Uvod u problematiku operacionih istraživanja

Predmet operacionih istraživanja

Korjeni nauke o upravljanju, kao i stalna nastojanja za pronalaženjem što boljih rješenja problema sa kojima se čovjek susretao u svom praktičnom djelovanju, mogu se naći u dalekoj prošlosti. Međutim, naziv skupa metoda, koje imaju za cilj *nalaženje najboljih* (*optimalnih*) *rješenja složenih problema*, je relativno nov i potiče iz vremena neposredno prije Drugog svjetskog rata. Tada je komanda Britanske armije osnovala Stanicu za istraživanje u Bodsiju (Bowdsey). Njihov zadatak je bio pronaći najbolji način odbrane od napada iz zraka. Konkretni rezultati su podstakli Komandu armije da, po izbijanju rata, formira nekoliko ovakvih timova. Oni su se bavili *istraživanjem ratnih operacija* na moru i u zraku. Tada je prvi put upotrijebljen termin *operaciona istaživanja*. Smatra se da, kao nauka, ***operaciona istraživanja*** postoje od 1940-te godine.

Kasnije se pokazalo da metode, korištene tokom rata u ratnim operacijama, mogu imati daleko širu primjenu. Kao i u ratnim operacijama, tako se i u mnogim drugim oblastima, problem postavljao na sličan način – potrebno je postići *što je god moguće bolje rezultate*, ali isključivo koristeći *raspoložive resurse*, koji su praktično uvijek *ograničeni*. Tako su metode operacionih istraživanja (pored ostalih područja) našli široku primjenu na području poslovnog odlučivanja i upravljanja.

Operaciona istraživanja su relativno mlada disciplina i ne postoji jednoznačna definicija ove oblasti. Jedna od definicija, koja dosta dobro definira sadržaj operacionih istraživanja, je sljedeća:

“*Operaciona istraživanja predstavljaju* **skup kvantitativnih** *i* **drugih naučnih metoda** *pomoću kojih se određuju (pronalaze)* **optimalna ekonomsko-tehnička rješenja složenih problema**.”

Sam naziv ***operaciona istraživanja*** govori da se ova disciplina bavi *istraživanjem operacija* (*aktivnosti*), tj. da se radi o problemima u kojima treba riješiti *kako voditi ili koordinirati operacije* (*aktivnosti*) *da bi se postigli najbolji efekti u skladu sa nekim kriterijem uz određena ograničenja*. Ovakva definicija operacionih istraživanja omogućuje njihovu primjenu u vrlo različitim oblastima kao što su: proizvodnja, transport, trgovina, konstrukcije, telekomunikacije, finansijsko planiranje, zaštita zdravlja, vojska, policija, javni servisi, itd.

Dio naziva ***istraživanja*** ukazuje na to da operaciona istraživanja koriste *naučni pristup* pri rješavanju zadataka sa kojima se susreću. U određenoj mjeri, naučni metod se koristi i za naučno (najčešće matematičko) modeliranje realnih problema koje je potrebno riješiti. Tako su operaciona istraživanja često uključena u kreativna naučna istraživanja *fundamentalnih osobina* operacija (aktivnosti). Također, da bi bile uspješni, metodi operacionih istraživanja moraju osigurati *pozitivne razumljive zaključke* donosiocima odluka kada ime je to potrebno.

U najvećem broju primjena, metode operacionih istraživanja imaju za cilj naći *najbolje* (*optimalno*) *rješenje problema u kojem se postavljaju izvjesna ograničenja*. Radi toga se najčešće podrazumjeva da je zadatak metoda operacionih istraživanja nalaženje najboljih rješenja, mada to ne mora uvijek biti slučaj. Naime, za neke vrste problema pronalaženje njihovog najboljeg rješenja je teško izvodljivo ili čak potpuno neizvodljivo i u kakvom razumnom vremenu, tako da se u tom slučaju obično zadovoljavamo rješenjem koje je *dovoljno dobro*, odnosno koje *nije isuviše loše* (u odnosu na postavljene kriterije). Ponekad je čak i nalaženje samo *dozvoljenog rješenja* (tj. rješenja koje zadovoljava postavljena ograničenja) problema sa ograničenjima jako složen problem (npr. Problem određivanja vremenskog rasporeda po mašinama), tako da je tada optimizacija u drugom planu.

Razvoj informacionih tehnologija je dao snažnu osnovu i poticaj za razvoj i primjenu metoda operacionih istraživanja. Izgradnja poslovnih informacionih sistema i njihovo povezivanje sa operacionim istraživanjima proizveli su novi kvalitet – ***informacione sisteme za podršku upravljanju***. Ova veza (korištenje informacionih tehnologija i matematičkih metoda), omogućila je, s jedne strane, daleko šire i efikasnije korištenje “klasičnih” metoda Operacionih istraživanja (linearno programiranje, mrežno planiranje, upravljanje zalihama, optimalno rezerviranje, simulacije, itd.), dok je, s druge strane, potakla razvoj novih načina korištenja metoda za nalaženje najboljih rješenja kroz ***sisteme za podršku odlučivanju*** (engl. *Decision Suport Systems*, skraćeno ***DSS***), ***sisteme za podršku izvršavanju*** (engl. *Execution Suport Systems*, skraćeno ***ESS***), ***ekspertne sisteme*** (engl. *Expert Systems*, skraćeno ***ES***), te ***vještačku inteligenciju*** (engl. *Artificiel Intelligence*, skraćeno ***AI***).

Posljednih godina poseban interes je usmjeren na primjenu raznih matematičkih pristupa u *analizi velikih skupova podataka*. Naime, u velikim organizacionim sistemima, kroz sve šire korištenje informacionih tehnologija, formiraju se ogromni skupovi podataka koje je vrlo teško analizirati, odnosno *izvući odgovarajuće informacije ili znanja koja su u njima sadržana*. Ovi problemi, *traganje za podacima* i *otkrivanje skrivenih odnosa i značenja među njima*, predstavljaju jednu od suvremenih interesantnih oblasti operacionih istraživanja. Takvi pristupi se mogu naći u okviru naziva: ***analitička obrada podataka u realnom vremenu*** (engl. *On Line Analytic Processing*, skraćeno ***OLAP***), ***rudarenje podataka*** (engl. *Data Mining*) i ***poslovno istraživanje*** (engl. *Business Intelligence*).

Razni sistemi za ***planiranje resursa preduzeća*** (engl. *Enterprise Resource Planning*, skraćeno ***ERP***) koji su donedavno bili (a često su i danas) jedna od najznačajnijih komponenti integralnih informacionih sistema za upravljanje preduzećima, u pravilu nisu sadržavali nikakve metode planiranja nego su samo omogućavali određenu integraciju podataka iz raznih informacionih podsistema, što se moglo koristiti u procesu planiranja. Pokazalo se, međutim, da je za efikasno planiranje i upravljanje neophodno koristiti *formalne metode analize i optimizacije*. Tako se danas pojavljuju ***napredni sistemi za planiranje i raspoređivanje*** (engl. *Advanced Planning and Scheduling*, skraćeno ***APS***) i ***napredni sistemi za planiranje i optimizaciju*** (engl. *Advanced Planning and Optimization*, skraćeno ***APO***). Ovi sistemi predstavljaju, u stvari, razne oblike *implementacije metoda operacionih istraživanja***.**

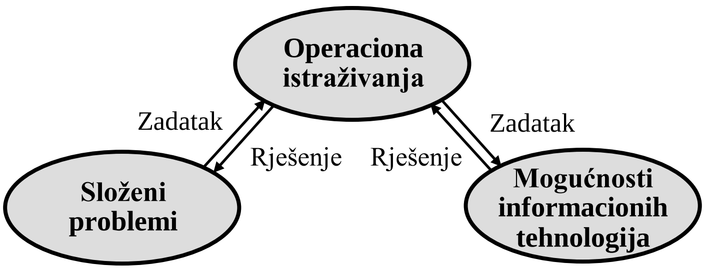
Danas najveći broj zemalja ima svoja nacionalna ***profesionalna udruženja za operaciona istraživanja*** koja organiziraju svoje skupove i izdaju časopise i biltene. Nacionalna udruženja se često povezuju u ***regionalne organizacije*** kao što su npr. ***Evropska asocijacija EURO*** (engl. *The Association of European Operational Research Societies*), ***Međunarodna federacija za operaciona istraživanja IFORS*** (engl. *The International Federation of Operational Research Societies*) te ***Institut za operaciona israživanja INFORMS*** (engl. *The Institute for Operations Research and the Management Sciences*).

Karakteristike operacionih istraživanja

Osnovne karakteristike operacionih istraživanja kao naučne discipline su sljedeće:

- Usredsređenost na probleme upravljanja u *složenim sistemima*;
- *Sistemski pristup* problemima;
- *Timski* rad;
- *Naučni metod* nalaženja rješenja.

Razmotrimo prvo katakteristiku ***usredsređenosti na probleme upravljanja u složenim sistemima***. Suština je u tome da zadaci, koji se postavljaju pred stručnjake raznih profila *postaju sve složeniji*. Kao što je to uvijek bilo, kroz cjelokupnu čovjekovu istoriju, uvećanje znanja i usvršavanje tehnologija povećavali su "nivoe ambicija" i tako pred istraživače, uvijek iznova, postavljali sve teže i složenije zadatke. Tako je to i danas. Izvanredne mogućnosti informacionih tehnologija i stalni razvoj metoda za nalaženje najboljih rješenja postavljaju pred istraživače *ambiciozne zadatke upravljanja u složenim organizacionim sistemima*. U pravilu se rješavaju zadaci za koje *ne postoje predhodna iskustva*, koji uključuju *veliki broj nepoznatih veličina* i čiji se uvjeti *ne ponavljaju više puta pod istim okolnostima*. Rješavanje takvih zadataka je najčešće *ozbiljan istraživački poduhvat*.



Što se tiče ***sistemskog pristupa problemima***, Aristotel je još prije 2000. godina rekao "*Cjelina je više nego prosti zbir svojih dijelova*". To konkretno znači da se, *optimizirajući svako dio zasebno, ne mora uvijek dobiti* (*a najčešće se i ne dobije*) *optimalno rješenje za cjelinu*. Tako, na primjer, optimalni nivo zaliha sa stanovišta prodaje, ne mora biti optimalan sa stanovišta preduzeća. Naime, za službu prodaje je najbolje da uvijek ima na raspolaganju dovoljne količine kvalitetnih proizvoda kako bi napravila što bolju prodaju i ostvarila najveći finansijski efekat. Međutim, sa stanovišta preduzeća, takav nivo zaliha može blokirati previše finacijskih sredstava i onemogućiti normalnu proizvodnju i/ili nabavku. Stoga, da bi se dobilo najbolje rješenje nekog problema za jedan organizacioni sistem (preduzeće, vojna jedinica, bolnica, regija) mora se poći od toga da su to *jedinstveni subjekti* (cjeline) i sa tim saznanjem rješavati problem.

