Tehnike mrežnog planiranja

Općenito o mrežnom planiranju

Smatra se da su ***tehnike mrežnog planiranja*** (***programiranja***) nastale *krajem pedesetih godina 20. vijeka*. One se zasnivaju pretežno na primjeni *teorije grafova*, *teorije skupova*, *teoriji vjerovatnoće*, *statistici* i osnovnim *tehnikama matematičkog programiranja*. Primjenjuju se u *složenim projektima* koji u izvedbu uključuju *mnoštvo sudionika* i *skupina*, mnoštvo *različitih tehnologija*, koji *troše mnogo vremena i sredstava*, i u kojima postoji potreba za *koordinacijom* u toku realizacije projekta. Tehnike mrežnog planiranja koriste sljedeće poddiscipline:

- Analiza *strukture* (utvrditi koje se *aktivnosti* javljaju u projektu i kakve su njihove *međuzavisnosti*);
- Analiza *vremena* (utvrditi kako obaviti projekat za *najkraće moguće vrijeme* ili do *određenog roka*);
- Analiza *troškova* (utvrditi kako obaviti projekat uz *minimalne troškove* ili sa *raspoloživim budžetom*);
- Analiza *resursa* (utvrditi kako obaviti projekat sa *minimalnim utrošcima resursa*, poput *radne snage*, *sirovina*, *materijala*, *mehanizacije*, *opreme*, *prostora*, itd.).

Tehnike mrežnog planiranja omogućuju *procesno praćenje i nadziranje toka projekta*, kao i *precizno planiranje rokova završetka projekta* i planiranje *troškova projekta*. Za iskusnog projekt menadžera, to su moćni alati koji *štede vrijeme*, *resurse* i *novac*. Mrežno programiranje se primjenjuje u planiranju kako *determinističkih*, tako i *stohastičkih* projekata.

U teoriji i praksi mrežnog planiranja postoji nekoliko tehnika (metoda) od kojih su najvažnije sljedeće tehnike:

- ***Metod kritičnog puta***, poznat pod skraćenim nazivom **CPM** (*Critical Path Method*);
- Grupa povezanih ali ipak međusobno neovisnih tehnika poznatih pod zajedničkim nazivom ***PERT*** (*Project Evaluation and Review Technique*);

Metod kritičnog puta odnosno *CPM* razvijen je 1956. godine u industrijske svrhe. Tačnije, razvijen je u konsultantskoj firmi *Buz*, *Alen* i *Hamilton* pri planiranju projekata održavanja aviona lokid u mornaričkoj avijaciji, a paralelno je primijenjen i za planiranja održavanja postrojenja u hemijskoj industriji *Du Pont de Nemours and Coop.* u saradnji sa *Sperry Rand Corporation.* Ovaj pristup je sa uspjehom primijenjen prilikom izgradnje jedne nove fabrike, a zatim kod planiranja remontnih radova. Osnovna karakteristika ovog metoda je što se u analizi vremena i rokova izvršenja pojedinih dijelova kod ovog metoda koristi *samo jedna procjena trajanja* za svaki dio. Zbog toga se *CPM* metod koristi za planiranje projekata kod kojih se vrijeme, potrebno za izvršenje pojedinih aktivnosti, može dovoljno precizno procijeniti.

Paralelno i neovisno od industrije, *vojska SAD-a* je razvila 1958. godine *PERT* metod. Ovaj metod je razvijen u konsultantskoj korporaciji *Remington-Rand,* za potrebe *ratne mornarice SAD.* Njihovo istraživanje se odnosilo na *saradnju* velikog broja vojnih i civilnih ustanova *na planiranju razvojnog programa osvajanja svemira za rakete* "*Polaris*". Na ovom projektu je bilo nekoliko hiljada aktivnosti od kojih su mnoge bile razvojnog karaktera sa *nemogućnošću preciznog utvrđivanja trajanja*. Problemi koordinacije aktivnosti i raspodjele resursa na njihovo obavljanje postali su veoma ozbiljni. Najviše zahvaljujući mogućnostima koje je stvorilo mrežno planiranje, trajanje projekta "Polaris" je *skraćeno za dvije godine*. Za razliku od *CPM*, ovaj metod je *stohastičke prirode*, jer u proces planiranja uvodi *nesigurnost u procjene trajanja pojedinih aktivnosti*. Kod ovog metoda, za svaku aktivnost daju se *tri procjene trajanja*, nakon čega se pomoću statističkih metoda određuje *očekivano trajanje projekta*, odnosno *vjerovatnoća da će se projekat realizirati u određenom roku*.

Kao što je već rečeno, *PERT* nije jedinstven metod, nego uključuje tehnike za analizu *vremena*, *troškova* i *resursa*. Ove tri tehnike se nazivaju ***PERT/TIME***, ***PERT/COST*** i ***PERT/MAN-POWER***. Ukoliko se kaže samo *PERT* bez dodatnih specifikacija, gotovo uvijek se misli na tehniku za *analizu vremena*, odnosno na *PERT/TIME*.

Bitno je da je *analiza vremena*, bilo da se vrši po *CPM* ili *PERT* metodu, potpuno *odvojena od analize strukture*. Tačnije, analiza strukture se uvijek izvodi kao *predradnja* za analizu vremena, a rezultati obavljene analize koriste se kao *ulazni podaci* za analizu vremena, pri čemu je za izvođenje analize strukture *potpuno nebitno* na koji način će se kasnije vršiti analiza vremena. To je veoma značajno, jer je na taj način *pojednostavljena analiza vremena* koja se često može *svesti na rutinske postupke* i omogućena je *računarska implementacija* metoda (tehnika) za analizu vremena.

Osnovni pojam u tehnici mrežnog planiranja je ***projekat***. Pod projektom se podrazumijeva *složen, dugotrajan zadatak* koji se *mora planirati* da bi se mogao *dobro organizirati* i *efikasno realizirati*. Projekat u pravilu obuhvata *tehnička*, *naučna*, *finansijska*, *organizaciona*, a nerijetko i *vojna* područja djelatnosti. Dakle, projekat je *složeni zadatak* (posao) koji ima *jasno određen cilj* koji treba postići *u datom vremenskom periodu* i uz korištenje *raspoloživih resursa*. On se sastoji od skupa *ekonomskih, organizacionih, tehničkih* i *raznih drugih poslova*, pri čemu je bitno naglasiti da se on *može završiti samo ukoliko su završeni svi njegovi dijelovi*. *Međunarodna komisija za standarde* preporučuje sljedeću *definiciju projekta*:

"***Projekat*** *je* ***jedinstveni proces*** *koji se sastoji od* ***skupa koordiniranih*** *i* ***kontroliranih aktivnosti***, *sa* ***određenim datumima početaka i završetaka***, *koje se preduzimaju da bi se* ***isporučio proizvod*** *u skladu sa* ***postavljenim zahtjevima***, *pri čemu postoje* ***ograničenja na vrijeme***, ***troškove*** *i* ***resurse***."

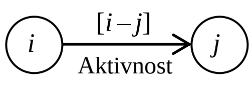
Pri tome se, u navedenoj definiciji, pod pojmom ***proizvod*** podrazumijevaju kako *materijalni* (robe), tako i *nematerijalni* (usluge) rezultati projekta.

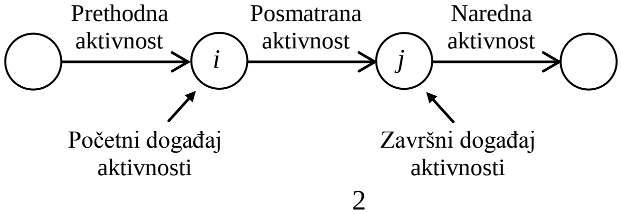
U *mrežnom planiranju projekat* se prestavlja ***mrežnim dijagramom*** (ili ***mrežom***). Mrežni dijagram je *grafički model* (graf) koji predstavlja skup ***aktivnosti*** koje su povezane putem ***događaja***. *Aktivnost* je *element mrežnog dijagrama* koji predstavlja *izvršenje pojedinog zadatka* u okviru projekta. Aktivnost predstavlja *operaciju* koja se može *definirati* i *vremenski odrediti*, a koja se *izvršava u okviru datog projekta*. Aktivnosti tipično *troše sredstva* (npr. *montaža prozora* je aktivnost koja definitivno troši materijalna sredstva), ali *ne uvijek* (npr. *čekanje da se malter osuši* je aktivnost koja troši *samo vrijeme*, ali *ne i sredstva*). Aktivnosti koje troše *i vrijeme i sredstva* nazivaju se ***prave aktivnosti***, dok se aktivnosti koje troše *samo vrijeme ali ne i sredstva* nazivaju ***aktivnosti čekanja***. S druge strane, *događaji* predstavljaju određene *karakteristične trenutke* u realizaciji projekta (npr. "krečenje" je *aktivnost*, ali je "završetak krečenja" *događaj*). Događaji *ne troše ni vrijeme sredstva*, tako da događaji predstavljaju *određena stanja* u kojima *nema aktivnosti*. Svaka aktivnost ima svoj *početni* i *završni događaj* i ona ne može otpočeti prije nego što nastupi njen *početni događaj*, a mora se završiti najkasnije do trenutka nastupa njenog *završnog događaja*.

Mrežni dijagram reprezentira projekat tj. sve *događaje*, *aktivnosti* i *veze* među njima. Postoje dvije vrste mrežnih dijagrama: dijagrami tipa **"*aktivnosti na čvorovima*"** odnosno ***AON*** (*Activity On Node*) ***dijagrami*** i dijagrami tipa **"*aktivnosti na strelicama*"** odnosno ***AOA*** (*Activity On Arrow*) dijagrami. U prvim godinama korištenja tehnika mrežnog programiranja, dominirali su mrežni dijagrami tipa "aktivnosti na strelicama", s obzirom da su *praktičniji za ručni rad*, a u to doba se računari nisu intenzivno koristili. Ovi dijagrami se i danas pretežno koriste u slučajevima kada se mrežno planiranje obavlja ručno. Međutim, mrežni dijagrami tipa "aktivnosti na čvorovima" se, kao što ćemo uskoro vidjeti, *lakše crtaju*. S obzirom da je za računarsku implementaciju manje-više svejedno da li se koriste dijagrami jednog ili drugog tipa, današnji softverski paketi za mrežno planiranje *pretežno koriste upravo mrežne dijagrame tipa* "*aktivnosti na čvorovima*".

U mrežnom dijagramu tipa "aktivnosti na strelicama" aktivnosti su predstavljene *lukovima* (*strelicama*) *između dva događaja*. Drugim riječima, aktivnosti su *grane grafa*, dok su događaji njegovi *čvorovi*. *Smjer lukova* prikazuje *slijed aktivnosti*, odnosno svaka aktivnost je predstavljena kao luk *orijentiran u pravcu odvijanja toka operacije*. Ni jedna aktivnost *ne može započeti* dok se *ne završe sve aktivnosti* koje *ulaze u čvor u kojem ova aktivnost počinje*. Pri tome, *fizička dužina* luka na dijagramu *nema nikakve veze sa dužinom vremenskog trajanja aktivnosti*, nego je proizvoljna (kako nam odgovara da bismo dobili pregledniji crtež).

Događaje obično numeriramo *pozitivnim cijelim* (tj. *prirodnim brojevima*). Svaka aktivnost ima svoj *naziv*, koji može biti *opisno ime* ili *broj*, a koristi se i *opći* (*generički simbol*) "$[i-j]$" da označi aktivnost čiji je *početni događaj i*, a *krajnji događaj j* (kad nema opasnosti od brkanja sa simbolom *oduzimanja*, umjesto "$[i-j]$" piše se prosto "$i-j$", a može se koristiti i notacija (i, j) u skladu sa *konvencijama iz teorije grafova*). Također, svaka aktivnost može eventualno imati jednu ili više *prethodnih* i *narednih* aktivnosti. Svaka mreža uvijek *započinje jedinstvenim događajem* koji možemo nazvati recimo "*početak projekta*", a *završava također jedinstvenim događajem* koji možemo nazvati "*završetak projekta*".





Struktura mreže je određena *redoslijedom aktivnosti* i *njihovim međusobnim odnosom*. Ako je *početak jedne ili više aktivnosti uvjetovan završetkom nekoliko prethodnih aktivnosti*, pri čemu se *njihov završetak ne može svesti u jedan događaj*, neophodno je uvesti ***fiktivnu aktivnost***, o čemu ćemo uskoro detaljnije govoriti. Fiktivna aktivnosti *ne troši niti vrijeme niti sredstva* i na dijagramima se predstavlja *isprekidanom linijom*. Potreba za uvođenjem *ponekad i velikog broja fiktivnih aktivnosti* predstavlja *glavni nedostatak mrežnih dijagrama tipa* "*aktivnost na strelicama*".

U mrežnim dijagramima tipa "aktivnosti na čvorovima" aktivnosti su predstavljene *čvorovima*, dok lukovi (strelice) dijagrama predstavljaju *međuzavisnosti* između aktivnosti. Konkretno, strelica od aktivnosti A do aktivnosti B u dijagramu postoji *ako i samo ako aktivnost* B *ne može započeti dok se ne završi aktivnost* A. U ovakvim dijagramima, *ne postoje posebne oznake kojima se označavaju događaji*. Kako su obično na početku poznate upravo međuzavisnosti između aktivnosti, iz opisa problema često je jednostavnije sastaviti dijagram ovog tipa nego dijagram tipa "aktivnosti na strelicama". U slučaju da ne postoji neka aktivnost koja *mora biti završena prije nego što otpočne ma koja druga aktivnost*, uvodi se fiktivna aktivnost "*otpočinjanje projekta*" (koja, naravno, *ne troši ni vrijeme ni sredstva*). Isto tako, ukoliko ne postoji neka aktivnost *koja ne može otpočeti prije nego što se završe sve ostale aktivnosti*, uvodi se fiktivna aktivnost "*završavanje projekta*". Na ovaj način se postiže da dobijeni mrežni dijagram sigurno ima tačno jedan početni i jedan završni čvor. Ovo su ujedno i *jedine dvije fiktivne aktivnosti* koje eventualno treba uvesti u dijagrame ovog tipa.

Svi gore definirani pojmovi su *isti* bez obzira da li se koristi *CPM* ili *PERT* metod. Zapravo, sa *aspekta analize vremena*, osnovna razlika između ova dva metoda je u *načinu procjene vremena trajanja* pojedinih aktivnosti. U *CPM* metodu, svakoj aktivnosti se pridružuje *jedna tačno određena vrijednost procijenjenog vremena trajanja*, dok se u *PERT* (preciznije, $PERT/TIME$) metodu pri određivanju vremena trajanja pojedinih aktivnosti uvode *elementi vjerovatnoće*. Zbog toga je *CPM deterministički metod*, dok je *PERT stohastički metod*.

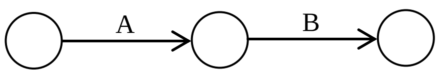
Osnovni podatak za svaku aktivnost $[i-j]$ je njeno *procijenjeno vrijeme trajanja*, koje se obilježava sa $t_{i,j}$. Trajanje se izražava *vremenskim jedinicama*, koje mogu biti *sati*, *dani*, *sedmice*, *dekade*, *mjeseci*, *godine*, itd. Pored toga, svaka aktivnost $[i-j]$, čije je trajanje $t_{i,j}$, ima u svom mrežnom dijagramu svoj *početak* i *završetak* koji nastupaju u *određenim trenucima*, tako da možemo govoriti o *vremenu početka* t_i i *vremenu završetka* t_j aktivnosti. *Ukupno vrijeme trajanja projekta T* može se dobiti *sabiranjem pojedinačnih vremena trajanja određenog broja aktivnosti koje povezuju početni i krajnji događaj projekta*. O ovome ćemo uskoro detaljnije govoriti.

Analiza strukture

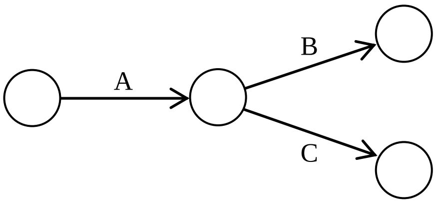
Da bi se uopće mogla izvršiti *analiza vremena* (bilo po *CPM* ili *PERT* metodu), potrebno je imati *pravilno struktuiran i numeriran graf* (*mrežni dijagram*). To je zadatak *analize strukture* koja *prethodi analizi vremena*. Analiza strukture obuhvata *određivanje logičkog redoslijeda* i *uzajamnih odnosa pojedinih aktivnosti* u projektu i *konstruisanje mrežnog dijagrama* kao *grafičkog prikaza odvijanja projekta*.

Crtanje mrežnog plana (dijagrama) se zasniva na *određenom broju jednostavnih pravila*. Ovdje ćemo se pretežno fokusirati na objašnjenju konstrukcije dijagrama tipa "aktivnosti na strelicama", ne samo zbog činjenice da su ovi dijagrami *jednostavniji za ručni rad*, nego i zbog činjenice da oni traže *više objašnjenja*, s obzirom da je crtanje dijagrama tipa "aktivnosti na čvorovima" manje-više *očigledno iz same njihove definicije*. Stoga ćemo razmotriti nekoliko osnovnih slučajeva koji se sreću pri izgradnji mrežnih dijagrama tipa "aktivnosti na strelicama".

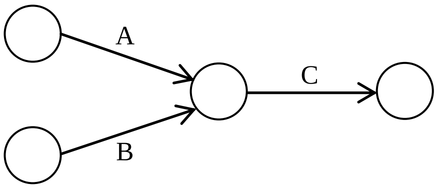
Ako *neka aktivnost ne može početi prije nego što bude završena neka druga aktivnost*, one moraju biti postavljene *jedna iza druge* tako da je *završni događaj prethodne aktivnosti identičan početnom događaju druge aktivnosti*. Na sljedećoj slici aktivnost B može početi tek kada se potpuno završi aktivnost A.



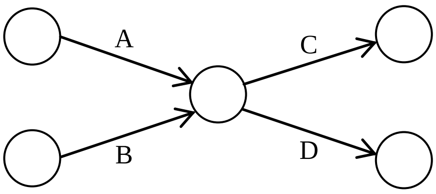
Ako po *završetku jedne aktivnosti može početi više aktivnosti istovremeno*, onda je *završni događaj prethodne aktivnosti istovremeno početni događaj svih tih aktivnosti*. Na sljedećoj slici, aktivnosti B i C mogu početi tek kad se završi aktivnost A, ali kad počnu, mogu se izvršavati istovremeno (paralelno):



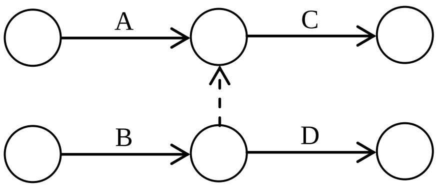
Ako *više aktivnosti mora biti završeno da bi mogla početi naredna aktivnost*, onda se *sve te aktivnosti moraju završiti do početnog događaja naredne aktivnosti*. Na sljedećoj slici, aktivnost C može početi tek kada se završe aktivnosti A i B.



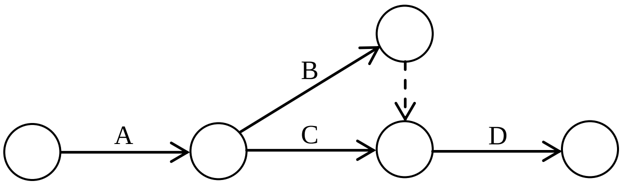
Naravno, moguće su i *kombinacije prethodna dva slučaja*. Sljedeća slika prikazuje situaciju u kojoj nijedna od aktivnosti C i D ne može početi dok se ne završe aktivnosti A i B, ali početak aktivnosti C ne zavisi od početka aktivnosti D i obratno:

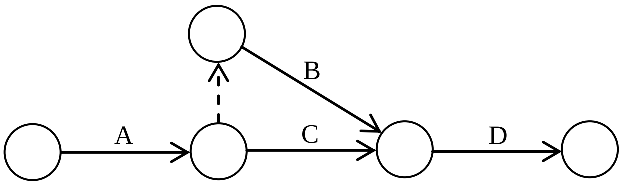


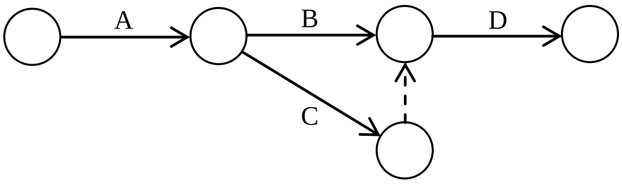
Ako u jednom događaju završava i počinje *više aktivnosti među kojima nisu sve međusobno zavisne*, onda se *prave zavisnosti* moraju prikazati pomoću *fiktivnih aktivnosti*. Neka, recimo, aktivnost C ne može početi sve dok se ne završe aktivnosti A i B, međutim aktivnost D može početi čim se završi aktivnost B. Ovdje završetke aktivnosti A i B ne možemo prikazati istim događajem, nego ih moramo posmatrati kao *dva različita događaja*, povezana *fiktivnom aktivnošću*:

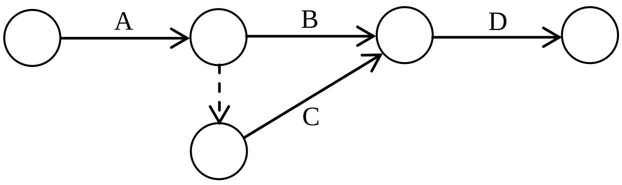


Ako dvije ili više aktivnosti *imaju zajednički početni i završni događaj*, da bi se obezbijedilo njihovo *jednoznačno određivanje*, također je *potrebno uvoditi fiktivne aktivnosti*. Paralelne aktivnosti mogu se *izvršavati istovremeno*, ali *ne mogu imati zajedničke i početne i završne događaje*. Recimo, neka aktivnost D ne može početi dok se ne završe aktivnosti B i C, dok aktivnosti B i C mogu početi odmah po završetku aktivnosti A. Tada bi aktivnosti B i C trebale imati zajednički i početni i završni događaj, a to je, zbog potrebe jednoznačne identifikacije aktivnosti, *nedopustivo*. Ispravno prikazivanje ovih aktivnosti obezbijediće se uvođenjem vještačke aktivnosti. Moguća su četiri ispravna načina kako ovo izvesti, i svi su prikazani na sljedećim slikama.

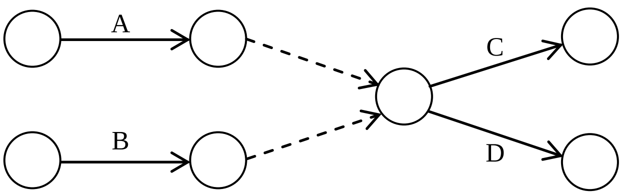




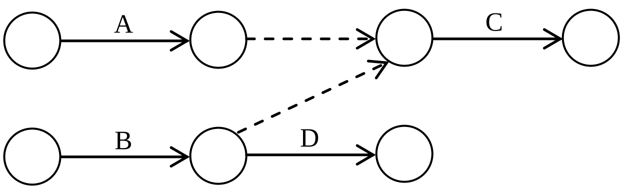




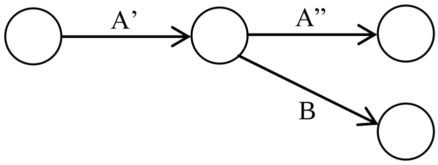
U ma koji niz stvarnih aktivnosti može se uključiti *proizvoljan broj fiktivnih aktivnosti*, a da se time ne naruše *principi konstrukcije mrežnih dijagrama*. Stoga, ukoliko nismo sigurni da li treba uvesti fiktivnu aktivnost ili ne, bolje je ići "na sigurno", jer "višak" fiktivnih aktivnosti neće narušiti ispravnost dijagrama. Obično se na početku dijagram nacrta tako da kad god izvršenje neke aktivnosti ovisi od završetka *više drugih aktivnosti*, početak te aktivnosti se nacrta kao *potpuno novi događaj* (dakle, *različit* od događaja kojima se opisuju završeci tih prethodnih aktivnosti), koji se onda *fiktivnim aktivnostima* spaja za događajima koji predstavljaju završetke prethodnih aktivnosti. Nakon toga se, da dijagram ne bi postao *nepregledan*, suvišne fiktivne aktivnosti *uklone* (obično je cilj dobiti dijagram sa *što je god moguće manje fiktivnih aktivnosti*). Recimo, sigurno je moguće ukloniti fiktivnu aktivnost kad god je ona *jedina* koja izlazi iz nekog događaja (u tom slučaju, početni i krajnji događaj takve fiktivne aktivnosti *prosto spajamo u jedan događaj*). Na primjer, u prethodnom primjeru u kojem nijedna od aktivnosti C i D ne može početi dok se ne završe aktivnosti A i B, ali početak aktivnosti C ne zavisi od početka aktivnosti D i obratno, mogli smo na početku imati sljedeću situaciju, nakon koje bismo odmah vidjeli da se *obje fiktivne aktivnosti mogu ukloniti*:



Slično, u primjeru u kojem aktivnost C ne može početi sve dok se ne završe aktivnosti A i B, dok aktivnost D može početi čim se završi aktivnost B, mogli smo krenuti od sljedeće slike, sa koje jasno vidimo da se *gornja fiktivna aktivnost može ukloniti*, ali *donja ne može*:



Ukoliko neka aktivnost *može početi prije nego što je prethodna aktivnost potpuno završena*, onda je prethodna aktivnost *složena* i mora se *podijeliti na dvije ili više prostih aktivnosti*. Tako, na primjer, na sljedećoj slici aktivnost B može početi prije nego što je prethodna aktivnost A potpuno završena. Stoga se aktivnost A mora podijeliti na dvije podaktivnosti A' i A". Aktivnost A' je dio aktivnosti A koji se mora završiti do početka aktivnosti B:



U mrežnim dijagramima *nije dozvoljena pojava ciklusa* (*kontura*). To znači da se u mrežnom dijagramu bilo koja aktivnost može vremenski *samo jednom odigrati*. Pojava ciklusa u mrežnom dijagramu ukazuje na postojanje *greške* odnosno *neke kontradikcije u planiranoj vremenskoj zavisnosti aktivnosti* i ona se mora *otkloniti*, jer se u suprotnom projekat *ne može realizirati*.

Nakon što je formiran dijagram koji prikazuje aktivnosti i njihove međuzavisnosti, neophodno je izvršiti *numeraciju događaja*. Pri tome, numeracija mora biti *pravilna* (u *topološkom poretku*), odnosno za svaku aktivnost *redni broj njenog završetka mora biti veći od rednog broja njenog početka*. Već smo ranije vidjeli jedan jednostavan ali ne naročito efikasan postupak za pronalaženje pravilne numeracije u usmjerenim grafovima bez ciklusa (što mrežni dijagrami zapravo i jesu). Međutim, u mrežnom programiranju za tu svrhu se gotovo uvijek koristi tzv. ***metod Fulkersona***, koji je izuzetno praktičan i jednostavan za *ručni rad*, a uz dobru implementaciju može biti vrlo pogodan i za računarsku izvedbu. Ovaj metod može se prikazati sljedećim nizom koraka:

1. Početni događaj (događaj u koji ne ulazi ni jedna grana) numerirati sa 1, a nakon toga precrtati sve aktivnosti (strelice odnosno grane) koje izlaze iz tog čvora.
2. Numerirati u rastućem redoslijedu sve čvorove u koje ulaze samo prectrane aktivnosti, pri čemu nakon numeracije svakog čvora treba prectrati sve aktivnosti koje iz njega izlaze.
3. Ukoliko još ima nenumeriranih čvorova u koje ulaze samo precrtane aktivnosti, vratiti se na korak 2.

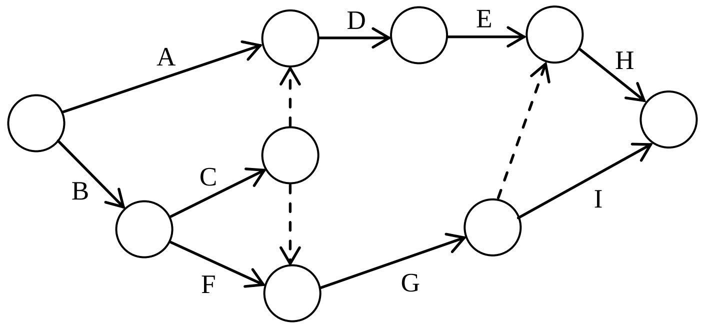
Po završetku opisanog postupka, svi čvorovi bi trebali biti numerirani. Ukoliko se to ne desi, u dijagramu *postoji makar jedan ciklus*, odnosno *negdje postoji greška* u mrežnom dijagramu. Pri tome ciklus se sigurno krije *među čvorovima koji nisu uspjeli dobiti numeraciju*. Slijedi da se ovaj metod može uspješno koristiti i za *detekciju ciklusa*.

Za *efikasnu implementaciju* ovog metoda na računaru, potrebno je obezbijediti da se *ne gubi mnogo vremena* za pronalaženje čvorova u koji ulaze samo neprecrtane aktivnosti. Za tu svrhu, neophodno je za svaki čvor čuvati informaciju o *broju neprecrtanih grana koje u njega ulaze*, pri čemu se te informacije *ažuriraju* svaki put kada vršimo precrtavanje grana. Čvorove za koje je ovaj broj *nula* treba čuvati u *posebnom spisku* (to su čvorovi u koje ulaze samo neprecrtane aktivnosti), pri čemu se ovaj spisak *proširuje* svaki put kada se nakon ažuriranja pojavi *novi čvor* u koji ulaze samo neprecrtane aktivnosti, a *sužava* (izbacivanjem čvora iz spiska) svaki put kada se *izvrši numeracija čvora*. U tehničke detalje implementacije nećemo se upuštati. Uglavnom, uz dobru implementaciju, vrijeme izvršavanja metoda je reda veličine *m*, gdje je *m* broj aktivnosti.

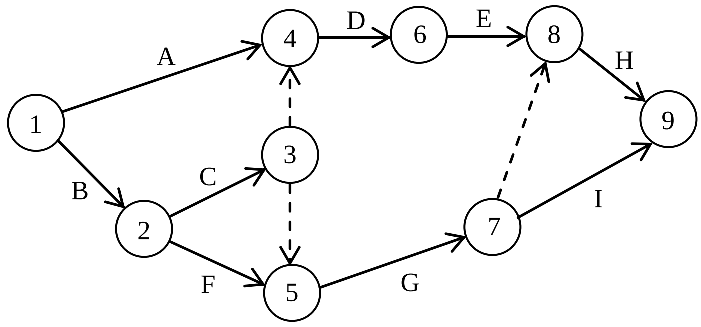
➢ ***Primjer*** : Formirati mrežni dijagram projekta za koji su aktivnosti i njihove logičke međuzavisnosti prikazane u sljedećoj tabeli:

Aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Preduvjeti	–	–	B	A, C	D	B	C, F	E, G	G

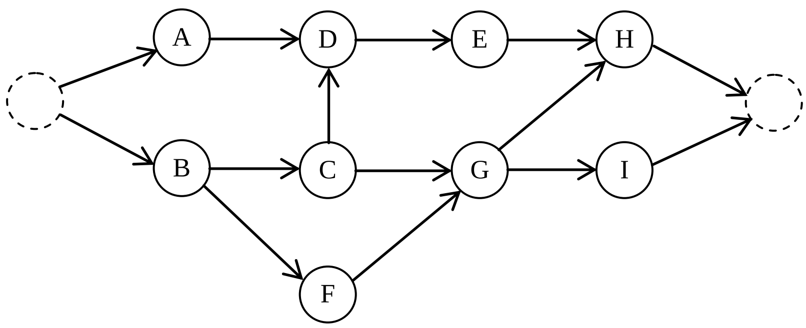
Crtanje uvijek započinje sa čvorom koji označava *početak projekta*, odnosno početak onih aktivnosti koje *nisu uvjetovane ni jednom prethodnom aktivnošću*. To su u našem slučaju aktivnosti A i B. Aktivnosti se predstavljaju granama grafa. Svakoj aktivnosti se pridružuje jedna i samo jedna usmjerena grana. Svaka grana se završava čvorom. Pošto se ucrtaju grane koje polaze iz početnog čvora, u tabeli se traži aktivnost čiji je početak uvjetovan završetkom samo onih aktivnosti koje su već predstavljene na grafu a ne i aktivnosti koje još nisu nacrtane. Pri dodavanju te aktivnosti grafu može se desiti neki od ranije razmotrenih slučajeva. U slučaju kada neka aktivnost ovisi od završetka *više drugih aktivnosti*, završetke svih tih aktivnosti možemo objediniti u jedan događaj *samo ukoliko nema aktivnosti koje ovise od završetka samo nekih a ne svih aktivnosti iz te skupine*. U suprotnom će nam biti potrebne *fiktivne aktivnosti*. Postupak se nastavlja dok se ne nacrtaju sve aktivnosti projekta. Tako se za projekat iz razmatranog primjera dobija dijagram kao na sljedećoj slici:



Sada je potrebno izvršiti *pravilnu numeraciju grafa*. Metod Fulkersona dovodi nas do numeriranog grafa sa sljedeće slike, čime je postupak konstrukcije mrežnog dijagrama završen:



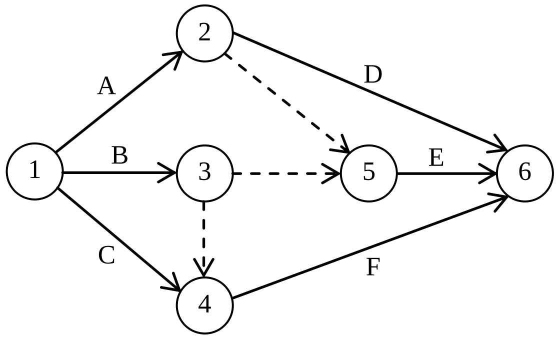
Radi poređenja, za isti projekat prikazan je i mrežni dijagram tipa "aktivnosti na čvorovima" čija je konstrukcija očigledna iz same tabele međuzavisnosti. Kao što je to uvijek slučaj u dijagramima ovog tipa, ovaj dijagram *ne sadrži fiktivne aktivnosti*, osim dvije fiktivne aktivnosti "otpočinjanje projekta" i "završavanje projekta" (prikazane crtkanim čvorovima na slici):



➢ ***Primjer***: Formirati mrežni dijagram projekta čije su aktivnosti i njihove logičke međuzavisnosti prikazane u sljedećoj tabeli:

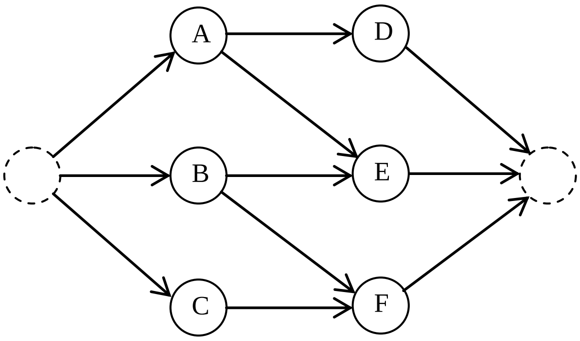
Aktivnost	A	B	C	D	E	F
Preduvjeti	–	–	–	A	A, B	B, C

Na sličan način kao u prethodnom primjeru, lako dolazimo do traženog mrežnog dijagrama sa sljedeće slike:



Pri tome je najbolje prvo predvidjeti *posebne događaje* za otpočinjanje aktivnosti E i F s obzirom da one zavise od *više drugih aktivnosti*, koje ćemo prvo povezati fiktivnim aktivnostima, nakon čega se lako uviđa da se događaji “početak aktivnosti F” i “završtetak aktivnosti C” mogu *spojiti u jedan događaj*. Bitno je uočiti da se događaji 3 i 5 *ne smiju* spojiti u jedan događaj. Ukoliko bismo to uradili, tada bi aktivnost F morala čekati završetak sve tri aktivnosti A, B i C, odnosno greškom bismo uveli *nepotrebnu ovisnost* aktivnosti F od završetka aktivnosti A.

