

Теория Автоматического Управления

Капалин Иван Владимирович

Оглавление

1 Основные понятия, структура и классификация систем автоматического управления	3
1.1 Процессы управления	4
1.2 Характеристика процессов управления	4
1.3 Исходные положения ТАУ	5
1.4 Принципы управления	7
1.5 АСУ	9
1.6 Классификация САУ	10
1.7 Законы управления	13
2 Математическое описание непрерывных систем уравнений	18
2.1 Уравнения динамики и статистики	19
2.1.1 Звено САУ	20
2.1.2 Линеаризация	21
2.2 Преобразование Лапласа	22
2.2.1 Обратное преобразование Лапласа	23
2.2.2 Свойства преобразования Лапласа и примеры	23
2.2.3 Передаточная функция в изображениях Лапласа	26
2.2.4 Передаточная функция в операторной форме	27
2.2.5 Временные функции: переходная и весовая функции	28
2.2.6 ВФ и ПФ в изображениях Лапласа	28
2.3 Частотные функции	29

2.4	Основные типы элементарных звеньев	29
2.4.1	Пропорциональное звено	29
2.4.2	Дифференциальное звено	29
2.4.3	Интегрирующее звено	29
2.4.4	Апериодическое звено	29
2.4.5	Колебательное звено	29
2.4.6	Звено чистого запаздывания	29

От автора

This is the first section.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales...

Глава 1

Основные понятия, структура и классификация систем автоматического управления

С древних времен человек хотел использовать предметы и силы природы в своих целях, то есть управлять ими. Теория управления пытается ответить на вопрос «как нужно управлять?». До XIX века науки об управлении не существовало, хотя первые системы автоматического управления уже были (например, ветряные мельницы «научили» разворачиваться навстречу ветру). Развитие теории управления началось в период промышленной революции. Сначала это направление в науке разрабатывалось механиками для решения задач регулирования, то есть поддержания заданного значения частоты вращения, температуры, давления в технических устройствах (например, в паровых машинах). Отсюда происходит название «теория автоматического регулирования». Позднее выяснилось, что принципы управления можно успешно применять не только в технике, но и в биологии, экономике, общественных науках.

В живой природе	В неживой природе
Естественный отбор	Наведение на цель орудия
Терморегуляция у животных	Поддержание температуры в печи
Поддержание равновесия животными	Поддержание равновесия робота
Увеличение рождаемости в стране	Поддержание скорости на моторе
Уничтожение клеток определенного типа (вирусных, инфекционных и т.п.)	Поддержание фиксированной высоты летального аппарата
Повышение работоспособности работников предприятия	Поддержание заданного напряжения

Таблица 1.1: *Процессы управления*

1.1 Процессы управления

Процессы управления и обработки информации в системах любой природы изучает наука кибернетика. Один из ее разделов, связанный главным образом с техническими системами, называется теорией автоматического управления.

1.2 Характеристика процессов управления

Общие характеристики всех процессов управления:

- Прием информации - поиск и обнаружение сигналов (выделение сигналов из шума). Примеры: камера, глаз, датчики давления, скорости, положения и т.п., общение.
- Хранение информации - процесс поддержания исходной информации в виде, обеспечивающем выдачу данных по запросам конечных пользователей. Примеры: память животных, память на носителях - USB, HDD, CD, DVD.

- Преобразование информации - процесс изменения формы представления информации или ее содержания. Примеры: анализ рынка, те или иные вычисления.
- Выработка управляющего воздействия - воздействие на объект управления, направленное на достижение цели управления. Примеры: подача напряжения на мотор, передача указаний подчиненным, поворот руля.

1.3 Исходные положения ТАУ

САУ. Структурная схема и понятия

Определение 1. *Управление* - целенаправленное воздействие на объект или устройство. Управление может быть автоматическим, т.е. без участия человека, ручным, т.е. в присутствии человека, или полуавтоматическим, т.е. работающим при участии человека.

Определение 2. *Объект управления* (ОУ) - устройство, которым нужно и можно управлять. Это может быть автомобиль, самолет электродвигатель и т.д.

Определение 3. *Цель управления* ОУ - поддержание заданного режима, т. е. изменение какого-либо параметра ОУ по заданному закону (например температура в холодильнике должна быть зафиксированной). Такой параметр называют *управляемой* или *выходной* переменной.

Определение 4. *Система автоматического управления* (САУ) - устройство управления (УУ) и объект управления (ОУ).