Sljedeći bitan aspekat operacionih istraživanja je ***timski rad***. Naime, jedna od specifičnosti operacionih istrazivanja je u tom da su od samog početka razvoja ove oblasti, istrazivači bili organizirani u *timove*. To je bilo nužno jer su problemi, koji su se rješavali, zahtijevali *poznavanje više različitih oblasti*. Tako su timove formirali stručnjaci različitih profila koji su prije toga rijetko radili zajedno (inženjeri, matematičari, psiholozi, ekonomisti, sociolozi, pravnici, medicinari, i mnogi drugi). Zajednički rad stručnjaka različitih oblasti imao pozitivan uticaj i na *unapređenje metoda*, jer su različiti stručnjaci unosili u timski rad *različite pristupe* i na taj način obogatili metode u mnogim naučnim područjima. Ovakav timski pristup se često naziva i ***multidisciplinarni pristup***, zbog učešća stručnjaka različitih profila (disciplina) u timu.

Konačno, posljednja bitna karakteristika operacionih istraživanja je ***naučni metod nalaženja rješenja***, odnosno operaciona istrazivanja koriste naučne metode u rješavanju problema donošenja najboljih (optimalnih) odluka. U tom postupku se najčečće (mada ne uvijek) koristi *matematički jezik* za opisivanje i rješavanje postavljenih zadataka. Prednosti ovakvog pristupa su sljedeće:

- Jezik matematike je *precizan i koncizan*;
- Mogu se koristiti *postojeći rezultati* (veliki broj dokazanih teorema i stavova)
- *Složene veze* između raznih veličina u realnom sistemu, jednostavnije i jasnije se prikazuju *u matematičkom obliku* (najčešće u vidu jednačina i nejednačina).

S druge strane, postoje i suprotna mišljenja da matematički jezik često *previše pojednostavljeno* predstavlja stvarni problem. To nekada može biti i tačno, međutim, osnovni zadatak modeliranja i jeste u tome da se dođe do (matematičkog) modela koji je, s jedne strane *dovoljno* "*sličan*" stvarnom problemu da bi mogao da bude njegova zamjena, a da sa druge strane bude *dovoljno jednostavan* da bi uopće mogao biti *rješiv u razumnom vremenu*. Dalje, uprošćenja i zanemarenja, koja se čine pri matematičkom modeliranju su često *lako uočljiva*, tako da se, u slučaju *neslaganja modela sa ponašanjem realnog sistema*, mogu znati "tačke" koje treba mijenjati da bi se dobila bolja usaglašenost. Treba naglasiti da alternativni (nematematički) pristupi često nedovoljno precizno ili nejednoznačno opisuju problem i time takav model ostavljaju otvorenim za nejasnoće kada su u pitanju rezultati koji se mogu dobiti korištenjem takvih modela.Također, upotreba matematičkih modela i pristupa je jedan od uvjeta za široko korištenje informacionih tehnologija u rješavanju konkretnih problema upravljanja u raznim područjima primjene.

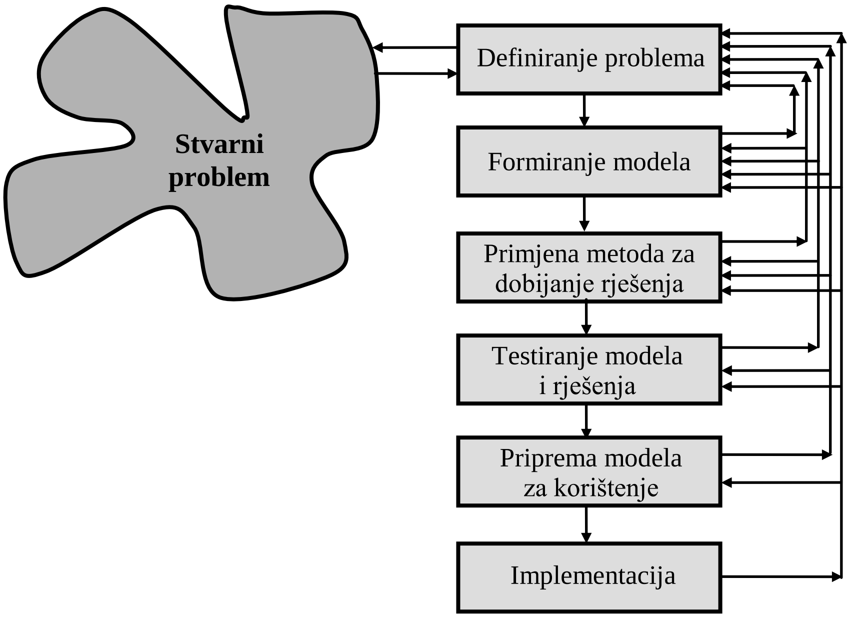
Faze primjene operacionih istraživanja

Najveći dio onoga što se danas naziva operacionim istraživanjima predstavljaju ***kvantitativne metode***, tako da ćemo se mi u nastavku pretežno baviti ***matematičkim metodama operacionih istraživanja***. Međutim, to ne znači da pri praktičnom korištenju operacionih istraživanja osnovnu težinu čine matematičke analize. Naprotiv, one često predstavljaju samo *mali dio napora koji je potrebno uložiti*.

Postupak koji se standardno primjenjuje u procesu implementiranja operacionih istraživanja, tipično se sastoji od sljedećih faza:

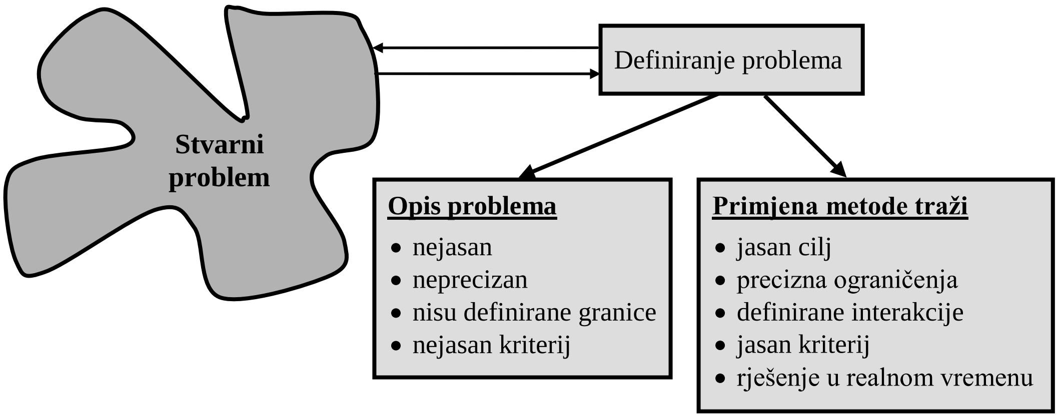
- *Definiranje problema* i *prikupljanje odgovajućih podataka*;
- Formiranje *matematičkog modela* koji predstavlja problem;
- Razvoj *postupka* (obično zasnovanog na primjeni računara) za *nalaženje rješenja problema iz matematičkog modela*;
- *Testiranje* modela i rješenja;
- Priprema modela *za korišenje*;
- *Implementacija*.

Prva faza u primjeni operacionih istraživanja je ***definiranje problema* i *prikupljanje odgovajućih podataka***. Zapravo, identifikacija i precizna formulacija problema (zadatka) je *najosjetljivija faza u primjeni metoda operacionih istraživanja*. Naime, najveći dio praktičnih problema, za čije rješavanje je potrebno koristiti operaciona istraživanja, u početku je definiran *nejasno i neprecizno*. Često postoji niz elemenata koji učestvuju u realnoj situaciji a koji *nisu bitni* za sam problem koji se pokušava riješiti. Također su često *nejasni kriteriji* na osnovu kojih se određuje uspješnost rješenja. Također, često se dešava da je posmatrani problem manje ili više *povezan* sa nekim drugim procesima pa je složeno pitanje *određivanje granice problema*. S druge strane, da bi primjena metoda operacionih istraživanja bila uspješna, potrebno je jasno odrediti *ciljeve, ograničenja* i *interakcije sa okolinom* (odnosno sa drugim dijelovima sistema). Često je, u realnim primjenama, potrebo voditi računa i o *vremenskim ograničenjima* za donošenje odluke.



Nažalost, *ne postoje stroga pravila* koja bi pomogla u pravilnoj identifikaciji i formulaciji problema. U ovoj fazi najveći značaj imaju *iskustvo* i *kreativnost istraživača*. Ipak, mogu se primjeniti sljedeće preporuke:

- Definirati *ko je korisnik istraživanja* i *koje su granice sistema* koji se analizira;
- Precizno definirati *ciljeve korisnika istraživanja*;
- Utvrditi *kojim instrumentima upravljanja* raspolaže korisnik;
- Što preciznije odrediti *skup alternativnih rješenja* i odrediti ograničenja u okviru kojih treba tražiti *optimalnu odluku*.

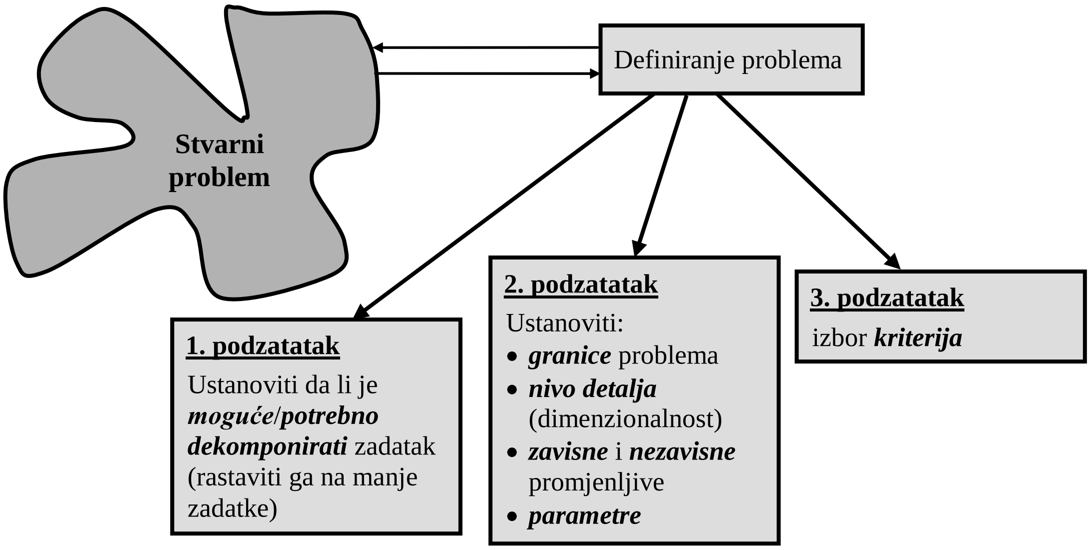


Upravljački problem se u ovoj fazi *ne postavlja u matematičkom obliku*. U toku ove faze, tim za operaciona istraživanja, u komunikaciji sa odgovarajućim saradnicima korisnika, prikuplja osnovne informacije o problemu koji treba riješiti. Stoga se u okviru ove faze mogu uočiti *tri različita ali međusobno povezana podzadatka*.