Radi poređenja, prikazaćemo i mrežni dijagram tipa “aktivnosti na čvorovima” za isti projekat. Vidi se da je njegova konstrukcija intuitivno mnogo jasnija, što je razlog zašto današnji softverski paketi za mrežno planiranje gotovo isključivo koriste ovaj tip dijagrama. Međutim, dalje analize kojima mrežni dijagram služi kao polazna osnova postaju *jako nepraktične za ručni rad* ukoliko se koristi ovaj tip dijagrama.



Analiza vremena po metodu CPM

Glavni cilj analize vremena je određivanje *ukupnog vremena trajanja projekta*, kao i određivanje ***kritičnih aktivnosti***, odnosno aktivnosti čije bi prolongiranje ili produžavanje trajanja *dovelo do produžavanja trajanja čitavog projekta*. Analiza vremena uzima u obzir *vrijeme trajanja svih aktivnosti u projektu* i *njihov međusobni odnos*, da bi se određenim postupkom odredilo *ukupno vrijeme trajanja projekta*.

Zadatak *nalaženja ukupnog trajanja projekta* se može također matematički definirati i kao zadatak *linearnog programiranja*. Zaista, neka smo sa t_i označili *vremena nastupanja događaja* i, $i = 1 .. n$, a sa $t_{i,\,j}$ *trajanja aktivnosti* čiji su početni i završni događaji respektivno i i j (za razliku od veličina t_i koje su *nepoznate*, veličine $t_{i,\,j}$ su *poznate*). Tada je t_1 vrijeme *početnog događaja* (*početka projekta*), a t_n vrijeme *krajnjeg događaja* (*završetka projekta*), tako da je *ukupno trajanje projekta* jednako $T = t_n - t_1$. Stoga, za funkciju cilja može uzeti upravo ukupno trajanje projekta

$$T = t_n - t_1$$

Što se tiče ograničenja, jasno je da razmak između vremena nastupanja završnog i početnog događaja svake od aktivnosti mora biti *veće ili jednako* od trajanja aktivnosti. Možda djeluje čudno da ovaj razmak može biti *veći* od trajanja aktivnosti (a ne tačno jednak njemu), ali u nekim slučajevima se *mora odgoditi* događaj koji odgovara završetku neke aktivnosti (bez obzira što je ona faktički završena) ukoliko isti taj događaj također predstavlja i završetak neke druge aktivnosti koja još uvijek traje (takav događaj onda nastupa tek kada se završe *sve aktivnosti* koje u njega ulaze). Dakle, ukoliko je Ω skup aktivnosti, tj. skup grana oblika (i, j) koje odgovaraju aktivnostima pri čemu je $i < j$, moraju biti zadovoljena sljedeća ograničenja:

$$t_j - t_i \ge t_{i,\,j}\,,\ \ (i, j) \in \Omega$$

Cilj nam je da ukupno trajanje projekta bude *minimalno*. Slijedi da se problem nalaženja ukupnog trajanja projekta može predstaviti kao problem linearnog programiranja

$$\arg\min\ T = t_n - t_1$$

p.o.

$$t_j - t_i \ge t_{i,\,j}\,,\ \ (i, j) \in \Omega$$

Gore formulirani problem dopušta da početak projekta nastupi *bilo kada*, jer zapravo trajanje projekta i ne ovisi od toga *kada je projekat počeo*, nego samo od *razlike vremena završetka i vremena početka projekta*. Ukoliko želimo specificirati da projekat počinje recimo u trenutku 0, gornjim ograničenjima možemo dodati i ograničenje $t_1 = 0$. Ukoliko želimo da model bude *u standardnom obliku*, možemo dodati još i ograničenja $t_i \geq 0$, $i = 1 .. n$ mada su ona zapravo *nepotrebna* (strogo uzevši, trenuci započinjanja pojedinih događaja *ne moraju biti nenegativni*, jer je trenutak koji se uzima kao nulti trenutak *stvar konvencije*). Štaviše, u prisustvu ograničenja $t_1 = 0$, ograničenja $t_i \geq 0$, $i = 1 .. n$ su *redundantna* (*suvišna*), jer ona slijede kao posljedica ostalih ograničenja oblika $t_j - t_i \geq t_{i,\,j}$ ($j > i$) i činjenice da su trajanja $t_{i,\,j}$ *nenegativna*.

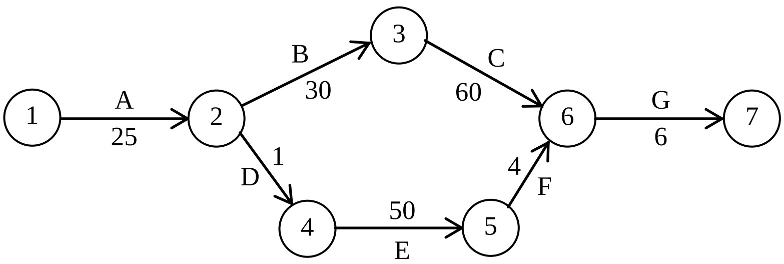
Činjenica da ovako formulirani problem *izrazito podsjeća na dualni problem problema nalaženja najkraćeg puta u grafu* (jedino je *obrnut smjer nejednakosti* i traži se *minimizacija* a ne maksimizacija) *nije slučajna*. Zapravo, uskoro ćemo vidjeti da je ovaj problem dualan *problemu nalaženja najdužeg puta u grafu*.

➢ ***Primjer*** : Izgradnja jedne tvornice sastoji se od sljedećih aktivnosti:

Aktivnost	Trajanje (dana)	Preduvjeti
A – Idejni projekat zgrade	25	–
B – Detaljan građevinski projekat	30	A
C – Izgradnja zgrade	60	B
D – Narudžba mašina	1	A
E – Izrada mašina	50	D
F – Isporuka mašina	4	E
G – Puštanje u pogon	6	C, F

Odrediti minimalno vrijeme koje je potrebno za završetak izgradnje tvornice.

Da bismo uopće mogli formirati model problema, potrebno je ustanoviti *šta su događaji u ovom projektu*, odnosno treba prvo obaviti *analizu strukture*. Nakon što se *obavi analiza strukture* i *ustanove vremena trajanja* $t_{i,\,j}$ svih aktivnosti, tada se vremena trajanja unose *kraj odgovarajućih aktivnosti*, kao što je i učinjeno na sljedećoj slici, koja predstavlja kompletirani mrežni dijagram ovog projekta:



U skladu sa prethodno provedenim razmatranjima, ovom problemu odgovara sljedeći zadatak linearnog programiranja:

arg min $T = t_7 - t_1$

p.o.

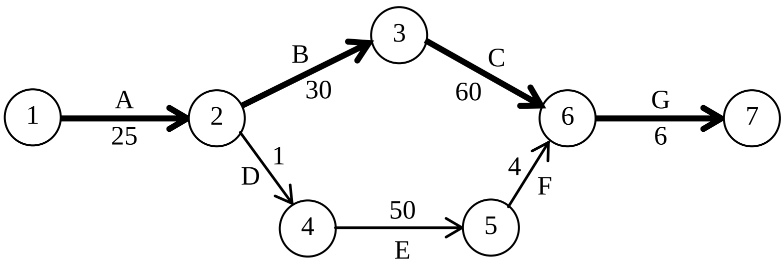
$t_2 - t_1 \geq 25$
$t_3 - t_2 \geq 30$
$t_6 - t_3 \geq 60$
$t_4 - t_2 \geq 1$
$t_5 - t_4 \geq 50$
$t_6 - t_5 \geq 4$
$t_7 - t_6 \geq 6$

Opcionalno se mogu dodati i ograničenja $t_i \geq 0$, $i = 1 .. 7$. Trenuci t_i, $i = 1 .. 6$ predstavljaju trenutke u kojima mogu započeti sve aktivnosti oblika (i, j), dok je t_7 trenutak završetka projekta. Svi događaji osim događaja 6 predstavljaju trenutak završetka *samo jedne aktivnosti*, dok događaj 6 predstavlja događaj koji nastupa kada se završi i aktivnost C i aktivnost F.

Ovako postavljeni zadatak se u načelu može riješiti ma kojim metodom za rješavanje problema linearnog programiranja. Međutim, izuzetno jednostavna struktura ovog zadatka omogućava da se on riješi *na neuporedivo lakši način*. Recimo, fiksiramo $t_1 = 0$ i postupno za svaku od promjenljivih uvijek biramo *najmanju moguću dozvoljenu vrijednost*, odnosno najmanju vrijednost koja zadovoljava ograničenja. Jasno je da će tada izraz $T = t_n - t_1$ biti minimalan. Zahvaljujući činjenici da je za $(i, j) \in \Omega$ uvijek $i < j$, u svakom trenutku će postojati barem jedno ograničenje u kojem će *jedna od dvije promjenljive koje se u njemu javljaju biti poznata*, što omogućava da lako nađemo najmanju moguću dozvoljenu vrijednost one druge (kasnije ćemo opisanu ideju *formalizirati*).

Za konkretan primjer, uzećemo prvo $t_1 = 0$, nakon čega iz ograničenja $t_2 - t_1 \geq 25$ imamo $t_2 \geq 25$. Stoga ćemo uzeti $t_2 = 25$. Sad iz ograničenja $t_3 - t_2 \geq 30$ i $t_4 - t_2 \geq 1$ imamo $t_3 \geq 55$ i $t_4 \geq 26$, tako da ćemo uzeti $t_3 = 55$ i $t_4 = 26$. Dalje, iz $t_5 - t_4 \geq 50$ imamo $t_5 \geq 76$, tako da uzimamo $t_5 = 76$. Što se tiče promjenljive t_6, ona se javlja u dva ograničenja $t_6 - t_3 \geq 60$ i $t_6 - t_5 \geq 4$ koje sa ranije usvojenim vrijednostima za t_3 i t_4 postaju $t_6 \geq 115$ i $t_6 \geq 80$. Stoga ćemo uzeti $t_6 = 115$ (najmanja vrijednost koja zadovoljava *oba ograničenja*). Konačno, iz ograničenja $t_7 - t_6 \geq 6$ imamo $t_7 \geq 121$, tako da uzimamo $t_7 = 121$. Slijedi da je *najkraće trajanje projekta* $T_{min} = 121$, odnosno 121 *dan*.

Za izlaganja koja slijede, bitno je uočiti da gore nađene vrijednosti za neke od vrijednosti t_i, $i = 1\,..\,7$ *nisu jedine moguće* koje daju *isto najkraće trajanje projekta*. Naime, ako malo bolje pogledamo, možemo zaključiti da je minimalno trajanje projekta zapravo jednako *dužini najdužeg puta kroz dijagram od početka do kraja projekta*, ukoliko pod *dužinom* grane smatramo *trajanje odgovarajuće aktivnosti*. Takav put naziva se ***kritični put***. U konkretnom problemu, kritični put je put $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 7$, što je prikazano podebljano na sljedećoj slici:



Jasno je da trenuci nastupanja svih događaja koji leže na kritičnom putu moraju biti upravo ovakvi kakve smo gore odredili da bismo imali optimalno (minimalno) trajanje projekta. Zaista, *svako prolongiranje početka neke aktivnosti na kritičnom putu produžiće trajanje čitavog projekta*. Slijedi da u svakom optimalnom rješenju prethodnog problema (uz fiksirano $t_1 = 0$) mora biti $t_2 = 25$, $t_3 = 55$, $t_6 = 115$ i $t_7 = 121$. Međutim, što se tiče trenutaka t_4 i t_5 nastupanja događaja 4 i 5, tu situacija nije ni izbliza tako "kruta". S obzirom da je zbirno trajanje aktivnosti D, E i F kraće od zbirnog trajanja aktivnosti B i C, duž puta $2 \to 4 \to 5 \to 6$ moguće je *prolongirati* početke nekih aktivnosti do izvjesne granice, a da to ne ugrozi trajanje projekta, jer svakako u događaju 6 moramo *čekati* da se završi aktivnosti C, a aktivnosti D, E i F zajedno mogu se završiti prije nego što se završe aktivnosti B i C. Recimo, kako znamo da je u optimalnom rješenju $t_6 = 115$ i da mora biti $t_6 - t_5 \geq 4$, možemo slobodno uzeti $t_5 = 111$ da sva ograničenja budu zadovoljena, a da rješenje i dalje bude optimalno. Stoga ima smisla govoriti o ***najranijem mogućem*** i ***najkasnijem dozvoljenom*** vremenu nastupanja nekog događaja (kratko se kaže samo *najranije* odnosno *najkasnije vrijeme događaja*). Tako je za događaj 5 najranije moguće vrijeme $t_5 = 76$ (kako je određeno na početku), a najkasnije dozvoljeno vrijeme je $t_5 = 111$ (kako smo sad odredili, iz uvjeta da događaj 6 mora nastupiti u trenutku $t_6 = 115$ da bi rješenje bilo optimalno). Slično, za događaj 4 najranije moguće vrijeme je $t_4 = 26$, dok je najkasnije dozvoljeno vrijeme $t_4 = 61$ (što se može odrediti iz uvjeta $t_5 - t_4 \geq 50$ i činjenice da smo već odredili da događaj 5 mora nastupiti najkasnije u trenutku $t_5 = 111$).

Iz izloženog slijedi da možemo imati *čitavo mnoštvo* vrijednosti za t_4 i t_5 za koje će trajanje projekta biti optimalno, pri čemu sve te vrijednosti zadovoljavaju uvjete $26 \leq t_4 \leq 61$ i $76 \leq t_5 \leq 111$. To *ne znači* da su sve vrijednosti t_4 i t_5 koje zadovoljavaju ove uvjete moguće u optimalnom rješenju, jer mora još biti zadovoljen i uvjet $t_5 - t_4 \geq 50$ (na primjer, kombinacija vrijednosti $t_4 = 50$ i $t_5 = 80$ nisu dozvoljene). Zapravo, nije teško vidjeti da su u optimalnom rješenju dozvoljene one i samo one vrijednosti za t_4 i t_5 za koje vrijedi $26 \leq t_4 \leq 61$ i $t_4 + 50 \leq t_5 \leq 111$. Provedena razmatranja ćemo uskoro *generalizirati* i *formalizirati* uvođenjem pojma ***vremenskih rezervi***.

Zadatak nalaženja optimalnog trajanja projekta možemo modelirati kao zadatak linearnog programiranja i na drugi način. Naime, vidjeli smo da je ovaj problem ekvivalentan *zadatku nalaženja kritičnog puta*, odnosno nalaženju *najdužeg puta u dijagramu* od početnog do krajnjeg događaja. Uvedemo li *logičke promjenljive* (tj. promjenljive 0–1 tipa) $x_{i,j}$ čija je vrijednost 1 ukoliko se aktivnost (i, j) *nalazi na kritičnom putu*, a 0 *u suprotnom*, na potpuno isti način kao kod problema najkraćeg puta zaključujemo da se ovaj zadatak može modelirati kao sljedeći zadatak linearnog programiranja:

$$\arg\max Z = \sum_{(i,j)\in\Omega} t_{i,j}\, x_{i,j}$$

p.o.

$$\sum_{(i,k)\in\Omega} x_{i,k} - \sum_{(k,j)\in\Omega} x_{k,j} = \begin{cases} -1, & \text{za } k = 1 \\ 0\ , & \text{za } k = 2\,..\,n-1 \\ 1\ , & \text{za } k = n \end{cases}$$

$$x_{i,j} \ge 0\,,\quad (i,j) \in \Omega$$

Na primjer, za projekat iz prethodnog primjera, problem određivanja optimalnog trajanja projekta može se predstaviti kao sljedeći zadatak linearnog programiranja (zasnovan na svođenju problema na ekvivalentni problem nalaženja kritičnog puta):

$$\arg\max Z = 25\,x_{1,2} + 30\,x_{2,3} + x_{2,4} + 60\,x_{3,6} + 50\,x_{4,5} + 4\,x_{5,6} + 6\,x_{6,7}$$

p.o.

$$\begin{aligned}
&-x_{1,2} = -1\\
&x_{1,2} - x_{2,3} - x_{2,4} = 0\\
&x_{2,3} - x_{3,6} = 0\\
&x_{2,4} - x_{4,5} = 0\\
&x_{4,5} - x_{5,6} = 0\\
&x_{3,6} + x_{5,6} - x_{6,7} = 0\\
&x_{6,7} = 1
\end{aligned}$$

$$x_{1,2} \ge 0,\ x_{2,3} \ge 0,\ x_{2,4} \ge 0,\ x_{3,6} \ge 0,\ x_{4,5} \ge 0,\ x_{5,6} \ge 0,\ x_{6,7} \ge 0$$

Kao što je već rečeno, mada se analiza vremena u mrežnom planiranju može modelirati zadacima linearnog programiranja, zbog specijalne strukture ovih zadataka za potrebe ove analize vremena koristi se specijalistička tehnika nazvana ***analiza mreža***. U suštini, vremenska analiza se sastoji od nekoliko postupaka:

- Određivanje *vremena trajanja* aktivnosti;
- Određivanje *najranijeg mogućeg početka* i *najranijeg mogućeg završetka* aktivnosti;
- Određivanje *najkasnijeg dozvoljenog početka* i *najkasnijeg dozvoljenog završetka* aktivnosti;
- Nalaženje *kritičnog puta* (odnosno *kritičnih puteva* ukoliko ih ima više);
- Određivanje *vremenskih rezervi*.

Najranije moguće (ili prosto samo *najranije*) *vrijeme* nekog *dodađaja* predstavljenog nekim čvorom je vrijeme kada se *završavaju sve aktivnosti* koje ulaze u taj čvor. U literaturi koja se bavi mrežnim planiranjem uobičajeno je da se najranije vrijeme događaja *i* obilježava oznakom $t_i^{(0)}$ (ili ponekad samo t_i^0), pa ćemo i mi koristiti ovu konvenciju. Pošto je događaj *i* preduvjet za otpočinjanje svih aktivnosti $[i-j]$ koje izlaze iz čvora *i*, to je ujedno i *najranije moguće vrijeme početka svih tih aktivnosti*. Naime, naredna aktivnost može početi tek kada se završe *sve aktivnosti koje joj prethode*, a to će se desiti onda kada se završi *prethodna aktivnost koja se posljednja završava* (to *nije nužno ona sa najdužim trajanjem*, jer sve prethodne aktivnosti *nisu morale početi u isto vrijeme*).

Najraniji završetak neke aktivnosti $[i-j]$ se očigledno dobija *sabiranjem najranijeg početka i trajanja te aktivnosti*, odnosno najraniji završetak te aktivnosti je $t_i^{(0)} + t_{i,j}$. Međutim, to *ne mora ujedno biti* i najranije vrijeme $t_j^{(0)}$ događaja *j*, jer događaj *j* nastupa tek kada se završe *sve aktivnosti* koje ulaze u čvor *j*. Dakle, relacija $t_j^{(0)} = t_i^{(0)} + t_{i,j}$ vrijedi *jedino u slučaju da je aktivnost* $[i-j]$ *jedina aktivnost koja završava u čvoru j*. U općem slučaju (tj. ukoliko do događaja *j* vodi više puteva), *najraniji početak sljedeće aktivnosti* (tj. one koja ima *j* za početni događaj) jednak je *maksimumu najranijih završetaka* onih aktivnosti koje joj *prethode*. Drugim riječima, mora vrijediti

$$t_j^{(0)} = \max\,\{t_i^{(0)} + t_{i,j} \mid (i,j) \in \Omega\}$$

Ovo je, u suštini, još jedna primjena *Bellmanovog principa optimalnosti*. Kako zbog obavezne pravilne numeracije mrežnog dijagrama uvijek vrijedi $i < j$ kad god je $(i,j) \in \Omega$, slijedi da sva vremena $t_j^{(0)}$ za $j = 2\,..\,n$ možemo izračunati korištenjem relacija

$$t_1^{(0)} = 0$$

$$t_j^{(0)} = \max\,\{t_i^{(0)} + t_{i,j} \mid 1 \le i < j \wedge (i,j) \in \Omega\},\quad j = 2\,..\,n$$

s obzirom da će nam, ukoliko računanja obavljamo naznačenim redom, sve veličine s desne strane u svakom koraku biti *poznate*. Nije slučajno što ove relacije veoma podsjećaju na relacije kojima se izvodi *Bellmanov algoritam unaprijed*. Naime, ovo i *jeste Bellmanov algoritam*, primijenjen na problem nalaženje *najdužeg* (a ne najkraćeg) odnosno *kritičnog puta* od početnog do krajnjeg događaja u mrežnom dijagramu. Kad smo odredili sve vrijednosti $t_j^{(0)}$, $j = 2 \,..\, n$, očigledno imamo i najkraće vrijeme izvršavanja projekta $T_{min} = t_n^{(0)}$ (jer smo krenuli od konvencije $t_1^{(0)} = 0$).

Nakon što se odrede najranija moguća vremena za sve događaje, mogu se odrediti i *najkasnija dozvoljena* (ili prosto samo *najkasnija*) *vremena* svih događaja. Najkasnije vrijeme događaja *j* obično se obilježava oznakom $t_j^{(1)}$ (ili ponekad samo t_j^1). Po definiciji, najkasnije vrijeme događaja je najkasnije vrijeme kada se smije desiti neki događaj a da to ne ugrozi vrijeme završetka projekta. Za najkasnije vrijeme završetka cijelog projekta $t_n^{(1)}$ se obično uzima da je jednako najranijem vremenu završetka cijelog projekta, odnosno uzima se $t_n^{(1)} = t_n^{(0)}$. Drugim riječima, uzima se da se cijeli projekat *mora završiti za najkraće moguće vrijeme*, što ne znači, kao što smo već ranije vidjeli, da se i *svi događaji* moraju desiti u najranijem mogućem trenutku. Ponekad se, ukoliko je poznato *maksimalno dozvoljeno* trajanje projekta (koje je *veće* od *minimalnog mogućeg* trajanja), a koje je recimo predviđeno nekim *ugovorom*, uzima da je $t_n^{(1)}$ jednako upravo tom nekom dozvoljenom trajanju (u tom slučaju je $t_n^{(1)} \ne t_n^{(0)}$, tačnije $t_n^{(1)} > t_n^{(0)}$). Međutim, nije dobro raditi nikakva planiranja koja se oslanjaju na pretpostavku da projekat može trajati *duže nego što je minimalno potrebno*, jer ukoliko se *dopusti* da projekat traje duže nego što je potrebno, on će i *trajati* duže nego što je potrebno. Ova činjenica se obično iskazuje kroz poslovicu poznatu kao ***Parkinsonov zakon***, prema kojoj će "*svaki projekat trajati sve dok se ne dostigne svo raspoloživo vrijeme za njegovu realizaciju*", a iskustvo pokazuje da se može dodati "*i još malo duže*". Stoga je u praksi uvijek potrebno uzimati $t_n^{(1)} = t_n^{(0)}$, odnosno prvo bi trebalo *procijeniti* trajanje projekta pa tek onda ugovarati rok za njegovu realizaciju, a ne odvijanje projekta planirati prema *unaprijed ugovorenom roku* njegove realizacije (druga je stvar što se to u praksi *veoma rijetko radi*).

Pošto događaj *j* nastupa tek kada se završe sve aktivnosti $[i-j]$ koje ulaze u čvor *j*, vrijeme $t_j^{(1)}$ je ujedno i *najkasnije dozvoljeno vrijeme završetka svih tih aktivnosti*. Jasno je onda da se *najkasniji početak neke aktivnosti* $[i-j]$ može dobiti *oduzimanjem trajanja aktivnosti od njenog najkasnijeg završetka*, odnosno najkasniji početak te aktivnosti je $t_j^{(1)} - t_{i,j}$. Međutim, to *ne mora ujedno biti* i najkasnije vrijeme $t_i^{(1)}$ događaja *i*, jer taj događaj možda mora nastupiti prije ovog vremena radi najkasnijeg dozvoljenog početka neke druge aktivnosti koja iz njega izlazi. Slijedi da je *najkasniji završetak prethodnih aktivnosti* (tj. onih koje imaju *i* za završni događaj) jednak *minimumu najkasnijih početaka* onih aktivnosti koje *slijede* iza njih. Drugim riječima, mora vrijediti

$$t_i^{(1)} = \min \{t_j^{(1)} - t_{i,j} \mid (i, j) \in \Omega\}$$

Zahvaljujući pravilnoj numeraciji dijagrama, sva vremena $t_i^{(1)}$ za $i = 1 \,..\, n-1$ možemo izračunati *unazad* polazeći od poznate vrijednosti $t_n^{(1)}$ korištenjem relacija

$$t_n^{(1)} = t_n^{(0)}$$
$$t_i^{(1)} = \min \{t_j^{(1)} - t_{i,j} \mid i < j \le n \wedge (i, j) \in \Omega\}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1$$

U suštini, ovo nije ništa drugo nego *Bellmanov algoritam* za nalaženje najdužeg puta od početnog do krajnjeg čvora izvođen *unazad* (od krajnjeg čvora ka početku), samo u kojem ulogu dužina najdužih puteva od *i*-tog čvora do posljednjeg igraju veličine $t_n^{(1)} - t_i^{(1)}$, a ne direktno veličine $t_i^{(1)}$. Zaista, odbijemo li obje strane prethodne relacije od $t_n^{(1)}$, dobijamo

$$t_n^{(1)} - t_i^{(1)} = \min \{(t_n^{(1)} - t_j^{(1)}) + t_{i,j} \mid i < j \le n \wedge (i, j) \in \Omega\}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1$$

što nije ništa drugo nego Bellmanov algoritam izvođen unazad sa veličinama $t_n^{(1)} - t_i^{(1)}$ umjesto $t_i^{(1)}$.

Iz izloženog je jasno da za stvarno vrijeme t_i nastupanja ma kojeg događaja *i* mora vrijediti relacija $t_i^{(0)} \le t_i \le t_i^{(1)}$. Oni događaji za koje su *najranija i najkasnija vremena jednaka*, tj. za koje je $t_i^{(0)} = t_i^{(1)}$, moraju nastupiti *u tačno određeno vrijeme* i nazivaju se ***kritični događaji***. Nije teško pokazati da se ma koje dozvoljeno vrijeme događaja *i* može izraziti u obliku $(1-\lambda)\, t_i^{(0)} + \lambda\, t_i^{(1)}$, gdje je λ proizvoljan realan broj za koji vrijedi $0 \le \lambda \le 1$, pri čemu se za $\lambda = 0$ dobija vrijeme $t_i^{(0)}$ a za $\lambda = 1$ vrijeme $t_i^{(1)}$. Inače, ovaj opći izraz za moguća vremena nastupa događaja *i* označava se sa $t_i^{(\lambda)}$, što ujedno objašnjava porijeklo pomalo neobičnih oznaka $t_i^{(0)}$ i $t_i^{(1)}$.

Aktivnosti čiji početak *nije moguće odgoditi* niti im je moguće *produžiti trajanje* a da to ne dovede do *prolongiranja završetka projekta* nazivaju se ***kritične aktivnosti***. Kritične aktivnosti *uvijek spajaju dva kritična događaja*, odnosno za sve kritične aktivnosti $[i-j]$ vrijedi $t_i^{(0)} = t_i^{(1)}$ i $t_j^{(0)} = t_j^{(1)}$. Međutim, svaka aktivnost koja spaja dva kritična događaja *ne mora biti kritična*, s obzirom da njeno trajanje može biti *kraće od* razmaka nastupanja dva kritična događaja koja spaja. Recimo, u prethodno razmatranom primjeru, kada bismo imali neku aktivnost koja spaja događaje 2 i 6 sa trajanjem manjim od 90 dana, takva aktivnost *ne bi bila kritična*, iako bi spajala *dva kritična događaja*. Stoga su prethodni uvjeti samo *potrebni*, ali *ne i dovoljni* da bi aktivnost bila kritična. S druge strane, neka aktivnost je očigledno kritična ako i samo ako joj je *najraniji početak* $t_i^{(0)}$ jednak *najkasnijem početku* $t_j^{(1)} - t_{i,j}$ i *najraniji završetak* $t_i^{(0)} + t_{i,j}$ jednak *najkasnijem završetku* $t_j^{(1)}$. Stoga se *potreban i dovoljan uvjet* da aktivnosti $[i-j]$ bude kritična može izraziti u obliku

$$t_{i,j} = t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$$

odnosno

$$t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - t_{i,j} = 0$$

Treba naglasiti da je, u prethodnim uvjetima bitno da se posmatra upravo razlika $t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$ a ne recimo razlika $t_j^{(0)} - t_i^{(0)}$. Istina je da su ove dvije razlike *jednake* kod kritičnih aktivnosti (jer je kod njih svakako $t_j^{(0)} = t_j^{(1)}$), ali ispunjenje uvjeta poput $t_{i,j} = t_j^{(0)} - t_i^{(0)}$ *ne garantira* da je zaista $t_j^{(0)} = t_j^{(1)}$, odnosno da je događaj *j* kritičan.

Sve ostale aktivnosti koje nisu kritične, tj. koje ne ispunjavaju gore navedeni uvjet, imaju *na raspolaganju vrijeme* koje je *veće* od njihovog *predviđenog trajanja* $t_{i,j}$. Za takve aktivnosti vrijedi da je $t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - t_{i,j} > 0$. Razlika između *raspoloživog vremena* za izvršavanje neke aktivnosti i njenog *predviđenog trajanja* naziva se *vremenska rezerva* te aktivnosti (zapravo, uskoro ćemo vidjeti da je u zavisnosti šta se tačno smatra "raspoloživim vremenom" moguće definirati *više različitih tipova vremenskih rezervi*). U svakom slučaju, očigledno je da su *vremenske rezerve kritičnih aktivnosti jednake nuli*, odnosno njima je, kako god posmatrali, na raspolaganju *tačno onoliko vremena koliko je i predviđeno*.

Sada možemo i formalno definirati *kritični put* kao *put* koji *polazi od početnog događaja* i *završava se u kranjem događaju projekta*, a *sadrži samo kritične aktivnosti*. S obzirom da je put zapravo *niz aktivnosti* u mreži kod kojih se *završni događaj svake aktivnosti* poklapa sa *početnim događajem naredne aktivnosti*, kritični put možemo definirati i kao *niz međusobno povezanih aktivnosti* koje se protežu između *početnog* i *završnog događaja* i imaju *zbirno najduže vrijeme trajanja*, odnosno kao *put duž kojeg nema vremenskih rezervi*.

U svakom mrežnom dijagramu obavezno postoji *najmanje jedan kritični put* a *može da ih bude i više*. Svako produženje trajanja aktivnosti na kritičnom putu ili odgađanje njihovog početka *neminovno utiče na produženje trajanja čitavog projekta*. Stoga *analiza kritičnih puteva* pri realizaciji projekta ima veliki značaj jer ukazuje na *one aktivnosti kojima treba posvetiti posebnu pažnju*. Ukoliko je potrebno *skratiti* trajanje projekta, obavezno se mora skratiti trajanje *barem neke aktivnosti na kritičnom putu*, recimo, prebacivanjem dijela radne snage i sredstava sa neke od nekritičnih aktivnosti na takvu aktivnost, u nadi da ćemo time *ubrzati* njeno izvršavanje. Kako će tako nešto vjerovatno *poskupiti* troškove realizacije projekta, o tome ćemo govoriti u okviru *analize troškova*.

Pored kritičnih puteva, u mrežnom dijagramu mogu postojati i tzv. ***subkritični putevi***. To su putevi duž kojeg sve aktivnosti imaju *malu vremensku rezervu*, tako da postoji opasnost da oni *postanu kritični* ukoliko se trajanje neke od aktivnosti duž takvih puteva *neplanirano oduži*. Na subkritične puteve također treba obratiti veliku pažnju.