Основной задачей автоматического управления является поддержание определенного закона изменения одной или нескольких физических величин, характеризующих процессы, протекающие в ОУ, без непосредственного участия человека. Эти величины называются *управляемыми величинами*. Если в качестве ОУ рассматривается хлебопекарная печь, то управляемой величиной будет температура, которая должна изменяться по заданной программе в соответствии с требованиями технологического процесса.

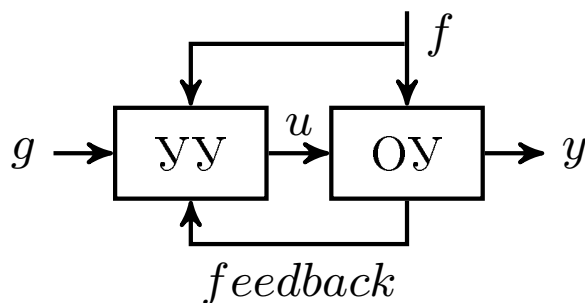


Рис. 1.1: На структурной схеме САУ: y — выходная переменная; g — задающее воздействие (иногда изображается как выход задающего устройства); f — возмущение, действующее на ОУ и, возможно, на УУ; u — управление (управляющее воздействие). Канал связи, по которому поступает информация в УУ о состоянии ОУ, называется *обратной связью* (feedback). В САУ обратная связь может отсутствовать.

Понятие устойчивости

ОУ в зависимости от входных воздействий бывают устойчивые, нейтральные и неустойчивые. Например, пусть при постоянных $u = u_0$, $f = f_0$ на выходе $y = y_0$. Положим, что на какое-то время T значение u и f изменились, а затем вернулись к исходным значениям. Тогда объект управления

- устойчивый, если при $t \rightarrow \infty$ выход $y \rightarrow y_0$;
Например, холодильник, генератор напряжения, маятник, унитаз.
- нейтральный, если при $t \rightarrow \infty$ выход $y \rightarrow y_1$ и $y_1 \neq y_0$.
Например, резервуар с водой;
- неустойчивый, в противном случае.
Самолет с обратной стреловидностью крыла, обратный (перевернутый) маятник.

Определение 5. *Устойчивость* - это свойство системы возвращаться в установившееся состояние после того, как она была выведена из этого состояния каким-либо возмущением.

1.4 Принципы управления

В основе построения систем автоматического управления лежат некоторые общие фундаментальные принципы управления, определяющие, каким образом осуществляется увязка алгоритмов управления с заданным и фактическим функционированием, а иногда и с причинами, вызвавшими отклонение.

Принято различать три фундаментальных принципа управления: программное управление, принцип компенсации и принцип обратной связи.

Программное управление

Управление u выбирается в виде некоторой функции времени $u = u(t)$.

Условиями применимости этого принципа является наличие полной информации об ОУ, а также — его устойчивость и отсутствие существенных неизвестных возмущений.

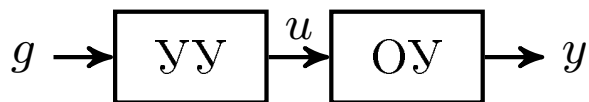


Рис. 1.2: Программное управление

Принцип компенсации

Если возмущающий фактор искажает выходную величину до недопустимых пределов, то применяют принцип компенсации.

Положим, что начальное значение выходной величины - g . Из-за возмущения f на выходе регистрируется значение, которое отклоняется от заданной величины на u . Если каким-то образом удастся измерить величину f , то можно откорректировать управляющее воздействие u на входе ОУ, суммируя сигнал УУ с корректирующим воздействием, пропорциональным возмущению f и компенсирующим его влияние.

Достоинство принципа компенсации: быстрота реакции на возмущение.

Недостаток принципа компенсации: невозможность учета подобным образом всех возможных возмущений.

Принцип обратной связи (принцип Ползунова - Уатта)

Один из самых универсальных методов управления, так как не требует информации о возмущениях и условие устойчивости исходного объекта не обязательно.

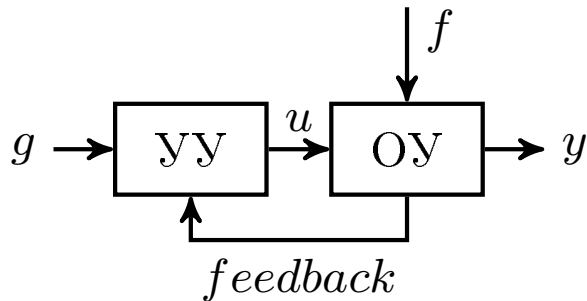


Рис. 1.3: Обратная связь

Недостаток принципа обратной связи: невозможность полной компенсации возмущения, в определенных случаях может сделать замкнутую систему неустойчивой.

