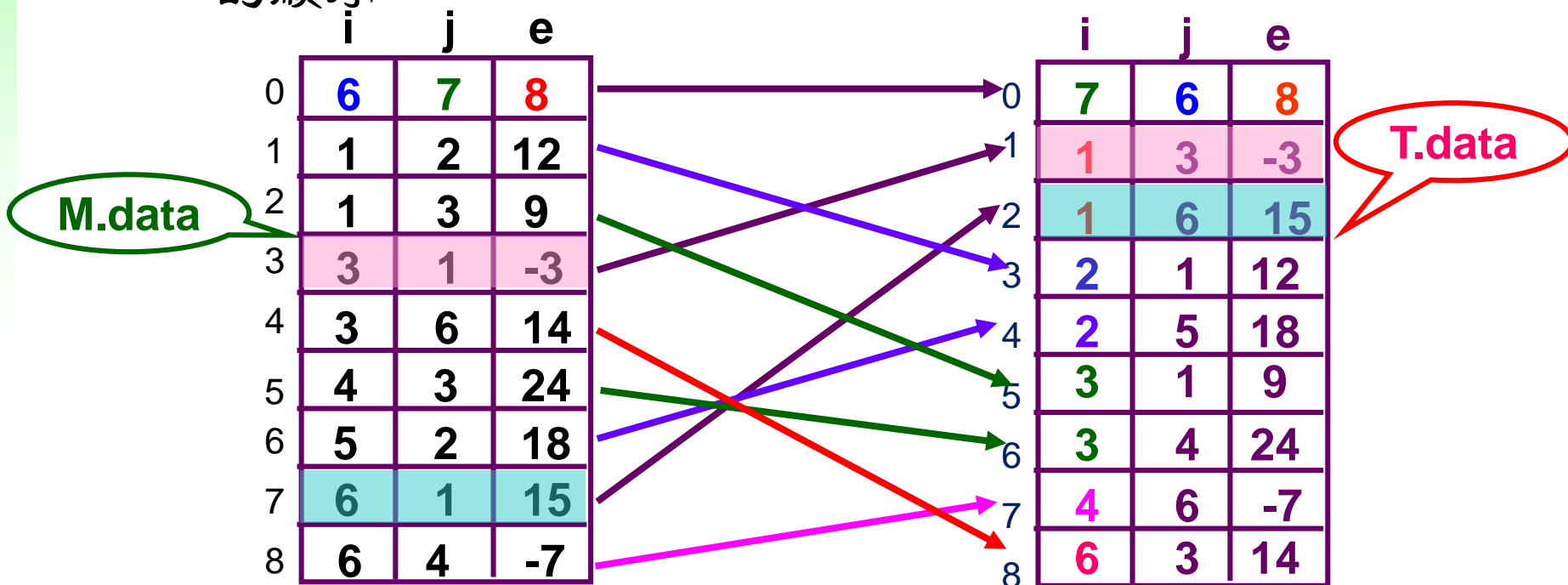


矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的转置

方法一：按M的列序转置

- ① 按矩阵T中三元组表T.data的顺序，依次在矩阵M的三元组表M.data中找到相应三元组进行转置
- ② 为找到M.data中第i列所有非零元素，需对M.data扫描一遍
- ③ 由于M.data以M行序为主序，所以得到的恰是T.data中应有的顺序



矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的转置

方法一：按M的列序转置

- ① 按矩阵T中三元组表T.data的顺序，依次在矩阵M的三元组表M.data中找到相应三元组进行转置
- ② 为找到M.data中第i列所有非零元素，需对M.data扫描一遍
- ③ 由于M.data以M行序为主序，所以得到的恰是T.data中应有的顺序

col = 1

	i	j	e
0	6	7	8
1	1	2	12
2	1	3	9
3	3	1	-3
4	3	6	14
5	4	3	24
6	5	2	18
7	6	1	15
8	6	4	-7

M.data

	i	j	e
0	7	6	8
1	1	3	-3
2	1	6	15
3	2	1	12
4	2	5	18
5	3	1	9
6	3	4	24
7	4	6	-7
8	6	3	14

T.data

算法结束



查找每一列非零元都需要对三元组表扫描一次，因此，算法效率较低。

稀疏矩阵的转置 —— 按M的列序转置

```
Status TransposeSMatrix(TSMatrix M, TSMatrix &T)
```

```
{ int col, p, k;
```

```
    T.mu=M.nu;    T.nu=M.mu;    T.tu=M.tu;
```