Sada ćemo *formalizirati* pojam *vremenskih rezervi*. Kao što je već rečeno, svaka aktivnost čije je *vrijeme trajanja kraće od raspoloživog vremena* ima *vremensku rezervu*. Vremenska rezerva kao podatak ima *posebno praktično značenje* u primjeni mrežnog planiranja, jer nam ona direktno daje informaciju o tome *koliko se može odložiti početak ili završetak pojedinih aktivnosti*, a da se time *ne ugrozi planirano vrijeme završetka čitavog projekta*. Ovaj element predstavlja jednu od *najvažnijih upravljačkih komponenti* teorije mrežnog planiranja. Zavisno od toga *šta se tačno smatra pod raspoloživim vremenom*, u analizi vremena po metodu CPM razlikuju se sljedeće vremenske rezerve:

- ***Ukupna vremenska rezerva*** R_t (ili S_t, od engl. *slack*);
- ***Slobodna vremenska rezerva*** R_s (ili S_s);
- ***Nezavisna vremenska rezerva*** R_n (ili S_n);
- ***Uvjetna vremenska rezerva*** R_u (ili S_u)

Ukupna vremenska rezerva $(R_t)_{i,j}$ polazi od *krajnje optimističke pretpostavke* da aktivnost $[i-j]$ ima na raspolaganju vrijeme $t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$, tj. vrijeme od njenog *najranijeg mogućeg početka* do *najkasnijeg dozvoljenog završetka*. Stoga je ona data izrazom

$$(R_t)_{i,j} = t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - t_{i,j}$$

Jasno je da je uvijek $(R_t)_{i,j} \geq 0$. Pri tome je aktivnost $[i-j]$ kritična ako i samo ako je $(R_t)_{i,j} = 0$, dok je za sve nekritične aktivnosti $(R_t)_{i,j} > 0$. Ukupna vremenska rezerva $(R_t)_{i,j}$ nam govori za koliko se najviše može *produžiti trajanje* ili *odložiti početak izvršavanja* aktivnosti $[i-j]$ uz pretpostavku da je događaj i nastupio u *najranijem mogućem trenutku* (tj. uz pretpostavku da eventualna produženja ili odgađanja aktivnosti koje su joj prethodile nisu odgodili njen mogući početak) a da pri tome *ne ugrozimo trajanje samog projekta* (bez obzira na činjenicu da će se tada možda morati odgoditi i počeci aktivnosti koje iza nje slijede). Drugim riječima, ova vremenska rezerva polazi od pretpostavke da će se *sve druge aktivnosti* odvijati uglavnom *onako kako je planirano* (tj. u *predviđenom trajanju* i *bez kašnjenja u otpočinjanju*).

Slobodna vremenska rezerva $(R_s)_{i,j}$ polazi od pretpostavke da aktivnost $[i-j]$ ima na raspolaganju vrijeme $t_j^{(0)} - t_i^{(0)}$, tj. vrijeme od njenog *najranijeg mogućeg početka* do *najranijeg mogućeg početka narednih aktivnosti* (treba imati u vidu da ovo *ne mora uvijek biti i najraniji mogući završetak razmatrane aktivnosti*). Stoga je ona data izrazom

$$(R_s)_{i,j} = t_j^{(0)} - t_i^{(0)} - t_{i,j}$$

Za ovu rezervu također vrijedi $(R_s)_{i,j} \geq 0$ i ona je uvijek *manja ili jednaka* od ukupne vremenske rezerve. Stoga je za kritične aktivnosti svakako $(R_s)_{i,j} = 0$, ali slobodna vremenska rezerva može biti jednaka nuli i za *nekritične aktivnosti* ukoliko vrijedi $t_i^{(0)} + t_{i,j} = t_j^{(0)}$ tj. ukoliko se najraniji mogući završetak aktivnosti poklapa sa najranijim mogućim početkom narednih aktivnosti. Slobodna vremenska rezerva $(R_s)_{i,j}$ nam govori za koliko se najviše može *produžiti trajanje* ili *odložiti početak izvršavanja* aktivnosti $[i-j]$ uz pretpostavku da događaj i nastupi u *najranijem mogućem trenutku* (slično kao i kod ukupne vremenske rezerve), ali da pri tome ne ugrozimo ne samo trajanje čitavog projekta, nego i *najranije moguće početke narednih aktivnosti*. Dakle, ova vremenska rezerva govori za koliko možemo produžiti trajanje ili odložiti početak izvršavanja neke aktivnosti da bi se dalji tok projekta odvijao "po planu" uz pretpostavku da se i prije početka te aktivnosti također odvijao "po planu".

Kao primjer, uzmimo da u događaj j ulaze dvije aktivnosti $[i-j]$ i $[k-j]$. Tada je najranije vrijeme $t_j^{(0)}$ događaja j jednako većem od vremena $t_i^{(0)} + t_{i,j}$ i $t_k^{(0)} + t_{k,j}$. Uzmimo da je $t_k^{(0)} + t_{k,j} > t_i^{(0)} + t_{i,j}$. U tom slučaju će biti $t_j^{(0)} = t_k^{(0)} + t_{k,j}$. Međutim, tada će aktivnost $[i-j]$ imati *nenultu slobodnu vremensku rezervu*, jer je

$$(R_s)_{i,j} = t_j^{(0)} - t_i^{(0)} - t_{i,j} = t_k^{(0)} + t_{k,j} - (t_i^{(0)} - t_{i,j}) > 0$$

Drugim riječima trajanje aktivnosti $[i-j]$ moći će se produžiti za $(R_s)_{i,j}$ ili će se njen početak moći odgoditi za isti iznos, a da to ne dovede do pomjeranja vremena nastupanja događaja j, pod uvjetom da je događaj i nastupio u planirano vrijeme.

Nezavisna vremenska rezerva $(R_n)_{i,j}$ polazi od *krajnje pesimističke pretpostavke* da aktivnost $[i-j]$ ima na raspolaganju samo vrijeme $t_j^{(0)} - t_i^{(1)}$, tj. vrijeme od njenog *najkasnijeg dozvoljenog početka* do *najranijeg mogućeg početka narednih aktivnosti*. Stoga je ona data izrazom

$$(R_n)_{i,j} = t_j^{(0)} - t_i^{(1)} - t_{i,j}$$

Nezavisna vremenska rezerva $(R_n)_{i,j}$ nam govori za koliko se najviše može *produžiti trajanje* ili *odložiti početak izvršavanja* aktivnosti $[i-j]$ a da se pri tome *ne ugroze najraniji mogući počeci narednih aktivnosti* (slično kao i kod slobdne vremenske rezerve), ali uz pretpostavku da je događaj i nastupio u *najkasnijem mogućem trenutku*. Drugim riječima, ova vremenska rezerva govori za koliko se najviše može produžiti trajanje ili odložiti početak izvršavanja neke aktivnosti *nezavisno od toga šta se dešavalo prije te aktivnosti*, pri čemu vremenski plan narednih aktivnosti također *neće zavisiti od tog produženja ili odlaganja*. Odatle i potiče naziv *nezavisna vremenska rezerva*. Svaka aktivnost koja ima pozitivnu nezavisnu vremensku rezervu može biti produžena ili odgođena za iznos te vremenske rezerve, *potpuno nezavisno* od vremenskog plana prethodnih aktivnosti (tj. *da li su prethodne aktivnosti produžene ili ne* i *da li su počele na vrijeme ili ne*) i *bez ikakvog uticaja* na vremenski plan narednih aktivnosti.

Nezavisna vremenska rezerva je očigledno uvijek *manja ili jednaka* od slobodne vremenske rezerve, tako da pozitivnu nezavisnu vremensku rezervu mogu imati samo one aktivnosti koje imaju nenultu (pozitivnu) slobodnu vremensku rezervu. Međutim, za razliku od ukupne i slobodne vremenske rezerve, nezavisna vremenska rezerva *može biti i negativna*. Negativna vrijednost nezavisne rezerve $(R_n)_{i,\,j}$ znači da je, ukoliko događaj j nastupi u najkasnijem dozvoljenom trenutku, *nemoguće* da ne dođe do pomjeranja najranijeg početka narednih aktivnosti za iznos od barem $|(R_n)_{i,\,j}|$. Neki autori ne daju *nikakvo značenje* negativnim vrijednostima nezavisne vremenske rezerve, nego prosto smatraju da ukoliko je $t_j^{(0)} - t_i^{(1)} - t_{i,\,j} < 0$, tada je $(R_n)_{i,\,j} = 0$. Drugim riječima, oni nezavisnu vremensku rezervu definiraju izrazom

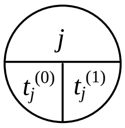
$$(R_n)_{i,\,j} = \max\,\{t_j^{(0)} - t_i^{(1)} - t_{i,\,j},\ 0\}$$

Za razliku od prethodne tri vrste vremenskih rezervi koje se odnose na *aktivnosti*, *uvjetna vremenska rezerva* R_u se odnosi na *događaje* i data je izrazom

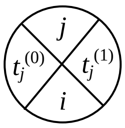
$$(R_u)_j = t_j^{(1)} - t_j^{(0)}$$

pri čemu su, kao i inače, $t_j^{(0)}$ i $t_j^{(1)}$ najranije i najkasnije vrijeme događaja j respektivno. Ova vremenska rezerva ukazuje na *kritične događaje* i služi kao mjera *subkritičnosti događaja*.

Prilikom analize vremena u mrežnom planiranju, uobičajeno je da se informacije o najranijim i najkasnijim vremenima prikazuju *na samom dijagramu*, *unutar krugova pomoću kojih se predstavljaju čvorovi dijagrama odnosno događaji*. Tako se događaj sa rednim brojem j čije je najranije vrijeme $t_j^{(0)}$ a najkasnije vrijeme $t_j^{(1)}$ obično na dijagramu predstavlja na sljedeći način:

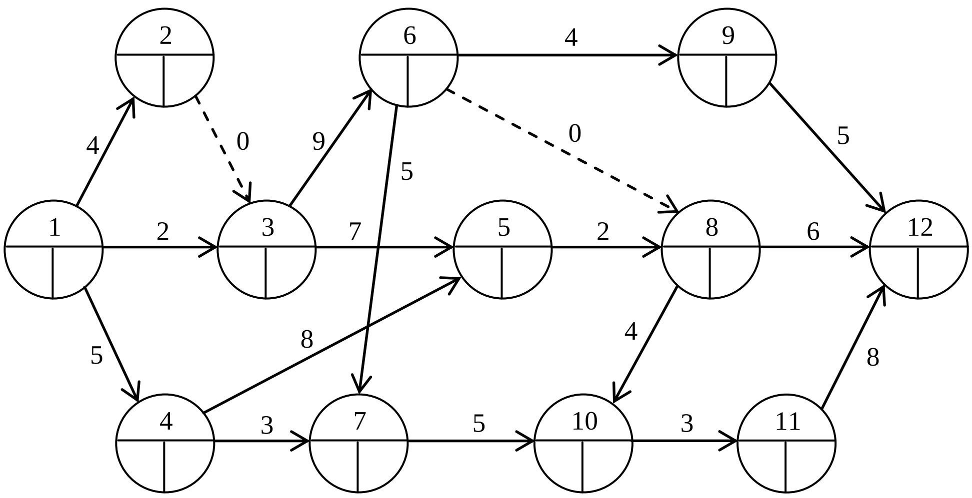


Ponekad se, pored ovih informacija, u čvor upisuje informacija i o početnom događaju i one prethodne aktivnosti koja će se *posljednja završiti* u događaju $t_j^{(0)}$. Ova informacija služi da se lakše očitaju kritični i subkritični putevi, a ako se i ova informacija koristi, događaj se onda predstavlja ovako:



Nakon analize strukture, poznati su samo redni brojevi događaja j, dok se sve ostale informacije otkrivaju u fazi analize vremena.

➢ ***Primjer*** : Analiza strukture nekog projekta dala je mrežni dijagram kao na sljedećoj slici:

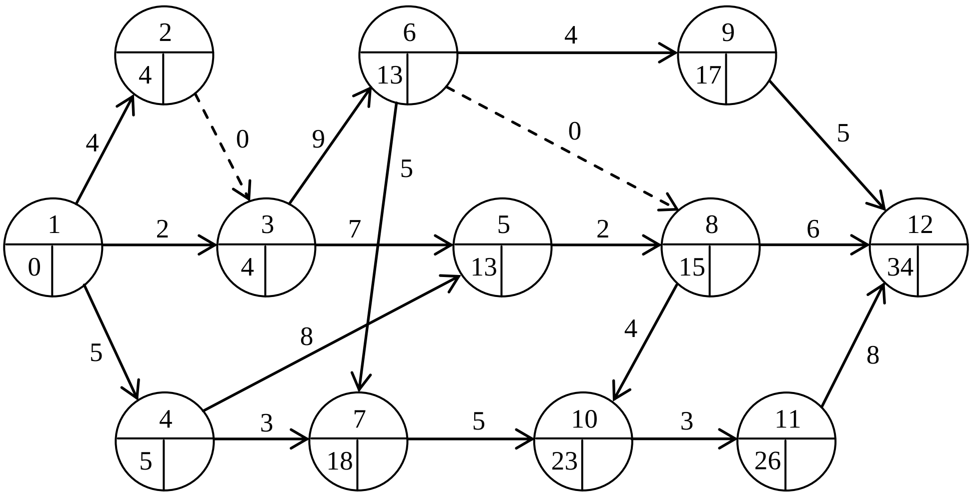


Obaviti analizu vremena ovog projekta.

Prvo je potrebno odrediti najranije moguće početke pojedinih događaja u projektu. U skladu sa prethodno opisanim postupkom, imamo:

$t_1^{(0)} = 0$
$t_2^{(0)} = \max\{t_1^{(0)} + c_{1,2}\} = \max\{0 + 4\} = 4$
$t_3^{(0)} = \max\{t_1^{(0)} + c_{1,3},\ t_2^{(0)} + c_{2,3}\} = \max\{0 + 2,\ 4 + 0\} = 4$
$t_4^{(0)} = \max\{t_1^{(0)} + c_{1,4}\} = \max\{0 + 5\} = 5$
$t_5^{(0)} = \max\{t_3^{(0)} + c_{3,5},\ t_4^{(0)} + c_{4,5}\} = \max\{4 + 7,\ 5 + 8\} = 13$
$t_6^{(0)} = \max\{t_3^{(0)} + c_{3,6}\} = \max\{4 + 9\} = 13$
$t_7^{(0)} = \max\{t_4^{(0)} + c_{4,7},\ t_6^{(0)} + c_{6,7}\} = \max\{5 + 3,\ 13 + 5\} = 18$
$t_8^{(0)} = \max\{t_5^{(0)} + c_{5,8},\ t_6^{(0)} + c_{6,8}\} = \max\{13 + 2,\ 13 + 0\} = 15$
$t_9^{(0)} = \max\{t_6^{(0)} + c_{6,9}\} = \max\{13 + 4\} = 17$
$t_{10}^{(0)} = \max\{t_7^{(0)} + c_{7,10},\ t_8^{(0)} + c_{8,10}\} = \max\{18 + 5,\ 15 + 4\} = 23$
$t_{11}^{(0)} = \max\{t_{10}^{(0)} + c_{10,11}\} = \max\{23 + 3\} = 26$
$t_{12}^{(0)} = \max\{t_8^{(0)} + c_{8,12},\ t_9^{(0)} + c_{9,12},\ t_{11}^{(0)} + c_{11,12}\} = \max\{15 + 6,\ 17 + 5,\ 26 + 8\} = 34$

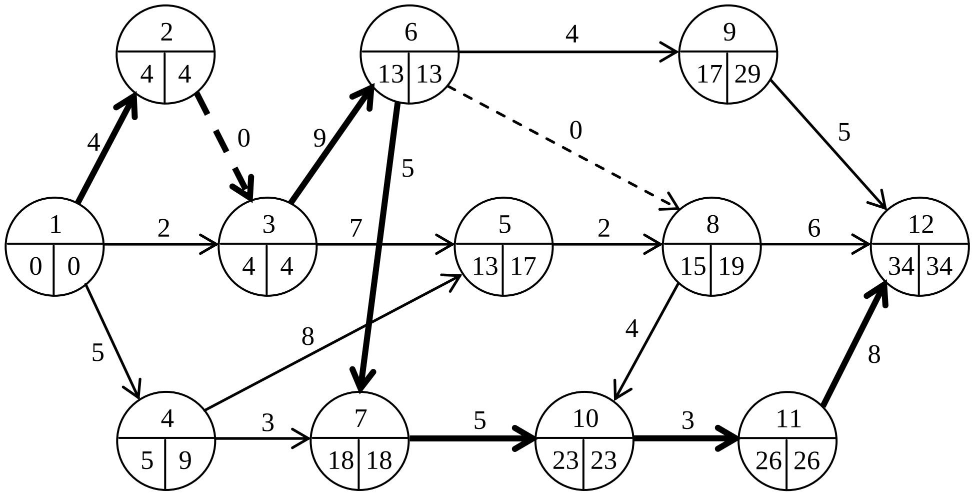
Sav ovaj račun može se obaviti "u glavi", samo posmatrajući dijagram. Uglavnom, nakon što smo saznali ova vremena, upisujemo ih u dijagram, čime on dobija formu kao na sljedećoj slici:



Na sličan način izračunavamo i *najkasnija dozvoljena vremena* za sve događaje:

$t_{12}^{(1)} = 34$
$t_{11}^{(1)} = \min\{t_{12}^{(1)} - t_{11,12}\} = \min\{34 - 8\} = 26$
$t_{10}^{(1)} = \min\{t_{11}^{(1)} - t_{10,11}\} = \min\{26 - 3\} = 23$
$t_9^{(1)} = \min\{t_{12}^{(1)} - t_{9,12}\} = \min\{34 - 5\} = 29$
$t_8^{(1)} = \min\{t_{10}^{(1)} - t_{8,10},\ t_{12}^{(1)} - t_{8,12}\} = \min\{23 - 4,\ 34 - 6\} = 19$
$t_7^{(1)} = \min\{t_{10}^{(1)} - t_{7,10}\} = \min\{23 - 5\} = 18$
$t_6^{(1)} = \min\{t_7^{(1)} - t_{6,7},\ t_8^{(1)} - t_{6,8},\ t_9^{(1)} - t_{6,9}\} = \min\{18 - 5,\ 19 - 0,\ 29 - 4\} = 13$
$t_5^{(1)} = \min\{t_7^{(1)} - t_{5,7}\} = \min\{19 - 2\} = 17$
$t_4^{(1)} = \min\{t_5^{(1)} - t_{4,5},\ t_7^{(1)} - t_{4,7}\} = \min\{17 - 8,\ 18 - 3\} = 9$
$t_3^{(1)} = \min\{t_5^{(1)} - t_{3,5},\ t_6^{(1)} - t_{3,6}\} = \min\{17 - 7,\ 13 - 9\} = 4$
$t_2^{(1)} = \min\{t_3^{(1)} - t_{2,3}\} = \min\{4 - 0\} = 4$
$t_1^{(1)} = \min\{t_2^{(1)} - t_{1,2},\ t_3^{(1)} - t_{1,3},\ t_4^{(1)} - t_{1,4}\} = \min\{4 - 4,\ 4 - 2,\ 9 - 5\} = 0$

I ovaj račun se također obavlja direktno na dijagramu, izvođenjem računa "u glavi". Ovim dijagram dobija svoju konačnu formu, prikazanu na sljedećoj slici. Sa dijagrama se lako vidi da su kritični događaji 1, 2, 3, 6, 7, 10, 11 i 12, kao i da je kritični put $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10 \to 11 \to 12$. Ovaj put je na dijagramu prikazan podebljano:



Ostaje još da proračunamo vremenske rezerve za sve aktivnosti, što možemo obaviti primjenom ranije navedenih formula. Recimo, za aktivnost [3 – 5] imamo:

$(R_t)_{3,5} = t_5^{(1)} - t_3^{(0)} - t_{3,5} = 17 - 4 - 7 = 6$

$(R_s)_{3,5} = t_5^{(0)} - t_3^{(0)} - t_{3,5} = 13 - 4 - 7 = 2$

$(R_n)_{3,5} = t_5^{(0)} - t_3^{(1)} - t_{3,5} = 13 - 4 - 7 = 2$

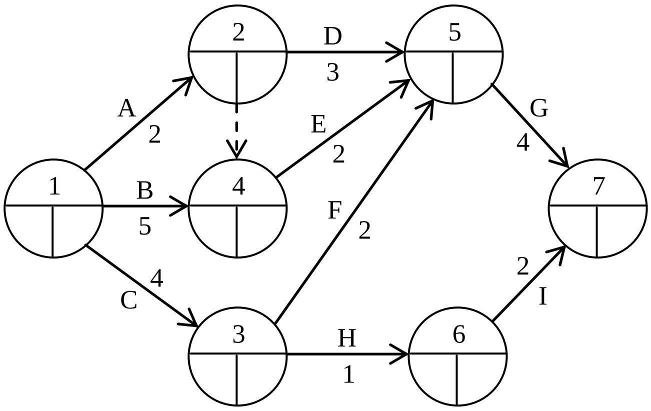
Ovaj proračun treba obaviti za svih 18 aktivnosti koje postoje u projektu. To je najbrže i najlakše obaviti ukoliko se svi podaci predstave u pogodnoj *tabelarnoj formi*. Ispod je prikazano kako bi takva tabelarna forma mogla da izgleda, zajedno sa rezultatima svih obavljenih proračuna (redovi koji odgovaraju kritičnim aktivnostima su *osjenčeni*):

$i - j$	$t_{i,j}$	$t_i^{(0)}$	$t_j^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(1)}$	$(R_t)_{i,j}$	$(R_s)_{i,j}$	$(R_n)_{i,j}$
1 – 2	**4**	**0**	**4**	**0**	**4**	**0**	**0**	**0**
1 – 3	2	0	4	0	4	2	2	2
1 – 4	5	0	5	0	9	4	0	0
2 – 3	**0**	**4**	**4**	**4**	**4**	**0**	**0**	**0**
3 – 5	7	4	13	4	17	6	2	2
3 – 6	**9**	**4**	**13**	**4**	**13**	**0**	**0**	**0**
4 – 5	8	5	13	9	17	4	0	–4 (0)
4 – 7	3	5	18	9	18	10	10	6
5 – 8	2	13	15	17	19	4	0	–4 (0)
6 – 7	**5**	**13**	**18**	**13**	**18**	**0**	**0**	**0**
6 – 8	0	13	15	13	19	6	2	2
6 – 9	4	13	17	13	29	12	0	0
7 – 10	**5**	**18**	**23**	**18**	**23**	**0**	**0**	**0**
8 – 10	4	15	23	19	23	4	4	0
8 – 12	6	15	34	19	34	13	13	9
9 – 12	5	17	34	29	34	12	12	0
10 – 11	**3**	**23**	**26**	**23**	**26**	**0**	**0**	**0**
11 – 12	**8**	**26**	**34**	**26**	**34**	**0**	**0**	**0**

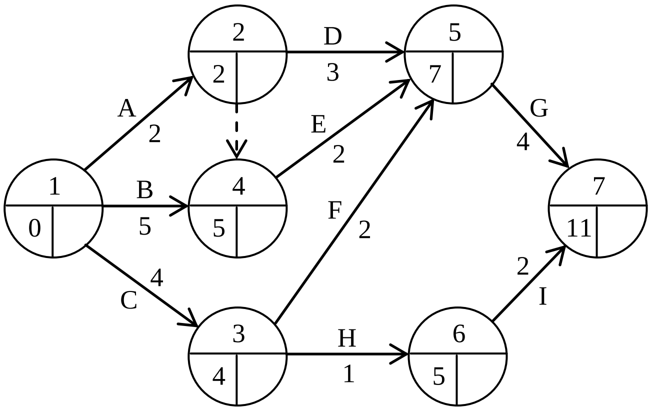
➢ ***Primjer***: Obaviti analizu strukture te proračunati minimalno vrijeme trajanja projekta i vremenske rezerve za sve aktivnosti projekta čije su aktivnosti, njihova trajanja, te njihove logičke međuzavisnosti prikazane u sljedećoj tabeli:

Aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Trajanje	2	5	4	4	2	2	4	1	2
Preduvjeti	–	–	–	A	A, B	C	D, E, F	C	H

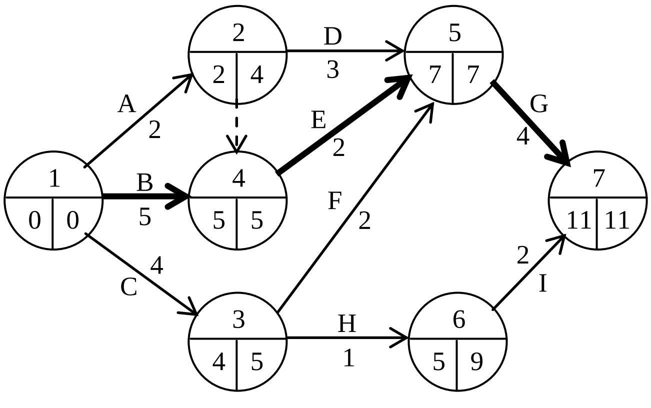
Analiza strukture dovodi nas do sljedećeg mrežnog dijagrama:



Slijedi proračun najranijih vrijednosti svih događaja, nakon čega se dobija dijagram kao na sljedećoj slici:



U ovom trenutku već znamo da je minimalno trajanje projekta $T_{min} = 11$. Sljedeći dijagram sadrži i najkasnija vremena svih događaja, sa podebljano istaknutim kritičnim putem:



Ostaje još da se proračunaju vremenske rezerve za sve aktivnosti, što je rutinski posao. Rezultati ovih proračuna prikazani su u sljedećoj tablici:

Aktivnost	$i-j$	$t_{i,j}$	$t_i^{(0)}$	$t_j^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(1)}$	$(R_t)_{i,j}$	$(R_s)_{i,j}$	$(R_n)_{i,j}$
A	1–2	2	0	2	0	4	2	0	0
C	1–3	4	0	4	0	5	1	0	0
B	**1–4**	**5**	**0**	**5**	**0**	**5**	**0**	**0**	**0**
fiktivna	2–4	0	2	5	4	5	3	3	1
D	2–5	3	2	7	4	7	2	2	0
F	3–5	2	4	7	5	7	1	1	0
H	3–6	1	4	5	5	9	4	0	–1 (0)
E	**4–5**	**2**	**5**	**7**	**5**	**7**	**0**	**0**	**0**
G	**5–7**	**4**	**7**	**11**	**7**	**11**	**0**	**0**	**0**
I	6–7	2	5	11	9	11	4	4	0

Analiza vremena po metodu PERT

Kod primjene metoda *CPM*, pretpostavlja se da je trajanje aktivnosti opisano *jednim brojem*. Ovakav pristup ima opravdanje za projekte kod kojih se *vrijeme izvršenja* svake aktivnosti može *pouzdano procijeniti*, odnosno odrediti *sa relativno velikom sigurnošću*. To su u pravilu "*rutinski*" *projekti*. S druge strane, postoje projekti koji sadrže aktivnosti kod kojih je procjena trajanja povezana sa velikim učešćem *neizvjesnosti*. Na primjer, jako je nezahvalno prognozirati vrijeme potrebno za *popravku nekog kvara*, jer se unaprijed ne može procijeniti da li je kvar *jednostavan* ili *složen*. Isto tako, teško je prognozirati trajanje *poslova koji zavise od vremenskih uvjeta*, zatim trajanje raznih *naučnoistraživačkih projekata*, *razvojnih projekata* koji se rade *prvi put* tako da ne postoje prethodna iskustva sa projekata istog tipa, itd. U takvim i sličnim slučajevima se polazi od pretpostavke da su *trajanja aktivnosti slučajne* (*stohastičke*) *veličine*. Za određivanje *trajanja* projekta u kojem su trajanja aktivnosti stohastičke veličine, koristi se *PERT metod* (tačnije, *PERT/TIME*). Dakle, *PERT/TIME* metod se primjenjuje za *analizu vremena* u slučajevima kada se *ne može tačno odrediti trajanje* nekih ili svih aktivnosti u posmatranom projektu. U ovakvim slučajevima, za analizu vremena koriste se *očekivane vrijednosti trajanja*, iz čega slijedi da je *PERT/TIME stohastički metod*.

Kod *PERT/TIME* metoda, za svaku aktivnost $[i-j]$ daju se sljedeće *tri procjene* trajanja:

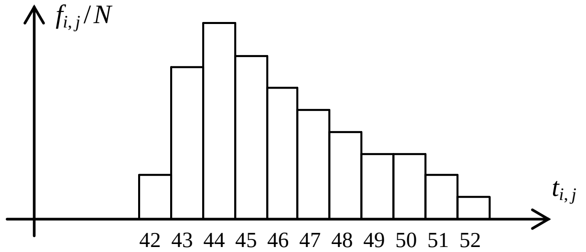
- ***Optimistička procjena trajanja*** $a_{i,j}$ koja pretpostavlja *najkraće moguće pretpostavljeno trajanje* aktivnosti $[i-j]$. Ovo je vrijeme koliko bi trajala ova aktivnost u *idealnim uvjetima*, odnosno ukoliko bi svi faktori od kojih eventualno zavisi izvođenje ove aktivnosti *bili posebno povoljni* (povoljniji nego što je uobičajeno). *Mala je šansa* da se aktivnost završi u ovom vremenu, ali je to ipak *moguće*. Međutim, *apsolutno je nemoguće* da se aktivnost završi u kraćem vremenu od ovog.
- ***Pesimistička procjena trajanja*** $b_{i,j}$ koja pretpostavlja *najduže moguće pretpostavljeno trajanje* aktivnosti $[i-j]$. Ovo je vrijeme koliko bi trajala ova aktivnost u *posebno nepovoljnim uvjetima*, odnosno ukoliko bi svi faktori od kojih eventualno zavisi izvođenje ove aktivnosti *bili posebno nepovoljni* (nepovoljniji nego što je uobičajeno). *Mala je šansa* da će aktivnost trajati ovoliko dugo, ali je i to ipak *moguće*. Međutim, *apsolutno je nemoguće* da aktivnost traje duže od ovog vremena, *osim u slučaju katastrofa*, *havarija* i drugih posve nepredvidljivih ali izuzetno malo vjerovatnih okolnosti.
- ***Najvjerovatnija*** (ili **modalna**) ***procjena trajanja*** $m_{i,j}$ koja pretpostavlja *tipično vrijeme trajanja aktivnosti* $[i-j]$. Ovo je vrijeme koliko bi trajala ova aktivnost u *tipičnim uvjetima*, odnosno ukoliko bi svi faktori od kojih eventualno zavisi izvođenje ove aktivnosti bili *tačno onakvi kakvi bi trebali da budu*. Ukoliko bismo mogli ponoviti ovu aktivnost mnogo puta, očekuje se da bi ona najveći broj puta trajala otprilike upravo ovoliko.

Jasno je da između ovih trajanja mora vrijediti odnos $a_{i,j} \le m_{i,j} \le b_{i,j}$ i da za *ma koje moguće trajanje* $t_{i,j}$ aktivnosti $[i-j]$ mora vrijediti $a_{i,j} \le t_{i,j} \le b_{i,j}$.

Neka smo, na primjer, neku aktivnost ponovili $N = 50$ puta, i neka smo pri tome dobili trajanja prikazana u sljedećoj tabeli, pri čemu $f_{i,j}$ predstavlja **frekvenciju** pojavljivanja $t_{i,j}$, odnosno broj *koliko puta se ponovilo trajanje* $t_{i,j}$ (odnos $f_{i,j}/N$, koji je također prikazan u tabeli, naziva se ***relativna frekvencija***):

$t_{i,j}$	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
$f_{i,j}$	2	7	9	8	6	5	4	3	3	2	1
$f_{i,j}/N$	0.04	0.14	0.18	0.16	0.12	0.10	0.08	0.06	0.06	0.04	0.02

Na sljedećoj slici je prikazan histogram koji odgovara ovim relativnim frekvencijama:



Vidi se da je za ovu aktivnost $a_{i,j} = 42$, $b_{i,j} = 52$ i $m_{i,j} = 44$. Ponašanje prikazano na ovoj slici je *prilično tipično*: najvjerovatnije vrijeme je obično bliže optimističkom nego pesimističkom vremenu.

Sad se može postaviti pitanje koliko je *očekivano* (prosječno) trajanje aktivnosti $t_{i,\,j}$ i koliko se možemo *pouzdati* u tu očekivanu vrijednost. Jasno je da očekivano trajanje nije uvijek jednako najvjerovatnijem trajanju, jer u stvarnosti se rijetko dešava da su *svi faktori koji utiču na odvijanje aktivnosti tačno onakvi kakvi bi trebali da budu*. U statistici se pokazuje da je najbolja procjena za očekivano trajanje $(t_e)_{i,\,j}$ aktivnosti prosto *aritmetička sredina* svih dobijenih trajanja u ponovljenim eksperimentima, odnosno

$$(t_e)_{i,\,j} = \frac{1}{N}\sum f_{i,j}t_{i,j} = \sum \frac{f_{i,j}}{N}t_{i,j}$$

gdje se suma uzima po svim mogućim parovima ($t_{i,\,j}$, $f_{i,\,j}$). Za navedeni primjer, imamo

$$(t_e)_{i,\,j} = 0.04\cdot 42 + 0.14\cdot 43 + 0.18\cdot 44 + 0.16\cdot 45 + 0.12\cdot 46 + 0.10\cdot 47 + 0.08\cdot 48 + 0.06\cdot 49 + \\ + 0.06\cdot 50 + 0.04\cdot 51 + 0.02\cdot 52 = 45.45$$

Što se tiče mjere *pouzdanosti* očekivane vrijednosti, u statistici se za tu svrhu obično koristi veličina nazvana ***varijansa***, koja se označava sa $\sigma_{i,\,j}^{\;2}$ i predstavlja *očekivanu vrijednost kvadrata odstupanja od očekivane vrijednosti* (kvadrat se uzima da se poništi uticaj predznaka odstupanja), odnosno

$$\sigma_{i,\,j}^{\;2} = \frac{1}{N}\sum f_{i,j}(t_{i,j}-(t_e)_{i,j})^2 = \sum \frac{f_{i,j}}{N}(t_{i,j}-(t_e)_{i,j})^2$$

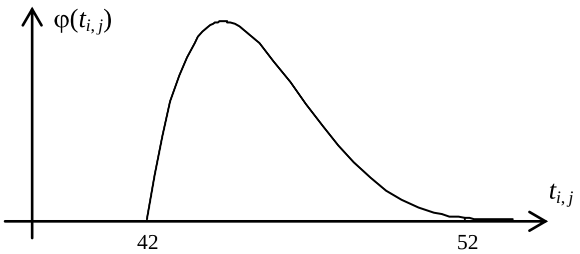
Što je varijansa manja, to je vjerovatnije da će u nekom izvođenju stvarno trajanje aktivnosti biti blisko očekivanom trajanju. Sa porastom varijanse, raste nesigurnost procjene zasnovane na očekivanoj vrijednosti. Kvadratni korijen varijanse, odnosno sama veličina $\sigma_{i,\,j}$ (bez kvadrata) naziva se ***standardna devijacija*** ili ***standardno odstupanje***. Za prethodni primjer, lako se izračunava da varijansa iznosi $\sigma_{i,\,j}^{\;2} \approx 6.61$, dok standardna devijacija iznosi $\sigma_{i,\,j} \approx 2.57$.