Достоинством принципа обратной связи: его универсальность, возможность его использования в условиях отсутствия информации о возмущающих воздействиях. Принцип широко используется в технике, а также присущ живым организмам и обществу.

Принцип комбинированного управления.

Данный принцип управления применим при одновременном использовании способов управления как по возмущению, так и по отклонению.

1.5 АСУ

Автоматизированные системы управления (АСУ) включают разнообразные элементы, играющие различную роль в решении задач управления. Выделение отдельных элементов осуществляется в соответствии с их специфическими чертами и вытекающими из этого особенностями разработки и включения в АСУ.

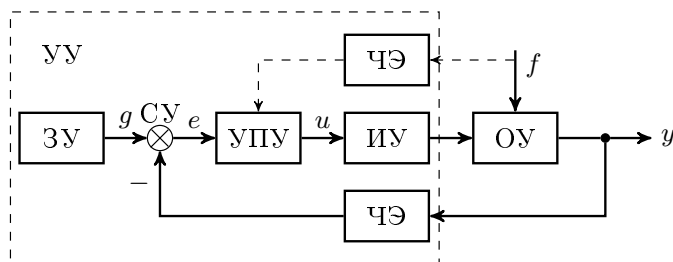


Рис. 1.4: На схеме: ЧЭ, чувствительный элемент, измеряющий возмущения (не всегда присутствует) и выход y ; УПУ, усилительно-преобразовательное устройство, вырабатывающее управление u на основе задающего воздействия g и, возможно, измерения f ; ИУ, исполнительное устройство, которое непосредственно воздействует на ОУ; СУ, сравнительное устройство, вычисляющее отклонение e ; ЗУ, задающее устройство, вырабатывающее задающее воздействие g .

1.6 Классификация САУ

Для ознакомления с основными видами систем автоматического управления и соответствующей терминологией рассмотрим классификацию САУ по ряду признаков, существенных с точки зрения теории автоматического управления.

Наличие обратной связи

По наличию обратной связи САУ делятся на *замкнутые* (с обратной связью) и *разомкнутые* (без обратной связи).

В *разомкнутых* САУ выходная величина объекта y не измеряется, т. е. нет контроля за состоянием объекта. Разомкнутыми такие системы называются потому, что вследствие этого в них отсутствует обратная связь между выходом объекта и входом управляющего устройства, при наличии которой объект и управляющее устройство образуют замкнутый контур.

В *замкнутых* САУ на вход управляющего устройства подаются задающее воздействие g и выходная величина объекта. Исходя из величины g , управляющее устройство определяет соответствующее требуемое значение y и, имея информацию о текущем значении e , обеспечивает необходимое соответствие между y и g путем воздействия на объект. При этом УУ создает обратную связь вокруг объекта, связывая его выход со входом. Эти системы могут обеспечить принципиально неограниченную точность управления и представляют собой основной тип САУ.

Вид задающего воздействия

В зависимости от вида задающего воздействия САУ делятся на три вида: *системы стабилизации, системы программного управления и системы слежения.*

В *системах стабилизации* задающее воздействие постоянно ($g = const$), в *системах программного управления* оно изменяется по заранее заданному закону ($g = g(t)$ - заданная функция), в *системах слежения* задающее воздействие тоже изменяется, но закон изменения заранее не известен, а задающее воздействие определяется внешними факторами (например радиолокация).

Способ использования текущей информации

САУ также делятся на

неадаптивные, т.е. те, в которых текущая информация используется только для выработки управляющего воздействия

адаптивные, т.е. те, в которых текущая информация используется еще и для изменения алгоритма управления или его параметров

Область применения *адаптивных* САУ – это управление объектами, свойства или условия работы которых недостаточно известны или существенно непостоянны. В этих условиях обыкновенная, *неадаптивная*, система либо будет работать неудовлетворительно, либо потребует постоянного надзора.

Виды сигналов

САУ бывают *непрерывного* или *дискретного* действия в зависимости от характера действия составляющих систему звеньев.

Система *непрерывного* действия состоит только из звеньев непрерывного действия, т. е. звеньев, выходная величина которых изменяется плавно при плавном изменении входной величины.

