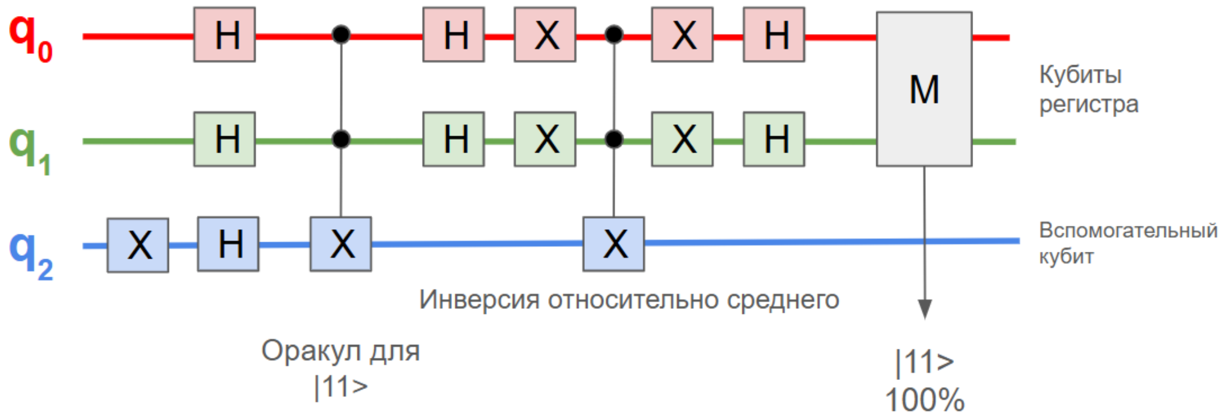

Исходное состояние системы: $|000\rangle$

Применяем X к кубиту 2: $|001\rangle$

Применяем вентиль Адамара к каждому из кубитов (создание регистра, содержащего весь список чисел от 0 до 3):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)+|11\rangle(|0\rangle-|1\rangle)$$

Применяем вентиль Тоффоли (CCX) к кубиту 2 (Оракул, цель создать сдвиг фазы π у состояния, кодирующего искомое число, в нашем случае 3: $|11\rangle$):

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)+|11\rangle(|1\rangle-|0\rangle)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)-|11\rangle(|0\rangle-|1\rangle)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)\ **$$

Видим, что у требуемого состояния для кубитов 0 и 1 появился знак «-», хотя, казалось бы, мы провели операцию только над кубитом 2.

Начинаем процедуру инверсии относительно среднего.

Применяем вентиль Адамара к кубитам 0 и 1:

$$|00\rangle\ \rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)=\frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle)$$

$$|01\rangle\rightarrow=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)=\frac{1}{2}(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle)$$

$$|10\rangle\rightarrow=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)=\frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle)$$

$$|11\rangle\rightarrow=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)=\frac{1}{2}(|00\rangle-|01\rangle-|10\rangle+|11\rangle)$$

Подставив полученное в выражение ** и сократив состояния с противоположными знаками, увидим, что общее состояние системы останется тем же:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)=\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)$$

Применяем вентиль X к кубитам 0 и 1:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|11\rangle+|10\rangle+|01\rangle-|00\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)$$

***Применяем** вентиль Тоффоли (CCX) к кубиту 2 (сразу преобразуем по аналогии с выражением **):*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|11\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |00\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-|11\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |00\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Применяем вентиль X к кубитам 0 и 1:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Применяем вентиль Адамара к кубитам 0 и 1. Расписав и сократив состояния с противоположными знаками, увидим, что для первых двух кубит останется только состояние 11:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|11\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$$

Инверсия относительно среднего

Рассмотрим математически процедуру инверсии относительно среднего. У нас есть регистр из двух кубит, содержащий все возможные состояния $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$.

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$$

Амплитуда вероятности для каждого состояния 0,5, вероятность при измерении получить любое из этих состояний = 25%.

Если мы меняем фазу для выбранного состояния, его амплитуда вероятности приобретает отрицательный знак:

$$\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$$

Теперь посчитаем среднее значение всех амплитуд вероятности: (0,5+0,5+0,5-0,5)/4=0,25

Проведём инверсию амплитуд вероятности относительно этого среднего значения.

Для 0,5 получим: $\mathbf{0,25 - (0,5 - 0,25) = 0}$

Для -0,5 получим: $\mathbf{0,25 - (-0,5 - 0,25) = 1}$

Видим, что уже после первой итерации вероятность зарегистрировать состояние 11 будет равна 1, а для остальных – 0.

Для наглядности посмотрим, с какой вероятностью мы сможем найти искомое число в диапазоне от 0 до 7. Для создания такого регистра нам понадобится уже три кубита.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|010\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|101\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|111\rangle$$

Амплитуда вероятности для каждого состояния $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, вероятность при измерении получить любое из этих состояний = 12,5%.

Допустим мы хотим найти число 0, оно кодируется состоянием $|000\rangle$**.** Задаём для него отрицательную амплитуду.

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|010\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|101\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|111\rangle$$

Теперь посчитаем среднее значение всех амплитуд вероятности: $\frac{\frac{7}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{8} = \frac{3}{8\sqrt{2}} \sim \mathbf{0,26}$

Проведём инверсию амплитуд вероятности относительно этого среднего значения.

Для $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ получим: $\frac{3}{8\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sim \mathbf{0,177}$

Для -0,5 получим: $\frac{3}{8\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{4\sqrt{2}} \sim \mathbf{0,88}$

Это даст нам вероятность 78% зарегистрировать искомое число после одной итерации и по 3% на прочие варианты. Можно ли повысить эту вероятность? Давайте сделаем вторую итерацию поворота фазы и инверсии относительно среднего.

Новое среднее: $\frac{\frac{7}{4\sqrt{2}} - \frac{5}{4\sqrt{2}}}{8} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \sim \mathbf{0,044}$

После инверсии получим:

$$\frac{1}{16\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{16\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \sim -\mathbf{0,088}$$

$$\frac{1}{16\sqrt{2}} - \left(-\frac{5}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{16\sqrt{2}}\right) = \frac{11}{8\sqrt{2}} \sim \mathbf{0,97}$$

Таким образом вероятность зарегистрировать искомое состояние после второй итерации повысилось до 94%, а получить остальные снизилась до 0,8%