U statistici se relativne frekvencije $f_{i,\,j}\,/\,N$ tipično koriste kao *procjene vjerovatnoće* da će stvarno trajanje aktivnosti aktivnosti imati trajajnje $t_{i,\,j}$ (ovo zapravo ne vrijedi samo za trajanja aktivnosti, nego za *sve slučajne veličine*). Stoga je procjena vjerovatnoće da će stvarno trajanje aktivnosti imati trajanje u opsegu od neke zadane vrijednosti $t_{i,\,j}$’ do neke druge vrijednosti $t_{i,\,j}$” data izrazom

$$P(t_{i,\,j}' \le t_{i,\,j} \le t_{i,\,j}'') \approx \sum \frac{f_{i,j}}{N} \quad \text{po svim } f_{i,\,j} \text{ koje odgovaraju vrijednostima } t_{i,\,j} \text{ za koje je } t_{i,\,j}' \le t_{i,} \ \le t_{i,\,j}''$$

Može se primijetiti da na osnovu same definicije pesimističkog i optimističkog vremena slijedi da mora biti $P(t_{i,\,j} \le a_{i,\,j}) = 0$, $P(t_{i,\,j} \ge b_{i,\,j}) = 0$ te $P(a_{i,\,j} \le t_{i,\,j} \le b_{i,\,j}) = 1$.

Sva provedena diskusija ima smisla samo uz pretpostavku da slučajna veličina $t_{i,\,j}$ može uzimati samo neke *diskretne* (recimo cjelobrojne) *vrijednosti* iz intervala od $a_{i,\,j}$ i $b_{i,\,j}$. U slučaju da veličina $t_{i,\,j}$ može uzimati ma koju *kontinualnu* vrijednost iz istog intervala, histogrami *gube smisao*, jer je u tom slučaju vjerovatnoća da veličina $t_{i,\,j}$ uzme *ma koju partikularnu vrijednost* jednaka *nuli*, zbog beskonačnog broja mogućih alternativa. Međutim, i dalje ima smisla pitati kolika je vjerovatnoća $P(t_{i,\,j}' \le t_{i,\,j} \le t_{i,\,j}'')$ da će veličina $t_{i,\,j}$ uzeti vrijednost iz nekog *intervala* $t_{i,\,j}' \le t_{i,\,j} \le t_{i,\,j}''$. Stoga se, za statistički opis *kontinualnih* slučajnih promjenljivih koristi tzv. ***gustina vjerovatnoće*** $\varphi(t_{i,\,j})$ koja je takva da je vjerovatnoća $P(t_{i,\,j}' \le t_{i,\,j} \le t_{i,\,j}'')$ jednaka *površini* između grafika funkcije $\varphi(t_{i,\,j})$ i apscisne ose u navedenom intervalu (stoga je gustina vjerovatnoće *kontinualni analogon histograma*). Na sljedećoj slici je prikazana gustina vjerovatnoće kakva bi vjerovatno bila za prethodni primjer kada bismo dopustili da veličina $t_{i,\,j}$ uzima ma kakve realne vrijednosti iz intervala $42 \le t_{i,\,j} \le 52$:



Kada je za neku slučajnu promjenljivu poznata gustina vjerovatnoće, kaže se da je time zadana ***raspodjela*** odnosno ***distribucija vjerovatnoće*** te slučajne promjenljive. Na osnovu same definicije gustine vjerovatnoće, slijedi da se iz poznate gustine vjerovatnoće sama vjerovatnoća $P(t_{i,j}' \le t_{i,j} \le t_{i,j}'')$ da će slučajna promjenljiva $t_{i,j}$ uzeti neku vrijednost iz intervala $t_{i,j}' \le t_{i,j} \le t_{i,j}''$ jednaka

$$P(t_{i,j}' \le t_{i,j} \le t_{i,j}'') = \int_{t_{i,j}'}^{t_{i,j}''} \varphi(t)\,dt$$

Na osnovu poznate gustine vjerovatnoće, mogu se izračunati očekivana vrijednost i varijansa neke slučajne veličine pomoću formula koje su analogne ranije datim formulama, samo u kojima se *umjesto sume javlja integral*:

$$(t_e)_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, t\, dt$$

$$\sigma_{i,j}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,(t-(t_e))^2\, dt$$

Pod najvjerovatnijom vrijednošću $m_{i,j}$ se u kontinualnom slučaju smatra *vrijednost za koju je gustina vjerovatnoće maksimalna*. Ipak, sam smisao pojma “najvjerovatnija vrijednost” djeluje pomalo nejasno u kontinualnom slučaju, jer smo rekli da je u tom slučaju vjerovatnoća *ma koje partikularne vrijednosti* (*pa i one koju nazivamo* “*najvjerovatnijom*”) *jednaka nuli*. Stoga je u tom slučaju smisao najvjerovatnije vrijednosti u tome da je za nju vjerovatnoća $P(m_{i,j} - \varepsilon \le t_{i,j} \le m_{i,j} + \varepsilon)$ da će se slučajna promjenljiva $t_{i,j}$ naći u nekom *malom intervalu* $m_{i,j} - \varepsilon \le t_{i,j} \le m_{i,j} + \varepsilon$ širine 2ε oko te vrijednosti *veća nego za ma koju drugu vrijednost*.

U *PERT* metodu kreće se od polazne pretpostavke da trajanja $t_{i,j}$ aktivnosti $[i-j]$ predstavljaju slučajnu promjenljivu koja se ponaša prema zakonu ***beta distribucije vjerovatnoće*** kojoj odgovara gustina vjerovatnoće

$$\varphi(t_{i,j}) = C\,(t_{i,j} - a_{i,j})^{\alpha}\,(b_{i,j} - t_{i,j})^{\beta} \quad \text{za } a_{i,j} \le t_{i,j} \le b_{i,j}, \qquad \varphi(t_{i,j}) = 0 \text{ inače}$$

gdje su α i β neke konstante koje definiraju tačan izgled gustine vjerovatnoće (tzv. ***parametri raspodjele***), dok je C konstanta koja se određuje iz uvjeta da ukupna površina ispod krive gustine vjerovatnoće bude jednaka jedinici. Za izbor beta raspodjele ima nekoliko razloga. Prvo, ova raspodjela očigledno zaista ispunjava uvjete $P(t_{i,j} \le a_{i,j}) = 0$, $P(t_{i,j} \ge b_{i,j}) = 0$ i $P(a_{i,j} \le t_{i,j} \le b_{i,j}) = 1$. Drugo, pogodnim izborom parametara α i β kriva gustine vjerovatnoće može dobiti različite oblike koji onda prilično dobro mogu aproksimirati stvarne gustine vjerovatnoća koje se javljaju u praksi (krivulja sa posljednje nacrtane slike je upravo primjer gustine prema beta raspodjeli za parametre $\alpha = 1$ i $\beta = 4$). Konačno, razni statistički testovi obavljani u mnogim realnim situacijama su pokazali prilično dobro slaganje statističkih procjena gustine vjerovatnoće trajanja aktivnosti sa modelima koji se dobiju na osnovu beta distribucije.

Kada bismo znali parametre α i β u gustini vjerovatnoće prema beta raspodjeli za neku konkretnu aktivnost, mogli bismo izračunati očekivano trajanje $(t_e)_{i,j}$ i varijansu $\sigma_{i,j}^2$ za tu aktivnost. Međutim, mi te veličine *ne znamo*. Stoga se u *PERT* metodu daju *procjene* za $(t_e)_{i,j}$ i $\sigma_{i,j}^2$ prema sljedećim formulama:

$$(t_e)_{i,j} = \frac{a_{i,j} + 4\,m_{i,j} + b_{i,j}}{6}$$

$$\sigma_{i,j}^2 = \left(\frac{a_{i,j} - b_{i,j}}{6}\right)^2$$

U brojnoj literaturi posvećenoj mrežnom planiranju vlada *rasprostranjeni mit* da su prethodne formule *nekako izvedene iz zakona beta raspodjele*. Međutim, to nije moguće, s obzirom da parametri α i β nisu poznati. Prava istina je da su ove formule zapravo *poluempirijske*, samo *blago inspirisane* beta raspodjelom vjerovatnoće. Naime, što se tiče varijanse, za mnoge raspodjele vjerovatnoće je poznato da je *vrlo mala vjerovatnoća* da vrijednost slučajne promjenljive izađe izvan jednog intervala čija je širina 6σ, gdje je σ odgovarajuća standardna devijacija za tu raspodjelu (ovo posebno vrijedi u slučaju tzv. *normalne raspodjele vjerovatnoće*, koju ćemo uskoro upoznati). Stoga je empirijski pretpostavljeno da to približno vrijedi i ovdje, tako da je vrijednost $6\sigma_{i,j}$ prosto *izjednačena* sa dužinom intervala $b_{i,j} - a_{i,j}$ u kojem se mogu nalaziti vrijednosti za $t_{i,j}$ i tako je dobijena procjena za varijansu. Treba napomenuti da je tako dobijena procjena *bolja* u slučajevima kada gustina vjerovatnoće posjeduje *simetriju* u odnosu na maksimalnu vrijednost nego u slučajevima *kada takve simetrije nema*. Što se tiče izraza $(t_e)_{i,j}$, on je dobijen tako što je izraz za *tačnu* *vrijednost varijanse* dobijen iz beta raspodjele *izjednačen* sa gornjom *procjenom* za varijansu, čime je dobijena jedna relacija koja povezuje α i β. Druga relacija koja povezuje α i β dobijena je iz pretpostavke da gustina raspodjele *ima maksimum upravo u tački* $m_{i,j}$. Iz te dvije relacije mogu se odrediti α i β, što barem načelno omogućava da se nađe *tačna vrijednost* za $(t_e)_{i,j}$ (uz pretpostavku da je procjena za varijansu tačna). Međutim, nalaženje te vrijednosti zahtijeva *rješavanje kubne jednačine*, tako da se na kraju dobija izraz za $(t_e)_{i,j}$ koji je *toliko komplikovan* da od njega *nema nikakve praktične koristi*. Stoga su vršeni pokušaji da se taj izraz *aproksimira nekom linearnom kombinacijom* veličina $a_{i,j}$, $m_{i,j}$ i $b_{i,j}$, odnosno izrazom oblika $\lambda_1 a_{i,j} + \lambda_2 m_{i,j} + \lambda_3 b_{i,j}$ gdje su λ_1, λ_2 i λ_3 neki koeficijenti. Brojni eksperimenti pokazali su da se relativno dobro slaganje dobija za vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_3 = 1/6$ i $\lambda_2 = 2/3$, i tako je nastao gornji izraz za procjenu za $(t_e)_{i,j}$.

Nakon što su procijenjena očekivana trajanja i varijanse za sve aktivnosti, prelazi se na procjene ***najranijih očekivanih vremena*** i ***najkasnijih očekivanih vremena*** nastupanja pojedinih događaja. U *PERT* metodu, ova vremena za događaj *i* obično se obilježavaju respektivno sa $(T_\text{E})_i$ i $(T_\text{L})_i$ ili, alternativno, sa $T_i^{(\text{E})}$ i $T_i^{(\text{L})}$ (oznake "E" i "L" potiču od engl. *Early* i *Late*). U principu, vremena $(T_\text{E})_i$ i $(T_\text{L})_i$ odgovaraju vremenima $t_i^{(0)}$ i $t_i^{(1)}$ kod *CPM* metoda, samo se, za razliku od *CPM* metoda, ovdje ne radi o *apsolutno najranijem mogućem vremenu* i *apsolutno najkasnijem dozvoljenom vremenu*, nego o *najranijem očekivanom vremenu* i *najkasnijem očekivanom vremenu*, što ne znači da događaj ne može nastupiti ranije ili kasnije u odnosu na očekivanja. To je jedan od razloga zbog čega se za ova vremena koristi drugačija simbolika nego u *CPM* metodu, da se ukaže na njihovu drugačiju interpretaciju (drugi razlog za upotrebu drugačije simbolike je što je *PERT* metod razvio *drugi tim ljudi* u odnosu na *CPM* metod, pa nije previše čudno što simbolika nije ista). Međutim, bez obzira na razlike u simbolici i interpretaciji, ova vremena se računaju *na isti način* kao i vremena $t_i^{(0)}$ i $t_i^{(1)}$, samo što se za računanje koriste *očekivana trajanja* aktivnosti. Drugim riječima, najranija očekivana vremena događaja dobijaju se pomoću relacija

$$(T_\text{E})_1 = 0$$
$$(T_\text{E})_j = \max\,\{(T_\text{E})_i + (t_e)_{i,j} \mid 1 \le i < j \wedge (i,j) \in \Omega\},\quad j = 2\,..\,n$$

dok se najkasnija očekivana vremena dobijaju pomoću relacija

$$(T_\text{L})_n = (T_\text{E})_n$$
$$(T_\text{L})_i = \min\,\{(T_\text{L})_j - (t_e)_{i,j} \mid i < j \le n \wedge (i,j) \in \Omega\},\quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Vrijednost $(T_\text{L})_n = (T_\text{E})_n$ uzima se za ***očekivano trajanje projekta***, a uskoro ćemo vidjeti kako se računa *vjerovatnoća da će se projekat završiti u nekom zadanom vremenu*, odnosno do kojeg roka se projekat može završiti sa *unaprijed zadanom vjerovatnoćom*.

Kod *PERT* metoda se također definiraju dvije vrste vremenskih rezervi, i to ***očekivane vremenske rezerve događaja*** R_i i ***očekivane vremenske rezerve aktivnosti*** $\text{R}_{i,j}$, koje se definiraju izrazima

$$\text{R}_i = (T_\text{L})_i - (T_\text{E})_i$$
$$\text{R}_{i,j} = (T_\text{L})_j - (T_\text{E})_i - (t_e)_{i,j}$$

Primijetimo da za razliku od *CPM* metoda, kod *PERT* metoda *nemamo različite vrste vremenskih rezervi koje su pridružene aktivnostima*. Razlog za to je što kod *PERT* metoda ne možemo govoriti o egzaktnim najranijim mogućim i najkasnijim dozvoljenim vremenima nastupanja događaja, nego samo o *očekivanjima*, odnosno *procjenama*. Događaji za koje je očekivana rezerva jednaka nuli su ***očekivano kritični događaji***, dok su aktivnosti čije su rezerve jednake nuli ***očekivano kritične aktivnosti***. Put od početnog do završnog događaja koji se sastoji *samo od kritičnih aktivnosti* predstavlja ***očekivano kritični put*** (mada to ne znači, zbog nepostojanja informacija o *tačnim trajanjima aktivnosti*, da *stvarni* kritični put neće biti neki drugi).

Sljedeća stvar koja je bitna kod *PERT* metoda je određivanje *vjerovatnoće da će se projekat završiti u nekom zadanom vremenu* T_S, odnosno do kojeg roka se projekat može završiti sa nekom *unaprijed zadanom vjerovatnoćom p*. Razmotrimo kako ovo izvesti. Jasno je da je ukupno trajanje projekta T_P slučajna veličina, ali se postavlja pitanje *kakva je distribucija vjerovatnoće* te slučajne promjenljive. Ranije smo pretpostavili da se trajanja aktivnosti podvrgavaju beta distribuciji, ali to *ne znači* da isto vrijedi i za veličinu T_P. Naime, veličina T_P *na kompleksan način* ovisi od trajanja pojedinih aktivnosti, a već za prosti zbir dvije slučajne promjenljive nije posve jednostavno izračunati gustinu vjerovatnoće na osnovu poznatih gustina vjerovatnoće sabiraka. Tako se, recimo, već prosti zbir dvije slučajne promjenljive koje se podvrgavaju beta distribuciji *ne podvrgava beta distribuciji*. Da bismo dali odgovor na ovo pitanje, moraćemo učiniti dvije pretpostavke (od kojih je ona druga *posebno restriktivna*):

- Trajanja pojedinih aktivnosti su međusobno *statistički nezavisna*, tj. stvarno trajanje neke aktivnosti *ne ovisi* od trajanja ostalih aktivnosti. To, između ostalog, znači i da *produženje* ili *skraćenje* neke aktivnosti u odnosu na njeno očekivano trajanje *neće utjecati* na trajanja ostalih aktivnosti.
- *Očekivani kritični put* će u svim situacijama *zaista biti kritični put*. Drugim riječima, to znači da pretpostavljamo da *varijacije u stvarnim trajanjima aktivnosti* nikada neće biti *toliko velike* da prouzroče da *kritični put bude drugačiji* u odnosu na onaj koji se dobije ukoliko se za stvarna trajanja aktivnosti uzmu *njihova očekivana trajanja*. Ovaj uvjet *neće biti ispunjen* u slučaju da postoje putevi čije je *očekivano trajanje* (tj. suma očekivanih trajanja svih aktivnosti duž puta) *blisko očekivanom trajanju očekivano kritičnog puta*, pogotovo ukoliko duž takvih puteva ima aktivnosti *sa velikom varijansom*.

Ukoliko su prethodne pretpostavke *ispunjene*, tada je stvarno trajanje projekta sigurno jednako *sumi stvarnog trajanja aktivnosti duž očekivano kritičnog puta* (koji je *ujedno i stvarni kritični put*). U teoriji vjerovatnoće je poznata tzv. ***centralna granična teorema*** koja tvrdi da se suma *većeg broja međusobno nezavisnih slučajnih veličina* pod određenim prilično relaksiranim uvjetima (koji su u većini praktičnih primijena uvijek ispunjeni) približno ponaša u skladu sa tzv. ***normalnom*** (ili ***Gaussovom***) ***distribucijom vjerovatnoće***, *bez obzira kakve su gustine vjerovatnoće pojedinih sabiraka*, pri čemu je slaganje *prilično dobro već za sumu* $3-4$ slučajne promjenljive, a postaje *izuzetno dobro* za sumu desetak i više promjenljivih. Pri tome je *očekivana vrijednost te sume* jednaka *sumi očekivanih vrijednosti pojedinih sabiraka*, a *varijansa te sume* jednaka *sumi varijansi pojedinih sabiraka*. Dakle, pod gore navedenim pretpostavkama, *stvarno trajanje projekta se podvrgava normalnoj raspodjeli*, i njegova očekivana vrijednost je upravo $(T_\mathrm{E})_n$, kako smo i ranije naglasili (jer je $(T_\mathrm{E})_n$ upravo suma očekivanih trajanja aktivnosti duž očekivano kritičnog puta), dok mu je varijansa σ^2 jednaka *sumi varijansi aktivnosti duž očekivano kritičnog puta*.

Gustina vjerovatnoće neke slučajne promjenljive t koja se podvrgava normalnoj raspodjeli čija je očekivana vrijednost t_e i standardna devijacija (kvadratni korijen iz varijanse) σ data je izrazom

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_e}{\sigma}\right)^2}$$

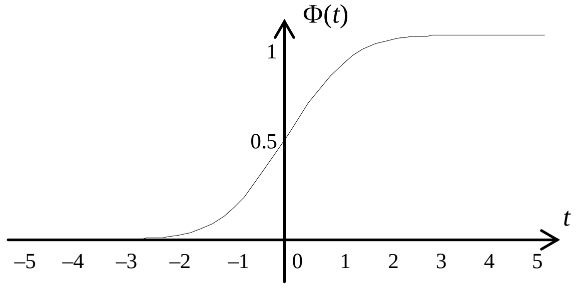
Na osnovu ovog izraza i ranije navedene opće formule za računanje vjerovatnoća na osnovu poznate gustine vjerovatnoće, dobija se da vjerovatnoća $p = \mathrm{P}(T_\mathrm{P} \le (T_\mathrm{S})_n)$ da će se projekat završiti do nekog unaprijed postavljenog roka $(T_\mathrm{S})_n$ iznosi

$$p = \Phi\left(\frac{(\mathrm{T_S})_n - (\mathrm{T_E})_n}{\sigma}\right)$$

gdje je funkcija Φ data izrazom

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, \mathrm{d}u$$

Funkcija Φ *ne može se izraziti preko elementarnih funkcija*, a naziva se ***funkcija kumulativne normalne distribucije*** ili ***normalna kumulativna distributivna funkcija***. Grafik ove funkcije prikazan je na sljedećoj slici:



Postoje brojni jednostavni i efikasni algoritmi za računanje Φ, kao i tablice izračunatih vrijednosti za razne vrijednosti argumenata, a dovoljno je važna za praktične primjene da se nalazi implementirana kao standardna funkcija u nekim programskim jezicima (npr. u *Matlab*-u ova funkcija je poznata pod imenom "`normcdf`"). Ova funkcija je u tijesnoj vezi sa funkcijom "`erf`" koja se nalazi u standardnom skupu mnogih programskih jezika (*C++11*, *C99*, *Matlab*, *Python*, itd.) baš pod tim imenom. Funkcija "`erf`" se, inače, naziva ***funkcija greške*** (engl. *error function*), a svoje nesretno ime dobila je jer je prvi put našla svoju primjenu u *teoriji grešaka u mjerenjima*, iako je kasnije našla primjene u mnogim oblastima nauke i tehnike. Ta funkcija se *također ne može izraziti preko elementarnih funkcija*, a definirana je izrazom

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$$

S obzirom da podrška za funkciju "`erf`" postoji u velikom broju programskih jezika, korisno je znati vezu između nje i funkcije Φ, koja glasi

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf} \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Postoje i razne *približne formule* koje sa priličnom tačnošću izražavaju funkciju Φ preko elementarnih funkcija. Jedna od takvih je sljedeća formula, kod koje greška ne prelazi 0.0001:

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sgn} t \sqrt{1 - e^{-t^2 \frac{2.546 + 0.147 t^2}{4 + 0.294 t^2}}}\right)$$

Izraz za računanje vjerovatnoće p_n često se piše u obliku $p = \Phi(Z_n)$, gdje je pomoćna veličina Z_n data izrazom

$$Z_n = \frac{(\mathrm{T_S})_n - (\mathrm{T_E})_n}{\sigma}$$

Ova veličina naziva se ***faktor vjerovatnoće***. Za $(T_\mathrm{S})_n = (T_\mathrm{E})_n$ imamo $Z_n = 0$, pa kako je $\Phi(0) = 0.5$, slijedi da vjerovatnoća da će se projekat završiti *do očekivanog vremena završetka* $(T_\mathrm{E})_n$ iznosi tačno 50 %. Međutim, bitno je istaći da je ova, pa i svaka druga procjena vjerovatnoće završetka projekta *veoma nepouzdana* u slučajevima kada postoji realna mogućnost da *očekivano kritični put ne bude zaista i stvarni kritični put*.

Analogne formule u kojima se umjesto indeksa *n* javlja indeks *i* mogu se koristiti za *procjenu vjerovatnoće da će i-ti događaj nastupiti do nekog unaprijed zadanog roka* $(T_\mathrm{S})_i$, što može biti interesantno za neke značajne događaje koje predstavljaju završetke nekih *bitnih dijelova projekta*. U tom slučaju se uzima da je varijansa σ^2 jednaka *sumi varijansi aktivnosti duž očekivano najdužeg puta od početnog događaja do događaja i*. Procjena je *lošija* za događaje koji su *bliži početnom događaju*, s obzirom da njihovo vrijeme nastupanja zavisi od trajanja *manjeg broja aktivnosti*, pa je samim tim *opravdanost aproksimacije normalnom distribucijom lošija*. Također, procjena može biti loša u slučajevima kada očekivano najduži put od početnog događaja do događaja *i* nije ujedno i stvarni najduži put do tog događaja. Moguće je okvirno procijeniti i *vjerovatnoću da neki događaj i postane kritičan* pomoću formule

$$p = \Phi\left(\frac{(\mathrm{T_E})_i - (\mathrm{T_L})_i}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\mathrm{R}_i}{\sigma}\right)$$

Ukoliko je potrebno *procijeniti vrijeme* $(T_\mathrm{S})_n$ *do kojeg se projekat može završiti sa nekom unaprijed zadanom vjerovatnoćom p*, izraz za *p* u funkciji od $(T_\mathrm{S})_n$ treba *riješiti po* $(T_\mathrm{S})_n$, čime dobijamo

$$(T_\mathrm{S})_n = (T_\mathrm{E})_n + \sigma\, \Phi^{-1}(p)$$

gdje je Φ^{-1} *inverzna funkcija funkcije* Φ. Ova funkcija je također podržana u nekim programskim jezicima (recimo, pod imenom "`norminv`" u *Matlab*-u). Međutim, mnogo češće je podržana *inverzna funkcija funkcije* "`erf`" (obično pod imenom "`erfinv`"). Veza između ove dvije funkcije data je izrazom

$$\Phi^{-1}(p) = \sqrt{2}\, \operatorname{erf}^{-1}(2p - 1)$$

Također postoje i *aproksimativne formule* koje izražavaju funkciju Φ^{-1} preko elementarnih funkcija. Jedna od njih je sljedeća:

$$\Phi^{-1}(p) \approx 1.472 \operatorname{sgn}(p - 0.5) \sqrt{-4 - 0.462 \ln[4p(1-p)] + \sqrt{16 - 2.11 \ln[4p(1-p)] + 0.213 \ln[4p(1-p)]^2}}$$

Ukoliko je potrebno ustanoviti *da li se projekat može završiti u nekom planiramom roku* $(T_S)_n$ *sa nekom unaprijed zadanom vjerovatnoćom* p, jedan način je da izračunamo vjerovatnoću završetka u ovom roku i da onda poredimo da li je ona veća ili jednaka od zadane vjerovatnoće p. Međutim, obično je lakše izračunati vrijeme u kojem se projekat može završiti sa zadanom vjerovatnoćom p i porediti da li je ono kraće od zadanog planiranog roka, odnosno testirati da li je

$$(T_E)_n + \sigma\, \Phi^{-1}(p) \le (T_S)_n$$

Ukoliko je ovaj uvjet ispunjen, projekat se može završiti u planiranom roku sa nekom unaprijed zadanom vjerovatnoćom, inače ne (alternativno se može izračunati *faktor vjerovatnoće* Z_n i testirati da li je $Z_n \ge \Phi^{-1}(p)$, što se svodi na isto). Obično se testiranja vrše za zadane vjerovatnoće od 25 %, 50% i 75 %, tako da je korisno znati da je $\Phi^{-1}(0.25) \approx -0.6745$, $\Phi^{-1}(0.5) = 0$ i $\Phi^{-1}(0.75) \approx 0.6745$. U praksi se *gotovo nikada ne prihvata* ugovoreni rok završetka projekta čija je vjerovatnoća realizacije manja od 25 %, s obzirom da je realizacija projekta u takvom roku *veoma rizična* i vjerovatno traži *dodatna ulaganja*. S druge strane, ugovoreni rok sa vjerovatnoćom realizacije 75 % povezan je sa *malim rizikom*, ali i *nedovoljnim iskorištenjem raspoloživih kapaciteta*. Stoga se obično prihvataju rokovi završetka sa vjerovatnoćom ispunjenja u granicama od 25 % do 75 %.

Nekada je potrebno saznati *do kojeg roka* $(T_S)_n$ je *praktično sigurno* (dakle, *sa gotovo stoprocentnom vjerovatnoćom*) moguće završiti projekat. Jasno je da se to može uraditi tako što ćemo za svaku aktivnost pretpostaviti *njeno pesimističko trajanje*, pa onda izvršiti analizu vremena kao po metodu *CPM*, dakle bez uzimanja neizvjesnosti u obzir. Međutim, takav pristup daje *jako precijenjeno trajanje projekta*, s obzirom da je izuzetno mala vjerovatnoća da će se sve aktivnosti odvijati u pesimističkom trajanju, odnosno da će *apsolutno sve poći* “*po zlu*”. Zbog toga se za ustanovljavanje roka u kojem je praktično sigurno moguće završiti projekat obično uzima vrijeme u kojem se on može završiti sa vjerovatnoćom od 99.87 %. Ova vrijednost je uzeta s obzirom da se za nju dobija lijepa vrijednost $\Phi^{-1}(0.9987) \approx 3$ pogodna za računanje.

Ranije smo istakli da su procjene vjerovatnoće odnosno rokova u kojim se projekat može završiti sa zadanom vjerovatnoćom pouzdane *jedino ukoliko smo sigurni da će kritični put u svim okolnostima zaista biti kritični put*. U slučaju kada to nije ispunjeno, što se dešava kada postoje subkritični putevi sa dužinama bliskim očekivano kritičnom putu i bitno drugačijom varijansom duž takvih puteva u odnosu na očekivano kritični put, procjene dobijene na gore opisan način su *prilično nepouzdane*. Razlog za to je činjenica što je trajanje projekta jednako *dužini najdužeg puta* od početka do kraja, a mi više *nismo sigurni koji je to put*. Mada su osnovane pretpostavke da su dužine svih puteva od početka do kraja slučajne promjenljive koje se približno ponašaju po *normalnoj raspodjeli*, trajanje projekta, koji je *maksimum* od dužina svih tih puteva *ne ponaša se po normalnoj raspodjeli* (maksimum više promjenljivih koji se ponašaju po normalnoj raspodjeli ne ponaša se po normalnoj raspodjeli). Stoga u takvim slučajevima ni trajanje projekta nije slučajna promjenljiva koja se ponaša po normalnoj raspodjeli, tako da prethodno provedena teorija u priličnoj mjeri zakazuje. Poseban problem je i u činjenici da je u takvim slučajevima *teško odrediti koliko je zaista očekivano trajanje projekta* (ono tada nije prosto jednako maksimumu očekivanih dužina svih mogućih putanja), niti kolika je *varijansa trajanja projekta*. Brojna ispitivanja pokazala su da u ovakvim slučajevima gore objašnjeni postupci procjene *precjenjuju* vjerovatnoću da će projekat biti završen u unaprijed zadanom vremenu (odnosno, daju vjerovatnoću *veću* nego što ona zaista jeste), odnosno *podcjenjuju* procjenu trajanja projekta koja se može očekivati sa unaprijed zadanom vjerovatnoćom (odnosno daju trajanje *manje* nego što ono zaista jeste).

Da bismo bolje ilustrirali uticaj subkritičnih puteva na procjene dobijene na prethodno opisani način, pretpostavimo da imamo dva puta od početka do kraja projekta koji su *potpuno nezavisni* u smislu da duž njih nema *niti jedne zajedničke aktivnosti* i da aktivnosti duž jednog puta ni na koji način ne utiču na aktivnosti duž drugog puta. Neka su vjerovatnoće da se sve aktivnosti duž jednog odnosno drugog puta završe do nekog vremena T jednake p_1 odnosno p_2 respektivno. Tada je, uz pretpostavku potpune nezavisnosti, vjerovatnoća da se sve aktivnosti duž *oba puta* završe do vremena T iznosi $p_1 p_2$. Razmotrimo posljedice ovoga. Pretpostavimo da je recimo prvi put kritičan a drugi daleko ispod kritičnog, kao i da je vjerovatnoća p_1 realizacije aktivnosti duž kritičnog puta relativno velika. Tada je skoro sigurno da će se aktivnosti duž drugog puta završiti do istog vremena T, tako da je $p_2 \approx 1$ i $p_1 p_2 \approx p_1$. Drugim riječima, postojanje drugog nekritičnog puta ne utiče osjetno na vjerovatnoću završetka svih aktivnosti do vremena T. Međutim, ukoliko je drugi put blizak kritičnom, ili ima velike šanse da postane kritičan, tada su p_1 i p_2 istog reda veličine, te $p_1 p_2$ može biti osjetno manje od p_1 (u najgorem slučaju kad je $p_1 = p_2$, vjerovatnoća sa p_1 pada na p_1^2). U stvarnosti, situacija nikada nije tako drastična kao što je ovdje opisano, jer uvjeti potpune nezavisnosti puteva gotovo nikada nisu ispunjeni (razni putevi od početka do kraja projekta gotovo uvijek imaju mnogo zajedničkih aktivnosti), ali ipak pokazuju da uticaj subkritičnih puteva nije za potcijeniti.