Система *дискретного* действия – это система, содержащая хотя бы одно звено дискретного действия. Звеном дискретного действия называется звено, выходная величина которого изменяется дискретно, т. е. скачками, даже при плавном изменении входной величины.

Виды уравнения - линейные и нелинейные

Линейной называется система, которая описывается линейными уравнениями. В противном случае система является *нелинейной*. Чтобы система была *нелинейной*, достаточно иметь в ее составе хотя бы одно нелинейное звено, т. е. звено, описываемое нелинейным уравнением.

Для *линейных* систем справедлив принцип суперпозиции. Он заключается в том, что реакция системы на любую комбинацию внешних воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь. К *нелинейным* системам принцип суперпозиции не применим.

Характер внешних воздействий

Система является *детерминированной*, если приложенные к ней воздействия и параметры модели являются постоянными, или детерминированными, т.е. определенными, функциями переменных состояния и времени. Систему называют *стохастической*, если приложенные к ней воздействия и параметры модели являются случайными функциями или случайными величинами.

1.7 Законы управления

Термин “закон управления” перешел в теорию управления из классической теории.

Определение 6. *Закон управления* - математическая зависимость, по которой управляющее устройство воздействовало бы на объект, если бы оно было безынерционным. Законы управления используются в промышленных регуляторах (манипуляторах, станках и пр.). Основными законами управления являются: П-закон, ПИ-закон, ПД-закон, ПИД-закон.

П-закон

Пропорциональный закон (П-закон) - линейный закон, осуществляемый с помощью П-регулятора (статический регулятор), отражающий прямо пропорциональную зависимость между изменением управляющего воздействия и погрешностью регулирования..

П-закон имеет вид $u = k_{\pi}e$. Постоянная k_{π} - коэффициент передачи (пропорциональности, усиления) регулятора, а обратная ему величина $\delta_{\pi} = \frac{1}{k_{\pi}}$ - статистизм регулятора.

П-регуляторы применяются для управления объектами с самовыравниванием и без самовыравнивания при небольших изменениях нагрузок.

ПИ-закон

Пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон) - закон, осуществляемый с помощью ПИ-регулятора и имеющий вид $u = k_{\text{п}}e + k_{\text{и}} \int_0^t e(t)dt$. Регулирование частоты синхронных генераторов выполняется путем двойного проверки: статическим регулятором скорости турбины и астатистической коррекцией, вводимой регулятором частоты электрического тока.

ПИ-регулятор является наиболее распространенным на практике, так как достаточно прост в настройке и обеспечивает нулевую статическую ошибку регулирования. Данный тип регуляторов применяют для регулирования как устойчивых, так и нейтральных объектов при больших, но плавных изменениях нагрузок, когда требуется высокая точность регулирования в статическом режиме (когда остаточные отклонения недопустимы).

ПИД-закон

Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-закон) осуществляется с помощью ПИД-регулятора, который обеспечивает астатистическое регулирование. ПИД-закон имеет вид $u = k_{\text{п}}e + k_{\text{и}} \int_0^t e(t)dt + k_{\text{д}} \frac{de(t)}{dt}$. Производная $\frac{de(t)}{dt}$ вводится в закон регулирования с целью повышения качества процесса регулирования. Постоянные $k_{\text{и}}$ и $k_{\text{д}}$ - постоянные времени интегрирования и дифференцирования соответственно. ПИД-регуляторы. ПИД-регуляторы обеспечивают относительно высокое качество регулирования объектов, обладающих переходным запаздыванием (например теплообменных и массообменных аппаратов), а так же в тех случаях, когда нагрузка в объектах регулирования изменяется часто и быстро.

ПД-закон

Пропорционально-дифференциальный закон (ПД-закон), осуществляемый с помощью ПД-регуляторов, имеет вид $u = k_{\text{п}}e + k_{\text{д}}\frac{de(t)}{dt}$. ПД-уравнения применяются для повышения быстродействия работы системы.