Prvi podzadatak ove faze je ustanoviti da li je problem moguće i/ili potrebno *rastaviti na određeni broj manjih problema,* odnosno da li je moguće izvršiti ***dekompoziciju problema***. Rastavljanjem se dobijaju manji i jednostavniji zadaci za koje, u pravilu, postoje veći izgledi da se mogu uspješno riješiti.

Drugi podzadatak je utvrđivanje *granice problema* koji će se rješavati i određivanje *nivoa detalja*. Na ove odluke direktno utiču *ciljevi korisnika*, te *planirani troškovi* i *planirano vrijeme za razvoj modela*. Utvrđene granice problema i definirani nivo detalja, u većoj ili manjoj mjeri direktno određuju ***dimenzionalnost problema***, koja se ugrubo može definirati kao *količina brojeva koji su neophodni da bi se opisalo rješenje problema*. Tom prilikom se ustanovljavaju se ***zavisne*** i ***nezavisne promjenljive***, ili u terminologiji koja se koristi u zadacima upravljanja, ***upravljačke*** ili ***kontrolabilne promjenljive*** i ***parametri sistema*** i/ili ***nekontrolabilne promjenljive***.

Treći podzadatak je izbor ***kriterija*** na osnovu kojeg će se mjeriti *uspješnost* (*dobrota*) *rješenja*. Očigledno je da će izbor kriterija direktno utjecati na to koje će rješenje, iz skupa mogućih rješenja, biti određeno kao *optimalno* ili, u praksi, biti ocijenjeno kao *uspješno*. Tako je, na primjer, za vrijeme II svjetskog rata, odlučeno da se trgovačka mornarica Velike Britanije opremi protivavionskim oružjem. Poslije godinu dana je analizirana uspješnost ovog zahvata. Prvo je za kriterij uspješnosti uzet broj oborenih neprijateljskih aviona. Ustanovljeno je da je u samo 4 % napada oboren neprijateljski avion. Na osnovu ovako definiranig kriterija bi se moglo zaključiti da je ovaj zahvat dao slabe rezultate. Međutim, kada se kao kriterij uzeo postotak potopljenih brodova sa protivavionskim naoružanjem u odnosu na one bez naoružanja, dobio se potpuno različit rezultat. Naime, pokazalo se da su brodovi sa naoružanjem imali daleko veću šansu da se odbrane (odnosno da "prežive" napad neprijateljske avijacije) u odnosu na one bez naoružanja.



Sljedeća faza u primjeni operacionih istraživanja je ***formiranje matematičkog modela koji predstavlja problem***. Pojam "model" se najčešće intuitivno prihvata kao "apstrakcija" nečega što je dio realnosti (Eden i Haris, 1975). Forma u kojoj je model izražen je često presudna za njegovo korištenje. Rivet (1972) ukazuje da su "*svi naučnici saglasni da je ključna aktivnost svake naučne metode – kreiranje modela*".

Prapočeci modeliranja (u vidu modela za potrebe astronomije) se mogu naći još u Babilonskoj civilizaciji (750 godina prije nove ere). Petrić i dr. (1982) smatraju da su "*modeli veoma široko korišćeno sredstvo za opis, objašnjenje, predviđanje i upravljanje pojavama u realnom svijetu*" i da predstavljaju "sintetsku apstrakciju realnosti".

Kada je u pitanju složenost, u praksi susrećemo vrlo različite modele, od najjednostavnijih do najsloženijih, a zajednička im je karakteristika *da nikada ne mogu biti vjerna slika stvarnosti*. Naime, modeli obuhvataju *samo bitne osobine* pojave koju predstavljaju i pri tom *nužno zanemaruju niz osobina te iste pojave*. Saznajna vrijednost modela je bazirana na činjenici da je rijetko potrebno sve znati o nekoj pojavi, odnosno, da je potrebno znati samo one veličine koje su bitne za pojedino razmatranje.U tom smislu, korištenje modela ima slijedeće prednosti:

- Omogućavaju *analizu i eksperimentisanje sa složenim problemima*;
- Obezbjeđuje *ekonomisanje resursima* koji se koriste za analizu date pojave;
- Omogućavaju *skaliranje* odnosno *skraćivanje* ili *produžavanje vremena za analizu neke pojave* (nekada i u znatnoj mjeri);
- Obezbjeđuju *koncentraciju na bitne karakteristike pojave*.

Pri izradi modela, lako se može dogoditi da se ispusti neka od bitnih osobina pojave koja se modelom opisuje, pa bi zaključivanje na osnovu takvog modela moglo biti pogrešno. Radi toga, faza modeliranja često predstavlja *kritičnu tačku u istraživanju*, pa se njom treba biti posebno oprezan. Upravo radi značaja ove faze, Rivet (1972) je dao sljedeću preciznu definiciju modela:

"***Model***, *odnosno* **hipoteza**, je ***skup logičkih relacija***, bilo **kvantitativnih**, bilo ***kvalitativnih***, koje će zajedno povezati ***relevantne karakteristike stvarnosti bitne za problem koji se rješava***."

U nauci i biznisu se koristi jako veliki broj međusobno vrlo različitih modela: model atoma, model genetičke strukture, fizički zakoni i hemijske reakcije se opisuju matematičkim jednačinama odnosno modelima, veliki broj realnih zadataka se predstavlja pomoću grafova ili mrežnih planova koji su također modeli, postoje modeli organizacione strukture, modeli tokova novca u preduzećima, te brojni drugi modeli.

Modeli se mogu *klasificirati* na razne načine. Petrić i dr. (1982) klasificiraju modele na osnovu šest, a Tersine (1985) na osnovu osam osnovnih karakteristika. Ova klasifikacija je prikazana u sljedećoj tabeli.

Karakter modela	Modeli
Funkcija	• ***Deskriptivni*** (mape, sheme, završni računi, ...) • ***Prediktivni*** (stimulacioni, regresioni, modeli simultanih jednačina, PERT, redovi čekanja, ...) • ***Normativni*** (razni modeli matematičkog programiranja)
Struktura	• ***Ikonički*** (modeli atoma, hidrograđevinskih objekata, ...) • ***Analogni*** (graf sistema, PERT-mreža, modeliranje na analognom računaru, ...) • ***Simbolički*** (simulacioni modeli, modeli matematičkog programiranja, ...)
Stepen slučajnosti	• ***Deterministički*** – izvjesnost (vjerovatnoće nastupanja stanja su jednake jedinici) • ***Rizični*** (nepoznata stanja, ali poznate vjerovatnoće nastupanja pojedinih stanja) • ***Neizvjesni*** (nepoznata buduća stanja i nepoznate vjerovatnoće njihovih nastupanja) • ***Konfliktni*** (modeli planiranja i predviđanja, modeli igara)
Vremenska zavisnost	• ***Statički*** (relacije među objektima ne zavise od vremena) • ***Dinamički*** (postoje vremenske zavisnosti između promjenljivih)
Općenitost	• ***Specijalizirani*** (za specifične probleme) • ***Opći*** (linearno programiranje, redovi čekanja, ...)
Stepen kvantifikacije	• ***Kvalitativni*** o "mentalni" (I nivo apstrakcije) o "verbalni" (govorni i pisani izrazi) • ***Kvantitativni*** (koriste formalni matematski jezik – relacije) o "statistički" (regresioni, redovi čekanja, Markovljevi lanci, ...) o "optimizacioni" (izbor najbolje alternative) • ***Heuristički*** (rješenja dobijena na osnovu iskustva – ne moraju biti optimalna, ali su obično dovoljno dobra) • ***Simulacioni*** (eksperimentiranje na računarskom modelu)
Dimenzionalnost	• ***Jednodimenzionalni*** • ***Dvodimenzionalni*** • ***Višedimenzionalni*** (***konačno dimenzionalni***) • ***Beskonačno dimenzionalni***
Zatvorenost	• ***Zatvoreni*** • ***Otvoreni***

Posebna klasa modela su ***matematički modeli***. Matematički modeli su također idealizirana slika stvarnosti i oni, za opisivanje problema, koriste *matematičke izraze i simbole*. Na primjer, matematički izrazi $F = m\,a$, $U = R\,I$, $E = m\,c^2$, su matematički modeli određenih fizikalnih zakonitosti (II Newtonov-og zakona, Ohm-ovog zakona i Einstein-ove veze mase i energije, respektivno).

Matematički modeli imaju niz prednosti u odnosu na verbalne modele. Matematički model opisuje problem *koncizno*, te *jednoznačno određuje uzročno-posljedične veze pojedinih veličina*. Posebna prednost matematičkih modela je u mogućnosti korištenja vrlo moćnih matematičkih tehnika i računara pri analizi problema.

Pri izgradnji modela treba zadovoljiti dva, u odredjenom smislu proturječna zahtjeva:

- Model mora biti *što jednostavniji* (jednostavan *koliko god je to moguće*, ali *ne više od toga*);
- Model mora obuhvatiti *sve osobine sistema koje su bitne za problem koji se rješava*.

Ovo je dosta složen zahtjev i on se uobičajeno rješava u interakciji sa *fazom identifikacije i formulacije problema*. Dobro formuliran problem relativno je lako prevesti u odgovarajući matematički model i obratno.

U najvećem broju slučajeva primjene metoda operacionih istraživanja, kao model problema koji je potrebno riješiti javljaće se *matematički model*, a cilj će biti naći *najbolje* (*optimalno*) *rješenje*. Da bi se uopće moglo govoriti o problemu *izbora najboljih rješenja* (problem optimizacije) mora postojati sljedeće:

- *Ograničenja* koja moraju biti zadovoljena;
- Mogućnost *izbora* između više različitih *dozvoljenih rješenja* (tj. rješenja koja zadovoljavaju ograničenja);
- *Kriterij* na osnovu koga će se upoređivati *kvalitet* (*dobrota*) pojedinih rješenja.

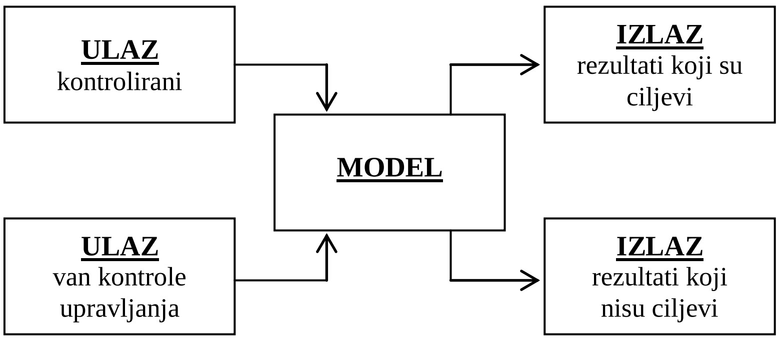
Problem izbora najboljih rješenja može, ali i ne mora biti postavljen u matematičkom obliku. Međutim, mi ćemo se u nastavku baviti samo problemima koji su zadani u matematičkom obliku.