Mnogi projekt menadžeri svjesni su gore opisanih problema, ali primjenjuju strategiju koja se ponekad naziva ***algoritam noja***: prosto *ignoriraj problem* (stavi "glavu u pijesak"), eventualno uz dodatnu svijest da je dobijena vjerovatnoća vjerovatno *precijenjena*, odnosno da je procjena trajanja projekta *podcijenjena*. S druge strane, predloženi su brojni manje-više emipirijski pokušaji da se *PERT* metod prilagodi da se nekako uzme u obzir uticaj subkritičnih puteva za koje postoji opasnost da bi mogli postati kritični, mada ni jedan takav postupak nije dao dovoljno dobre rezultate. Jedna mogućnost, koja se dosta često koristi (bez obzira na očigledne manjkavosti), je da se procjena trajanja projekta prema formuli $(T_S)_n = (T_E)_n + \sigma\,\Phi^{-1}(p)$ provodi *za sve puteve* od početnog do krajnjeg događaja a ne samo za kritični, odnosno za svaki takav put se računa $(T_E)_n$ kao *suma očekivanih trajanja aktivnosti duž tog puta* i varijansa kao *suma varijansi duž tog puta*, pa se nakon toga *najveća* od svih tako izračunatih vrijedmosti $(T_S)_n$ uzima kao *stvarna procjena trajanja projekta*. Slično, ukoliko je samo potrebno testirati da li se projekat sa zadanom vjerovatnoćom p može realizirati u zadanom vremenu $(T_S)_n$, testovi $(T_E)_n + \sigma\,\Phi^{-1}(p) \le (T_S)_n$ odnosno $Z_n \ge \Phi^{-1}(p)$ vrše se za vrijednosti $(T_E)_n$, σ odnosno Z_n duž *svakog mogućeg puta* od početka do kraja, a ne samo duž očekivano kritičnog, te je kompletan test uspio samo ukoliko su uspjeli testovi za svaki od mogućih puteva (ukoliko je $\Phi^{-1}(p) < 0$, tj. $p < 0.5$, testove je očigledno potrebno raditi samo za puteve kod kojih je $(T_S)_n \le (T_E)_n$, jer su u suprotnom ovi testovi svakako zadovoljeni). Ukoliko je potrebno procijeniti *vjerovatnoću* završetka projekta u nekom vremenu $(T_S)_n$, računaju se vjerovatnoće $p = \Phi(Z_n)$ za veličine Z_n duž svakog mogućeg puta od početka do kraja, i od tako dobijenih vjerovatnoća uzima se ona *najmanja*.

Manjkavost gore opisanog postupka je očigledna, s obzirom da ako imamo dvije slučajne promjenljive x i y i za svaku od njih nađemo vrijednosti T_x i T_y takve da je $x \le \mathrm{T}_x$ i $y \le \mathrm{T}_y$ sa vjerovatnoćom p, to *uopće ne znači* da će tada sa istom vjerovatnoćom p biti $\max\{x, y\} \le \max\{\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y\}$, a ono što mi radimo gore temelji se *upravo na takvoj pretpostavci*. Međutim, bez obzira na ovu manjkavost, ovakav postupak obično daje *pouzdanije procjene* očekivanog trajanja projekta sa zadanom vjerovatnoćom nego u slučajavima kad prosto ignoriramo problem, pogotovo u slučajevima kada želimo procjenu trajanja koja se može ostvariti *sa velikom vjerovatnoćom*.

Prethodni postupak, pored opisane manjkavosti, ima i dodatni problem što se moraju testirati *svi putevi* od početnog do krajnjeg događaja. To nije problem ukoliko je broj takvih puteva mali, ali u najgorem slučaju, broj puteva kroz dijagram može biti *eksponencijalna funkcija* broja čvorova. Stoga neki autori predlažu i drugi, *još manjkaviji* pristup, ali koji je barem *brži od gore opisanog pristupa*. Prema ovom pristupu, polazi se od pretpostavke da je gornja granica trajanja neke aktivnosti $[i-j]$ koja se ostvaruje sa vjerovatnoćom p jednaka $(t_e)_{i,j} + \sigma_{i,j}\,\Phi^{-1}(p)$, analogno izrazu $(T_E)_n + \sigma\,\Phi^{-1}(p)$. Ovdje leži *prva* (i *manja*) *manjkavost*, jer trajanja *aktivnosti ne podliježu normalnoj raspodjeli*, pa analogija *nije primjerena*. Zatim se prosto obavi proračun trajanja projekta kao po metodu *CPM*, uzimajući da su ove vrijednosti $(t_e)_{i,j} + \sigma_{i,j}\,\Phi^{-1}(p)$ *stvarna trajanja aktivnosti*, tj. pomoću izraza

$$(T_S)_1 = 0$$

$$(T_S)_j = \max\,\{(T_S)_i + [\,(t_e)_{i,j} + \sigma_{i,j}\,\Phi^{-1}(p)] \mid 1 \le i < j \wedge (i, j) \in \Omega\}, \quad j = 2\,..\,n$$

Ovdje se uočava i *druga manjkavost, a to je zasnovanost* na pretpostavci da ako imamo dvije slučajne promjenljive x i y i za svaku od njih nađemo vrijednosti T_x i T_y takve da je $x \le \mathrm{T}_x$ i $y \le \mathrm{T}_y$ sa vjerovatnoćom p, da će tada sa istom vjerovatnoćom p biti $x + y \le \mathrm{T}_x + \mathrm{T}_y$, a to nažalost *nije tačno*. Detaljna ispitivanja su pokazala da ovaj metod *precjenjuje* trajanje projekta kada je $p > 0.5$, a *podcjenjuje* u suprotnom. Bez obzira na ove manjkavosti, ovaj metod se nekada koristi u slučajevima kada je $p > 0.5$ za dobijanje *gornje granice* procjene trajanja projekta sa zadanom vjerovatnoćom p, dok se prosta procjena $(T_S)_n = (T_E)_n + \sigma\,\Phi^{-1}(p)$ opisana na početku koristi kao *donja granica*.

Danas, kada postoje brzi računari, moguće je *veoma precizno* procijeniti kako vjerovatnoću završetka projekta u zadanom roku, tako i trajanje koje se može realizirati sa zadanom vjerovatnoćom. Za tu svrhu, koriste se *simulacijske tehnike*, koje u *potpunosti zaobilaze PERT metod*. Ideja je da se proračun trajanja projekta obavi N puta gdje je N neki veći broj (reda više stotina pa i hiljada) korištenjem *CPM* metoda, pri čemu se svaki put proračun vrši sa *drugačijim trajanjima aktivnosti*. Preciznije, na početku svakog od proračuna se uzima da je trajanje $t_{i,j}$ neki ***pseudoslučajni broj*** iz opsega $a_{i,j} \le t_{i,j} \le b_{i,j}$ koji se ponaša u skladu sa beta raspodjelom čija je modalna vrijednost $m_{i,j}$ (pseudoslučajni brojevi su brojevi koji *nisu zaista slučajni* jer se *generiraju nekim algoritmom*, ali se sa aspekta *statističkih testova* ponašaju *kao da su zaista slučajni*). Sretna je okolnost da postoje *dobri algoritmi* za generiranje pseudoslučajnih brojeva koji se ponašaju u skladu sa zadanom raspodjelom, o čemu ćemo govoriti kada budemo obrađivali *simulacione metode u operacionim istraživanjima*. Nakon što se obavi N proračuna, odgovori na željena pitanja dobijaju se *posve jednostavno*. *Očekivano trajanje projekta* uzima se da je jednako *aritmetičkoj sredini trajanja projekta dobijenih u svim proračunima*. *Vjerovatnoća* da će se *projekat završiti do roka* T_S procjenjuje se kao *odnos* N_P / N gdje je N_P *broj proračuna* u kojima je *trajanje projekta bilo manje ili jednako* T_S. Konačno, *trajanje projekta koje se može realizirati sa vjerovatnoćom p* može se dobiti tako što se sva trajanja dobijena u N proračuna *sortiraju po veličini* i uzme ono trajanje T_S koje se u tom sortiranom spisku nalazi na poziciji $p\,N$ (s obzirom da to znači da je u $p\,N$ od ukupno N proračuna projekat trajao manje ili jednako od T_S).

Gore opisani metod analize vremena, koji u potpunosti zaobilazi *PERT* metod, naziva se i ***Monte Carlo analiza***. Ovaj pristup je u posljednje vrijeme gotovo u potpunosti potisnuo *PERT* metod, tako da *PERT* metod više nema onoliki značaj kakav je imao prije dvadesetak i više godina. *PERT* metod se danas koristi uglavnom za grube procjene trajanja jednostavnijih projekata, i to kod onih za koje postoje saznanja da u njima postoji samo jedan dominantno kritični put.

- ***Primjer***: Analiza trajanja aktivnosti nekog projekta dala je procjene trajanja pojedinih aktivnosti koje su prikazane u sljedećoj tabeli, u kojoj su također naznačene i logičke međuzavisnosti između aktivnosti (vrijeme je izraženo u sedmicama):

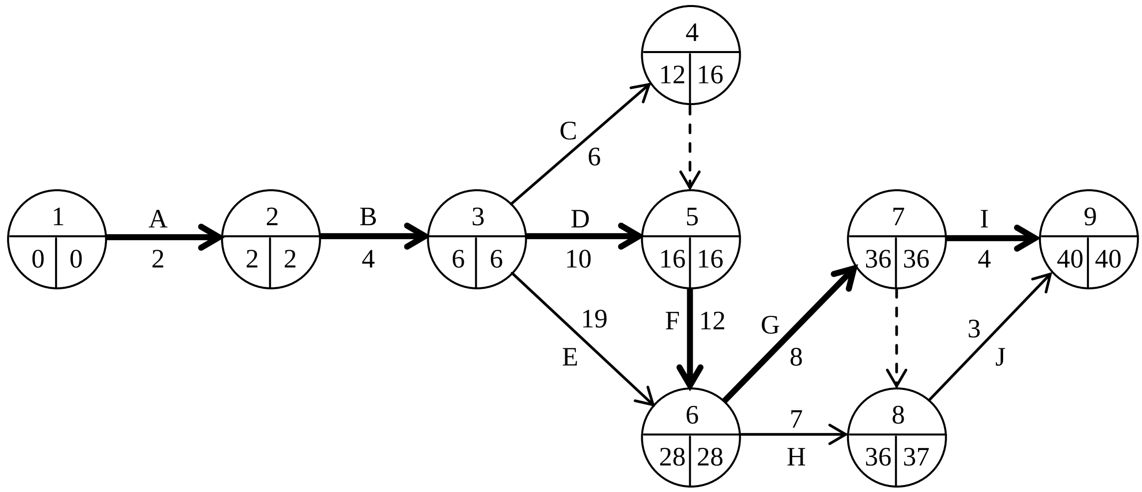
Aktivnost	Preduvjeti	Optimističko vrijeme	Modalno vrijeme	Pesimističko vrijeme
A	–	1	2	3
B	A	4	4	4
C	B	4	5	12
D	B	9	10	11
E	B	19	19	19
F	C, D	12	12	12
G	E, F	6	7	14
H	E, F	2	4	24
I	G	2	4	6
J	G, H	3	3	3

Pomoću *PERT* metoda proračunati očekivano najranije i najkasnije vrijeme te rezervu za svaki događaj u projektu, a zatim procijeniti vrijeme za koje se projekat može završiti sa vjerovatnoćama 25 %, 75 % i skoro sigurno, te vjerovatnoću da će se aktivnost F završiti nakon 27 sedmica.

Prvi korak u analizi je da se za svaku aktivnost odredi očekivano vrijeme i varijansa, što je urađeno u sljedećoj tabeli:

Aktivnost	Preduvjeti	Očekivano vrijeme	Varijansa
A	–	2	1/9
B	A	4	0
C	B	6	16/9
D	B	10	1/9
E	B	19	0
F	C, D	12	0
G	E, F	8	16/9
H	E, F	7	121/9
I	G	4	4/9
J	G, H	3	0

Na osnovu ove tablele, prvo vršimo analizu strukture, tj. sastavljamo mrežni dijagram. Nakon toga se vrši postupak proračuna očekivanih najranijih i najkasnijih vremena za sve događaje, što se izvodi na potpuno isti način kao kod *CPM* metoda, samo što se umjesto tačno određenih trajanja aktivnosti ovaj put uzimaju očekivana trajanja aktivnosti (varijanse nam u ovom stadiju analize još uvijek nisu bitne). Nakon obavljenog proračuna, dobija se dijagram kao na sljedećoj slici:



Vidimo da je očekivano kritični put $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7 \to 9$, dok su svi događaji osim događaja 4 i 8 očekivano kritični. Rezultati analize vremena nastupanja događaja zajedno sa odgovarajućim rezervama prikazani su u sljedećoj tabeli:

Događaj (i)	$(T_E)_i$	$(T_L)_i$	R_i
1	0	0	0
2	2	2	0
3	6	6	0
4	12	16	4
5	16	16	0
6	28	28	0
7	36	36	0
8	36	37	1
9	40	40	0

Iz provedene analize zaključujemo da očekivano trajanje projekta iznosi $(T_E)_9 = 40$ sedmica. Sada ćemo procijeniti vrijeme za koje se projekat može završiti sa vjerovatnoćama 25 %, 75 % i skoro sigurno (tj. sa vjerovatnoćom 99.87 %). Prvo ćemo procijeniti ova vremena na najprostiji način, *ignorirajući moguće subkritične puteve* koji bi mogli postati kritični. Na kritičnom putu leže aktivnosti A, B, D, F, G i I, pa varijansa duž kritičnog puta iznosi

$$\sigma^2 = \sigma_A{}^2 + \sigma_B{}^2 + \sigma_D{}^2 + \sigma_F{}^2 + \sigma_G{}^2 + \sigma_I{}^2 = \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + 0 + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$$

tako da je odgovarajuća standardna devijacija

$$\sigma = \sqrt{\frac{22}{9}} \approx 1.56$$

Sada, za vjerovatnoću 25 % dobijamo procjenu trajanja projekta

$$(T_S)_9 = (T_E)_9 + \sigma\,\Phi^{-1}(0.25) \approx 40 - 1.56 \cdot 0.6745 \approx 38.95 \ \ \text{(oko 39 sedmica)}$$

Na isti način, za vjerovatnoću 75 % dobijamo procjenu

$$(T_S)_9 = (T_E)_9 + \sigma\,\Phi^{-1}(0.75) \approx 40 + 1.56 \cdot 0.6745 \approx 41.05 \ \ \text{(oko 41 sedmicu)}$$

dok za skoro stoprocentnu vjerovatnoću 99.87 % imamo procjenu

$$(T_S)_9 = (T_E)_9 + \sigma\,\Phi^{-1}(0.9987) \approx 40 + 1.56 \cdot 3 \approx 44.68 \ \ \text{(blizu 45 sedmica)}$$

Nažalost, imamo dosta razloga da budemo sumnjičavi prema dobijenim procjenama, s obzirom da imamo aktivnost H sa velikom varijansom 121/9 koja se *ne nalazi na očekivano kritičnom putu*, tako da postoji opasnost da će stvarni kritični put biti neki koji sadrži ovu aktivnost. Pogledajmo stoga kakve će rezultate dati alternativni postupci. Probajmo prvo pristup koji se zasniva na testiranju *svih mogućih puteva* od početnog do krajnjeg događaja. Ima ukupno 9 takvih puteva. U sljedećoj tabeli prikazani su rezultati takve analize. T_E i σ predstavljaju zbir trajanja aktivnosti i standardne devijacije (kvadratne korijene iz varijansi) duž naznačenih puteva, dok tri naredne kolone u tabeli daju procjene za T_S uz različite vjerovatnoće realizacije računate duž svakog od naznačenih puteva:

Put	T_E	σ	T_S (25%)	T_S (75%)	T_S (s. sig.)
$1\to2\to3\to4\to5\to6\to7\to9$	36	2.03	34.63	37.37	42.09
$1\to2\to3\to4\to5\to6\to7\to8\to9$	35	1.91	33.71	36.29	40.73
$1\to2\to3\to4\to5\to6\to8\to9$	34	3.92	31.36	36.64	45.76
$1\to2\to3\to5\to6\to7\to9$	40	1.56	38.95	41.05	44.68
$1\to2\to3\to5\to6\to7\to8\to9$	39	1.41	38.05	39.95	43.23
$1\to2\to3\to5\to6\to8\to9$	38	3.69	35.51	40.49	49.07
$1\to2\to3\to6\to7\to9$	37	1.53	35.97	38.03	41.59
$1\to2\to3\to6\to7\to8\to9$	36	1.37	35.08	36.92	40.11
$1\to2\to3\to6\to8\to9$	35	3.68	32.52	37.48	46.04

Ukoliko uzmemo kao pravu procjenu *najveću* od procjena duž svih puteva (što odgovara osjenčenim poljima u tabeli), procjene trajanja uz vjerovatnoće od 25 % i 75 % ostale su identične kao i ranije, dok za procjenu trajanja uz skoro stoprocentnu sigurnost imamo mnogo nepovoljniju procjenu od oko 49 sedmica. Sigurno je da je ova procjena *pouzdanija*, s obzirom da prva procjena nije uzela u obzir mogućnost da aktivnost H može da se nenadano produži, tako da stvarni kritični put bude neki koji sadrži upravo tu aktivnost. Procjena od oko 49 sedmica dobijena je upravo na osnovu puta koji sadrži aktivnost H.

Konačno, analizu ćemo provesti i drugim postupkom koji smo opisivali, a koji ne traži analizu svih puteva. Taj postupak traži da se za svaku aktivnost izračuna vrijednost $t_e + \sigma\,\Phi^{-1}(p)$ a da se onda te vrijednosti usvoje za prava trajanja aktivnosti i obavi procjena trajanja analogno kao u *CPM* metodu. Sljedeća tabela prikazuje vrijednosti $t_e + \sigma\,\Phi^{-1}(p)$ za sve aktivnosti i za tri različite vrijednosti p:

Aktivnost	$t_e + \sigma\,\Phi^{-1}(0.25)$	$t_e + \sigma\,\Phi^{-1}(0.75)$	$t_e + \sigma\,\Phi^{-1}(0.9987)$
A	1.775	2.225	3
B	4	4	4
C	5.101	6.899	10
D	9.775	10.225	11
E	19	19	19
F	12	12	12
G	7.101	8.899	12
H	4.527	9.473	18
I	3.55	4.45	6
J	3	3	3

Kada na osnovu ovih trajanja aktivnosti provedemo analizu vremena kao po *CPM* metodu, dobijamo redom procjene $T_S \approx 38.2$, $T_S \approx 41.8$ i $T_S = 51$ za vjerovatnoće $p = 0.25$, $p = 0.75$ i $p = 0.9987$ respektivno. Vidimo da je prva procjena *manja* a druge dvije *veće* nego što smo dobili na prvi način. Međutim, već je rečeno da su procjene dobijene na ovaj način tipično *podcijenjene* za $p < 0.5$ a *precijenjene* za $p > 0.5$. Bez obzira na to, svi podaci koje smo dobili barem okvirno pokazuju šta možemo očekivati. Treba također primijetiti da je čak i ova procjena $T_S = 51$ za rok realizacije koji se može gotovo sigurno ostvariti znatno povoljniji od procjene $T_S = 58$ koji bismo dobili da prosto za sve aktivnosti uzmemo *pesimistička trajanja* (tada bi kritični put bio $1\to2\to3\to4\to5\to6\to8\to9$). Naravno, izuzetno je mala šansa da se dogodi da se zaista sve aktivnosti oduže do svog pesimističkog trajanja, što je razlog zbog kojeg nikada ne treba praviti takvu procjenu.

Ostaje još da odredimo vjerovatnoću da će se aktivnost F završiti nakon 27 sedmica. To je zapravo vjerovatnoća da se događaj 6 dogoditi u trenutku $(T_S)_6 = 27$. Očekivano najduži put do događaja 6 je put $1\to2\to3\to5\to6$, duž kojeg imamo standardnu devijaciju

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_D^2 + \sigma_F^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + 0} \approx 0.47$$

Stoga, za traženu vjerovatnoću imamo procjenu

$$p = \Phi\left(\frac{(T_S)_6 - (T_E)_6}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{27-28}{0.47}\right) \approx \Phi(-2.128) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\frac{-2.128}{\sqrt{2}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf} -1.505) \approx \frac{1}{2}(1 - 0.967) \approx 0.0165$$

Ovdje smo funkciju Φ izrazili preko funkcije “erf ”, jer je znatno veći broj programskih okruženja koja znaju izračunati funkciju “erf ” nego funkciju Φ (u nedostatku boljeg rješenja, funkciju “erf ” zna izračunati i *Google*, samo treba postaviti upit poput “erf(–1.505)”). Primjećujemo da je veoma mala vjerovatnoća (oko 1.65 %) da se aktivnost F završi sedmicu prije nego što se očekuje. Razlog tome je što su njeno trajanje i trajanje aktivnosti koje joj prethode prilično dobro procijenjene (sa malim varijansama), pa su odstupanja malo vjerovatna. Također, treba primijetiti da imamo razloga vjerovati ovoj procjeni, s obzirom da su drugi alternativni putevi do događaja 6 osim očekivano najdužeg ili znatno kraći ili sa manjim varijansama, tako da će očekivano najduži put do događaja 6 gotovo sigurno biti i stvarno najduži put do ovog događaja.

➢ ***Primjer***: U sljedećoj tabeli date su procjene trajanja (optimistička, najvjerovatnija i pesimistička) aktivnosti nekog projekta, izražena u mjesecima, kao i logičke međuzavisnosti između aktivnosti:

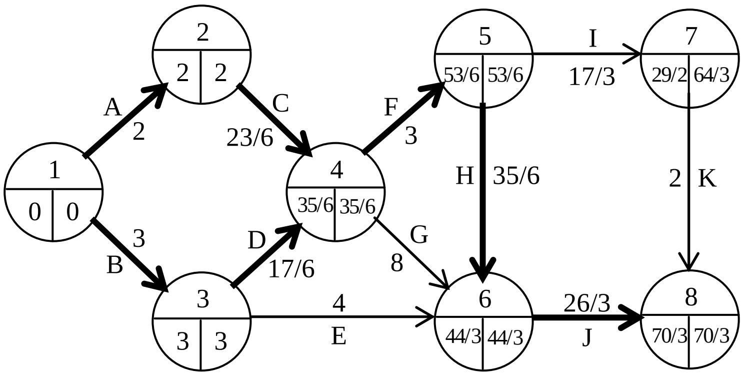
Aktivnost	Preduvjeti	$a_{i,j}$	$m_{i,j}$	$b_{i,j}$
A	–	1	2	3
B	–	2	3	4
C	A	2	4	5
D	B	1	3	4
E	B	3	4	5
F	C, D	2	3	4
G	C, D	6	8	10
H	F	4	6	7
I	F	2	6	8
J	E, G, H	6	9	10
K	J	1	2	3

Pomoću *PERT* metoda proračunati očekivano najranije i najkasnije vrijeme za svaki događaj u projektu (uključujući i očekivano vrijeme završetka projekta). Zatim utvrditi ima li osnove prihvatiti rok realizacije projekta od 22 mjeseca bez velikog rizika i dodatnih ulaganja (tj. sa vjerovatnoćom moguće realizacije od barem 25 %), kao i rok realizacije od 25 mjeseci koji nosi zanemarljiv rizik (tj. sa vjerovatnoćom moguće realizacije od barem 75 %).

Kao i uvijek, prva stvar koju treba uraditi je proračunati očekivana trajanja i varijanse za svaku od aktivnosti. Rezultati ovih proračuna dati su u sljedećoj tablici:

Aktivnost	Preduvjeti	$(t_e)_{i,j}$	$\sigma_{i,j}$
A	–	2	1/9
B	–	3	1/9
C	A	23/6	1/4
D	B	17/6	1/4
E	B	4	1/9
F	C, D	3	1/9
G	C, D	8	4/9
H	F	35/6	1/4
I	F	17/3	1
J	E, G, H	26/3	4/9
K	J	2	1/9

Na osnovu ovih podataka, može se na već mnogo puta demonstrirani način izvršiti analiza strukture i analiza vremena koja nam daje očekivano najranija i najkasnija vremena za svaki događaj. Rezultati ove analize prikazani su na sljedećem dijagramu:



Na osnovu provedene analize, vidimo da je očekivano trajanje projekta $(T_E)_9 = 70/3 \approx 23.33$ mjeseca. Sad treba analizirati da li je prihvatljiv rok završetka od 22 mjeseca. U ovom projektu postoje dva očekivano kritična puta $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$ i $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$, te bi analizu trebalo izvršiti barem za ova dva puta. Međutim, ova dva puta ne samo da imaju isto trajanje, nego i *istu varijansu*, tako da su, sa aspekta analize, oni jednakovrijedni (ipak, treba imati u vidu da postojanje više kritičnih puteva *smanjuje vjerovatnoću* završetka projekta u planiranom vremenu).. Njihova varijansa je

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_C^2 + \sigma_F^2 + \sigma_H^2 + \sigma_J^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{7}{6}$$

odnosno, odgovarajuća standardna devijacija je

$$\sigma = \sqrt{\frac{7}{6}} \approx 1.08$$

Za rok $(T_S)_9 = 22$ mjeseca imamo faktor vjerovatnoće

$$Z_9 = \frac{(T_S)_9 - (T_E)_9}{\sigma} \approx \frac{22 - 23.33}{1.08} \approx -1.23$$

Kako nije ispunjen uvjet $Z_9 \geq \Phi^{-1}(0.25) \approx -0.6745$, rok od 22 mjeseca nije dostižan sa vjerovatnoćom od 25 %, odnosno bez ulaženja u veliki rizik i dodatne troškove (zaista, procjena minimalnog trajanja projekta koje se može realizirati sa ovom vjerovatnoćom iznosi $(T_S)_9 \approx 22.6$). S druge strane, za rok $(T_S)_9 = 25$ mjeseci imamo faktor vjerovatnoće

$$Z_9 = \frac{(T_S)_9 - (T_E)_9}{\sigma} \approx \frac{25 - 23.33}{1.08} \approx 1.55$$

Kako je sada ispunjen uvjet $Z_9 \geq \Phi^{-1}(0.75) \approx 0.6745$, pretpostavljeni rok od 25 mjeseci je dostižan sa vjerovatnoćom od 75 %, odnosno sa zanemarljivim rizicima (zaista, procjena minimalnog trajanja projekta koje se može realizirati sa ovom vjerovatnoćom iznosi $(T_S)_9 \approx 24.06$, iz čega slijedi da bi se realno mogao prihvatiti i rok od 24 mjeseca, pri čemu bi vjerovatnoća realizacije ovog roka bila tek zanemarljivo ispod 75 %).

Bitno je naglasiti da *imamo razloga vjerovati ovim procjenama*, s obzirom da ne postoje putevi čija je dužina bliska dužini očekivano kritičnog puta, a koji imaju znatno veću varijansu. Ukoliko bismo ipak željeli izvršiti analizu za sve puteve, dobili bismo rezultate kao u sljedećoj tablici (za vjerovatnoće manje od 50 % analizu ne treba vršiti za puteve koji su *kraći od postavljenog roka*, što je označeno *crticom* u tablici), iz kojih bismo došli do istih zaključaka:

Put	T_E	σ	Z (22 mj.)	Z (25 mj.)
$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$	23.33	1.08	–1.23	1.55
$1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 7 \to 8$	16.5	1.26	–	6.75
$1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8$	22.5	1.12	–0.45	2.23
$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 8$	23.33	1.08	–1.23	1.55
$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7 \to 8$	16.5	1.26	–	6.75
$1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8$	22.5	1.12	–0.45	2.23
$1 \to 3 \to 6 \to 8$	15.67	0.82	–	11.38

Treba primijetiti da kada vršimo analize ovog tipa, ukoliko test padne za *barem jedan put*, dalje puteve ne treba ni testirati (osjenčena polja prikazuju polja u kojima nije zadovoljen test, tako da dalje testove pri istoj vjerovatnoći nije ni trebalo raditi).

U ovom primjeru nećemo vršiti procjenu na alternativni način koji izbjegava računanje duž svih puteva. Recimo samo da bi se na taj način dobilo da procjena trajanja projekta uz vjerovatnoću realizacije od 75 % iznosi 24.9 mjeseci, što je neznatno veće od procjene 24.06 mjeseci koja se dobija na prethodni način, ali koja je i dalje kraća od postavljenog roka od 25 mjeseci.

- ***Primjer*** : Sljedeća tabela prikazuje aktivnosti koje se trebaju preduzeti da se kompletira neki kurs na nekoj visokoškolskoj ustanovi, zajedno sa prikazom svih logičkih međuzavisnosti između pojedinih aktivnosti, kao i raznih procjena trajanja (optimističke, najvjerovatnije i pesimističke) za sve aktivnosti. Sva trajanja su izražena u sedmicama.

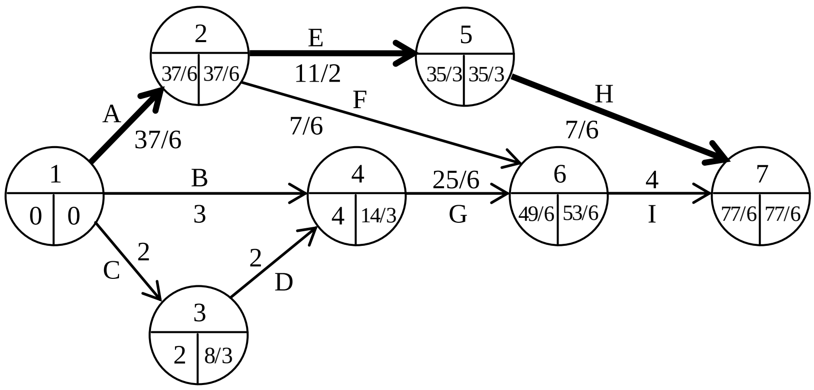
Aktivnost	Preduvjeti	$a_{i,j}$	$m_{i,j}$	$b_{i,j}$
A – Izrada 1. seminarskog rada	–	3	6	10
B – Priprema i polaganje 1. parcijalnog ispita	–	2	3	4
C – Priprema i polaganje 1. testa	–	2	2	2
D – Priprema i polaganje 2. testa	C	2	2	2
E – Izrada 2. seminarskog rada	A	3	5	10
F – Odbrana 1. seminarskog rada	A	1	1	2
G – Priprema i polaganje 2. parcijalnog ispita	B, D	3	4	6
H – Odbrana 2. seminarskog rada	E	1	1	2
I – Usmeni ispit	F, G	3	4	5

Koristeći *PERT* metod, proračunati očekivano najranije i najkasnije vrijeme za svaki događaj u procesu kompletiranja kursa (uključujući i očekivano vrijeme završetka kursa), kao i očekivane najranije i najkasnije početke i završetke, te vremenske rezerve za svaku od aktivnosti. Na kraju, utvrditi kolika je vjerovatnoća da se kurs kompletira za 12 sedmica, odnosno za 14 sedmica.

Kao i dosada, prvo moramo proračunati očekivana trajanja i varijanse za svaku od aktivnosti. Rezultati ovih proračuna dati su u sljedećoj tablici:

Aktivnost	Preduvjeti	$(t_e)_{i,j}$	$\sigma_{i,j}$
A	–	37/6	49/36
B	–	3	1/9
C	–	2	0
D	C	2	0
E	A	11/2	49/36
F	A	7/6	1/36
G	B, D	25/6	1/4
H	E	7/6	1/36
I	F, G	4	1/9

Nakon toga, analiza strukture i analiza vremena provedena na uobičajeni način daje rezultate koji su prikazani na sljedećem dijagramu:



Vidimo da je očekivano vrijeme završetka kursa $(T_E)_7$ = 77/6 ≈ 12.83 sedmica. Što se tiče očekivanih najranijih početaka i završetaka, te vremenskih rezervi za svaku od aktivnosti, rezultati proračuna prikazani su u sljedećoj tablici (osjenčeno su prikazane očekivano kritične aktivnosti):

Aktivnost	$i-j$	$(t_e)_{i,j}$	$(T_E)_i$	$(T_E)_i+(t_e)_{i,j}$	$(T_L)_j-(t_e)_{i,j}$	$(T_L)_j$	$R_{i,j}$
A	**1 – 2**	**37/6**	**0**	**37/6**	**0**	**37/6**	**0**
B	1 – 4	3	0	3	5/3	14/3	5/3
C	1 – 3	2	0	2	2/3	8/3	2/3
D	3 – 4	2	2	4	8/3	14/3	2/3
E	**2 – 5**	**11/2**	**37/6**	**35/3**	**37/6**	**35/3**	**0**
F	2 – 6	7/6	37/6	22/3	23/3	53/6	3/2
G	4 – 6	25/6	4	49/6	14/3	53/6	2/3
H	**5 – 7**	**7/6**	**35/3**	**77/6**	**35/3**	**77/6**	**0**
I	6 – 7	4	49/6	73/6	53/6	77/6	2/3

Ostaje još da odredimo vjerovatnoću da se kurs kompletira nakon 12, odnosno 14 sedmica. To je zapravo vjerovatnoća da će se događaj 7 dogoditi u trenutku $(T_S)_7 = 12$, odnosno $(T_S)_7 = 14$. Očekivano kritični put je put $1 \to 2 \to 5 \to 7$, duž kojeg imamo standardnu devijaciju

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_E^2 + \sigma_H^2} = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{49}{36} + \frac{1}{36}} \approx 1.658$$

Stoga, za traženu vjerovatnoću za $(T_S)_7 = 12$ imamo procjenu

$$p = \Phi\left(\frac{(T_S)_7 - (T_E)_7}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{12-12.83}{1.658}\right) \approx \Phi(-0.501) = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{-0.501}{\sqrt{2}}\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}(1+\operatorname{erf} -0.354) \approx \frac{1}{2}(1-0.383) \approx 0.3085$$

dok za $(T_S)_7 = 14$ imamo procjenu

$$p = \Phi\left(\frac{(T_S)_7 - (T_E)_7}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{14-12.83}{1.658}\right) \approx \Phi(0.706) = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\frac{0.706}{\sqrt{2}}\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}(1+\operatorname{erf} 0.499) \approx \frac{1}{2}(1-0.52) \approx 0.76$$

Slijedi da se kurs se može kompletirati za 12 odnosno 14 sedmica sa vjerovatnoćama oko 31 % i 76 % respektivno. Postavlja se pitanje koliko su pouzdane ove procjene. Problem eventualno može praviti put $1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 7$ čija je dužina 73/6 ≈ 12.17 bliska dužini očekivano kritičnog puta 77/6 ≈ 12.83, a varijansa mu je znatno manja (što znači da mu je trajanje *izvjesnije*). Stoga bi eventualno skraćenje očekivano kritičnog puta koje se može desiti (zbog veće varijanse) moglo ovaj drugi put učiniti kritičnim. Za svaki slučaj, izračunaćemo faktore vjerovatnoće Z za svaki od četiri moguća puta od početnog do krajnjeg događaja:

Put	T_E	σ	Z (12 sed.)	Z (14 sed.)
$1 \to 2 \to 5 \to 7$	12.83	1.658	–0.501	0.706
$1 \to 2 \to 6 \to 7$	11.33	1.224	0.547	2.181
$1 \to 4 \to 6 \to 7$	11.17	0.687	1.208	4.119
$1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 7$	12.17	0.601	–0.282	3.045

Kako je Φ monotono rastuća funkcija, većoj vrijednosti Z odgovara i veća vjerovatnoća. Slijedi da svi drugi putevi daju *veću vjerovatnoću realizacije* nego očekivano kritični put, tako da stvarne vjerovatnoće realizacije mogu biti samo veće a nikako manje od gore izračunatih. Slijedi da su gore izračunate procjene *pouzdane*, odnosno tražene vjerovatnoće su *barem jednake izračunatim*, eventualno *samo mogu biti veće* (što nam ide u prilog).