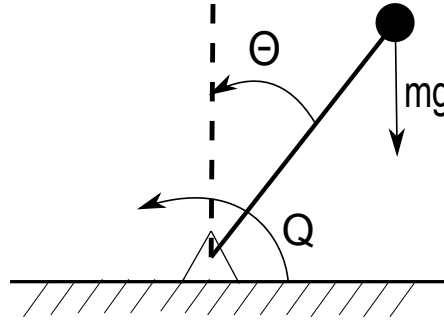


Рис. 1.5: Перевернутый (обратный) маятник

Уравнение, описывающее перевернутый (обратный) маятник в окрестности $\Theta_0 = 0$ имеет вид

$$J\ddot{\Theta} = -Q + mgl\Theta, \quad (1.1)$$

где Θ — угол отклонения от вертикальной оси, Q — вращательный момент, создаваемый мотором, m — масса маятника, l — длина подвеса маятника, $J = ml^2$ — момент инерции маятника, g — ускорение свободного падения.

Заметим, что выбор линеаризации в точке Θ_0 определяется из цели управления. В данном случае цель управления — стабилизировать маятник в положении $\Theta_0 = 0$ (задающее воздействие $g = 0$).

В нормальной форме уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $x = (x_1 \ x_2)^T = (\Theta \ \dot{\Theta})^T$ — вектор состояния системы, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = (0 \ 1)^T$, $c = (1 \ 0)$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $u = -\frac{Q}{J}$ — управление (вход) и $y = cx = x_1 = \Theta$ — регулируемый (или измеряемый) параметр.

Используем принцип обратной связи и ПД-закон для решения задачи. Тогда

$$u = -k_{\text{п}}y - k_{\text{д}}\dot{y},$$

где $k_{\text{п}}$ и $k_{\text{д}}$ — коэффициенты, подлежащие определению.

Учитывая первое уравнение $\dot{x}_1 = x_2$ в системе (1.2), получим

$$u = -k_{\text{п}}x_1 - k_{\text{д}}\dot{x}_1 = -(k_{\text{п}} \ k_{\text{д}}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляя это управление в (1.2), получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A_k x, \\ y = cx, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $A_k = A - b(k_{\text{п}} \ k_{\text{д}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 - k_{\text{п}} & -k_{\text{д}} \end{pmatrix}$.

Остается выбрать коэффициенты ПД-закона, исходя из устойчивости системы (1.3). Причем добьемся этого так, чтобы в установившемся режиме не было колебаний. Это эквивалентно тому, что у характеристического полинома системы (1.3) есть только действительные отрицательные корни.

В данном случае характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\gamma(s) = \det(sI - A_k) = s^2 + k_{\text{д}}s + (k_{\text{п}} - \omega^2).$$

Тогда выбрав $k_{\text{д}}$ и $k_{\text{п}}$ так, что $\gamma(s)$ имеет только отрицательные корни, получим устойчивую САУ и тем самым стабилизируем маятник в положении $\Theta_0 = 0$.

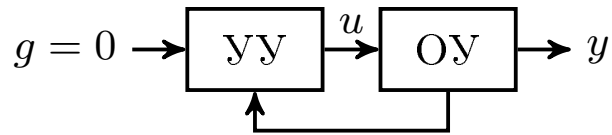


Рис. 1.6: Структурная схема САУ перевернутого маятника

На схеме ОУ (маятник с мотором) описан с помощью ОДУ (1.1), УУ (компьютер/контроллер, устанавливающий желаемый момент вращения Q) описывается оператором $R = k_{\text{п}} + k_{\text{д}} \frac{d}{dt}$ и реализует ПД-закон управления.

Глава 2

Математическое описание непрерывных систем уравнений

В ТАУ при анализе и синтезе САУ рассматриваются их *математические модели*.

Определение 7. *Математическая модель* (ММ) - уравнения, переходные и временные функции, которые описывают процессы, происходящие в САУ. Существует два способа получения ММ: теоретический и экспериментальный.

Теоретический метод заключается в аналитическом исследовании физической сущности процесса с использованием общих законов физики, или процессов с использованием материального и энергетического баланса. Применение чисто теоретического метода представляет большую трудность вследствие сложности явлений, происходящих в процессах, или недостаточной степени изученности их.

Экспериментальный метод математического описания заключается в обработке экспериментальных данных, полученных непосредственно на действующих объектах производства, или на полупромышленной лабораторной машине, или физической модели процесса — стенде.

Наиболее эффективным методом получения математической модели является сочетание *теоретического* и *экспериментального* методов. При этом на долю теоретического метода приходится анализ в основном структурных свойств объекта и продуктов и получение общего вида уравнений, а на долю экспериментального — количественный анализ и проверка теоретических выводов.

При построении ММ неизбежно возникают противоречивые требования: достаточная точность модели и доступность, или простота, анализа модели. Чем выше точность модели, тем она сложнее; чем проще исследовать ММ, тем она проще. Цель, которую ставит перед собой разработчик или исследователь, разрешает данное противоречие.