Formalna matematička struktura za izbor najboljih rješenja sadrži:

- Skup ***promjenljivih*** i skup ***parametara***;
- ***Model***, odnosno sistem matematičkih relacija (ograničenja) koje povezuju *skupove promjenljivih* i *skupove parametara*;
- ***Kriterij*** koji zavisi od *promjenljivih* i *parametara*, koji se često naziva i ***funkcija cilja***;
- ***Metod*** za nalaženje najboljeg rješenja, odnosno proceduru (postupak) koja sadrži *strategiju traženja najboljeg rješenja*.

Pri tome se promjenljive mogu dodatno klasificirati na ***spoljnje promjenljive*** koje mogu biti *kontrolirane* (*upravljane*, *organizirane*) i *nekontrolirane* (*neupravljane*, *neorganizirane*), te ***unutarnje promjenljive*** na čije vrijednosti se utiče posredno preko spoljnih promjenljivih. Što se tiče *parametara*, na njih se u pravilu *ne može utjecati* (tj. oni *nisu kontrolabilni*) i u nekoj konkretnoj formalnoj strukturi smatra se da imaju *unaprijed određenu* (*zadanu*) *konstantnu vrijednost*.

U literaturi, koja se bavi operacionim istraživanjima, najčešće se pod nazivom “model” podrazumjeva par koji se sastoji od *funkcije cilja* i *skupa ograničenja*, pa ćemo mi u nastavku koristiti takav pristup. Formalna matematička struktura izbora najboljih rješenja se može šematski predstaviti sljedećom slikom:



Na kraju ove faze konstruira se *konkretni model* kojim se uspostavljaju *relacije* među *promjenljivim* i *parametrima* i definira *kriterij* na osnovu kojeg će se ocjenjivati *kvalitet* (efektivnost) *rješenja*. Model, koji se sastoji od *funkcije cilja* (*kriterija*) čija se *ekstremalna* (minimalna ili maksimalna) vrijednost traži i *skupa ograničenja* koja određuju *dopustivi skup rješenja* je najčešći oblik modela operacionih istraživanja i naziva se ***matematički program***. Oblast operacionih istraživanja koja se bavi ovom vrstom modela naziva se ***matematičko programiranje.***

- ***Primjer*** : Proizvođač A proizvodi jedan proizvod P_1 čija je cijena c_1. Za proizvodnju koristi mašinu M_1 čiji je kapacitet b_1 sati sedmično. Za obradu proizvoda P_1 na mašini M_1 potrebno je utrošiti $a_{1,1}$ sati (tehnološki normativ). Cilj je *maksimizirati prihod* koji se može ostvariti u toku jedne sedmice. Treba odrediti *broj proizvoda* (x_1) *koje treba proizvesti*. Proizvođač *može utjecati na to koliki će broj proizvoda proizvesti* ali *ne može utjecati na cijenu proizvoda, kapacitet mašine niti na tehničke normative*. Napraviti matematički model i predstaviti šematski formalnu matematičku strukturu problema.

Nije teško uvidjeti da se ukupna zarada odnosno prihod Z može izraziti kao $Z = c_1 x_1$, dok ukupan utrošak vremena na mašini M_1 iznosi $a_{1,1} x_1$. Stoga se problem u matematičkom obliku može iskazati u sljedećem obliku: Naći x_1 takav da se ostvari

$$\max Z = c_1 x_1$$

pod ograničenjima (uvjetima)

$$a_{1,1} x_1 \le b_1$$
$$x_1 \ge 0$$

Skraćeno, matematički oblik ovog problema zapisujemo kao

$$\arg\max Z = c_1 x_1$$

p.o.

$$a_{1,1} x_1 \le b_1$$
$$x_1 \ge 0$$

Oznaka "arg max" označava da se zapravo traži ne samo maksimum izraza koji slijedi, nego i *vrijednosti kontroliranih promjenljvih* (argumenti) za koje izraz koji slijedi postiže maksimalnu vrijednost, dok oznaka "p. o." naravno znači "pod ograničenjima" (u engleskoj literaturi se umjesto oznake "p. o." susreće "w. r. t.", što je skraćenica od "with respect to").

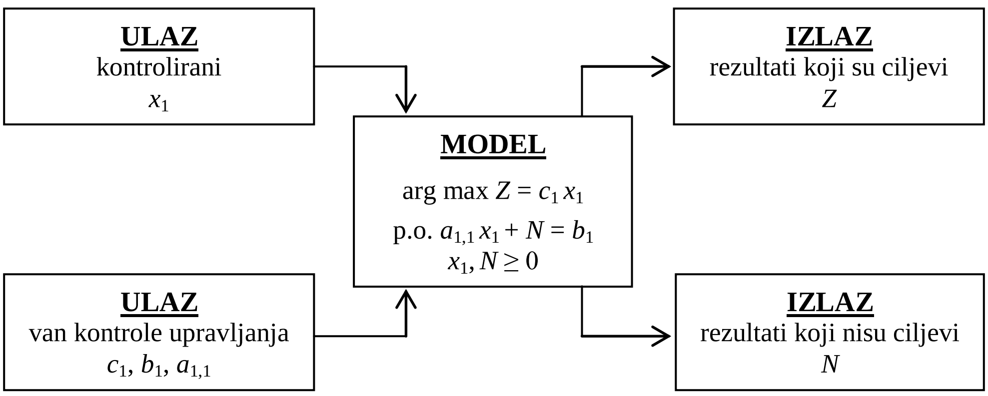
Ukoliko uvedemo pomoćnu promjenljivu N koja predstavlja *neiskorišteni dio kapaciteta mašine*, tada je očigledno $N = b_1 - a_{1,1} x_1$, tako da model možemo predstaviti i u sljedećem ekvivalentnom obliku, koji je *informativniji*, jer nam daje i dodatnu informaciju o eventualnoj neiskorištenosti mašine:

$$\arg\max Z = c_1 x_1$$

p.o.

$$a_{1,1} x_1 + N = b_1$$
$$x_1, N \ge 0$$

Shematski, ovaj model možemo prikazati sljedećom slikom:



Treba primijetiti i sljedeće. Mada je iz prirode problema posve jasno da ni veličine c_1, b_1 i $a_{1,1}$ ne mogu biti negativni brojevi (a ne samo x_1), ograničenja poput $c_1 \ge 0$, $b_1 \ge 0$ i $a_{1,1} \ge 0$ *ne ulaze u sastavni dio* *modela*. Radi se o tome da se ove veličine posmatraju kao *zadane vrijednosti* na koje nemamo utjecaja, i podrazumijeva se da su one zadane *korektno*, odnosno da ispunjavaju ta ograničenja. S druge strane, veličine poput x_1 i N predstavljaju *kontrolirane veličine* na koje *imamo utjecaj* i koje *tek treba da odredimo* u postupku rješavanja problema. Stoga su ograničenja poput $x_1 \ge 0$ i $N \ge 0$ *neophodna*, jer nam ona govore kakve vrijednosti kontroliranih veličina *ne smijemo birati*. Recimo, ograničenje $N \ge 0$ sprečava da izaberemo x_1 takav da $a_{1,1}\, x_1$ bude veće od b_1, odnosno da opteretimo mašinu više nego što je dopušteno.

Ovaj problem je trivijalan i rezultat se može lako dobiti intuitivnim putem. Naime, s obzirom da se proizvodi samo jedan proizvod i da nas ništa drugo ne ograničava osim limitiranog kapaciteta mašine, jasno je da će najveći prihod biti kada se proizvodi *što je god moguće više* tog proizvoda (u skladu sa kapacitetom mašine), odnosno proizvođač bi trebao koristiti cjelokupan kapacitet mašine ($N = 0$), tako da je optimalno rješenje $x_1 = b_1 / a_{1,1}$. Zarada koja se tom prilikom ostvaruje iznosi $Z = c_1\, x_1 = b_1\, c_1 / a_{1,1}$.

Do istog zaključka možemo doći i na stroži način, analitičkim putem. Naime, kako je poznato da je $a_{1,1}$ nenegativno, to iz ograničenja $a_{1,1}\, x_1 \le b_1$ slijedi $x_1 \le b_1/a_{1,1}$. Zajedno sa ograničenjem $x_1 \ge 0$ dobijamo $0 \le x_1 \le b_1/a_{1,1}$ (kako je i b_1 nenegativno, ova dvojna nejednakost je smislena, inače bi dozvoljeni opseg za x_1 bio prazan). Dalje, kako je c_1 nenegativno, to je $Z = c_1\, x_1$ *monotono rastuća* funkcija od x_1, te će ona dostići najveću vrijednost kada i x_1 bude imao najveću dozvoljenu vrijednost, a to je $x_1 = b_1/a_{1,1}$. Ovim smo matematički strogo opravdali prethodno intuitivno rezonovanje.

Važno je primijetiti da nam je pri rješavanju ovog problema od velike važnosti bila činjenica da na osnovu prirode problema koji potiče iz realnosti znamo da c_1, b_1 i $a_{1,1}$ ne mogu biti negativni. Kada bismo isti problem posmatrali kao čisto matematički problem (koji ne mora nužno imati ikakve veze sa realnošću) i kada ništa ne bismo znali o znaku c_1, b_1 i $a_{1,1}$, rješavanje bi se osjetno otežalo, jer neki od rezona koji smo prethodno primijenili ne bi bili valjani. Na primjer, ako je $c_1 < 0$, tada $Z = c_1\, x_1$ nije monotono rastuća nego *monotono opadajuća* funkcija od x_1, tako da će ona dostići najveću vrijednost kada x_1 dostigne najmanju moguću vrijednost, a to je, uz pretpostavku da su b_1 i $a_{1,1}$ i dalje nenegativni, $x_1 = 0$. Ni ova situacija nije posve lišena realnosti. Naime, *negativna cijena* može se tumačiti kao *gubitak* odnosno "*šteta*", tako da pri negativnoj cijeni od proizvodnje proizvoda imamo samo štete. Jasno je da je u tom slučaju optimalno ponašanje *da proizvod ne proizvodimo nikako* (jer nemamo nikakvih ograničenja koja nas tjeraju da ga moramo proizvoditi), odnosno $x_1 = 0$. Pogledajmo sada šta bi se desilo ako bi bilo $a_{1,1} < 0$ (što se već ne može realno opravdati u razmatranom primjeru). Tada iz ograničenja $a_{1,1}\, x_1 \le b_1$ ne bi slijedilo $x_1 \le b_1/a_{1,1}$ nego $x_1 \ge b_1/a_{1,1}$. Stoga, ako je c_1 pozitivno, ništa ne ograničava x_1 odozgo, pa Z može biti *po volji veliko*, tako da optimalno rješenje *ne postoji*. S druge strane, ako je i c_1 negativno, za maksimizaciju Z treba x_1 biti što je god moguće manji, te je optimalno rješenje $x_1 = 0$ pri pozitivnom b_1, a $x_1 = b_1/a_{1,1}$ pri negativnom b_1 (jer je tada $b_1/a_{1,1}$ veće od nule, a x_1 mora biti veće od $b_1/a_{1,1}$). Konačno, pri negativnom b_1 i pozitivnom $a_{1,1}$ ograničenja $x_1 \ge 0$ i $a_{1,1}\, x_1 \le b_1$ odnosno $x_1 \le b_1/a_{1,1}$ nije moguće istovremeno zadovoljiti, tako da u ovom slučaju *nikakvo dopustivo rješenje ne postoji*, a pogotovo ne optimalno.