Analiza troškova

Do sad provedena razmatranja odnosila su se samo na *vremenski aspekt projekta*, odnosno na *analizu trajanja aktivnosti i projekta*. Rezultat takvog plana su procjena trajanja projekta, te vremenske rezerve aktivnosti i događaja. Međutim, ostvarivanje aktivnosti zahtijeva *angažiranje resursa*, što neizbježno stvara *troškove na projektu*. To znači da svaki vremenski plan projekta na implicitan ili eksplicitan način obuhvata i *plan resursa, dinamiku korištenja resursa* i *troškove*. Zbog toga je već u fazi planiranja potrebno napraviti i *analizu troškova*, sa ciljem da se odgovori na pitanja sljedećeg tipa:

- Da li je *moguće* i *po kojoj cijeni skratiti* prvobitno planirano trajanje projekta?
- Da li se *namjernim produženjem nekih rokova* može *uštedjeti* na troškovima?
- Da li se *prebacivanjem resursa sa jedne aktivnosti na neku drugu* može *skratiti* ukupno trajanje projekta?

Ovdje se analitičar i rukovodilac projekta suočavaju sa zahtjevima da projekat *traje što kraće* i *košta što manje* koji su u većini praktičnih situacija *protivrječni*. Naime, *veće angažovanje resursa* u realizaciji aktivnosti ima za posljedicu *veće troškove* ali i *kraće trajanje aktivnosti*.

Analiza troškova obuhvata sljedeće postupke: određivanje *troškova izvršenja svake aktivnosti* i, na osnovu toga, *proračun troškova projekta*, određivanje *zavisnosti između troškova i vremena trajanja svake aktivnosti*, te *poboljšanje* mrežnog dijagrama *smanjenjem trajanja cijelog projekta* uz *minimalni porast troškova realizacije projekta*. Analiza troškova se najčešće izvodi na istom mrežnom dijagramu koji je korišten za analizu vremena. Zapravo, u analizi troškova polazi se od činjenice da *troškovi* izvršenja svake aktivnosti, pored ostalog, *zavise i od vremena trajanja* tih aktivnosti.

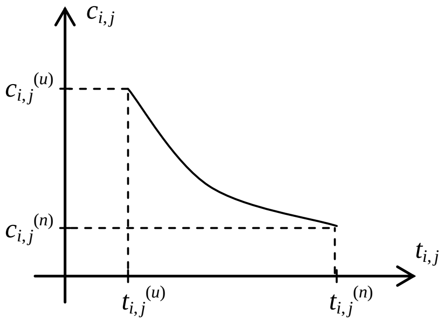
Prilikom analize vremena, istaknuto je da će planirani završetak nekog projekta biti ostvaren jedino ako je proračunato vrijeme najranije mogućeg završetka projekta $t_n^{(0)}$ manje od planiranog roka završetka projekta T_S, tj. ako je $t_n^{(0)} \le T_S$. U praksi će se često događati da taj uvjet *nije obezbijeđen*, nego da je *planirani rok završetka projekta manji od proračunatog vremena*. U tom slučaju nastaje potreba za *skraćenjem vremena trajanja projekta*. Ovakva potreba može se realizirati jedino uz pretpostavku da se za određene aktivnosti iz mrežnog dijagrama *ulaganjem dodatnih sredstava može do određene granice smanjiti njihovo trajanje*. Isto tako, ako *skraćujemo vrijeme* potrebno za izvršenje neke aktivnosti, u općem slučaju *rastu troškovi* izvršenja te aktivnosti. Zbog toga će se kod skraćivanja trajanja aktivnosti u okviru nekog projekta uvijek javiti pitanja *koje aktivnosti treba skraćivati*, i *za koliko se vremenskih jedinica* mogu skratiti pojedine aktivnosti. Da bi se uopće o ovome moglo govoriti, moramo pretpostaviti da za svaku aktivnost $[i-j]$ možemo definirati *dvije kategorije vremena trajanja*:

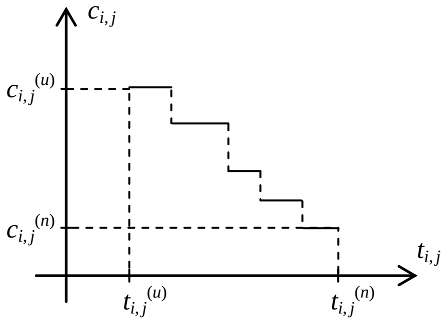
- ***Normalno trajanje aktivnosti*** $t_{i,j}^{(n)}$ koje se ostvaruje uz *normalnu upotrebu resursa*;
- ***Usiljeno trajanje aktivnosti*** (engl. *crash duration*) $t_{i,j}^{(u)}$ koje odgovara *najkraćem mogućem vremenu* u kojem je moguće realizirati aktivnost uz *maksimalno korištenje resursa*.

U skladu sa ovim trajanjima, definiraju se i *odgovarajući troškovi* koji će zavisiti od vremena trajanja aktivnosti. *Normalnom vremenu* izvršenja aktivnosti odgovaraće ***normalni*** (najmanji mogući) ***troškovi***, koje ćemo obilježiti sa $c_{i,j}^{(n)}$, a *usiljenom vremenu* izvršenja aktivnosti odgovaraće ***usiljeni*** (uvećani) ***troškovi*** $c_{i,j}^{(u)}$. Jasno je iz samih definicija da vrijede relacije $t_{i,j}^{(u)} \le t_{i,j}^{(n)}$ i $c_{i,j}^{(u)} \ge c_{i,j}^{(n)}$. Drugim riječima, usiljeno vrijeme trajanja aktivnosti *ne može biti duže od normalnog*, ali *može biti jednako* ukoliko je neka aktivnost takva da se njeno trajanje *uopće ne može skratiti*. S druge strane, troškovi koji nastaju pri normalnom trajanju aktivnosti *manji su od troškova za skraćeno trajanje te aktivnosti*. Ovi troškovi *neće se razlikovati* kod aktivnosti koje se ne mogu skratiti, odnosno ukoliko je $t_{i,j}^{(u)} = t_{i,j}^{(n)}$, tada mora biti i $c_{i,j}^{(u)} = c_{i,j}^{(n)}$.

Normalno trajanje aktivnosti odgovara uobičajenom ili propisanom načinu korištenja resursa. Može se smatrati da je normalno trajanje aktivnosti u stvari trajanje koje odgovara *minimalnim ukupnim troškovima* njenog ostvarenja. Naime, pri analizi troškova aktivnosti ili projekta u cjelini, treba uzeti u obzir i činjenicu da pored *varijabilnih troškova* koji se odnose na korištenje proizvodnih resursa, postoje i *fiksni troškovi* aktivnosti, odnosno projekta. Ovi fiksni troškovi uključuju *zakup prostora, osiguranje, administraciju* i slično, i oni *ne ovise* od trajanja aktivnosti. Pored toga, kada aktivnost traje duže nego što bi trebalo, mogu se pojaviti i *indirektni troškovi* na drugim aktivnostima, posebno zbog *čekanja* ili *kašnjenja*. Prema tome, trajanje aktivnosti koje odgovara ukupnim minimalnim troškovima nije obavezno jednako trajanju aktivnosti koje odgovara minimalnim troškovima resursa koji se direktno koriste za implementaciju posmatrane aktivnosti. Uglavnom, *dalje smanjenje troškova* u odnosu na one koji se postižu pri normalnom trajanju aktivnosti *nije moguće nikakvim dodatnim produžavanjem aktivnosti* (naprotiv, daljim produžavanjem aktivnosti moglo bi samo doći do *povećavanja* ukupnih troškova prouzrokovanih *kašnjenjima*). S druge strane, usiljeno trajanje aktivnosti je njeno *najkraće moguće trajanje*. Da bi se postiglo usiljeno trajanje neophodno je *dodijeliti dodatne resurse aktivnosti*, na primer, obavezom i plaćanjem *prekovremenog rada*, angažovanjem *dodatnih radnika* i drugim vrstama dodatnog angažmana. Stoga su troškovi usiljenog trajanja aktivnosti veći od normalnih troškova. Međutim, *dalje skraćivanje* trajanja aktivnosti ispod usiljenog trajanja nije moguće skratiti *nikakvim dodatnim ulaganjima*.

U većini slučajeva moguća su trajanja aktivnosti $t_{i,j}$ između navedene dvije krajnosti $t_{i,j}^{(u)}$ i $t_{i,j}^{(n)}$, odnosno $t_{i,j}^{(u)} \le t_{i,j} \le t_{i,j}^{(n)}$, kojima onda odgovaraju troškovi $c_{i,j}$ između dvije krajnosti $c_{i,j}^{(n)}$ i $c_{i,j}^{(u)}$, odnosno $c_{i,j}^{(n)} \le c_{i,j} \le c_{i,j}^{(u)}$. Stoga možemo posmatrati zavisnost $c_{i,j} = c_{i,j}(t_{i,j})$ definiranu na intervalu $t_{i,j}^{(u)} \le t_{i,j} \le t_{i,j}^{(n)}$. Pri tome ta zavisnost može biti *neprekidna*, kao na slici dolje sa lijeve strane, ili *skokovita* uz promjene troškova samo pri nekim kritičnim trajanjima, kao na slici dolje sa desne strane:





Sasvim je moguće i da su dozvoljene samo neke *diskretne* vrijednosti trajanja $t_{i,j}$ između dvije krajnosti $t_{i,j}^{(u)}$ i $t_{i,j}^{(n)}$, tako da nije moguća interpolacija između ove dvije krajnosti. Ekstreman slučaj je kada su dozvoljena *samo dva različita trajanja*: *normalno i usiljeno*. Recimo, možemo pretpostaviti da neki posao na projektu treba da uradi neki izvođač i da su se na konkurs prijavila dva različita izvođača. Prema prvoj ponudi, taj posao bi se obavio za kraće vreme ali bi više koštao. Drugi izvođač, koji koristi drugu tehnologiju i organizaciju rada, nudi nižu cijenu ali nešto duži rok. U ovom slučaju moramo izvršiti izbor između dvije ponuđene varijante i nikakva interpolacija između krajnjih vrijednosti nije moguća. S druge strane, znatno je povoljnije ukoliko je moguće imati ma koje moguće trajanje između normalnog i usiljenog. Naime, *neće uvijek biti potrebno da se aktivnosti skrate do svog usiljenog trajanja*, već će često biti dovoljno da se izvrši samo njihovo *djelimično skraćenje*, što će dovesti do *manjeg porasta cijene projekta*.

U slučaju kada je poznata zavisnost $c_{i,j} = c_{i,j}(t_{i,j})$ između troškova i trajanja za svaku aktivnost, problem *minimizacije ukupnih troškova za dato trajanje projekta* ili *minimizacije trajanja projekta za odobreni budžet projekta* može se lako izraziti kao problem matematičkog programiranja. Zaista, neka je Ω skup aktivnosti i neka je $t_{i,j}$ trajanje aktivnosti $(i, j) \in \Omega$. Ovdje $t_{i,j}$ ne mora biti konstanta (osim ukoliko je trajanje aktivnosti *fiksirano*), nego može biti *promjenljiva* koja podliježe ograničenju $t_{i,j}^{(u)} \le t_{i,j} \le t_{i,j}^{(n)}$, pri čemu su $t_{i,j}^{(n)}$ i $t_{i,j}^{(u)}$ zadane vrijednosti. Označimo li sa t_i, $i = 1 \,..\, n$ vrijeme nastupa događaja i, pri čemu kao i do sada pretpostavljamo da su i i j početni i završni događaji aktivnosti (i, j), tada kao što znamo od ranije moraju vrijediti ograničenja $t_j - t_i \ge t_{i,j}$ za sve $(i, j) \in \Omega$. Slijedi da moraju biti zadovoljena sljedeća ograničenja:

$$t_j - t_i \ge t_{i,j}, \ (i, j) \in \Omega$$
$$t_{i,j}^{(u)} \le t_{i,j} \le t_{i,j}^{(n)}, \ (i, j) \in \Omega$$

Ovdje su promjenljive t_i, $i = 1 \,..\, n$ i $t_{i,j}$, $(i, j) \in \Omega$. Pri tome, ukoliko za neku aktivnost $[i-j]$ vrijedi $t_{i,j}^{(u)} = t_{i,j}^{(n)}$, tada očigledno mora biti i $t_{i,j} = t_{i,j}^{(n)}$, te u tom slučaju možemo smanjiti broj promjenljivih uzimajući u tom slučaju umjesto promjenljive $t_{i,j}$ konstantu $t_{i,j}^{(n)}$. Trajanje projekta T je, kao i ranije, dato izrazom

$$T = t_n - t_1$$

pri čemu se obično postavlja i početni uvjet $t_1 = 0$, dok su *ukupni troškovi projekta C* dati izrazom

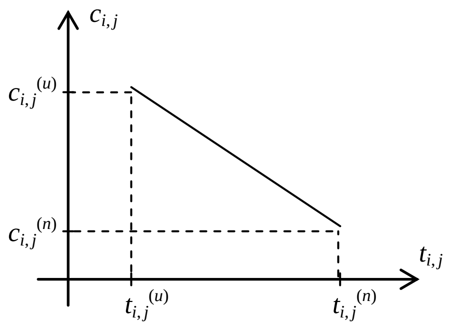
$$C = \sum_{(i,j)\in\Omega} c_{i,j}(t_{i,j})$$

Stoga, ukoliko nas zanima minimizacija ukupnih troškova za unaprijed dato trajanje projekta T_P, treba na gore navedena ograničenja dodati ograničenje $T = T_P$ i izvršiti minimizaciju veličine C, dok ukoliko nas zanima minimizacija trajanja projekta za odobreni budžet projekta C_P, treba na gore navedena ograničenja dodati ograničenje $C = C_P$ i izvršiti minimizaciju veličine T. Naravno, ukoliko su za neku aktivnost (i, j) dozvoljene *samo određene vrijednosti* za $t_{i,j}$, potrebno je dodati i ograničenja koja modeliraju tu činjenicu. Recimo, ukoliko $t_{i,j}$ može uzimati samo dvije vrijednosti $t_{i,j}^{(n)}$ ili $t_{i,j}^{(u)}$, tu činjenicu možemo modelirati ograničenjem oblika

$$t_{i,j} = t_{i,j}^{(n)} + (t_{i,j}^{(u)} - t_{i,j}^{(n)})\, x_{i,j}$$

gdje je $x_{i,j}$ logička promjenljiva koja može uzimati samo vrijednosti 0 ili 1.

U općem slučaju, ovako postavljeni problemi matematičkog programiranja *ne spadaju u probleme linearnog programiranja*, s obzirom da zavisnosti $c_{i,j} = c_{i,j}(t_{i,j})$ ne moraju nužno biti linearne, pa veličina C ne mora biti linearna funkcija promjenljivih $t_{i,j}$. Ovakvi problemi su dosta teški za rješavanje, mada posjeduju specijalnu formu koja ih ipak čini dosta lakšim za rješavanje u odnosu na opće probleme nelinearnog programiranja. Posebno su teški slučajevi u kojima neke od promjenljivih $t_{i,j}$ mogu uzimati *samo diskretne vrijednosti*. Međutim, u praksi je često vrlo teško ili skoro nemoguće za svaku aktivnost dobiti *tačan oblik zavisnosti troškova od trajanja*. Iz tog razloga, kao i radi jednostavnosti praktičnih analiza, često se kad god je moguća *interpolacija* trajanja aktivnosti $t_{i,j}$ između dvije krajnosti $t_{i,j}^{(n)}$ i $t_{i,j}^{(u)}$, uzima da je zavisnost $c_{i,j}$ od $t_{i,j}$ *linearna*, kao što je prikazano na sljedećoj slici:



Analitički se ova zavisnost može iskazati izrazom

$$c_{i,j} = c_{i,j}^{(n)} + \alpha_{i,j}\,(t_{i,j}^{(n)} - t_{i,j}), \quad t_{i,j}^{(u)} \le t_{i,j} \le t_{i,j}^{(n)}$$

gdje je $\alpha_{i,j}$ koeficijent dat izrazom

$$\alpha_{i,j} = \frac{\Delta c_{i,j}}{\Delta t_{i,j}} = \frac{c_{i,j}^{(u)} - c_{i,j}^{(n)}}{t_{i,j}^{(n)} - t_{i,j}^{(u)}}$$

Koeficijent $\alpha_{i,j}$ naziva se ***jedinični priraštaj troškova*** (odnosno ***jedinični trošak***, ***granični trošak*** ili ***marginalni trošak***) za aktivnost (i, j) i *predstavlja priraštaj troškova aktivnosti kada se njeno trajanje smanji za jedinicu*. Veće $\alpha_{i,j}$ odgovara većoj strmini zavisnosti troškova od trajanja i praktično znači da su za jedinicu skraćenja trajanja aktivnosti potrebna relativno veća sredstva. Manje $\alpha_{i,j}$ znači da je skraćenje aktivnosti moguće postići uz relativno manje dodatne troškove.

Uz ovakve pretpostavke, izraz za ukupne troškove projekta dobija oblik

$$C = \sum_{(i,j)\in\Omega} (c_{i,j}^{(n)} + \alpha_{i,j}^{(n)}\, t_{i,j}^{(n)}) - \sum_{(i,j)\in\Omega} \alpha_{i,j}^{(n)}\, t_{i,j}$$

što je očigledno linearna funkcija promjenljivih $t_{i,j}$, te se uz ovakve pretpostavke opisani optimizacioni problemi svode na *zadatak linearnog programiranja*. Treba primijetiti da je prva suma u izrazu za C *konstantna*, tako da ona utiče *samo na krajnju vrijednost ukupnih troškova*, a ne i na *sam postupak optimizacije*). U slučaju kada je $t_{i,j}^{(u)} = t_{i,j}^{(n)}$, koeficijent $\alpha_{i,j}$ *nije definiran*. Tačnije, kako je tada i $c_{i,j}^{(u)} = c_{i,j}^{(n)}$, on je neodređen i može imati *ma koju vrijednost*, obično se tada stavlja da je $\alpha_{i,j} = 0$.

U praksi se, pored problema minimizacije ukupnih troškova za dato trajanje projekta ili problema minimizacije trajanja projekta za odobreni budžet projekta postavljaju i sljedeća dva problema. Prvi problem je pronaći *najekonomičniju realizaciju projekta* (tj. onu koja *najmanje košta*), koja pored toga ima i *najkraće moguće trajanje*. Pri tome se misli na onu realizaciju koja ima najkraće moguće trajanje među *svim mogućim najekonomičnijim realizacijama* (s obzirom da najekonomičnija realizacija praktično nikada nije jedinstvena). Drugi problem je naći *najbržu realizaciju projekta* (tj. onu koja *najkraće traje*), koja pored toga ima i *najmanje moguće troškove*. Pri tome se misli na onu realizaciju koja ima najmanje moguće troškove među *svim mogućim najbržim realizacijama* (s obzirom da najbrža realizacija također često nije jedinstvena). U nastavku ćemo razmotriti kako se rješavaju ove vrste problema.

Što se tiče prvog problema, on je znatno jednostavniji. Naime, jasno je da se *sve aktivnosti moraju obaviti*, tako da ukupni troškovi projekta ne mogu biti manji od *sume najmanjih troškova za svaku od aktivnosti*, a ti troškovi se postižu upravo pri normalnim trajanjima aktivnosti. Slijedi da rješenje prvog problema prosto dobijamo tako što ćemo obaviti klasičnu analizu vremena uzimajući normalna trajanja za sve aktivnosti, a ukupni (minimalni) troškovi će prosto biti jednaki sumi normalnih troškova svih aktivnosti. Drugi problem je nešto delikatniji. Naime, mada je jasno da ćemo, ukoliko uzmemo da se svaka aktivnost izvršava u usiljenom trajanju, sigurno dobiti *najkraću realizaciju projekta*, takva realizacija će vrlo vjerovatno biti *skuplja nego što bi trebalo*, jer se često *isto trajanje projekta* može dobiti i *bez toga da se sve aktivnosti izvršavaju u usiljenom trajanju*. Stoga je za rješavanje ovog problema *prvo potrebno pronaći najkraće moguće trajanje projekta* $T = T_{min}$, a zatim riješiti problem minimizacije ukupnih troškova C uz dodatni uvjet $T = T_{min}$. Vrijeme T_{min} možemo naći recimo klasičnom analizom vremena uzimajući da se sve aktivnosti izvršavaju u usiljenom trajanju, ili prosto minimizacijom veličine T bez ikakvih dodatnih ograničenja na veličinu C. U svakom slučaju, za rješavanje drugog problema potrebno je riješiti *dva optimizaciona problema* (prvi da nađemo iznos T_{min}, a drugi da nađemo rješenje koje minimizira C među svim rješenjima koje daju istu vrijednost $T = T_{min}$).

Problemi linearnog programiranja na koje se svodi problem analize troškova također imaju prilično specifičan oblik, koji omogućava razvoj znatno efikasnijih metoda za njihovo rješavanje u odnosu na opće metode za rješavanje problema linearnog programiranja. Među takvim metodima, najpoznatiji su ***Kelleyev metod*** i ***Fulkersonov metod***. Međutim, za slučaj problema manjih dimenzija, pogotovo pri ručnom radu, najčešće se koristi jedan jednostavan metod iz *PERT* porodice tehnika poznat pod nazivom ***PERT/COST***. Ideja ovog metoda je da se, polazeći od najekonomičnije moguće realizacije projekta, vrši postepeno ***skraćivanje*** (engl. *crashing*) aktivnosti na *najekonomičniji mogući način*, sve dok se ne postigne *željeno trajanje projekta*. Nedostatak ovog metoda je što se tokom njegove primjene analiziraju *svi putevi* kroz mrežni dijagram od početka do kraja, a takvih puteva u općem slučaju može biti jako mnogo (nije nikakav problem konstruisati mrežne dijagrame kod kojih je broj svih mogućih puteva od početka do kraja *eksponencijalna funkcija* broja čvorova u dijagramu). S druge strane, kod mreža sa malim brojem takvih puteva (recimo, desetak), ovaj metod je *praktičniji od svih drugih*. Sretna je okolnost da se projekti kod kojih postoji svega nekoliko puteva kroz mrežni dijagram od početka do kraja dosta često javljaju.

PERT/COST metod se oslanja na činjenicu da *očigledno nema smisla kratiti aktivnosti koje nisu na kritičnom putu*, jer njihovo skraćenje *neće skratiti trajanje projekta*, a *povećaće troškove*. Stoga *PERT/COST* uvijek prvo kreće od kritičnog puta i traži aktivnosti duž njega koje se mogu kratiti. Pri tome se uvijek *prvo krati ona aktivnost* (i, j) *koja ima najmanji jedinični prirast troškova* $\alpha_{i,j}$, s obzirom da ćemo na taj način *najmanje poskupiti realizaciju projekta*. Odabranu aktivnost za kraćenje kratimo ili dok se ne *dostigne njeno usiljeno trajanje* (nakon čega dalje kraćenje *nije moguće*), ili dok *neki drugi put ne postane kritičan* (nakon čega dalje kraćenje iste aktivnosti *nema smisla*, jer ne doprinosi skraćenju projekta).

U slučaju kada postoji samo jedan kritični put, prethodna strategija garantira da je opisani postupak kraćenja optimalan. Situacija se osjetno komplicira u slučaju kada postoji *više kritičnih puteva*. U tom slučaju, kraćenje aktivnosti koja leži na nekom od tih kritičnih puteva kojoj odgovara najmanji jedinični prirast troškova *ne mora uvijek biti najbolje rješenje*. Na primjer, neka postoje dva kritična puta P_1 i P_2. Jasno je da za skraćenje projekta *moramo skratiti oba ova puta*. To u općem slučaju možemo uraditi *na dva načina*. Ukoliko postoji neka aktivnost X koja *leži na oba puta*, tada ćemo kraćenjem te aktivnosti istovremeno kratiti oba puta, pri čemu pri svakoj jedinici tog kraćenja projekat poskupljujemo za iznos α_X. Druga mogućnost (ujedno i jedina ukoliko ne postoji aktivnost koja leži na oba puta) je da istovremeno kratimo neku aktivnost Y koja *leži na prvom putu a ne leži na drugom* i neku aktivnost Z koja *leži na drugom putu a ne leži na prvom*. Pri svakoj jedinici tog kraćenja projekat poskupljujemo za iznos $\alpha_Y + \alpha_Z$. Za koju ćemo se varijantu odlučiti očigledno ovisi od toga koja je od veličina α_X i $\alpha_Y + \alpha_Z$ manja. Slično postupamo i u slučaju kada postoje *više od dva kritična puta*, pri čemu broj mogućih kombinacija kako možemo vršiti istovremena kraćenja svih njih može rapidno rasti sa brojem puteva. Sretna okolnost je da obično imamo neke aktivnosti koje *očigledno moramo kratiti*. Naime, ukoliko se neki kritični put može kratiti *jedino kraćenjem nekih aktivnosti koje se ne nalaze ni na jednom drugom kritičnom putu*, onda je jasno se jedna od njih *sigurno mora kratiti*, pri čemu prednost treba dati *onoj od njih koja ima najmanji jedinični prirast troškova* (ukoliko ih ima više). Kada odaberemo aktivnosti koje se moraju kratiti, obično *ne ostaje mnogo kombinacija za razmatranje* među preostalim aktivnostima koje se mogu kratiti, tako da obično nije teško napraviti optimalan izbor (treba odabrati da se krate one aktivnosti koje garantiraju da će se njihovim kraćenjem *kratiti svi kritični putevi*, a koje su takve da je suma jediničnih prirasta troškova za sve takve aktivnosti što je god moguće manja).

Nakon što smo izvršili kraćenje, ponovo se razmatraju svi putevi od početka do kraja, uočava se koji su od njih kritični (s obzirom da se nakon kraćenja situacija po pitanju kritičnosti mogla promijeniti) i ponovo se primjenjuje isti postupak. Postupak se nastavlja sve dok se ne postigne traženo trajanje projekta, ili dok se ne desi da se na nekom od kritičnih puteva niti jedna aktivnost ne može dalje skratiti. U tom slučaju, dostignuto je minimalno trajanje projekta, odnosno nađena je najjeftinija realizacija koja obezbjeđuje minimalno trajanje projekta.

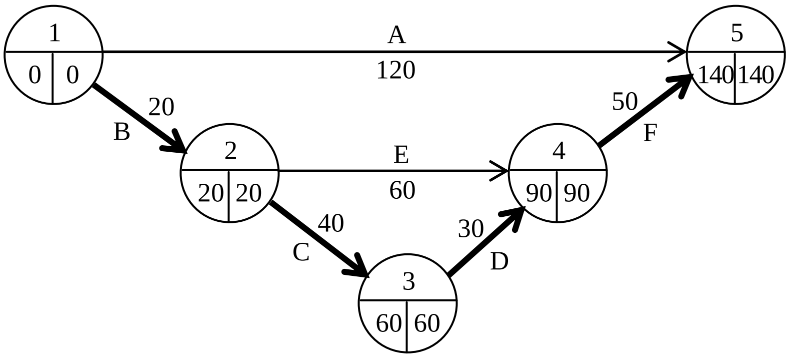
Mada gore opisani postupak djeluje krajnje jednostavan, pored činjenice da se u svakoj iteraciji razmatraju *svi putevi* od početka do kraja kroz mrežni dijagram, dodatna otežavajuća okolnost je i činjenica da kako postupak odmiče, *sve više i više puteva postaju kritični putevi*, tako da sve teže i teže postaje pronalaženje optimalne kombinacije aktivnosti koje treba kratiti (zbog porasta broja kombinacija koje treba testirati). Sve će ovo postati jasnije kada se razmotre konkretni primjeri.

- ***Primjer*** : U sljedećoj tabeli prikazana su normalna i usiljena trajanja, normalni i usiljeni troškovi, te logičke međuzavisnosti između pojedinih aktivnosti za neki projekat, pri čemu su vremena izražena u danima, a troškovi u KM:

Aktivnost	Preduvjeti	$t_{i,j}^{(n)}$	$t_{i,j}^{(u)}$	$c_{i,j}^{(n)}$	$c_{i,j}^{(u)}$
A	–	120	100	1200	1400
B	–	20	15	180	280
C	B	40	30	1600	2200
D	C	30	20	140	200
E	C	60	45	1350	1800
F	D, E	50	40	360	480

Potrebno je pronaći najekonomičniju (najjeftiniju) realizaciju projekta čije trajanje nije duže od neophodnog, te najekonomičniju realizaciju koja obezbjeđuje najkraće moguće trajanje projekta.