设置矩阵信息

```
    if(T.tu)
```

```
    {    k=1;
```

有非零元，转置

k为T.data表下标

```
        for( col=1;col<=M.nu;col++)
```

查找M每一列的非零元

```
            for( p=1;p<=M.tu;p++)
```

```
                if( M.data[p].j==col )
```

扫描M的所有非零元

```
                {    T.data[k]. i =M.data[p].j;
```

```
                    T.data[k]. j=M.data[p].i;
```

```
                    T.data[k]. e=M.data[p].e;
```

```
                    k++;
```

```
                }
```

```
        return OK;
```

```
    }
```

```
    return ERROR;
```

```
}
```

$T(n)=O(M.nu \times M.tu)$

若M.tu与M.mu \times M.nu同数量级

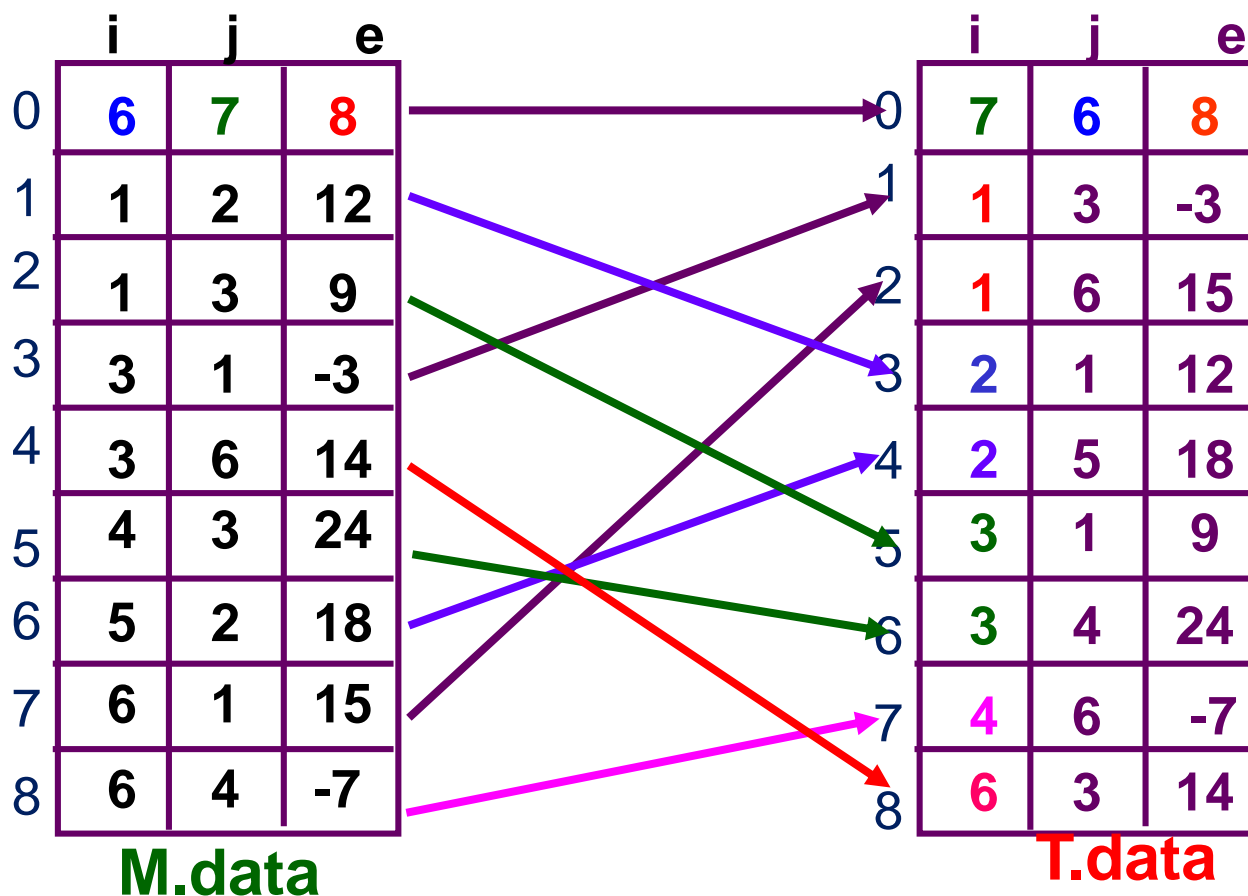
则 $T(n)=O(M.mu \times M.nu^2)$

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的转置

方法二：快速转置

😊 按M.data中三元组次序转置，结果放入T.data中恰当位置



矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的转置

方法二：快速转置

☺ 按M.data中三元组次序转置，结果放入T.data中恰当位置

☺ 实现：设置2个数组

num[col]：矩阵M中第col列中非零元个数

cpot[col]：矩阵M中第col列第1个非零元在T.data中位置

$\left\{ \begin{array}{l} \text{cpot}[1]=1; \\ \text{cpot}[\text{col}]=\text{cpot}[\text{col}-1]+\text{num}[\text{col}-1]; (2 \leq \text{col} \leq \text{M.nu}) \end{array} \right.$