Sve u svemu, ako bismo postavljeni model posmatrali kao *čisto matematički problem*, bez ikakve nužne veze sa realnošću i bez ikakvih apriornih informacija o prirodi parametara c_1, b_1 i $a_{1,1}$, morali bismo zaključiti da njegovo optimalno rješenje

- Iznosi $x_1 = b_1/a_{1,1}$ ako je $c_1 > 0$, $b_1 > 0$ i $a_{1,1} > 0$ ili $c_1 < 0$, $b_1 < 0$ i $a_{1,1} < 0$;
- Iznosi $x_1 = 0$ ako je $c_1 < 0$ i $b_1 > 0$;
- Ne postoji (zbog neograničenosti funkcije cilja) ako je $c_1 > 0$ i $a_{1,1} < 0$;
- Ne postoji (zbog nesaglasnosti ograničenja) ako je $b_1 < 0$ i $a_{1,1} > 0$.

U prethodnoj analizi nije uzeta u obzir granična mogućnost da neki od parametara c_1, b_1 i $a_{1,1}$ bude nula. Pogledajmo malo šta bi se desilo u tom slučaju. Ako bi bilo $c_1 = 0$, tada bi uvijek bilo $Z = 0$, neovisno od x_1, pa bi *svako dozvoljeno rješenje* (tj. ono koje zadovoljava ograničenja) *bilo ujedno i optimalno*. Ako bi bilo $b_1 = 0$, tada bi uz nenegativno $a_{1,1}$ jedino *dozvoljeno rješenje* bilo $x_1 = 0$ (koje bi tada ujedno bilo i optimalno, dok bi uz negativno $a_{1,1}$ faktički jedino ograničenje bilo $x_1 \ge 0$. Stoga pri pozitivnom c_1 optimalno rješenje ne bi postojalo (Z bi moglo rasti bez granica), dok bi pri negativnom c_1 optimalno rješenje bilo također $x_1 = 0$. Konačno, ako je $a_{1,1} = 0$, ograničenje $a_{1,1}\, x_1 \le b_1$ postaje $0 \le b_1$. Ako je pri tome b_1 nenegativno, ovo ograničenje je ispunjeno samo po sebi, tako da kao jedino ograničenje ostaje $x_1 \ge 0$ i vrijedi ista diskusija kao i maloprije. Najzad, ako je b_1 negativno, ograničenja se ne mogu zadovoljiti i *dopustiva rješenja ne postoje* (tim prije ni optimalna).

Prethodna diskusija pokazuje od kolike nam je važnosti bila činjenica da iz realnosti problema kao poznata činjenica slijedi da su b_1 i $a_{1,1}$ nenegativni, te da isto najvjerovatnije vrijedi i za c_1 (mada bi se negativnom c_1 i moglo naći neko realno opravdanje). Bez ovih činjenica, dakle bez ikakvih pretpostavki o znaku c_1, b_1 i $a_{1,1}$, čak se i rješavanje ovako banalnog problema znatno komplicira.

Vratimo se sada *nazad u realnost* i razmotrimo *koliko je postavljeni model zaista realan*. Primijetimo da kod nekih vrsta proizvoda *nemamo ograničenja* da proizvedena količina mora biti *cijeli broj*. Na primjer, ako proizvodimo brašno, nema nikakvog razloga da moramo proizvoditi cijeli broj kilograma (ili tona, ili ma koje druge jedinice mjere). S druge strane, ukoliko se radi o proizvodu koji se proizvodi *na komad* (a sama postavka zadatka sugerira da je zaista tako, jer se traži *broj proizvoda* koje treba proizvesti), tada se kao vrlo važno ograničenje javlja zahtjev da *proizvedena količina mora biti cijeli broj*. Na primjer, ako proizvodimo stolice, nema nikakvog smisla proizvesti 7 cijelih stolica i još 2/5 jedne stolice. Stoga, ukoliko se radi o proizvodu koji se proizvodi na komad, neophodno je uvesti i takvo ograničenje. Stoga bi modificirai model izgledao ovako:

$$\arg\max Z = c_1 x_1$$

p.o.

$$a_{1,1} x_1 \le b_1$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_1 \in \mathbf{Z}$$

Ili, uz uvođenje pomoćne promjenljive N,

$$\arg\max Z = c_1 x_1$$

p.o.

$$a_{1,1} x_1 + N = b_1$$
$$x_1, N \ge 0$$
$$x_1 \in \mathbf{Z}$$

Treba naglasiti da se operacioni istraživači često *plaše* ograničenja na cjelobrojnost promjenljivih, jer takva ograničenja u mnogim slučajevima *drastično otežavaju* rješavanje problema (većina matematskog aparata kontinualne matematike *pada* u prisustvu takvih ograničenja). Srećom, u ovom konkretnom problemu, to dodatno ograničenje nije prevelik problem. Naime, nije teško uvidjeti da je u ovom problemu dovoljno eventualne decimale u rješenju za x_1 koje se dobije bez uvjeta cjelobrojnosti prosto *odbaciti* da se dobije optimalno rješenje problema u kojem imamo uvjet cjelobrojnosti (nažalost, to obično nije slučaj u iole složenijim problemima). Drugim riječima, optimalno rješenje ovako modificiranog problema glasi $x_1 = \lfloor b_1 / a_{1,1} \rfloor$ gdje “$\lfloor\ \rfloor$” označava “cijeli dio od”, dok optimalna zarada iznosi $Z = c_1 \lfloor b_1 / a_{1,1} \rfloor$. Treba primijetiti da u ovako modificiranom problemu, pri dostizanju optimuma ne mora biti $N = 0$, nego je, u općem slučaju, $N = b_1 - a_{1,1} \lfloor b_1 / a_{1,1} \rfloor$ (u slučaju kada je $a_{1,1}$ cjelobrojno, ovaj izraz se može interpretirati kao ostatak pri dijeljenju b_1 sa $a_{1,1}$.

Prethodni problem je bio trivijalan, između ostalog i zbog činjenice da je *jednodimenzionalan*, odnosno u njemu smo imali *samo jednu upravljivu promjenljivu*. Međutim, složenost problema operacionih istraživanja tipično *drastično raste sa porastom broja promjenljivih*, često čak i *eksponencijalnom brzinom*. Sljedeći primjer ilustrira da je problem vrlo sličan prethodnom, samo ovaj put sa dvije kontrolabilne promjenljive, već znatno složeniji.

- ***Primjer***: Proizvodjač A proizvodi dva proizvoda P_1 i P_2 čije su cijene c_1 i c_2 respektivno. Za proizvodnju se koriste tri mašine M_1, M_2 i M_3 čiji su kapaciteti respektivno b_1, b_2 i b_3 sata sedmično. Za obradu proizvoda P_1 na mašinama M_1, M_2 i M_3 potrebno je respektivno utrošiti $a_{1,1}$, $a_{2,1}$ i $a_{3,1}$ sati, a za obradu proizvoda P_2 respektivno $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ i $a_{3,2}$ sati (tehnološki normativi). Cilj je i ovaj put *maksimizirati prihod* koji se može ostvariti u toku jedne sedmice, odnosno odrediti *količinu jednog odnosno drugog proizvoda* (x_1 i x_2) *koje treba proizvesti*. Proizvođač ponovo može utjecati na to koliki će broj jednog odnosno drugog proizvoda proizvesti ali ne može utjecati na cijenu proizvoda, kapacitet mašine niti na tehničke normative. Napraviti matematički model ovog problema.

Ovdje je namjerno umjesto termina “broj proizvoda” korišten termin “količina proizvoda” da ne bismo morali voditi računa o uvjetima cjelobrojnosti. Slično kao u prethodnom primjeru, nije teško uvidjeti da se ukupna zarada odnosno prihod Z može izraziti kao $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$, dok ukupni utrošci vremena na mašinama M_1, M_2 i M_3 iznose respektivno $a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2$, $a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2$ i $a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2$. Stoga se problem u matematičkom obliku može iskazati kao:

$\arg\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

p.o.

$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 \le b_1$
$a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 \le b_2$
$a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 \le b_3$
$x_1, x_2 \ge 0$

Alternativno, uvedemo li pomoćne promjenljive N_1, N_2 i N_3 koje respektivno modeliraju neiskorištene kapacitete mašina M_1, M_2 i M_3, problem možemo iskazati i u sljedećem obliku:

$\arg\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

p.o.

$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + N_1 = b_1$
$a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + N_2 = b_2$
$a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 + N_3 = b_3$
$x_1, x_2, N_1, N_2, N_3 \ge 0$

Ovaj problem već nije trivijalan (mada za svakoga ko poznaje barem osnove operacionih istraživanja nije ni težak, jer se radi o tipičnom modelu tzv. ***linearnog programiranja*** za koji su tehnike rješavanja dobro razrađene). Ovdje je problem što je priroda ograničenja takva da što više proizvedemo prvog proizvoda, smijemo proizvesti manje drugog proizvoda, i obrnuto. Očigledno je tu potrebno pronaći *kompromis* koji daje najbolje rezultate. Ono što nam intuicija govori je sljedeće. Ukoliko je proizvod P_1 “*dovoljno skup*” u odnosu na proizvod P_2 (šta tačno znači to “dovoljno skup” zavisi od *odnosa parametara*, a kako tačno, za to nam sama intuicija *nije dovoljna*) tada se isplati proizvoditi *samo njega* i to *što god moguće više*, tako da je $x_2 = 0$, dok x_1 treba biti što je god moguće veći broj koji istovremeno zadovoljava ograničenja $a_{1,1} x_1 \le b_1$, $a_{2,1} x_1 \le b_2$ i $a_{3,1} x_1 \le b_3$, odnosno treba biti $x_1 = \min\{b_1/a_{1,1}, b_2/a_{2,1}, b_3/a_{3,1}\}$. Analogan rezon vrijedi i ako je proizvod P_2 “dovoljno skup” u odnosu na proizvod P_1. Međutim, najčešća situacija u praksi je da niti jedan od proizvoda P_1 odnosno P_2 nije *očigledno dominantan* u odnosu na drugi, tako da je isplativo proizvoditi *oba proizvoda*, samo je pitanje *koliko* i u *kojem omjeru*. U ovom slučaju intuicija je *potpuno bespomoćna*.

Sve u svemu, u navedenom primjeru, u ovisnosti od konkretnih vrijednosti parametara c_1, c_2, b_1, b_2, b_3, $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,1}$ i $a_{3,2}$, postoji čak 5 različitih situacija, odnosno 5 različitih formula kojima se izražava rješenje, čak i uz realno opravdane pretpostavke da su svi ovi parametri nenegativni. Sa porastom broja varijabli, za probleme sličnog tipa, broj takvih situacija raste *eksponencijalno* sa brojem varijabli. Zbog toga se problemi ovog tipa uglavnom ne rješavaju posmatrajući parametre kao *opće brojeve*, nego isključivo za *konkretne*, *brojčane vrijednosti* parametara. Eventualno se u nekim situacijama manji broj parametara posmatraju kao opći brojevi (uz fiksirane ostale vrijednosti parametara) i proučava se *kako njihova promjena utječe na promjenu rješenja*. Takvim problemima bavi se disciplina poznata kao ***parametarsko programiranje***.