Za nalaženje najekonomičnije realizacije, dovoljno je izvršiti klasičnu analizu strukture i vremena uzimajući normalna trajanja aktivnosti. Provodeći već mnogo puta demonstrirani postupak, dolazimo do mrežnog dijagrama kao na sljedećoj slici:



Sa dobijenog mrežnog dijagrama možemo očitati da je normalno trajanje projekta T = 140 dana, dok su normalni (minimalni) troškovi projekta

$$C_{min} = 1200 + 180 + 1600 + 140 + 1350 + 360 = 4830 \text{ KM}$$

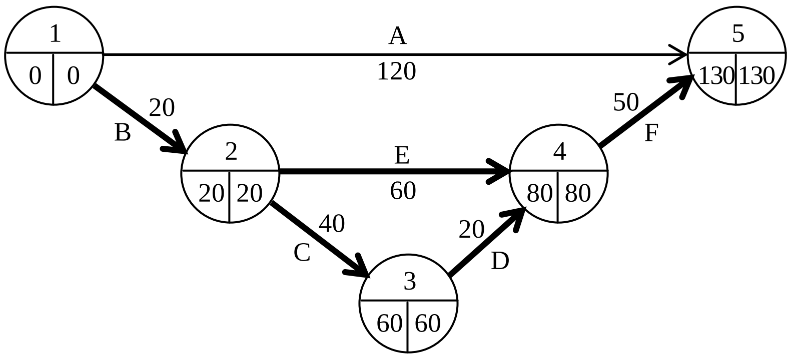
Kada bismo isti postupak ponovili sa *usiljenim trajanjima aktivnosti*, lako bismo pronašli da je najkraće trajanje projekta T_{min} = 105 dana, kojem bi odgovarali troškovi

$$C_{max} = 1400 + 280 + 2200 + 200 + 1800 + 480 = 6360 \text{ KM}$$

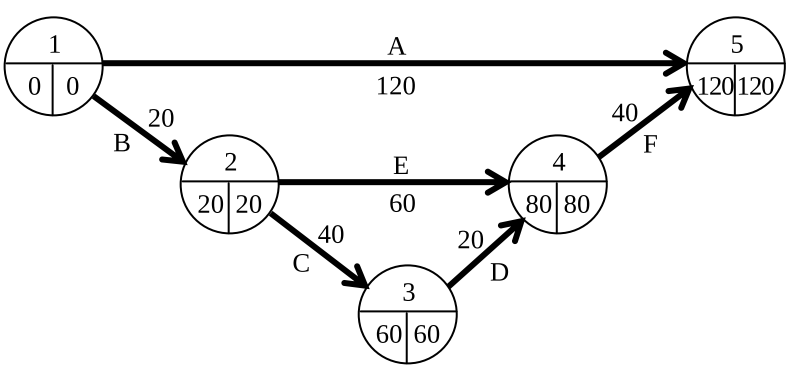
Sada ćemo pomoću *PERT/COST* metoda pokazati kako se *isto trajanje projekta* T_{min} = 105 dana može ostvariti uz *manje troškove*. Za tu svrhu, prvo ćemo izračunati jedinične priraste troškova za sve aktivnosti. To je urađeno u sljedećoj tablici:

Aktivnost	$t_{i,j}^{(n)}$	$t_{i,j}^{(u)}$	$c_{i,j}^{(n)}$	$c_{i,j}^{(u)}$	$\alpha_{i,j}$
A	120	100	1200	1400	10
B	20	15	180	280	20
C	40	30	1600	2200	60
D	30	20	140	200	6
E	60	45	1350	1800	30
F	50	40	360	480	12

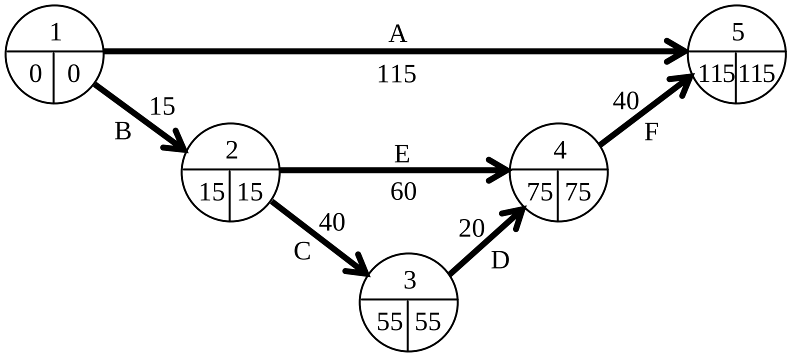
U ovom projektu postoje tri puta od početka do kraja, i to su redom putevi A (ovaj put se sastoji samo od jedne aktivnosti), $B \to E \to F$ i $B \to C \to D \to F$, čije su dužine respektivno 120, 130 i 140. Na početku je samo put $B \to C \to D \to F$ kritičan. Duž njega, najmanji jedinični prirast troškova α_D = 6 KM po danu ima aktivnost D, tako da nju prvu kratimo. Kako se ona nalazi jedino na ovom putu, kraćenje aktivnosti D krati samo kritični put i nijedan drugi. Ovu aktivnost možemo kratiti najviše za Δt_D = 10 dana, iz dva razloga. Prvo, njeno usiljeno trajanje je 20 dana, tako da je svakako ne možemo kratiti za više od $30 - 20 = 10$ dana. Drugo, čak i kada bi njeno usiljeno trajanje bilo manje, nakon njenog kraćenja za 10 dana dužina puta $B \to C \to D \to F$ izjednačila bi se sa dužinom puta $B \to E \to F$, te nakon daljeg kraćenja ovaj put više ne bi bio kritičan, odnosno dalje kraćenje aktivnosti D ne bi doprinosilo kraćenju projekta. Uglavnom, kratimo aktivnost D za 10 dana, čime se projekat poskupljuje za $\Delta c_D = \alpha_D \Delta t_D = 60$ KM, te je nova cijena projekta 4830 + 60 = 4890 KM. Novonastala situacija prikazana je na sljedećem mrežnom dijagramu:



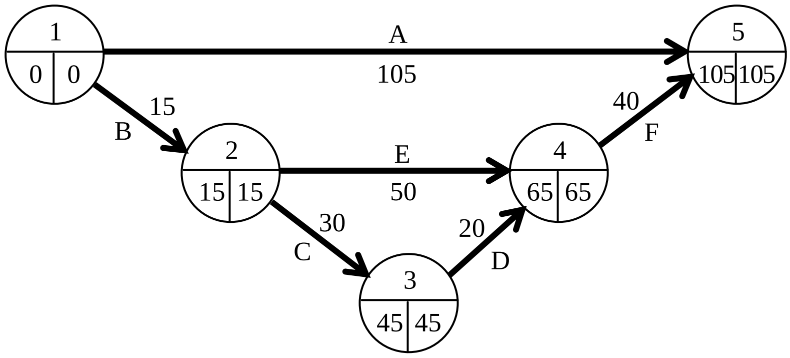
Sada već imamo dva kritična puta, $B \to C \to D \to F$ i $B \to E \to F$, tako da radi skraćivanja projekta moramo kratiti oba puta. Jedna mogućnost za to je da kratimo neku od aktivnosti B ili F koja leži na oba puta, pri čemu je povoljnije kratiti aktivnost F, jer je α_F = 12 manje od α_B = 20. Druga mogućnost je da istovremeno kratimo aktivnost E koja je samo na drugom putu i jednu od aktivnosti C ili D koja je samo na prvom putu. Međutim, kako je već α_E = 30 znatno nepovoljnije od α_F = 12, ova mogućnost nije povoljna, tako da ćemo kratiti zajedničku aktivnost F. Kraćenje ćemo ponovo obaviti za 10 dana, kako zbog dostizanja usiljenog trajanja aktivnosti F, tako i zbog dostizanja dužine puta A koji postaje kritičan nakon obavljenog skraćivanja. Postupak se ovim poskupljuje za $12 \cdot 10 = 120$ KM, tako da će nova cijena projekta iznositi 4890 + 120 = 5010 KM. Ovoj situaciji odgovara mrežni dijagram kao na sljedećoj slici:



U ovom trenutku, sva tri puta A, $B \to E \to F$ i $B \to C \to D \to F$ su postala kritična, pa je potrebno kratiti svaki od njih da bismo dalje skratili projekat. Jedina aktivnost na prvom putu je aktivnost A, te nema nikakve dileme da nju moramo kratiti. Što se tiče drugog i trećeg puta, njihovu zajedničku aktivnost F ne možemo kratiti, jer je već maksimalno skraćena. Ostaje dilema da li kratiti njihovu zajedničku aktivnost B, ili aktivnost E zajedno sa aktivnosti C (aktivnost D ne dolazi u obzir, jer je već maksimalno skraćena). Kako je već samo α_E nepovoljnije od α_B, jasno je da je racionalnije kratiti aktivnost B. Drugim riječima, kratimo aktivnosti A i B. Pri tome, maksimalno se može izvršiti kraćenje za 5 dana, s obzirom da nakon tog kraćenja aktivnost B dostiže svoje usiljeno trajanje. Projekat se nakon toga poskupljuje za $(10 + 20) \cdot 5 = 150$ KM, odnosno nova cijena projekta će biti 5010 + 150 = 5160 KM. Ovoj situaciji odgovara sljedeći mrežni dijagram:



Ponovo su sva tri puta A, $B \to E \to F$ i $B \to C \to D \to F$ kritična, te je ponovo potrebno kratiti svaki od njih. Jasno je da se aktivnost A ponovo mora kratiti, jer je jedina na prvom putu. Također, od tri aktivnosti B, E i F na drugom putu, jedino se aktivnost E može kratiti, jer su aktivnosti B i F već maksimalno skraćene. Dakle, moramo kratiti i aktivnost E. Isto tako, jedina aktivnost koju možemo kratiti na trećem putu je aktivnost C, tako da se i ona mora kratiti. Slijedi da kratimo aktivnosti A, C i E. Maksimalno se može izvršiti kraćenje za 10 dana, jer nakon toga aktivnost C dostiže svoje usiljeno trajanje. To podiže cijenu projekta za $(10 + 60 + 30) \cdot 10 = 1000$ KM, tako da će nova cijena projekta biti 5160 + 1000 = 6160 KM. Ova situacija je prikazana na sljedećem mrežnom dijagramu:



Dalja skraćivanja više nisu moguća, s obzirom da na kritičnom putu $B \to C \to D \to F$ sve aktivnosti imaju usiljeno trajanje, tako da ovaj kritični put nije moguće kratiti. Samim tim, ne može se dalje kratiti ni trajanje čitavog projekta, odnosno dostignuto je minimalno trajanje projekta T_{min} = 105 dana uz troškove C = 6160 KM. Vidimo da su troškovi manji od troškova C_{max} = 6360 KM koje bismo imali da su sve aktivnosti vršene u usiljenom trajanju. Ova ušteda proizilazi iz činjenice da je provedena analiza pokazala da nema potrebe da se aktivnosti A i E izvode u usiljenom trajanju, jer to ne bi doprinijelo daljem skraćenju projekta.

Pri praktičnoj primjeni ovog metoda, obično se tok izvršavanja kroz iteracije prati kroz dvije tabele, od kojih jedna prati trajanja svih aktivnosti u svakoj od iteracija, dok druga prikazuje trajanja svih puteva od početka do kraja u svakoj od iteracija. Pored toga, obje tabele sadrže i neke pomoćne informacije korisne za lakše praćenje postupka. Slijedi prikaz kako bi ove tabele mogle izgledati za upravo razmotreni primjer. U prvoj tabeli, osjenčena polja odgovaraju aktivnostima koje u odgovarajućoj iteraciji ima smisla kratiti (tj. koje se uopće mogu kratiti i koje se pri tome nalaze na barem jednom kritičnom putu), dok tamno osjenčena polja prikazuju aktivnosti koje smo zaista odabrali za kraćenje. U drugoj tabeli, osjenčena polja prikazuju puteve na kojima se nalaze aktivnosti odabrane za kraćenje, pri čemu tamno osjenčena polja odgovaraju kritičnim putevima (u primjeru koji je ovdje naveden, sva osjenčena polja su ujedno i tamno osjenčena, jer se slučajno sve aktivnosti koje se krate u svakoj iteraciji nalaze isključivo na kritičnim putevima, ali u općem slučaju ne mora biti tako, kao što će biti vidljivo u sljedećem primjeru).

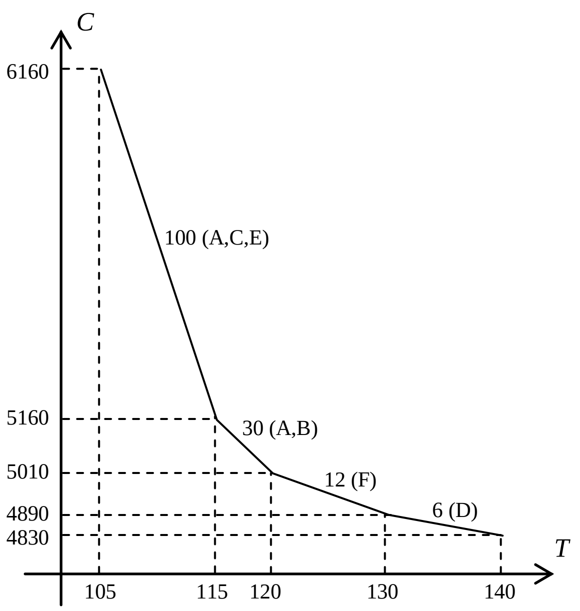
Aktivnost	$t_{i,j}^{(n)}$	$t_{i,j}^{(u)}$	$\alpha_{i,j}$	Iteracija				
				I	II	III	IV	V
A	120	100	10	120	120	**120**	**115**	105
B	20	15	20	20	20	**20**	15	15
C	40	30	60	40	40	40	**40**	30
D	30	20	6	**30**	20	20	20	20
E	60	45	30	60	60	60	**60**	50
F	50	40	12	50	**50**	40	40	40

Put	Iteracija				
	I	II	III	IV	V
P_1: A	120	120	**120**	**115**	**105**
P_2: B $\rightarrow$ E $\rightarrow$ F	130	**130**	**120**	**115**	**105**
P_3: B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D $\rightarrow$ F	**140**	**130**	**120**	**115**	**105**
Troškovi:	4830	4890	5010	5160	6160
Krati se:	D	F	A, B	A,C,E	–

Sasvim je jasno da se ne mora uvijek svaki projekat kratiti do najkraćeg (usiljenog) trajanja. Recimo, da je u razmotrenom primjeru cilj bio samo da se trajanje projekta spusti na 110 dana, u petoj iteraciji smo prosto mogli kratiti aktivnosti A, C i E za 5 a ne 10 dana i da tako postignemo trajanje od 110 dana. U petoj iteraciji bi tada projekat poskupio za $5 \cdot (10 + 60 + 30) = 500$ KM, tako da bi završna cijena projekta bila 5160 + 500 = 5660 KM, što je za 500 KM jeftinije od cijene pri najkraćem mogućem, odnosno usiljenom trajanju.

Na sličan način je moguće odrediti optimalno trajanje projekta uz raspoloživi budžet. Pretpostavimo recimo da nam je na raspolaganju budžet od 5100 KM i da želimo ostvariti minimalno trajanje projekta uz ta sredstva. Vidimo da nakon druge iteracije još nismo utrošili sva raspoloživa sredstva (cijena projekta je trenutno 5010 KM), ali bi maksimalno kraćenje aktivnosti A i B u trećoj iteraciji dovelo do prekoračenja dozvoljenih sredstava. Kako u trećoj iteraciji projekat smijemo dodatno poskupiti za maksimalno $\Delta C = 5100 - 5010 = 90$ KM, ove aktivnosti smijemo kratiti za najviše $\Delta T = \Delta C / (\alpha_A + \alpha_B) = 90 / 30 = 3$ dana. Na taj način dobijamo trajanje projekta od $120 - 3 = 117$ dana, što je najkraće trajanje koje se može ostvariti uz troškove od $C = 5100$ KM.

Na osnovu provedene analize i karakterističnih vremena i troškova u pojedinim iteracijama, nije teško nacrtati dijagram koji prikazuje *zavisnost minimalnih troškova projekta od njegovog trajanja* za *sva moguća trajanja od normalnog do usiljenog*, kao što je prikazano na slici ispod.



Ovakvi dijagram su veoma korisni, jer se sa njih lako može očitati optimalna cijena projekta za ma koje željeno trajanje, odnosno optimalno trajanje za ma koju željenu cijenu. Jasno je iz samog postupka da se ovakvi dijagrami uvijek sastoje od pravolinijskih segmenata. Na prikazanom dijagramu je kraj svakog segmenta prikazan i njegov nagib (koeficijent pravca), kao i oznaka aktivnosti koje mijenjaju trajanje na tom dijelu dijagrama. Nije teško pokazati da su ovakvi dijagrami *uvijek konveksni* (ispupčeni *naniže*), odnosno dijagram postaje *sve strmiji* kako se približavamo usiljenom trajanju projekta, tako da sa približavanjem usiljenom vremenu postaje *sve skuplje* dodatno kratiti projekat.

Na kraju, razmotrimo još kako bi se razmatrani problem mogao modelirati kao zadatak linearnog programiranja. U skladu sa ranije provedenim razmatranjima, trebalo bi uvesti promjenljive t_1, t_2, t_3, t_4 i t_5 za vremena nastupa događaja, te $t_{1,5}$, $t_{1,2}$, $t_{2,3}$, $t_{3,4}$, $t_{2,4}$ i $t_{4,5}$ za trajanja aktivnosti, nakon čega bismo imali sljedeća ograničenja:

$$t_5 - t_1 \geq t_{1,5}$$
$$t_2 - t_1 \geq t_{1,2}$$
$$t_3 - t_2 \geq t_{2,3}$$
$$t_4 - t_3 \geq t_{3,4}$$
$$t_4 - t_2 \geq t_{2,4}$$
$$t_5 - t_4 \geq t_{4,5}$$
$$100 \leq t_{1,5} \leq 120$$
$$15 \leq t_{1,2} \leq 20$$
$$30 \leq t_{2,3} \leq 40$$
$$20 \leq t_{3,4} \leq 30$$
$$45 \leq t_{2,4} \leq 60$$
$$40 \leq t_{4,5} \leq 50$$

Trajanje projekta bi naravno bilo $T = t_5 - t_1$, dok bi troškovi projekta bili

$$\begin{aligned} C &= (1200 + 10\,(120 - t_{1,5})) + (180 + 20\,(20 - t_{1,2})) + (1600 + 60\,(40 - t_{2,3})) + \\ &\quad + (140 + 6\,(30 - t_{3,4})) + (1350 + 30\,(60 - t_{2,4})) + (360 + 12\,(50 - t_{4,5})) = \\ &= 11410 - 10\,t_{1,5} - 20\,t_{1,2} - 60\,t_{2,3} - 6\,t_{3,4} - 30\,t_{2,4} - 12\,t_{4,5} \end{aligned}$$

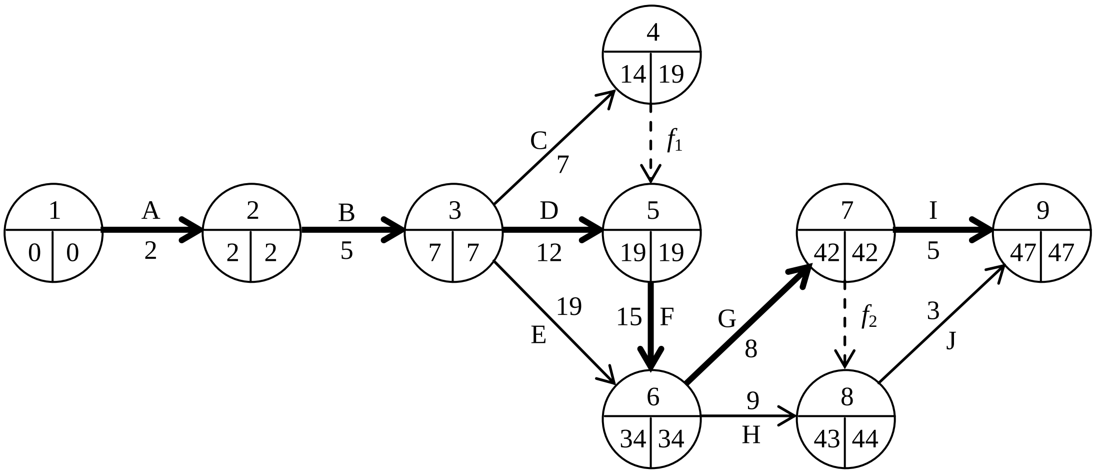
Sada, zavisno od onoga što nas zanima, mogli bismo postavljati različite probleme linearnog programiranja. Recimo, za pronalaženje minimalnih troškova koji obezbjeđuju trajanje projekta od 110 dana, trebalo bi minimizirati veličinu C uz dopunsko ograničenje $T = 110$.

➢ ***Primjer***: U sljedećoj tabeli prikazana su normalna i usiljena trajanja, normalni i usiljeni troškovi, te logičke međuzavisnosti između pojedinih aktivnosti za neki projekat (vremena su izražena u sedmicama, a cijene u hiljadama KM).

Aktivnost	Preduvjeti	$t_{i,j}^{(n)}$	$t_{i,j}^{(u)}$	$c_{i,j}^{(n)}$	$c_{i,j}^{(u)}$
A	–	2	2	20	20
B	A	5	3	18	20
C	B	7	5	21	29
D	B	12	4	12	36
E	B	19	19	0	0
F	C, D	15	11	5	25
G	E, F	8	8	15	15
H	E, F	9	7	10	20
I	G	5	1	6	30
J	G, H	3	3	10	10

Potrebno je prvo pronaći najekonomičniju realizaciju projekta čije trajanje nije duže od neophodnog, a zatim najekonomičniju realizaciju koja obezbjeđuje najkraće moguće trajanje projekta, najekonomičniju realizaciju koja omogućava završetak projekta za 38 sedmica, te najkraću realizaciju projekta koja se može ostvariti sa budžetom od 125 hiljada KM.

Najekonomičniju realizaciju projekta, dobijamo klasičnom analizom strukture i vremena uz normalna trajanja aktivnosti, što daje mrežni dijagram kao na sljedećoj slici:



Vidimo da je normalno trajanje projekta $T = 47$ sedmica, uz najekonomičnije troškove od $C = 117$ hiljada KM, što se dobija sabiranjem normalnih troškova svih aktivnosti. Za pronalaženje odgovora na ostala postavljena pitanja primijenićemo *PERT/COST* postupak. Tok postupka prikazan je u tabelama koje slijede, nakon čega će uslijediti i detaljno objašnjenje postupka.

Aktivnost	$t_{i,j}^{(n)}$	$t_{i,j}^{(u)}$	$\alpha_{i,j}$	Iteracija					
				I	II	III	IV	V	VI
A	2	2	–	2	2	2	2	2	2
B	5	3	1	5	3	3	3	3	3
C	7	5	4	7	7	7	7	7	7
D	12	4	3	12	12	7	7	7	7
E	19	19	–	19	19	19	19	19	19
F	15	11	5	15	15	15	12	12	12
G	8	8	–	8	8	8	8	8	8
H	9	7	5	9	9	9	9	9	8
I	5	1	6	5	5	5	5	4	3
J	3	3	–	3	3	3	3	3	3

Put	Iteracija					
	I	II	III	IV	V	VI
P_1: $A \to B \to C \to f_1 \to F \to G \to I$	42	40	**40**	**37**	**36**	**35**
P_2: $A \to B \to C \to f_1 \to F \to G \to f_2 \to J$	40	38	38	35	35	**35**
P_3: $A \to B \to C \to f_1 \to F \to H \to J$	41	39	39	36	**36**	**35**
P_4: $A \to B \to D \to F \to G \to I$	**47**	**45**	**40**	**37**	**36**	**35**
P_5: $A \to B \to D \to F \to G \to f_2 \to J$	45	43	38	35	35	**35**
P_6: $A \to B \to D \to F \to H \to J$	46	44	39	36	**36**	**35**
P_7: $A \to B \to E \to G \to I$	39	37	37	**37**	**36**	**35**
P_8: $A \to B \to E \to G \to f_2 \to J$	37	35	35	35	35	**35**
P_9: $A \to B \to E \to H \to J$	38	36	36	36	**36**	**35**
Troškovi:	117	119	134	149	155	166
Krati se:	B	D	F	I	H, I	–

U ovom mrežnom dijagramu ima 9 puteva od početka do kraja, koji su prikazani u tabeli (aktivnosti f_1 i f_2 su fiktivne aktivnosti). Na početku je samo put P_4 odnosno $A \to B \to D \to F \to G \to I$ kritičan. Aktivnosti A, E, G i J imaju fiksno trajanje, tako da ne dolaze u obzir za kraćenje (pri tome je aktivnost E očito čekanje, s obzirom da ne zahtijeva nikakve troškove). Slijedi da u prvoj iteraciji dolaze u obzir za kraćenje aktivnosti B, D, F i J (preostale aktivnosti C, H i I koje se mogu kratiti ne leže na kritičnom putu). Od njih je najpovoljnija za kraćenje aktivnost B koja ima najmanji jedinični prirast troškova. Stoga ćemo prvo kratiti aktivnost B. Ova aktivnost leži na svih 9 puteva, tako da će se svi uporedo skraćivati kako budemo kratili ovu aktivnost. Zbog toga, ovu aktivnost smijemo kratiti sve do njenog usiljenog trajanja, tj. za 2 sedmice. Time se svi putevi pa samim tim i projekat skraćuju za dvije sedmice, a projekat se poskupljuje za $1 \cdot 2 = 2$ hiljade KM, tako da je na završetku prve iteracije ukupna cijena projekta 119 hiljada KM.

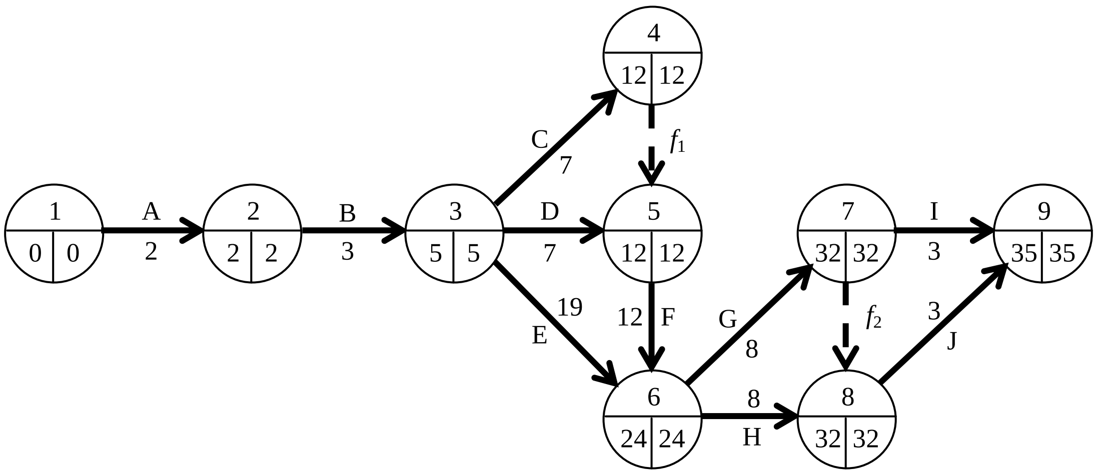
U drugoj iteraciji ponovo je kritičan samo put P_4. Aktivnost B je već maksimalno skraćena, tako da za kraćenje dolaze u obzir samo aktivnosti D, F i J, od kojih je najpovoljnije kratiti aktivnost D. Ona leži samo na putevima P_4, P_5 i P_6, tako da će se jedini oni kratiti kako budemo kratili ovu aktivnost. Nju bismo mogli kratiti za 8 sedmica prije nego što dostignemo granicu uvjetovanu njenim usiljenim trajanjem. Međutim, najduži put koji ne sadrži aktivnost D (put P_1) ima trajanje od 40 sedmica, tako da nema smisla kratiti aktivnost D za više od $45 - 40 = 5$ sedmica. Stoga ćemo ovu aktivnost (i ujedno čitav projekat) kratiti upravo za 5 sedmica, čime se projekat poskupljuje za $3 \cdot 5 = 15$ hiljada KM, tako da je nova ukupna cijena projekta 134 hiljade KM.

U trećoj iteraciji su kritični putevi P_1 i P_4, tako da je potrebno kratiti oba puta. Za kraćenje dolaze u obzir one aktivnosti koje se mogu kratiti, a leže na barem jednom od ta dva puta, a to su aktivnosti C, D, F i I. Sad smo u dilemi da li da kratimo neku aktivnost koja je zajednička na oba puta (takve su F i I), ili da kratimo jednu aktivnost koja je samo na prvom putu (takva je jedino C) i jednu aktivnost koja je samo na drugom putu (takva je jedino D). Odlučimo li se za prvu varijantu, trebali bismo odabrati aktivnost F, jer je povoljnija za kraćenje. U drugoj varijanti, kratili bismo istovremeno aktivnosti C i D. Međutim, kako je $\alpha_F = 5$ manje od $\alpha_C + \alpha_D = 4 + 3 = 7$, povoljnije je kratiti zajedničku aktivnost F. Time se ujedno krate i svi putevi koji sadrže ovu aktivnost, a to su P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i P_6. Što se tiče njenog usiljenog trajanja, mogli bismo je kratiti za 4 sedmice. Međutim, dužina puta P_7 koji je najduži put koji ne sadrži aktivnost F iznosi 37 sedmica, te nema smisla kratiti aktivnost F za više od $40 - 37 = 3$ sedmice. Nakon kraćenja ove aktivnosti za 3 sedmice, projekat se poskupljuje za $5 \cdot 3 = 15$ hiljada KM, odnosno nova ukupna cijena projekta iznosi 149 hiljada KM.

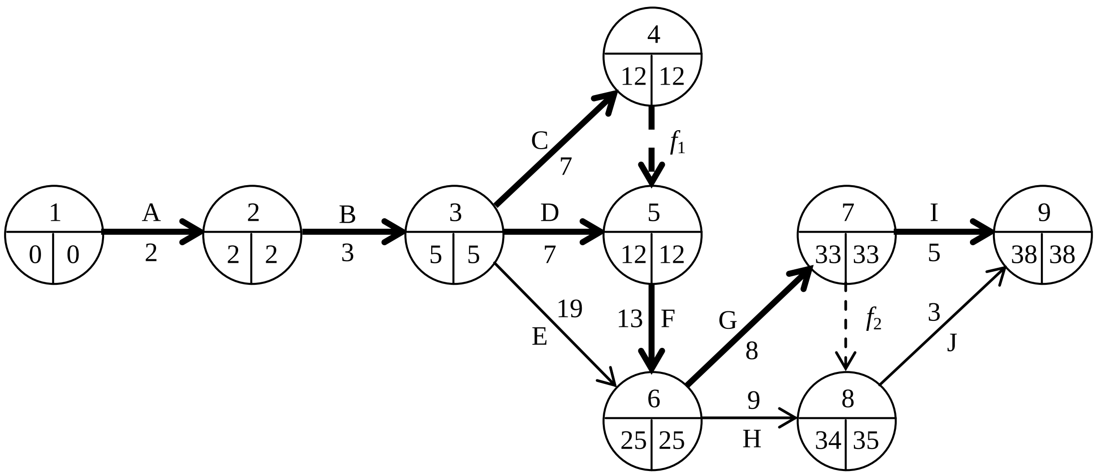
U četvrtoj iteraciji se javljaju tri kritična puta P_1, P_4 i P_7, tako da moramo uporedo kratiti sva ova tri puta. Pri tome, za kraćenje dolaze u obzir aktivnosti C, D, F i I. Međutim, kako je od ove četiri aktivnosti I jedina aktivnost koja leži na putu P_7, jasno je da nju svakako moramo kratiti. S obzirom da se ista aktivnost nalazi i na putevima P_1 i P_4, ovdje nemamo nikakve dileme, odnosno kratićemo samo aktivnost I i tako uporedo kratiti sva tri puta. Oni su ujedno i jedini putevi koji se pri tome krate, jer preostali putevi ne sadrže ovu aktivnost. Pri tome ćemo ovu aktivnost kratiti samo za 1 sedmicu (mada bi je, što se tiče njenog usiljenog trajanja, mogli kratiti za čitave 4 sedmice), jer ćemo na taj način dostići dužinu puteva P_3, P_6 i P_9 koji su dugi 36 sedmica, a ne skraćuju se skraćivanjem aktivnosti I. Nakon obavljenog kraćenja, projekat se poskupljuje za $6 \cdot 1 = 6$ hiljada KM, odnosno nova cijena projekta je 155 hiljada KM.

U petoj iteraciji već imamo čak 6 kritičnih puteva P_1, P_3, P_4, P_6, P_7 i P_9. Srećom, neće biti teško zaključiti šta treba raditi. Za kraćenje dolaze u obzir aktivnosti C, D, F, H i I. Kako se na putu P_7 može kratiti samo aktivnost I, nju svakako moramo kratiti. Isto tako, kako se na putu P_9 može kratiti samo aktivnost H, i nju svakako moramo kratiti. Dakle, aktivnosti H i I sigurno moramo kratiti. Međutim, kako svi ostali kritični putevi sadrže makar jednu od ove dvije aktivnosti, to će se njihovim kraćenjem kratiti svi kritični putevi, kao što nam i treba. Dakle, u petoj iteraciji kratićemo uporedo aktivnosti H i I. Kraćenje ponovo smije iznositi maksimalno 1 sedmicu, jer na taj način dostižemo dužinu puteva P_2, P_5 i P_8 koji se ne krate (jer ne sadrže niti aktivnosti H niti aktivnost I), a čija dužina iznosi 35. Nakon kraćenja ovih aktivnosti, projekat se poskupljuje za $(5 + 6) \cdot 1 = 11$ hiljada KM, tako da je nova cijena projekta 166 hiljada KM.

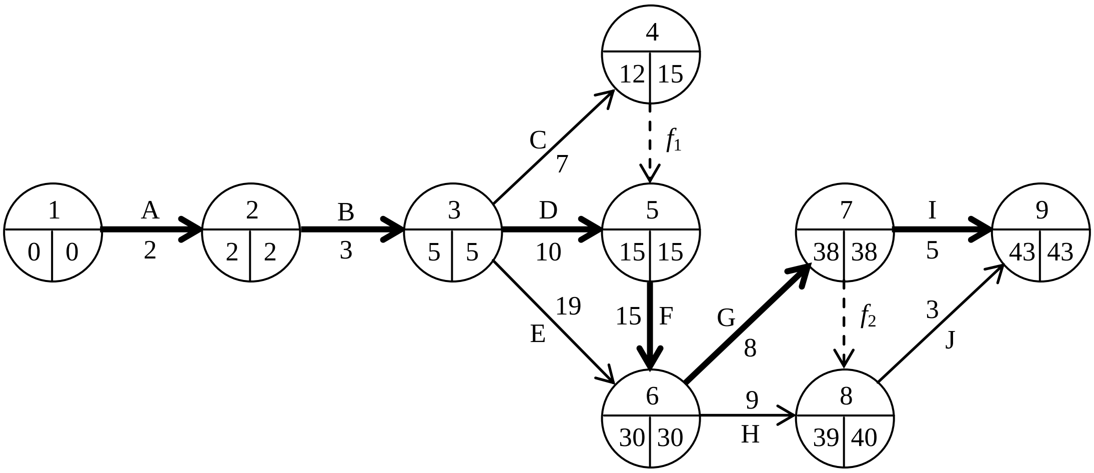
U narednoj iteraciji, svi putevi su postali kritični. Aktivnosti koje bi se još mogle kratiti su C, D, F, H i I. Međutim, kako put P_8 ne sadrži niti jednu aktivnost koja bi se dalje mogla kratiti, dostignuto je minimalno trajanje projekta. Dakle, minimalno trajanje projekta je $T_{min} = 35$ sedmica, a odgovaraju mu troškovi od $C = 166$ hiljada dolara. Primijetimo da su ovi troškovi znatno manji od troškova $C_{max} = 205$ hiljada dolara koje bismo imali kada bismo sve aktivnosti izvršavali u usiljenom vremenu. Ova ušteda je rezultat činjenice da je provedena analiza pokazala da nema smisla izvoditi aktivnosti C, D, F, H i I u usiljenom trajanju. Dobijenom rješenju koje daje minimalno trajanje projekta uz minimalno moguće troškove odgovara mrežni dijagram sa sljedeće slike:



Razmotrimo sada kako naći najekonomičniju realizaciju koja omogućava završetak projekta za 38 sedmica. Očigledno, sve do treće iteracije postupak bi tekao identično kao što je gore provedeno. Međutim, u trećoj iteraciji ne bi bilo potrebno da aktivnost F kratimo za 3 sedmice, već bi bilo dovoljno kraćenje za 2 sedmice. Projekat bi se time poskupio za $5 \cdot 2 = 10$ hiljada KM, odnosno konačna ukupna cijena projekta iznosila bi 144 hiljade KM. Pri tome bi putevi P_1 i P_4 ostali jedini kritični putevi u projektu. Ovakvoj realizaciji projekta odgovara sljedeći mrežni dijagram:



Nađimo još najkraću realizaciju projekta koja se može ostvariti sa bužetom od 125 hiljada KM. Nakon prve iteracije, imali smo ukupnu cijenu projekta od 119 hiljada KM, ali već nakon druge iteracije cijena projekta skače na 134 hiljade KM, što je više od dozvoljenog iznosa od 125 hiljada KM. Stoga, u drugoj iteraciji ne smijemo vršiti maksimalno kraćenje, već takvo kraćenje da projekat dodatno poskupimo za najviše $\Delta C = 125 - 119 = 6$ hiljada KM. Kako u drugoj iteraciji kratimo aktivnost D, smijemo je kratiti za najviše $\Delta T = \Delta C / \alpha_D = 6/3 = 2$ dana. Na taj način dobijamo trajanje projekta od $45 - 2 = 43$ dana, što je najkraće trajanje koje se može ostvariti uz troškove od $C = 125$ hiljada KM. Ovakvoj realizaciji odgovara mrežni dijagram na sljedećoj slici.