2.1 Уравнения динамики и статистики

Любой элемент (часть) САУ осуществляет преобразование входа g (или u) в выход y :

$$y(t) = Ag(t), \quad (2.1)$$

где A — оператор САУ. В этом курсе мы будем рассматривать только оператор A , описываемый обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Введем два вида уравнений, рассматриваемых в ТАУ.

Определение 8. *Уравнение статистики* - уравнение, описывающее статический (установившийся) режим.

Определение 9. *Уравнение динамики* - уравнение, описывающее процесс в звене при произвольных входных воздействиях.

Пусть дано ОДУ некоторого ОУ вида

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v) = 0, \quad (2.2)$$

где F — функция нескольких переменных, y и u — выход и управление, v — возмущение.

Пусть при $u = u^0$ и $v = v^0$ со временем выход y принимает постоянное значение: $y = y^0$. Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$F^0 = F(y^0, 0, 0, u^0, 0, v^0) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется уравнением статики, уравнение (2.2) называют уравнением динамики.

2.1.1 Звено САУ

Определение 10. *Звеном* называют ММ либо части САУ, либо САУ целиком. Понятие звена удобно использовать для представления САУ в виде соединения нескольких звеньев, т.е. более простых ММ.

Одно из самых простых звеньев - это усилитель, П[ропорциональное]-звено. Его уравнение можно записать в виде

$$y = ku. \quad (2.4)$$

Уравнение динамики здесь совпадает с уравнением статики (точнее, динамики просто нет). Такого рода преобразования часто обозначают графически в виде блока.

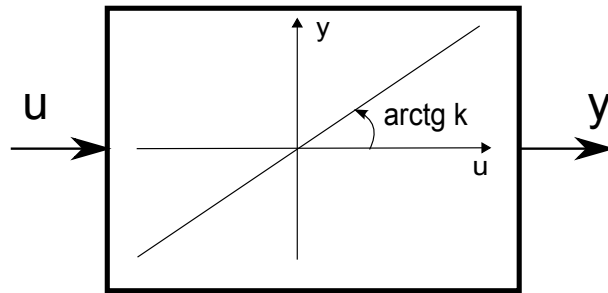


Рис. 2.1: Статическая характеристика П-звена

2.1.2 Линеаризация

Назначение САУ - это поддержание определенного заданного режима. Поэтому параметры, описывающие САУ, не должны сильно отличаться от заданного режима. Эта простая идея обычно позволяет проводить операцию линеаризации.

Определение 11. *Линеаризация* - построение приближенной линейной модели на основе более реалистичной нелинейной модели.

Рассмотрим пример для уравнения (2.2).

Пусть заданный режим имеет вид

$$y = y^0, \dot{y} = \ddot{y} = 0, u = u^0, \dot{u} = 0, v = v^0. \quad (2.5)$$

Тогда реальные параметры САУ можно записать в отклонениях как

$$y = y^0 + \Delta y, \dot{y} = \dot{\Delta y}, \ddot{y} = \ddot{\Delta y}, u = u^0 + \Delta u, \dot{u} = \dot{\Delta u}, v = v^0 + \Delta v, \quad (2.6)$$

где переменные со знаком Δ достаточно малы.

Тогда для функции

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v)$$

воспользуемся разложением в ряд Тейлора в точке

$$(y^0, 0, 0, u^0, 0, v^0):$$

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v) = F^0 + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\Delta y} + \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} \ddot{\Delta y} + \\ + \frac{\partial F}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \dot{\Delta u} + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v + \dots, \quad (2.7)$$

где $F^0 = 0$, многоточием обозначены члены с более высоким порядком малости.

Отсюда получают линеаризацию уравнения (2.2) вида

$$a_2 \ddot{\Delta y} + a_1 \dot{\Delta y} + a_0 \Delta y - b_1 \dot{\Delta u} - b_0 \Delta u - c_0 \Delta v = 0, \quad (2.8)$$

где $a_0 = \frac{\partial F}{\partial y}$, $a_1 = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$, $a_2 = \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}$, $b_0 = -\frac{\partial F}{\partial u}$, $b_1 = -\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$ и $c_0 = -\frac{\partial F}{\partial v}$.

Введем оператор дифференцирования: $s = \frac{d}{dt}$.