Ovaj primjer je još interesantan i kao ilustracija da odsjecanje decimala može biti *veoma loš način* rješavanja problema koje nameću eventualni uvjeti na cjelobrojnost promjenljivih. Naime, već u ovom primjeru, odsjecanje decimala *neće uvijek dovesti do željenih rezultata* u slučaju da se traži cjelobrojnost. Ovo ćemo demonstrirati za konkretne brojčane vrijednosti parametara $c_1 = 15$, $c_2 = 1$, $b_1 = 7$, $b_2 = 55$, $b_3 = 220$, $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 1$, $a_{2,1} = 1$, $a_{2,2} = 10$, $a_{3,1} = 201$ i $a_{3,2} = 1$. Primjenom tehnika linearnog programiranja, koje ćemo raditi kasnije, dobija se da optimalno rješenje (bez dodatnih zahtjeva na cjelobrojnost x_1 i x_2) iznosi $x_1 = 0.825$ i $x_2 = 5.4175$, za koje se postiže optimalna zarada $Z = 17.7925$. Pretpostavimo sada da se zahtijeva cjelobrojnost x_1 i x_2. Ukoliko u prethodnom rješenju prosto odsječemo decimale, dobija se rješenje $x_1 = 0$ i $x_2 = 5$ koje *zadovoljava sva postavljena ograničenja*, ali njemu odgovara *vrlo loša* zarada $Z = 5$. Ukoliko se umjesto prostog *odsjecanja* decimala odlučimo na *zaokruživanje* na najbliži cijeli broj, dobijamo rješenje $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$ koje nažalost *nije dopustivo*, jer ne zadovoljava treće ograničenje $a_{3,1} x_1 + a_{3,2} x_2 \le b_3$ (konkretno $201 x_1 + 10 x_2 \le 220$). S druge strane, primjenom specijalnih (znatno komplikovanijih) tehnika za rješavanje problema ovog tipa ali uz ograničenja na cjelobrojnost promjenljivih, može se pronaći da optimalno rješenje uz poštovanje ograničenja na cjelobrojnost glasi $x_1 = 1$ i $x_2 = 1$ (dakle, znatno je udaljeno od optimalnog rješenja bez zahtjeva na cjelobrojnost) za koji se postiže optimalna zarada $Z = 16$. Ovaj primjer ilustrira da ograničenja na cjelobrojnost *ne smijemo olako ignorirati* (što se, nažalost, u praksi dosta često radi).

U prethodnom izlaganju dotakli smo i problem ***nalaženja rješenja***, što zapravo predstavlja sljedeću fazu primjene operacionih istraživanja nakon faze formiranja modela. Kao što smo vidjeli, riješiti matematički model problema znači *odrediti veličine upravljačkih* (*kontrolabilnih*) *promjenljivih* i *veličine nekontrolabilnih promjenljivih* za *zadane vrijednosti parametara*. Pošto je u operacionim istraživanjima cilj naći *najbolje* (*optimalno*) rješenje, potrebno je, znači, odrediti takve veličine upravljačkih promjenljivih koje zadovoljavaju *sva ograničenja* i koje funkciji cilja daju *ekstremalnu vrijednost*. Da bi se to postiglo, potrebno je naći ili razviti odgovarajući (najčešće računarski potpomognuti) *postupak za rješavanje postavljenog modela*. Mada može izgledati da je to glavna težina ukupnog zadatka, to najčešće nije slučaj. Ponekad je ova faza izuzetno jednostavna ako se problem može riješiti *nekim od standardnih algoritama* operacionih istraživanja za koji postoji raspoloživ softverski paket. Najveći napori su obično u prethodnim i narednim koracima, u koje je uključena i ***postoptimalna analiza*** o čemu će kasnije biti riječi.

Za rješavanje matematičkih modela operacionih istraživanja mogu se koristiti:

- Metode ***analitičkog rješavanja***;
- Metode ***numeričkog rješavanja***
- Metode ***simulacije***.

Osnovne karakteristike ova tri pristupa će u nastavku biti prikazane kroz primjer rješavanja jednog jednostavnog integrala.

➢ ***Primjer***: Koristeći analitički, numerički i simulacioni pristup, izračunati vrijednost određenog integrala

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

pri čemu je podintegralna funkcija $f(x) = x^2$.

Analitički pristup zasniva se na primjeni poznatih stavova iz *matematičke analize*, u ovom slučaju konkretno ***Newton–Leibniz-ove teoreme*** prema kojoj je vrijednost prethodnog integrala jednaka $F(1) - F(0)$, gdje je $F(x)$ tzv. ***primitivna funkcija*** funkcije $f(x)$, odnosno takva funkcija za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$. U konkretnom primjeru takva funkcija je očigledno $F(x) = x^3/3$, pri čemu sam postupak nalaženja takve funkcije (poznat iz matematičke analize) nije od interesa za ono što ovdje želimo reći. U svakom slučaju, vrijednost ovog integrala iznosi

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Analitičko rješenje posjeduje ima tu dobru stvar što je *potpuno tačno*. Međutim, analitičko rješavanje ima i svoje *bitne nedostatke*, koje ćemo ilustrirati upravo na problemima ovog tipa (rješavanje određenog integrala), mada slični zaključci vrijede i za mnogo širu klasu problema. Prvo, u općem slučaju nalaženje funkcije $F(x)$ nije nimalo jednostavno (općenitije, analitičke metode su nerijetko *jako komplicirane*). Drugo, za veliku klasu podintegralnih funkcija $f(x)$ primitivne funkcije, mada postoje, ne mogu se izraziti ni preko kakvih funkcija poznatih u matematičkoj analizi. Takav primjer imamo, na primjer, za podintegralnu funkciju $f(x) = 1/(x + \cos x)$, čija se primitivna funkcija uopće ne može izraziti ni preko kakvih općeprihvaćenih matematičkih funkcija (općenitije, analitičke metode *nisu uvijek primjenljive*). Treći problem ćemo uvidjeti ukoliko umjesto jednostavne podintegralne funkcije $f(x) = x^2$ razmotrimo isti problem samo sa donekle složenijom podintegralnom funkcijom

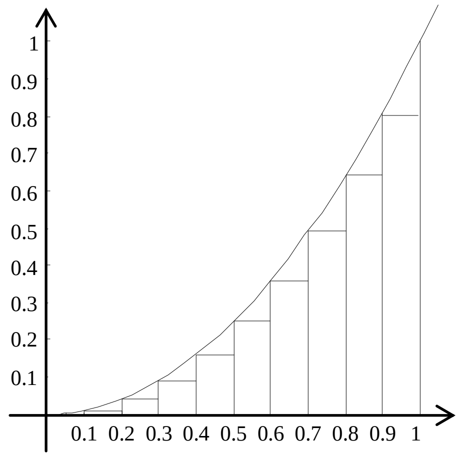
$$f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{5-x^2}$$

Ne ulazeći u detalje rješavanja, analitičko rješenje ovog problema glasi

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{5}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Mada je nesporno da je ovo rješenje *potpuno tačno*, ovakvo rješenje je *od male koristi* recimo nekom tesaru koji treba da ispili neku dasku ukoliko se neophodna dužina daske izražava upravo rješenjem ovog integrala (njemu bi bilo znatno korisnije da zna da rješenje iznosi *otprilike* 3.3069). Naravno, na osnovu ovog tačnog rješenja mi možemo naći *približno numeričko rješenje sa tačnošću koliko god to želimo*, samo za tu svrhu nam je potreban neki softver koji je u stanju računati kvadratni korijen, te funkcije "ln" i "arc sin", ili barem kalkulator koji je u stanju računati ove operacije (generalnije, rješenja koja se dobiju primjenom analitičkih metoda nerijetko predstavljaju *problem sam za sebe*). Često se razlika između apstraktnog (teorijskog) matematičara i matematičara praktičara ilustrira primjerom rješavanja matrične jednačine $\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gdje su $\mathbf{A}$ i $\boldsymbol{b}$ zadana matrica i zadani vektor, dok je $\boldsymbol{x}$ nepoznati vektor. Za apstraktnog matematičara, ovo je krajnje jednostavan problem čije rješenje glasi $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Međutim, matematičar praktičar će bez sumnje prigovoriti da je u ovakvom "rješenju" *polazni problem zamijenjen novim problemom* (koji je čak *kompliciraniji od polaznog problema*): kako naći inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ zadane matrice $\mathbf{A}$.

Pređimo sada na *numerički pristup* rješavanju. Ovim pristupom se gotovo uvijek dobija samo *približno rješenje*. Ideja numeričkog rješavanja je da problem koji rješavamo *aproksimiramo* srodnim problemom čije je rješenje približno jednako rješenju polaznog problema, a koji je takav da se može riješiti uz pomoć posve elementarnih računskih operacija. Za konkretan problem koji razmatramo, iskoristićemo poznatu činjenicu da je vrijednost traženog integrala zapravo jednaka iznosu *površine* ograničene x-osom, krivuljom $y = f(x)$ i pravcima $x = 0$ i $x = 1$. Ovu površinu možemo približno izračunati tako što ćemo je aproksimirati *jednostavnijom površinom*. Podijelimo recimo interval $(0, 1)$ na $N = 10$ jednakih podintervala širine $1/N = 0.1$. Tada možemo traženu površinu aproksimirati skupom pravougaonika čija je širina jednaka širini podintervala (tj. 0.1), a visina vrijednosti funkcije u lijevoj rubnoj tački podintervala, kao što je prikazano na sljedećoj slici:



Kako je površina pravougaonika jednaka proizvodu širine i visine, dobijamo:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.1 \cdot (0^2 + 0.1^2 + 0.2^2 + 0.3^2 + 0.4^2 + 0.5^2 + 0.6^2 + 0.7^2 + 0.8^2 + 0.9^2) =$$

$$= 0.1 \cdot (0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81) = 0.285$$

Ovo rješenje je relativno blizu tačnom rješenju $1/3 \approx 0.33333$, ali se ipak i dosta razlikuje od njega. Međutim, izvršimo li sličnu podjelu na $N = 100$ podintervala, na analogan način dobijamo:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.01 \cdot (0^2 + 0.01^2 + 0.02^2 + \ldots + 0.99^2) = 0.01 \cdot \sum_{i=0}^{99} (0.01i)^2 = 0.32835$$

Vidimo da već imamo bolje slaganje. Za $N = 1000$ dobili bismo još bolji rezultat 0.332834. Može se zaključiti da se sa povećavanjem broja podintervala, odnosno smanjivanjem širine podinvervala, povećava tačnost izračunavanja, ali povećava količina neophodnog računa. Generalno, kod svih numeričkih pristupa rješavanju problema, povećavanjem nivoa detalja sa kojim ulazimo u aproksimaciju *povećava se tačnost, ali i količina neophodnih izračunavanja*. Ovo zapravo vrijedi *samo u teoriji*, jer se u stvarnosti sa porastom broja izračunavanja povećava i greška koja se akumulira zbog netačnosti u pojedinim individualnim izračunavanjima, tako da nakon neke granice dalje usitnjavanje *umjesto da smanjuje*, *povećava ukupnu grešku*, tako da je i tu potrebno naći kompromis.