Provedene analize mogu se vršiti i svođenjem na zadatak linearnog programiranja. U takvom zadatku, pored promjenljivih $t_1 - t_7$ koje predstavljaju vremena nastupa pojedinih događaja, trebaju nam i promjenljive $t_{2,3}$, $t_{3,4}$, $t_{3,5}$, $t_{5,6}$, $t_{6,8}$ i $t_{7,9}$ koje redom predstavljaju trajanja aktivnosti B, C, D, F, H i I (trajanja ostalih aktivnosti su fiksirana, pa nam za njih nisu potrebne promjenljive). Stoga će osnovna ograničenja za model linearnog programiranja kojim se modelira razmatrani problem glasiti:

$$t_2 - t_1 \geq 2$$
$$t_3 - t_2 \geq t_{2,3}$$
$$t_4 - t_3 \geq t_{3,4}$$
$$t_5 - t_4 \geq 0$$
$$t_5 - t_3 \geq t_{3,5}$$
$$t_6 - t_3 \geq 19$$
$$t_6 - t_5 \geq t_{5,6}$$
$$t_7 - t_6 \geq 8$$
$$t_8 - t_6 \geq t_{6,8}$$
$$t_8 - t_7 \geq 0$$
$$t_9 - t_7 \geq t_{7,9}$$
$$t_9 - t_8 \geq 3$$

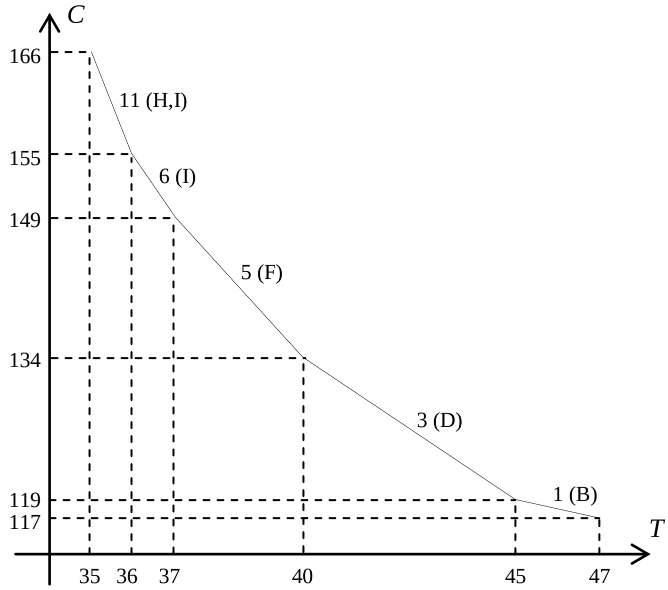
$$3 \leq t_{2,3} \leq 5$$
$$5 \leq t_{3,4} \leq 7$$
$$4 \leq t_{3,5} \leq 12$$
$$11 \leq t_{5,6} \leq 15$$
$$7 \leq t_{6,8} \leq 9$$
$$1 \leq t_{7,9} \leq 5$$

Jasno je da je trajanje projekta $T = t_9 - t_1$, dok troškovi projekta (pri najekonomičnijoj realizaciji) izraženi u funkciji trajanja onih aktivnosti čije trajanje nije fiksno iznose

$$C = 20 + (18 + 1\,(5 - t_{2,3})) + (21 + 4\,(7 - t_{3,4})) + 0 + (12 + 3\,(12 - t_{3,5})) + 0 + (5 + 5\,(15 - t_{5,6}))$$
$$+ 15 + (10 + 5\,(9 - t_{6,8})) + 0 + (6 + 6\,(5 - t_{7,9})) + 10 =$$
$$= 336 - t_{2,3} - 4\,t_{3,4} - 3\,t_{3,5} - 5\,t_{5,6} - 5\,t_{6,8} - 6\,t_{7,9}$$

Konkretan zadatak linearnog programiranja će sada naravno zavisiti od onoga što nas tačno zanima. Recimo, za pronalaženje minimalnog trajanja projekta uz planirani budžet od 125 hiljada KM, trebalo bi minimizirati veličinu T uz dopunsko ograničenje $C = 125$. Ili, za nalaženje najekonomičnije realizacije koja obezbjeđuje najkraće moguće trajanje projekta, trebalo bi prvo pronaći koliko iznosi najkraće trajanje projekta T_{min} na neki način (u nedostatku boljeg rješenja, ovo možemo izvesti i minimizacijom veličine T bez ikakvih dodatnih ograničenja), a zatim minimizirati veličinu C uz dopunsko ograničenje $T = T_{min}$ (u našem slučaju $T = 35$, jer smo ranije utvrdili da je $T_{min} = 35$).

Ovaj primjer ćemo završiti prikazom dijagrama zavisnosti minimalnih troškova projekta od njegovog trajanja za sva moguća trajanja od normalnog do usiljenog. Takav dijagram se može lako nacrtati prateći karakteristična vremena i troškove u pojedinim iteracijama postupka koji smo prethodno proveli:



Ovim su izložene osnovne ideje *PERT/COST* metoda. Kao što je već rečeno, ovaj metod se primjenjuje za projekte čiji mrežni dijagram sadrži *mali broj puteva* od početka do završetka projekta, i to *uglavnom pri ručnom radu*, s obzirom da za potrebe izvedbe na računaru nije jednostavno algoritamski izraziti način pronalaženja optimalnog izbora aktivnosti koje treba kratiti. Stoga se za slučaj projekata sa većim brojem puteva i pri računarskom izvođenju uglavnom koristi *pristup zasnovan na ekvivalentnom modelu linearnog programiranja*. Treba još istaći i da se *PERT/COST* metod može koristiti i u *obrnutom smjeru*, polazeći od nekog plana realizacije projekta u kojem pojedine aktivnosti nemaju minimalno trajanje, a zatim *obarati cijenu* projekta *produžavatnjem* trajanja pojedinih aktivnosti *na optimalan način*, sve dok se ne postigne *zadovoljavajuća cijena* projekta, uz *minimalno produžavanje* njegovog trajanja. Ovaj postupak je nešto komplikovaniji nego prethodno opisani postupak, a ovdje ga nećemo opisivati, s obzirom da se njim ne postiže ništa suštinski novo što se ne bi moglo postići prethodno opisanim postupkom.

Analiza resursa

Izlaganje o tehnikama mrežnog programiranja završićemo kratkim osvrtom na problematiku *analize resursa*. Naime, sve do sada, mi smo prećutno pretpostavljali da su svi resursi (radna snaga, mašine, itd.) koji su potrebni za izvođenje svih aktivnosti u projektu *raspoloživi u potrebnom iznosu u onom trenutku kada aktivnost treba zaista da započne*. Nažalost, to veoma često nije ispunjeno. na primjer, pretpostavimo da se u nekom projektu koji izvodi neki poljoprivredni kombinat tri aktivnosti A, B i C u načelu mogu izvoditi istovremeno, odnosno paralelno. Međutim, poljoprivredni kombinat raspolaže samo sa 10 traktora, dok aktivnosti A, B i C zahtijevaju respektivno 4, 5 i 3 traktora. Jasno je da se u takvim okolnostima najviše dvije od ove tri aktivnosti mogu odvijati u isto vrijeme, što neminovno mora dovesti do promjene termina započinjanja i završetaka aktivnosti u odnosu na termine koji bi se dobili prostom analizom vremena. Analiza resursa upravo proučava problematiku planiranja realizacije projekta u uvjetima *ograničene raspoloživosti resursa*.

Analiza resursa može još biti dodatno zakomplicirana činjenicom da u velikom broju slučajeva trajanje aktivnosti, a samim tim i njena cijena, može zavisiti od količine resursa koji su dodijeljeni toj aktivnosti. Recimo, ukoliko je neka aktivnost "oranje njive", jasno je da će ukoliko se za tu aktivnost predvide dva traktora, ta ista aktivnost obaviti približno za dvostruko manje vrijeme nego ukoliko se dodijeli samo jedan traktor. Iz tog razloga, česta pojava je da se analiza resursa *ne može vršiti neovisno od analize vremena i troškova*, što u općem slučaju može stvoriti velike komplikacije.

Za razliku od analize vremena i analize troškova, koji spadaju u "lake" probleme mrežnog planiranja (mada i problemi analize troškova mogu biti teški ukoliko se ne može uspostaviti kontinualna i približno linearna zavisnost između trajanja i troškova za sve aktivnosti), problemi koji zahtijevaju i analizu resursa gotovo uvijek su “teški” problemi i nalaženje optimalnog rješenja je često *gotovo nemoguć zadatak*. U tom slučaju se moramo zadovoljiti pronalaženjem “dovoljno dobrih” rješenja. Razlog za ovo leži u činjenici da se problemi koji zahtijevaju analizu resursa *ne mogu modelirati kao problemi linearnog programiranja*, s obzirom da se u odgovarajućim matematičkim modelima javljaju promjenljive koje mogu uzimati diskretne vrijednosti, a koji su takvi da se tih ograničenja na diskretnost *ne možemo osloboditi*. Većina problema analize resursa mogu se modelirati kao problemi *cjelobrojnog linearnog programiranja*, ali su takvi problemi u općem slučaju *vrlo teški za rješavanje*, tako da nam ta činjenica nije od pretjerane koristi (mada se vrši dosta pokušaja da se problemi analize resursa “napadnu” nekom od tehnika koje su se pokazale dosta uspješnje za rješavanje nekih tipova problema cjelobrojnog linearnog programiranja).

Raspoloživi prostor nam ne dozvoljava da se dublje upuštamo u problematiku analize resursa. Na ovom mjestu ćemo se samo ograničiti na najjednostavniji slučaj analize resursa, gdje sve aktivnosti traže istu vrstu resursa, pri čemu je poznata količina resursa koju zahtijeva svaka od aktivnosti, kao i maksimalna količina resursa koja je u nekom trentutku raspoloživa za potrebe izvođenje projekta. Čak i za ovako pojednostavljen problem, nisu poznati algoritmi koji bi u općem slučaju mogli u razumnom vremenu pronaći optimalno rješenje, nego se obično pribjegava upotrebi raznih heurističkih i aproksimativnih algoritama, koji ne garantiraju nalaženje optimalnog rješenja, ali koji obično daju prihvatljivo dobra rješenja.

Jasno je da u slučaju kada nekoliko aktivnosti može otpočeti u isto vrijeme, ali njihove ukupne potrebe za resursima premašuju maksimalnu raspoloživu količinu, neophodno je *odgoditi* početak jedne ili više aktivnosti do trenutka kada neophodni resursi budu raspoloživi. Pri tome, idealno bi bilo da se *ukupno trajanje projekta ne produži*, a ako to nije moguće postići, onda da se produži *što je god moguće manje*. Osnovno je pitanje *koje tačno aktivnosti pomjeriti* (u vremenu) i *za koliki iznos*. Nažalost, jednostavan odgovor na ovo pitanje koji bi garantirao optimalnu strategiju do danas nije poznat. Stoga su empirijski isprobavane različite strategije, koje variraju u rasponu od jednostavnijih do komplikovanijih. Jednostavne strategije zasnivaju se na dodjeli *prioriteta* određenim aktivnostima, pri čemu aktivnosti sa većim prioritetom imaju veću šansu da ostanu u planiranom vremenskom razmaku (tj. sa planiranim vremenom početka i završetka). Tada se u svakom koraku pomjera ona vremenska aktivnost sa *najmanjim prioritetom*, a koja narušava raspoloživost resursa. Različite jednostavne strategije razlikuju se po načinu dodjele prioriteta. Tako su, na primjer, poznate sljedeće jednostavne strategije:

- Veći prioritet se daje *kraćim aktivnostima*;
- Veći prioritet se daje *aktivnostima koje traže veću količinu resursa*;
- Veći prioritet se daje *aktivnostima sa manjom vremenskom rezervom*;
- Veći prioritet se daje *aktivnostima koje imaju više neposrednih sljedbenika*;
- Veći prioritet se daje *aktivnostima iza kojih slijedi više kritičnih aktivnosti*.

Analize koje su proveli *Patterson* i *Davis* pokazale su da u većini slučajeva od jednostavnih strategija najbolje rezultate daje tzv. ***Gray-Kidd algoritam***, kod kojeg se prioritet daje aktivnostima sa *manjom vremenskom rezervom*, a u slučaju da više aktivnosti ima jednake vremenske rezerve, prioritet se daje aktivnostima koje traže *veću količinu resursa*. Dakle, kod Gray-Kidd algoritma, ukoliko je potrebno pomicati neku aktivnost, prvo se pomiče aktivnost sa *najvećom vremenskom rezervom*, a ukoliko više aktivnosti imaju istu najveću vremensku rezervu, tada se prvo pomiče aktivnost koja *zahtijeva manje resursa*. Pri tome se obično usvaja da se jednom započeta aktivnost *ne može prekidati*, mada se može razmatrati i varijanta algoritma koja *dopušta prekidanje i kasniji nastavak prekinute aktivnosti*, naravno ukoliko je priroda aktivnosti takva da dopušta prekidanje i kasniji nastavak. Često se manje produžavanje trajanja projekta dobija ukoliko se dopusti i prekidanje aktivnosti.

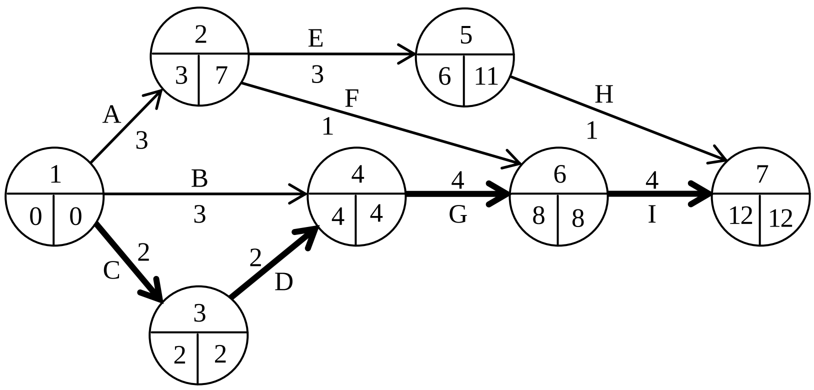
Gray-Kidd algoritam je, zbog jednostavnosti i relativno dobre uspješnosti, dugo vremena bio jedan od najviše korištenih algoritama za planiranje projekta u uvjetima ograničene raspoloživosti resursa. U posljednje vrijeme, otkriveni su razni komplikovaniji algoritmi koji tipično daju bolje rezultate od Gray-Kidd algoritma. Posebno ohrabrujući rezultati dobijeni su primjenom algoritama koji se zasnivaju na *idejama dinamičkog programiranja*.

➢ ***Primjer*** : U sljedećoj tabeli prikazane su aktivnosti koje se trebaju preduzeti da se kompletira neki kurs na nekoj visokoškolskoj ustanovi, zajedno sa prikazom logičkih međuzavisnosti između pojedinih aktivnosti, trajanja u sedmicama potrebna za određene aktivnosti, kao i broj sati rada sedmično koji treba utrošiti za svaku od aktivnosti.

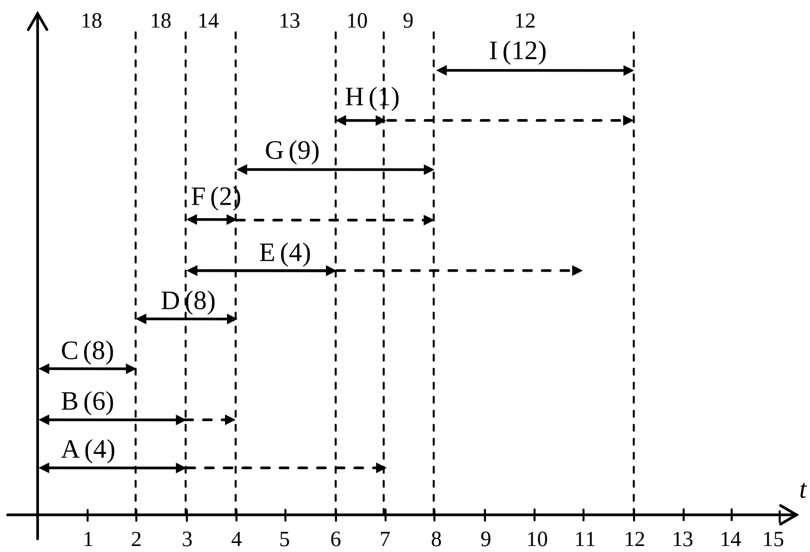
Aktivnost	Preduvjeti	Trajanje u sedmicama	Broj sati sedmično
A – Izrada 1. seminarskog rada	–	3	4
B – Priprema i polaganje 1. parcijalnog ispita	–	3	6
C – Priprema i polaganje 1. testa	–	2	8
D – Priprema i polaganje 2. testa	C	2	8
E – Izrada 2. seminarskog rada	A	3	4
F – Odbrana 1. seminarskog rada	A	1	2
G – Priprema i polaganje 2. parcijalnog ispita	B, D	4	9
H – Odbrana 2. seminarskog rada	E	1	1
I – Usmeni ispit	F, G	4	12

Potrebno je odrediti najkraće vrijeme u kojem se može savladati kurs ukoliko student koji priprema kurs nije spreman utrošiti više od 14 sati sedmično za njegovu pripremu.

U ovom primjeru, broj sati sedmično neophodan za izvođenje pojedinih aktivnosti možemo posmatrati kao "resurse" koji se "troše" za izvođenje tih aktivnosti, pri čemu je svake sedmice "na raspolaganju" svega 14 sati tog "resursa". Pogledajmo prvo šta bi nam dala klasična analiza strukture i vremena, ne uzimajući u obzir ograničenost raspoloživih resursa. Rezultati provedene analize prikazani su na sljedećem mrežnom dijagramu:

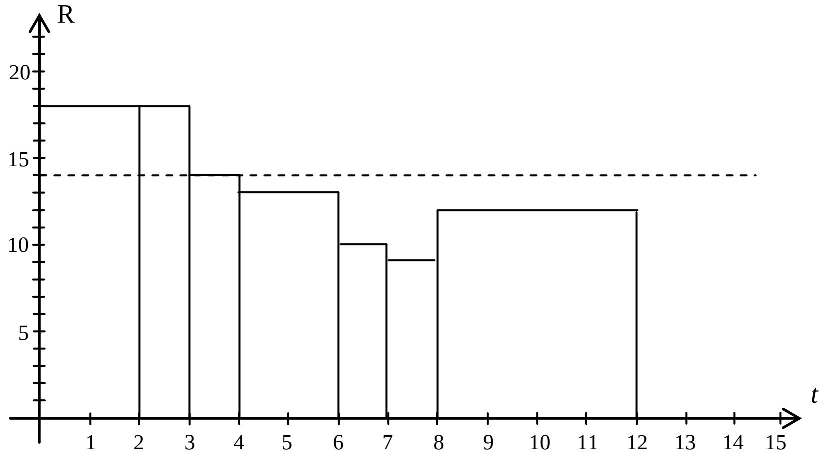


Klasični mrežni dijagrami nisu najbolje sredstvo za potrebe analize resursa. Da bismo lakše pratili potrebe za resursima po sedmicama, mnogo bolje je posmatrati dijagram koji prikazuje ***kalendar aktivnosti***, odnosno vrijeme početka i završetka aktivnosti za svaku od aktivnosti, pri čemu se vrijeme nalazi na apscisnoj osi dok ordinatna osa nema nikakvu specifičnu funkciju. Dijagrami tog tipa obično se nazivaju ***Gantt-ovi dijagrami*** ili ***gantogrami***. Za razmatrani primjer, ovaj dijagram bi mogao izgledati kao na sljedećoj slici:



Pojedine aktivnosti su prikazane strelicama, pri čemu je iznad strelice upisano o kojoj se aktivnosti radi i koliko resursa zahtijeva. Crtkani produženi strelica predstavljaju *ukupne rezerve aktivnosti*, odnosno prikazuju do kojeg trenutka je moguće produžavati završetak aktivnosti a da ne dođe do produžavanja trajanja projekta. Vertikalne isprekidane crte odgovaraju karakterističnim trenucima u kojima započinju ili završavaju odgovarajuće aktivnosti. Također, na vrhu dijagrama prikazan je ukupan utrošak resursa u intervalu između dva karatkeristična trenutka.

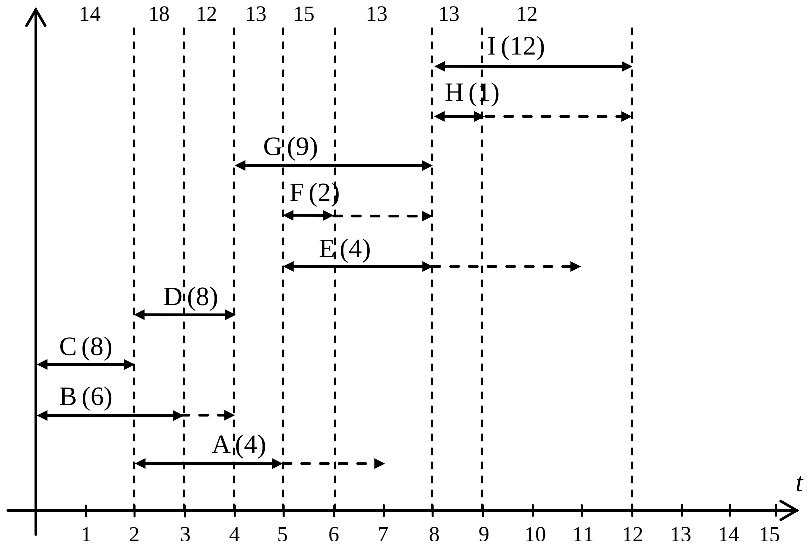
Na osnovu ovog dijagrama možemo uočiti da su ograničenja na maksimalnu količinu resursa narušena u prve tri sedmice. Radi boljeg uvida, možemo nacrtati i graf koji prikazuje utrošenu količinu "resursa" (radnih sati) po sedmicama, kao na sljedećoj slici:



Također je korisno (pogotovo za potrebe računarske implementacije) korisne podatke održavati u *tabelarnoj formi*, na primjer kao u tablici sa sljedeće slike (prikazani iznos rezerve odnosi se na ukupnu vremensku rezervu):

Aktivnost	Preduvjeti	Trajanje	Resursi	Početak	Kraj	Rezerva
A	–	3	4	0	3	4
B	–	3	6	0	3	1
C	–	2	8	0	2	0
D	C	2	8	2	4	0
E	A	3	4	3	6	5
F	A	1	2	3	4	4
G	B, D	4	9	4	8	0
H	E	1	1	6	7	5
I	F, G	4	12	8	12	0

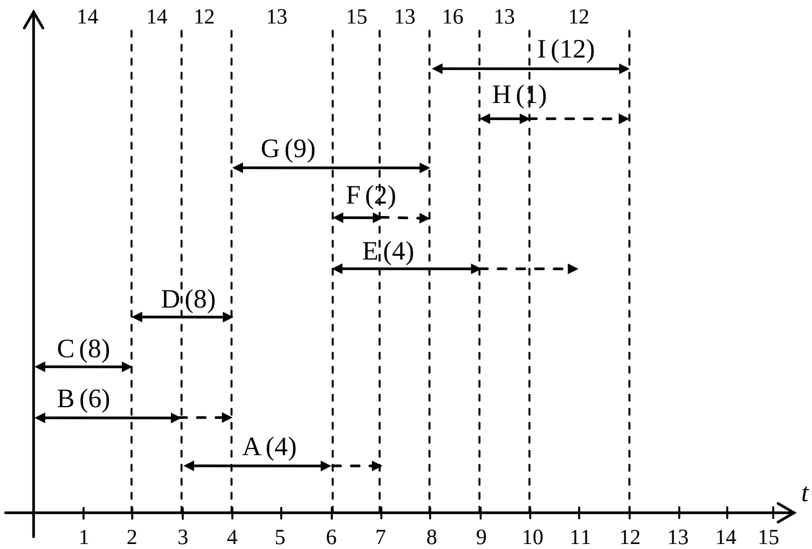
Sada, pošto imamo konflikt između utrošenih i raspoloživih resursa u toku prve dvije sedmice (imamo ga i u trećoj sedmici, ali to ćemo rješavati kasnije), slijedi da jednu od aktivnosti A, B i C koje se odvijaju u toku ove dvije sedmice moramo pomjeriti. Aktivnost C je kritična (rezerva 0), tako da ona ima apsolutni prioritet. Isto tako, između aktivnosti A i B prioritet ima aktivnost B zbog manje rezerve. Stoga, prema Gray-Kidd algoritmu, pomjeramo početak aktivnosti A za dvije sedmice (za sada). Kako aktivnosti E i F zavise od aktivnosti A i počinju odmah po završetku aktivnosti A, njihov početak se također mora pomaknuti za dvije sedmice. Isto vrijedi i za aktivnost H koja zavisi od aktivnosti E koju pomjeramo. Aktivnost I zavisi od aktivnosti F koja je pomjerena, ali ona svakako nije počinjala odmah po završetku aktivnosti F (drugim riječima, aktivnost F ima i nenultu slobodnu a ne samo ukupnu vremensku rezervu), tako da aktivnost I ne treba pomjerati. Nova situacija nakon obavljenog pomjeranja predstavljena je na sljedećem dijagramu:



Za sada, još nismo ugrozili planirano trajanje projekta. Pomjeranje A, E, F i H dovodi do smanjenja njihovih rezervi za dvije sedmice, tako da je nova situacija prikazana u sljedećoj tablici:

Aktivnost	Preduvjeti	Trajanje	Resursi	Početak	Kraj	Rezerva
A	–	3	4	2	5	2
B	–	3	6	0	3	1
C	–	2	8	0	2	0
D	C	2	8	2	4	0
E	A	3	4	5	8	3
F	A	1	2	5	6	2
G	B, D	4	9	4	8	0
H	E	1	1	8	9	3
I	F, G	4	12	8	12	0

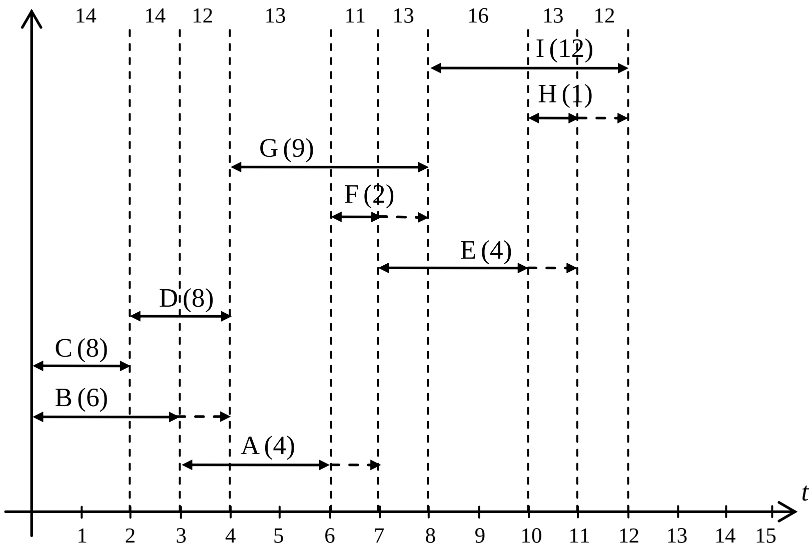
Konflikt između utrošenih i raspoloživih resursa još uvijek imamo u trećoj sedmici, a pojavio se i novi konflikt u šestoj sedmici kojeg ranije nije bilo. Riješimo za sada prvo konflikt u trećoj sedmici (mada se u Grey-Kidd algoritmu to striktno ne specificira, u konkretnim izvedbama ovog algoritma gotovo uvijek se prvo rješavaju konflikti koji ranije započinju, pa se postupno prelazi na rješavanje kasnijih konflikata, jer se u suprotnom mogu javiti brojne komplikacije). Aktivnost D kao kritična ima apsolutni prioritet. Ukoliko se odlučimo da započete aktivnosti ne prekidamo, ostaje nam jedino da pomjerimo aktivnost A. Njeno pomjeranje lančano će dovesti i do pomjeranja aktivnosti E, F i H (aktivnost I se i dalje ne pomjera iako ovisi od aktivnosti F koja se pomjera), tako da dobijamo novu situaciju kao na sljedećem dijagramu.



Ovim se ujedno rezerve pomjerenih aktivnosti A, E, F i H smanjuju za jednu sedmicu, tako da dobijamo novu situaciju kao u sljedećoj tablici:

Aktivnost	Preduvjeti	Trajanje	Resursi	Početak	Kraj	Rezerva
A	–	3	4	3	6	1
B	–	3	6	0	3	1
C	–	2	8	0	2	0
D	C	2	8	2	4	0
E	A	3	4	6	9	2
F	A	1	2	6	7	1
G	B, D	4	9	4	8	0
H	E	1	1	9	10	2
I	F, G	4	12	8	12	0

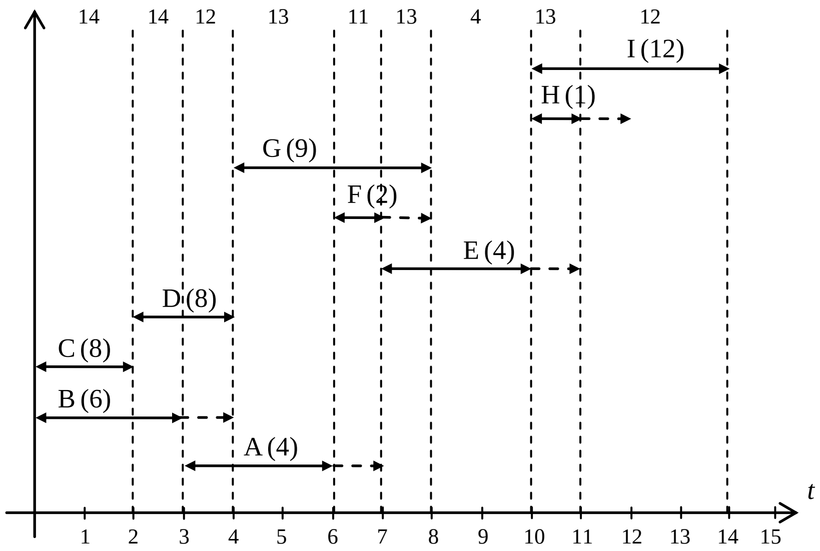
Ovim se ujedno "riješio" i konflikt u šestoj sedmici, zapravo on se "preselio" u sedmu sedmicu. Tako, konflikte sada imamo u sedmoj i devetoj sedmici. U skladu sa ranije preporučenom strategijom, prvo ćemo rješavati konflikt u sedmoj sedmici, Aktivnost G je započeta i nećemo je prekidati, a sve i da nije započeta, ona bi imala prioritet s obzirom da je kritična. Od dvije aktivnosti E i F koje se mogu pomjerati, prioritet ima aktivnost F koja ima manju rezervu. Dakle, pomaknućemo aktivnost E za jednu sedmicu, što zahtijeva i pomjeranje aktivnosti H. Vremenske rezerve aktivnosti E i H se ovim također smanjuju za jednu sedmicu. Novonastala situacija prikazana je na sljedećem dijagramu.



Ovom dijagramu odgovara tabelarni prikaz prikazan u sljedećoj tablici:

Aktivnost	Preduvjeti	Trajanje	Resursi	Početak	Kraj	Rezerva
A	–	3	4	3	6	1
B	–	3	6	0	3	1
C	–	2	8	0	2	0
D	C	2	8	2	4	0
E	A	3	4	7	10	1
F	A	1	2	6	7	1
G	B, D	4	9	4	8	0
H	E	1	1	10	11	1
I	F, G	4	12	8	12	0

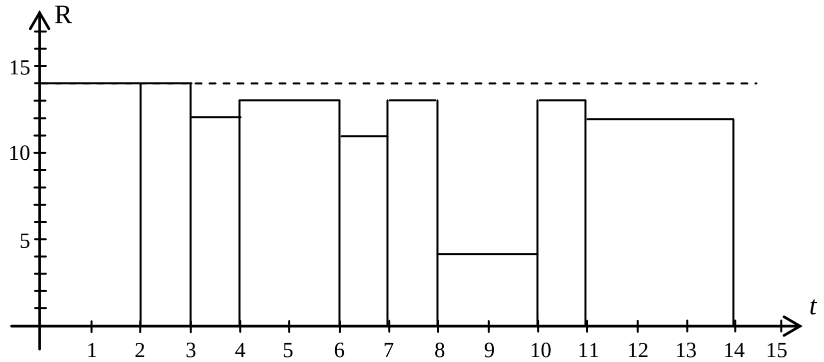
Jedini preostali konflikt sada imamo u intervalu koji obuhvata devetu i desetu sedmicu. Ovdje imamo situaciju da je aktivnost E započeta, a aktivnost I kritična. Odlučimo li se da ne prekidamo započete aktivnosti, nemamo drugog izbora nego da pomjerimo aktivnosti I. Međutim, kako je ona kritična, to će se odraziti na trajanje projekta. Dakle, pomjerićemo aktivnost I za dvije sedmice, a samim tim i *produžiti trajanje projekta za dvije sedmice*. Niti jedna druga aktivnost se ovim ne pomjera, tako da dobijamo novu situaciju prikazanu dijagramom sa sljedeće slike:



U ovom slučaju, pomjeranje aktivnosti I nije dovelo do smanjenja njene rezerve (s obzirom da joj je rezerva bila jednaka nuli), nego do *produžavanja trajanja projekta*. Novonastala situacija prikazana je u sljedećoj tablici:

Aktivnost	Preduvjeti	Trajanje	Resursi	Početak	Kraj	Rezerva
A	–	3	4	3	6	1
B	–	3	6	0	3	1
C	–	2	8	0	2	0
D	C	2	8	2	4	0
E	A	3	4	7	10	1
F	A	1	2	6	7	1
G	B, D	4	9	4	8	0
H	E	1	1	10	11	1
I	F, G	4	12	10	14	0

Vidimo da sada više nigdje nemamo konflikte, tako da je problem riješen. Konačna raspodjela utroška resursa prikazana je na sljedećoj slici:



U razmotrenom primjeru, morali smo pomjeriti dosta aktivnosti u odnosu na prvobitni plan da bismo se uklopili u maksimalne raspoložive resurse. To je dovelo i do produžetka trajanja projekta za dvije sedmice. Nije teško provjeriti da kada bismo umjesto raspoloživih resursa od 14 sati sedmično imali 15 sati sedmično, projekat bi se mogao završiti u predviđenih 12 sedmica, odnosno opisani postupak ne bi doveo do produžetka trajanja projekta.