Тогда уравнение (2.8) примет вид (знаки Δ опущены)

$$a_2 s^2 y + a_1 s y + a_0 y = b_1 s u + b_0 u + c_0 v, \quad (2.9)$$

что эквивалентно

$$Q(s)y = R_1(s)u + R_2(s)v, \quad (2.10)$$

где $Q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ называют *собственным оператором*, а $R_1(s) = b_1 s + b_0$ и $R_2(s) = c_0$ — *операторами воздействия*.

Определение 12. *Собственный оператор* - дифференциальный оператор $Q(s)$ при выходной величине.

Определение 13. *Оператор воздействия* - дифференциальный оператор $R(s)$ при входной величине.

2.2 Преобразование Лапласа

Для исследования и описания ОДУ часто используют преобразование Лапласа, так как оно сводит решение дифференциальных уравнений к алгебраическим операциям.

Определение 14. *Преобразованием Лапласа* называют отображение $\mathcal{L}\{\cdot\}$ функции $x(t), t \in \mathbb{R}$ в функцию $X(s), s \in \mathbb{C}$, осуществляемое по правилу

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt, \quad (2.11)$$

где $x(t)$ — исходная функция, $X(s)$ — изображение по Лапласу, s — переменная преобразования Лапласа.

Условия, при которых преобразование существует для $x(t)$:

1. $x(t)$ — интегрируемая на любом конечном интервале функция;

2. $x(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
3. $\exists c, M > 0 : |x(t)| < Me^{ct}, \forall t \geq 0$.

Если $x(t)$ удовлетворяет всем вышеперечисленным свойствам, то её называют функцией-оригиналом.

2.2.1 Обратное преобразование Лапласа

Соотношение, определяющее по известному изображению его оригинал, называют *обратным преобразованием Лапласа*.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds, \quad (2.12)$$

где интегрирование ведется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} s = \sigma > c$, где c — константа из условий существования преобразования Лапласа для $x(t)$.

2.2.2 Свойства преобразования Лапласа и примеры

Пусть $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ и $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

1. Линейность. $\mathcal{L}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha X(s) + \beta Y(s)$;
2. Дифференцирование оригинала.

Если производная $\dot{x}(t)$ является функцией-оригиналом, то $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$;

3. Интегрирование оригинала.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}; \quad (2.13)$$

4. Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$:

$$\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = e^{-\tau s}X(s); \quad (2.14)$$

5. Теорема о свертке (или об умножении изображений).

Если $x(t)$ и $y(t)$ - оригиналы изображений, а $X(s)$ и $Y(s)$ - их изображения, то

$$X(s) \cdot Y(s) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right\} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t y(\tau) x(t - \tau) d\tau \right\}; \quad (2.15)$$

Интеграл в правой части называют *сверткой функций* $x_1(t)$ и $x_2(t)$, его обозначают $x_1(t) * x_2(t)$:

$$x_1(t) * x_2(t) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right\} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau \right\}. \quad (2.16)$$

Поэтому

$$X_1(s) * X_2(s) = \mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} \quad (2.17)$$

6. Теорема о предельных значениях.

$$6.1 \quad x(0) = \mathcal{L} \left\{ \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \right\};$$

$$6.2 \quad \text{Если существует } x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), \text{ тогда } x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

7. Теорема разложения.

Если изображение по Лапласу есть дробно-рациональная функция, т.е. $X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, где $A(s)$ и $B(s)$ — полиномы от s и $\deg A(s) > \deg B(s)$. Тогда

$$x(t) = \sum_{k=1}^q \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{ts}), \quad (2.18)$$

№	Оригинал $x(t)$	Изображение $X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$1(t - \tau)$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$
5	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
7	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
8	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
9	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
10	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
11	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
12	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$

Таблица 2.1: Изображения Лапласа для часто используемых функций

где s_k — корни уравнения $A(s) = 0$, n_k — кратность k -го корня, q — количество различных корней. Когда $q = n$ (все корни простые), тогда

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t}. \quad (2.19)$$

Пример 1. Определить функцию $x(t)$, изображение которой имеет вид

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Решение

В данном случае

$$B(s) = 1, \quad A(s) = s(s+1), \quad A'(s) = 2s+1. \quad (2.20)$$

Полюсами функции $X(s)$ являются $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, и они являются простыми. Поэтому, согласно формуле (2.19) $x(t) = 1 - e^{-t}$

2.2.3 Передаточная функция в изображениях Лапласа

Рассмотрим линейное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \quad (2.21)$$

при нулевых начальных условиях, т.е. $y^{(n-1)}(0) = \dots = \dot{y}(0) = y(0) = 0$, $u^{(m-1)}(0) = \dots = \dot{u}(0) = u(0) = 0$. Применяя к обеим частям равенства преобразование Лапласа, получим

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^m b_i s^i\right) U(s), \quad (2.22)$$

где $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$. Разделив уравнение (2.22) на полином в левой части, получим

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad (2.23)$$

где $W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$, $\alpha(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i$ и $\beta(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i$.