U razmotrenom primjeru računanja integrala, ako bismo, teoretski, u krajnjem slučaju pustili da dužina podintervala teži nuli, broj vrijednosti funkcije koji bi se uzimao u račun težio bi u beskonačnost. Tada bismo dobili beskonačnu sumu beskonačno malih površina (što u stvari na neki način i predstavlja izvornu definiciju integrala funkcije) i tačnu vrijednost integrala. Kako je razmatrana podintegralna funkcija dovoljno jednostavna, to se u ovom primjeru može izvesti i egzaktno. Naime, ako izvršimo podjelu na N podintervala, imaćemo

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{i}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^3}\sum_{i=0}^{N-1} i^2$$

Slučajno se suma koja se ovdje javlja može eksplicitno izraziti u funkciji od broja podintervala N, i ona iznosi $N(N-1)(2N-1)/6$ (sam način kako se dolazi do ovog rezultata ovdje nije bitan), tako da je

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{(N-1)(2N-1)}{6N^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}$$

Odavde se očigledno vidi da sa porastom N izračunata vrijednost teži ka tačnom rezultatu $1/3$. Opisani princip je, u osnovi, istovjetan pristupu koji je koristio Arhimed da izvede formulu za *zapreminu piramide* (mada se izumiteljem određenog integrala obično smatra Leibniz, ideje koje vode ka određenom integralu mogu se pronaći već kod Arhimeda).

Mada numerički pristup rješavanju ima taj nedostatak da gotovo nikada ne daje potpuno tačno rješenje, ovaj pristup je primjenljiv na *mnogo širu klasu problema*. Tako se, recimo, numeričkim metodima mogu sa po volji dobrom tačnošću izračunati praktično *svi određeni integrali*, uključujući i one za koje je analitičkim putem nemoguće izvršiti izračunavanje.

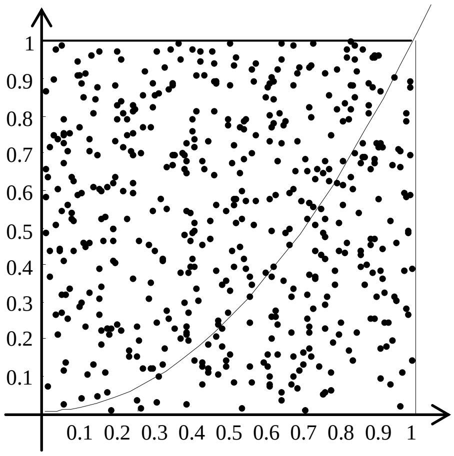
Treba napomenuti da svi metodi numeričkog računanja *nisu jednako dobri*, odnosno da ima manje preciznih i više preciznih metoda. Na primjer, umjesto aproksimacije pravougaonicima, mnogo bolju aproksimaciju mogli bismo dobiti korištenjem *trapeza*, čija se površina također jednostavno računa. Uz takvu aproksimaciju, mogli bismo dobiti mnogo bolju tačnost uz manje računanja, odnosno uz manju vrijednost N. Recimo, za razmatrani primjer, koristeći aproksimaciju zasnovanu na trapezima, već za $N = 100$ dobili bismo veoma dobar rezultat 0.33335.

Razmotrimo sada *simulacioni pristup* rješavanju. Bez obzira na činjenicu da su numerički metodi primjenljivi na znatno širu klasu problema nego analitički metodi, oni ipak zahtijevaju da relacije kojima se opisuje model problema budu *tačno poznate*. Na primjer, za numeričko računanje određenog integrala, neophodno je barem da bude poznat tačan oblik funkcije $f(x)$. S druge strane, često se dešava da relacije kojima se opisuje model problema nisu poznate, ali je moguće *izvršiti eksperiment* kojim se može utvrditi da li *nasumično generirano rješenje* zadovoljava ograničenja, koliko je "dobro" takvo rješenje (tj. kakva je funkcija cilja za to rješenje), itd. U takvim slučajevima jedino što nam preostaje je simulacioni pristup rješavanju.

Pretpostavimo, recimo, da nam u razmatranom primjeru računanja integrala, nije poznat tačan oblik funkcije $f(x)$ ali da je moguće izrvšiti eksperiment kojim ćemo utvrditi da li nasumično generirana tačka pada unutar područja čija površina P predstavlja rješenje integrala ili ne. Tada možemo koristiti sljedeći pristup. Uzmimo neko područje jednostavnog oblika (nazovimo ga *referentno područje*) takvo da razmatrano područje leži u potpunosti unutar njega. U našem slučaju, takvo referentno područje može biti recimo kvadrat sa tjemenima u tačkama $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(1, 0)$. Neka je P_{ref} površina referentnog područja. Tada, na osnovu teorije vjerovatnoće, slijedi da vjerovatnoća da nasumično generirana tačka koja leži unutar referentnog područja također leži i unutar razmatranog područja iznosi $p = P / P_{ref}$ (inače, simulacije u kojima se koriste *nasumično generirani objekti* nazivaju se ***Monte-Carlo simulacije***). S druge strane, ukoliko eksperiment sa nasumično generiranim tačkama izvršimo N puta i ukoliko se pri tome pokaže da je generirana tačka pala u razmatrano područje ukupno N_P puta, tada na osnovu *zakona velikih brojeva* slijedi da pri dovoljno velikom N vrijedi približna jednakost $p \approx N_P / N$, pri čemu *pouzdanost* ove približne relacije raste sa porastom N (u smislu da se vjerovatnoća da će biti velikih odstupanja između lijeve i desne strane ove približne jednakosti smanjuje sa porastom N). Izjednačavanjem ova dva izraza za p dobija se sljedeća približna jednakost (čija je pouzdanost tim veća što je veće N):

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = P \approx P_{ref}\,\frac{N_P}{N}$$

Kako je referentno područje jednostavnog oblika, njegova površina P_{ref} se lako računa, pa se desna strana ovog izraza lako računa nakon što je eksperimentalno određeno N_P (uz zadano N). U razmatranom konkretnom primjeru je $P_{ref} = 1$, pa se prethodni izraz svodi prosto na N_P/N. Sljedeća slika ilustrira ovu ideju sa $N = 500$ nasumično generiranih tačaka.



Sada ćemo demonstrirati kakvi se rezultati dobijaju korištenjem simulacionog pristupa. Za potrebe testiranja, simulacija je obavljena *na računaru*, koristeći *generator slučajnih brojeva* za nasumično generiranje tačaka. Pseudokod programa kojim je vršena simulacija izgleda ovako:

$N_P \leftarrow 0$
for $i = 1 \,..\, N$
  $x \leftarrow RandomReal(0 \,..\, 1)$
  $y \leftarrow RandomReal(0 \,..\, 1)$
  if $y \le x^2$
    $N_P \leftarrow N_P + 1$
return N_P / N

Jasno je da, s obzirom da se koriste slučajni brojevi, rezultat *ne mora biti isti nakon svake obavljene simulacije*. Na primjer, 5 različitih izvršenih simulacija uz $N = 500$ dale su sljedeće rezultate:

0.344 0.324 0.316 0.358 0.306

Vidimo da se rezultati razlikuju od simulacije do simulacije, ali svi su relativno bliski tačnom rezultatu $1/3 \approx 0.33333$. Slično za $N = 5000$, rezultati 5 izvršenih simulacija bili su sljedeći:

0.3308 0.3356 0.3346 0.3308 0.3372

Očigledno su ovaj put sve simulacije dale barem prve dvije decimale potpuno tačne. Slično, za $N = 50000$, rezultati 5 izvršenih simulacija bili su sljedeći:

0.33452 0.33288 0.33556 0.33284 0.33014

Najzad, za $N = 500000$ imali smo sljedeće rezultate za 5 izvršenih simulacija:

0.332632 0.332728 0.332674 0.333552 0.333414

Vidimo da se tačnost polako ali sigurno povećava kako N raste. Isto tako, sa porastom N rezultati se *manje rasipaju*, odnosno manje se razlikuju od simulacije do simulacije.

Već smo rekli da je simulaciono rješavanje jedino moguće u slučaju kada relacije koje opisuju model nisu tačno poznate. Postavlja se pitanje *da li je isplativo koristiti simulacioni pristup u slučaju kada je* *moguće koristiti numerički pristup*. Na prvi pogled izgleda da je odgovor negativan, jer iz izloženog primjera se čini da su simulacione metode jako neefikasne (u razmotrenom primjeru trebalo je oko 500000 eksperimenata da se dobije rješenje tačno na oko 3 decimale). Međutim, u stvarnosti nije tako. Naime, mada simulacioni pristup zaista nije efikasan pristup za računanje običnih određenih integrala, postoje problemi kod kojih je simulacioni pristup *znatno efikasniji* od ma kakvog numeričkog pristupa. Recimo, u slučaju *višedimenzionalnih integrala* (u 3 ili više dimenzija) simulacioni pristup je često efikasniji od numeričkog pristupa (u smislu da je istu tačnost moguće postići uz manje računanja), pri čemu porast efikasnosti raste sa brojem dimenzija. Recimo, simulacionim pristupom se vrlo efikasno računaju zapremine predmeta vrlo nepravilnih oblika, mada je načelno za rješavanje takvih problema moguće koristiti i numerički pristup.

Kao što je već ranije rečeno, u najvećem broju situacija cilj metoda operacionih istraživanja je naći najbolje, optimalno rješenje. Međutim, prema Nobelovcu Herbertu Simonu, u praktičnim problemima češće je cilj naći *dovoljno dobro* (engl. ***satisficing*** što je kombinacija riječi *satisfactory* i *optimizing*) nego optimalno rješenje. To je na prvom mjestu zbog toga što često postoji *konflikt* između više različitih željenih ciljeva – kriterija. Naime, pokazalo se da je efikasniji i realniji pristup naći rješenje koje u određenoj mjeri zadovoljava sve postavljene kriterije (dovoljno dobro rješenje) nego pokušavati pronaći jedinstveni kriterij koji bi uzeo u obzir različite ciljeve i bio ukupna mjera kvaliteta rješenja. Razlika između *optimalnog* i *dovoljno dobrog* je razlika između *teorije* i *prakse*. Jedan od vodećih operacionih istraživača u Engleskoj Samuel Eilon je rekao: “*Optimizacija* je nauka *krajnosti* (ekstrema), *dovoljno dobro* je umjetnost *izvodljivog*”.