M.data

1	2	12
1	3	9
3	1	-3
3	6	14
4	3	24
5	2	18
6	1	15
6	4	-7

col	1	2	3	4	5	6	7
num[col]	2	2	2	1	0	1	0
cpot[col]	1	3	5	7	8	8	9

算法演示

稀疏矩阵的转置 ——快速转置

```
void fast_transpos ( TSMatrix M, TSMatrix &T )
```

```
{ int col,p,k , num[N],cpot[N];
```

设置矩阵信息

```
T.mu = M.nu; T.nu = M.mu; T.tu = M.tu;
```

```
if(T.tu)
```

```
{ for(col=1; col<=M.nu; col++ ) num[col]=0;
```

num[]清零

```
for(p=1; p<=M.tu; p++ ) num[ M.data[p].j ]++;
```

设置num[]

```
cpot[0]=0; cpot[1]=1;
```

```
for(col=2; col<=M.nu; col++ )
```

设置cpot[]

```
    cpot[col]=cpot[col-1]+num[col-1];
```

```
for( p=1; p<=M.tu; p++ )
```

```
{ col=M.data[p].j; k=cpot[col];
```

转置

```
T.data[k].i=M.data[p].j; T.data[k].j=M.data[p].i;
```

```
T.data[k].e=M.data[p].e; cpot[col]++;
```

```
}
```

```
}
```

```
}
```

$T(n)=O(M.nu+M.tu)$ 若 $M.tu$ 与 $M.mu \times M.nu$ 同数量级
则 $T(n)=O(M.mu \times M.nu)$

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的链式压缩存储

 引入稀疏矩阵链式存储的原因：

- ☆ 用三元组表存储稀疏矩阵，在单纯的存储和做类似转置之类的运算时可以节约存储空间，且运算速度较快；
- ☆ 但当进行矩阵相加等运算时，稀疏矩阵的非零元位置和个数都会发生变化。使用三元组表必然会引起数组元素的大量移动。

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的链式压缩存储

带行指针向量的单链表表示

- ✓ 每行非零元用一个单链表存储
- ✓ 单链表结点存放非零元的所在列及值
- ✓ 用行指针数组存储各行单链表的头指针

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

RowList **M**;

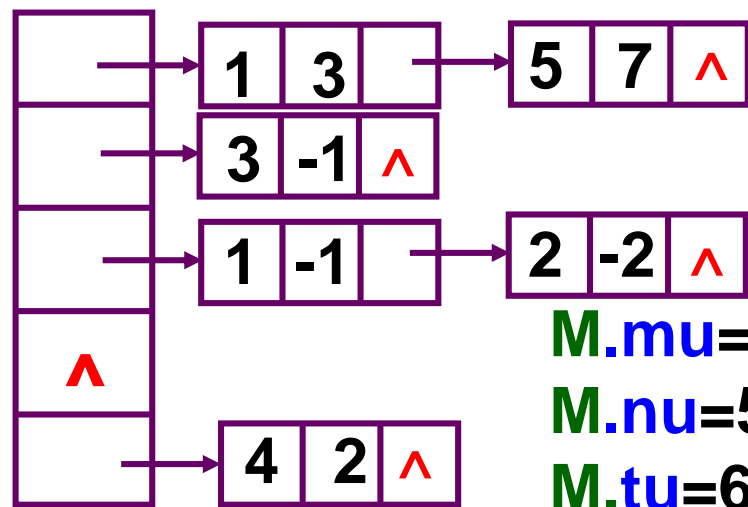
单链表结点

```
typedef struct RLNode
{   int j;
    ElemType e;
    struct RLNode *right;
}RLNode,* RLink;
```

数组结构

```
typedef struct
{   RLink rhead[M];
    int mu, nu, tu;
}RowList;
```

M.rhead



M.mu=5

M.nu=5

M.tu=6

适合于按行进行操作的问题

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的链式压缩存储

row	col	val
down	right	

十字链表

- ✓ 非零元结点包含5个域（非零元的所在行、列、值，及指向同行、同列下一个非零元的指针）

结点结构

```
typedef struct OLNode
{   int row, col;           //非零元所在行、列
    ElemType val;          //非零元的值
    struct OLNode *right, *down;
                                //同行、同列的下一个非零元的指针
}OLNode, * OLink;
```