Определение 15. *Передаточной функцией системы (2.21) в изображениях Лапласа называется отношение преобразований Лапласа входа и выхода системы при нулевых начальных условиях, причем отношение имеет наименьший порядок.*

Для системы, описываемой уравнением (2.21), передаточной функцией является дробно-рациональная функция $W(s)$, в которой были проведены сокращения общих множителей.

Пример 2. Дана система

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \dot{u} - u.$$

Найти передаточную функцию $W(s)$.

2.2.4 Передаточная функция в операторной форме

Из записи уравнения (2.21) в операторной форме вида

$$A(s)y = B(s)u, \quad (2.24)$$

где $A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i$ и $B(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i$ — “составные” операторы дифференцирования.

Формально разделив (2.24) на $A(s)$, получим

$$y(t) = W(s)u(t), \quad (2.25)$$

где $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ — передаточная функция (ПФ) системы (2.21) в операторной форме.

Заметим, что ПФ в операторной форме и в изображениях Лапласа совпадают, если полиномы $A(s)$ и $B(s)$ не имеют общих корней. Однако ПФ в изображениях Лапласа всегда можно получить из ПФ в операторной форме, проведя сокращения числителя и знаменателя. Получить из ПФ в изображениях Лапласа ПФ в операторной форме не всегда возможно.

Пример 3. Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнениями:

$$\text{a) } \dot{y} + y = u$$

$$\text{b) } \ddot{y} - y = \dot{u} - u$$

Решение. В символической форме эти уравнения записываются в виде:

$$\text{a) } (p + 1)y = u$$

$$\text{b) } (p^2 - 1)y = (p - 1)u$$

Их передаточные функции в операторной форме соответственно равны

$$W_1(p) = \frac{1}{p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{p - 1}{p^2 - 1}$$

Передаточные функции в изображениях Лапласа имеют вид

$$W_1(s) = W_1(p)|_{p=s} = \frac{1}{s + 1}, \quad W_2(s) = W_2(p)|_{p=s} = \frac{s - 1}{s^2 - 1} = \frac{1}{s + 1}.$$

2.2.5 Временные функции: переходная и весовая функции

Кроме дифференциальных уравнений и передаточных функций при описании и исследовании линейных систем используют переходные и импульсные переходные функции и их графики - временные характеристики.

Определение 16. *Переходная функция $h(t)$ - функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. График переходной функции - кривую зависимости $h(t)$ от времени t - называют *переходной* или *разгонной характеристикой*.*

Определение 17. *Импульсная переходная (весовая) функция $w(t)$ - функция, описывающая реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие ($\sigma(t)$) при нулевых начальных условиях. График импульсной переходной функции - кривую зависимости функций $w(t)$ от времени t - называют *импульсной переходной характеристикой*. Данные функции связаны соотношением - $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$.*

2.2.6 ВФ и ПФ в изображениях Лапласа

По определению ПФ имеем

$$Y(s) = W(s)U(s).$$

По определению переходной функции вход имеет вид $u(t) = \mathcal{X}(t)$ (а $h(t) = y(t)$), а значит $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$, поэтому

$$Y(s) = \frac{W(s)}{s},$$

откуда с помощью обратного преобразования Лапласа получаем $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$.

Аналогично для весовой функции: $u(t) = \delta(t)$ (а $\omega(t) = y(t)$), тогда $U(s) = 1$. Получим, что

$$Y(s) = W(s),$$

откуда $\omega(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$.

Таким образом, имея хотя бы одну из функций ($h(t)$, $\omega(t)$ или $W(s)$), можно восстановить оставшиеся.

2.3 Частотные функции

2.4 Основные типы элементарных звеньев

2.4.1 Пропорциональное звено

2.4.2 Дифференциальное звено

2.4.3 Интегрирующее звено

2.4.4 Апериодическое звено

2.4.5 Колебательное звено

2.4.6 Звено чистого запаздывания