U konkretnim realizacijama, u procesu izgradnje ukupnog rješenja, tim za operaciona istraživanja će nastojati da što više primijeni “nauku ekstrema”, bez obzira da li će na kraju stvarno doći do optimalnog rješenja. Naime, pri izboru konačnog pristupa, uzimaće u obzir i ostale faktore kao što su *koštanje studije operacionih istraživanja*, *vrijeme* koje je potrebno za *realizaciju studije* kao i *vrijeme* koje će biti potrebno da se *dobije rješenje* iz modela. Zbog toga se u primjenama operacionih istraživanja, u zavisnosti od slučaja, često koriste ***heurističke procedure*** (intuitivno dizajnirane procedure koje ne garantiraju optimalno rješenje) da bi se našlo *dobro suboptimalno rješenje*. Posljednjih godina je velik napredak napravljen u razvoju ***metaheurističkih*** procedura koje posjeduju generalnu strukturu i strateške smjernice za rješavanje pojedinih tipova problema.

Na osnovu prethodno rečenog, slijedi da se u procesu izbora metoda za rješavanje, može primijeniti jedan od sljedeća dva pristupa:

- Naći *optimalno rješenje uproštene verzije problema*;
- Naći *zadovoljavajuće dobro* (*približno optimalno*) *rješenje tačnijeg* ***i složenijeg modela*** razmatranog problema.

U praksi se često drugi pristup pokazuje kao pogodniji jer, s jedne strane, uproštavanja mogu dovesti u pitanje *validnost modela*, dok s druge strane, zbog uvijek prisutne *približnosti u određivanju parametara modela*, insistiranje na potpunoj tačnosti nalaženja optimalnog rješenja nema posebnog opravdanja. Naime, optimalno rješenje za model ne mora biti optimalno rješenje realnog problema.

Iz svih ovih razloga, vrlo je korisna dodatna analiza u smislu *šta – ako*, tj. analiza *šta* će se desiti sa optimalnim rješenjem *ako* se neke pretpostavke *promijene* u odnosu na model. Takva analiza se radi kada je *već nađeno optimalno rješenje modela* i naziva se ***postoptimalna analiza***. U postoptimalnu analizu je uključena i ***senzitivna analiza*** (odnosno ***analiza osjetljivosti***) u okviru koje se pronalaze parametri koji su *najkritičniji* za nađeno optimalno rješenje – tzv. ***senzitivni parametri***. Uobičajena definicija senzitivih parametara je sljedeća:

“Za matematički model, koji ima specificirane vrijednosti za sve parametre, senzitivni prametri modela su parametri koji se ne mogu promijeniti a da se ne promjeni optimalno rješenje.”

Identificiranje senzitivnih parametara je vrlo bitno i njihova se vrijednost mora utvrđivati sa posebnom pažnjom. Greške u procjeni vrijednosti senzitivnih parametra mogu dovesti do *suštinski pogrešnih rješenja*. Također, ako u fazi korištenja modela dođe do *promjene vrijednosti senzitivnog parametra,* onda je to siguran znak da treba *mijenjati rješenje*.

Nakon faze nalaženja rješenja, sljedeća faza u primjeni operacionih istraživanja je ***testiranje modela i rješenja***. Naime, razvoj složenog matematičkog modela je u određenom smislu sličan *razvoju složenog* *računarskog programa*. Poznato je da prva verzija računarskog programa uvijek ima *određeni broj grešaka*. Testiranjem se greške *otkrivaju* i *popravljaju*. Bez obzira što neke sitnije greške neće biti otkrivene u procesu testiranja, *bitne greške* će se *otkriti* i zadovoljavajuće *popraviti* i tada će program biti spreman za realnu upotrebu. Slično, prva verzija *složenog matematičkog modela* obično sadrži *mnogo nedostataka*. Neki bitni *faktori* i/ili *međuveze* mogu biti zanemareni, a neki *parametri* mogu biti *pogrešno procijenjeni*. Kroz proces testiranja nastoje se otkloniti svi *bitni nedostaci* modela. Taj proces *testiranja* i *poboljšanja* modela se naziva ***validacija modela*** (engl. *Model Validation*).

Vrlo je teško preciznije definirati *pravila za validaciju* modela jer taj proces dominantno zavisi od *prirode problema koji se modelira*. Međutim, postoje neki postupci koji uvijek pomažu u ovom procesu kao na primjer provjera da li su u svim matematskim izrazima *jedinice mjera korištene konzistentno*, zatim da li se sa promjenama vrijednosti upravljačkih promjenljivih *izlazne vrijednosti modela mijenjaju na prihvatljiv način* i slično.

Sistematičniji pristup validaciji je korištenje ***retrospektivnog testa***. Naime, kada je to izvodljivo, koriste se *historijski podaci* i provjerava da li model daje *iste rezultate kao što se to dešavalo u prošlosti*. Nedostatak retrospektivnog testa je u tom što *historija ne mora uvijek biti stvarni reprezent budućnosti*.

Ako se, tako, u prvom od gore navedenih primjera pretpostavi da je cijena $c_1 = 2000$ KM/kom, da je sedmični kapacitet mašine $b_1 = 32$ sata i da je tehnološki normativ $a_{1,1} = 15$ min/kom, proizvođač bi trebalo da proizvode $x_1 = 128$ komada sedmično i time ostvari zaradu od 256 000 KM. Međutim, pretpostavimo da je proizvođač proizveo 100 komada i ostvario zaradu od 200 000 KM. Na pitanje *zašto je proizvođač tako uradio*, moguća su dva odgovora:

- Proizvođač *nije znao* da može proizvesti i zaraditi više. U tom slučaju, model i rješenje su *ispravni*, samo što proizvođač *nije postupio* na način kako predviđa rješenje.
- Proizvođač, zbog uvjeta tržišta (ograničene potražnje), *nije mogao plasirati* više od 100 komada. U tom slučaju, model *nije bio korektan*, jer nije uključeno jedno ograničenje (ograničenje $x_1 \le 100$) . Model se, u ovom slučaju, mora *dograditi* i *ponovo riješiti i testirati*.

Veliki broj modela se koristi da bi se pomoću njih vršilo ***predviđanje događanja***. U takvim slučajevima, pomoću modela i podataka iz *prethodnih perioda* se predviđaju *ponašanja sistema u budućnosti*. Dobijeni rezultati iz modela se tada upoređuju sa rezultaima koji se ostvare u realnom sistemu i tako provjerava validnost modela.

Nakon obavljene validacije, sljedeća faza primjene operacionih istraživanja je ***priprema modela za korištenje***. Naime, nakon što je završeno testiranje modela, sljedeći bitan korak je instaliranje *dobro dokumentiranog sistema za primjenu modela prema uputstvima menadžmenta*. Taj sistem uključuje *model*, *proceduru za dobijanje rješenja* (uključujući *postoptimalnu analizu*) i *operativne procedure za njegovu implementaciju*.

U ovoj se fazi ispituju i *uvjeti pod kojim vrijedi dobijeno rješenje*. Ako se *mijenjaju parametri modela* (veličine na koje se ne može utjecati) ili se *mijenjaju odnosi između veličina* (relacije), može se desiti da se *mijenja i optimalno rješenje*. Stoga se mogu postaviti dva pitanja:

- Da li važe *pretpostavke o veličini parametara*? U prethodno navedenim primjerima može se postaviti pitanje da li važe veličine cijena, kapaciteta i tehnoloških normativa?
- Koliko je optimalno rješenje *osjetljivo* na *promjene parametara* ili *izmjenu relacija* u modelu?

Da bi se imala kontrola nad rješenjem, moraju se razviti *metode za ustanovljavanje značajnih promjena parametara*, kao i *pravila za modifikaciju rješenja u tim slučajevima*.

Sistem je u pravilu *računarski realiziran* i može sadržavati veći broj računarskih programa. *Baze podataka* i *upravljački informacioni sistemi* mogu osiguravati *ažurne ulaze za model* i u tom slučaju su potrebni *programi za međuvezu* (*interfejs*, engl. *interface*). Poslije korištenja programa za dobijanje rješenja, dodatni programi mogu *automatski implementirati dobijene rezultate*. U drugom slučaju, koristi se interaktivni računarski podržan sistem – ***sistem za podršku odlučivanju*** (engl. *Decision Support System*, skraćeno **DSS**). Drugi programi mogu generirati *upravljačke izvještaje* kako bi interpretirali izlaze iz modela i implikacije koje rezultati izračunavanja predviđaju.

Posljednja faza studije operacionih istraživanja je njena ***implementacija***, tj. *ostvarivanje efekata iz znanja* koja su ugrađena u kompletno rješenje. Vrlo je bitno da tim operacionih istraživača učestvuje u *početnoj fazi* implementacije da bi se utvrdilo da li je sistem *operativno upotrebljiv* i da provjeri da li su sve bitne greške otklonjene.

Metode operacionih istrazivanja su, u pravilu, *orjentirane na konkretnu upotrebu*. Nažalost, daleko je veći broj optimalnih rješenja, koja su *dobijena na papiru*, od onih koji su praktično primijenjena u praksi. Naime, primjena rješenja zahtijeva od operacionih istraživača *posebnu vještinu komuniciranja sa korisnicima*. Potrebno je motivirati i rukovodioce i izvršioce da primijene predložena rješenja. Problemi u primjeni se mogu svrstati u dvije velike grupe:

- *Rukovodioci* i *izvršioci neće* ili *nisu sposobni* da prihvate i sprovedu predloženo rješenje.
- *Tim operacionih istraživača nije dovoljno osposobljen* da rukovodiocima i izvršiocima, na pravilan način, obrazloži rezultate istraživanja i način njihovog korištenja.

Jedno istraživanje *osnovnih problema u primjeni* operacionih istraživanja dalo je sljedeće rezultate sa aspekta uočenih problema:

- *Teškoće plasiranja* metoda operacionih istraživanja na tržištu intelektualnih usluga;
- *Nedostaci u obrazovanju* visokih i srednjih rukovodilaca i nemogućnost da prihvate metode operacionih istraživanja;
- *Nedostatak odgovarajućih podataka* za primjenu modela;
- *Nedostatak vremena za analizu* problema na naučnoj osnovi;
- *Nesposobnost korisnika* da razumije metode i rezultate;
- *Teskoće u definiranju problema* iz (poslovne) prakse;
- *Zadovoljavajući kvalitet rezultata dobijenih uobičajenim metodama*, bez primjene nauke o poslovnom upravljanju;
- *Nedovoljan broj* operacionih istraživača;
- *Loša reputacija naučnika istraživača* u rješavanju praktičnih problema;
- *Osjećaj straha* kod pojedinih rukovodilaca.

Veliki problem je i činjenica da *najdelikatnije faze operacionih istraživanja tipično nisu predmet predavanja na univerzitetskim kursevima*. Kao što se plivanje može učiti jedino u vodi, da bi neko bio učitelj plivanja, *mora barem znati plivati*. Isto tako je za rješavanje složenih zadataka iz prakse, pored *poznavanja metoda i modela operacionih istraživanja*, razumijevanja *teorijskih osnova* na koje se ovi modeli oslanjaju, potrebno imati i *praktična iskustva* koja se jedino mogu steći kroz *praktične primjene ovih metoda i modela*. Naime, operacioni istraživač mora znati *identificirati probleme* koje metode operacionih istraživanja *mogu riješiti,* mora znati kako *struktuirati problem* u neki od *standardnih matematičkih modela* i, na kraju, mora znati kako *primijeniti* ili *razviti računarske alate* da bi *našao rješenja problema*.