十字链表结构

```
typedef struct
{   OLink rhead[M],chead[N]; //行、列指针数组
    int mu, nu, tu;          //行、列数及非零元个数
}CrossList;
```

矩阵的压缩存储

稀疏矩阵的链式压缩存储

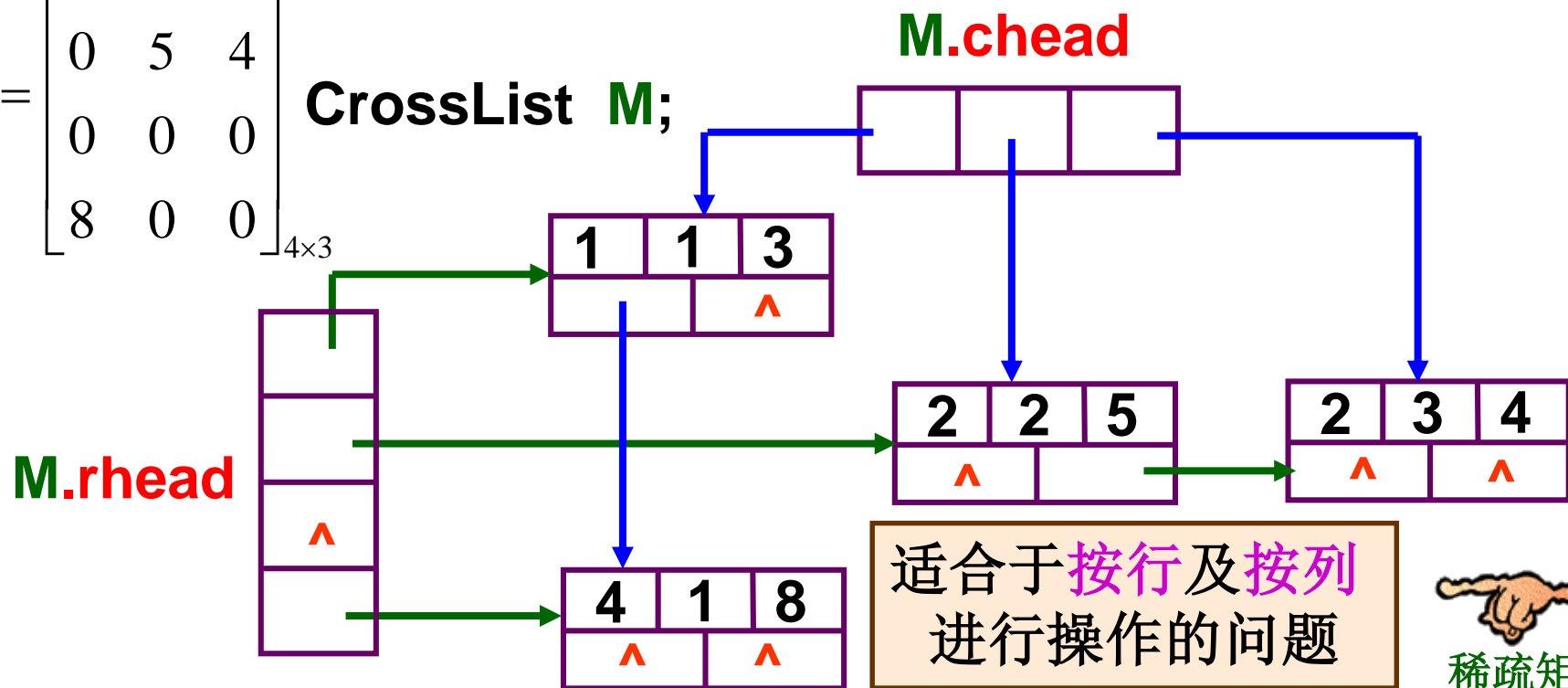
十字链表

- ✓ 非零元结点包含5个域（非零元的所在行、列、值，及指向同行、同列下一个非零元的指针）

row	col	val
down	right	

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

CrossList M;



稀疏矩阵

本章小结

- 数组的定义、顺序存储方式
- 掌握特殊矩阵(对称阵、三角阵、对角阵)的压缩存储方式
- 掌握稀疏矩阵的顺序、链式压缩存储方式,了解转置算法的实现