Dualnost u linearnom programiranju

Motivacija i dual za simetrični problem

Odavno je poznato da se uz svaki optimizacijski problem javlja *prateći problem* u kojem se tipično javljaju *drugačije upravljačke promjenljive*, a čiji su interesi *direktno suprotstavljeni* interesima koji se javljaju u polaznom problemu. Na primjer, prilikom trgovanja, dok je kupcu cilj da *kupi što bolju robu po što povoljnijoj cijeni*, trgovcu je cilj da robu proda *što skuplje* (i to, po mogućnosti, da “utrapi” kupcu *što lošiju robu*). U trenutku kada obje uspostavljene strane uspiju *naći kompromis*, taj kompromis je ujedno i *optimum* i za jednu i za drugu stranu, u smislu da ni jedna strana *ne može proći bolje* zbog zahtjeva suprotstavljene strane (kupac ne može proći bolje, jer trgovac ima granicu ispod koje neće ići, a ni kupac neće pristati da kupi robu po neprihvatljivim cijenama). Ovo razmišljanje dovelo je do razvoja ***teorije dualnosti*** (***dvojnosti***) u matematičkom programiranju, koja je pokazala da pojava suprotstavljenih interesa *nije samo stvar ljudske prirode*, nego da ona ima *dublje korijene u samom matematičkom modeliranju*. Pojava dualnosti je prvo uočena u *linearnom programiranju*, praktično odmah nakon što su se modeli linearnog programiranja počeli masovno koristiti. Jedan od začetnika teorije dualnosti u linearnom programiranju je *J. von Neumann*, koju je on kasnije proširio do ***teorije igara***, koja na izvjestan način proširuje matematičko programiranje uvođenjem više subjekata u proces optimizacije, od kojih svaki ima utjecaj samo na izvjesnu skupinu upravljačkih promjenljivih, i čiji su interesi često (mada ne i uvijek) suprotstavljeni.

Prema teoriji dualnosti, svakom zadatku linearnog programiranja može se pridružiti tzv. ***dualni*** (***dvojni***) ***zadatak*** (ili skraćeno ***dual***), koji je u *određenoj vezi* sa polaznim zadatkom, koji se tada naziva ***primalni zadatak*** (ili skraćeno ***primal***). Veza između primala i duala je *toliko* “*tijesna*” da se dualni zadatak često može interpretirati kao primalni zadatak “*posmatran iz drugačijeg ugla*” (odnosno gledan sa aspekta “*druge interesne strane*” ili, što bi se reklo *gledan* “*drugim očima*”), bez obzira na činjenicu da su, u izvjesnom smislu, interesi primala i duala uvijek *suprotstavljeni* (ako je jedan od njih zadatak maksimizacije, drugi je zadatak *minimizacije* i obrnuto). Također se pokazuje da su optimalna rješenja primala i duala *jednaka*, u smislu da se optimum i za jedan i drugi postiže onog trenutka kada njihove funkcije cilja postignu *istu vrijednost*. Također, karakteristično je da je odnos između primala i duala *simetričan*, odnosno *dualni problem dualnog problema* (*dual duala*) jednak je *polaznom* odnosno *primalnom problemu* (*primalu*).

Da bismo uvidjeli motivaciju za dualni problem, razmotrimo klasični problem proizvodnje u uvjetima ograničene raspoloživosti sirovinama. Neka, dakle, neki proizvođač želi proizvoditi proizvode P_j, $j = 1\,..\,n$ koje će prodavati po cijenama c_j, $j = 1\,..\,n$ (po jedinici količine odgovarajućeg proizvoda). Za proizvodnju tih proizvoda koriste se sirovine S_i, $i = 1\,..\,m$ kojih na raspolaganju ima b_i, $i = 1\,..\,m$ odgovarajućih količinskih jedinica. Količine sirovine S_i koje se troše za proizvodnju jedinice količine proizvoda P_j date su vrijednostima $a_{i,j}$, $i = 1\,..\,m$, $j = 1\,..\,n$. Potrebno je odrediti optimalni plan proizvodnje. Ako sa x_j, $j = 1\,..\,n$ označimo nepoznate količine proizvoda P_j, $j = 1\,..\,n$ koje treba proizvoditi, onda ovom problemu odgovara klasični zadatak linearnog programiranja u standardnoj formi

$$\arg\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

p.o.

$$\begin{aligned}
&a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n \le b_1\\
&a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n \le b_2\\
&\ldots\\
&a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \ldots + a_{m,n} x_n \le b_m
\end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0$$

ili, u skraćenom obliku, koristeći notaciju za sumaciju,

$$\arg\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i,\ \ i = 1\,..\,m$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = 1\,..\,n$$

Pretpostavimo sada da neki poduzetnik želi da *otkupi* sirovine S_i, $i = 1 .. m$ od gore razmatranog proizvođača i nudi mu, da umjesto da proizvodi proizvode P_j, $j = 1 .. n$, novac zaradi *prodajom* sirovina. Ono oko čega se poduzetnik dvoumi su *cijene* po količinskoj jedinici sirovine S_i, $i = 1 .. m$ koje će on ponuditi proizvođaču za otkup. Ukoliko te nepoznate cijene označimo sa y_i, $i = 1 .. m$, jasno je da će tada cijena koju poduzetnik treba platiti za otkup b_i količinskih jedinica iznositi $b_i\, y_i$, tako da ukupna cijena W koju poduzetnik treba platiti za otkup svih sirovina iznosi

$$W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m\, y_m = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Jasno je da poduzetnik želi da plati *što je god moguće manje*, tako da je njegov cilj da *minimizira W*. Međutim, cijene moraju biti *dovoljno visoke* da bi proizvođača *podstakle na prodaju*. Proizvođač može rezonovati ovako. Za proizvodnju jedne količinske jedinice proizvoda nekog proizvoda P_j gdje je j neki indeks u opsegu od 1 do n potrebno je utrošiti $a_{i,j}$ količinskih jedinica sirovine S_i, $i = 1 .. m$. Ukoliko se umjesto za proizvodnju on odluči za *prodaju onih količina sirovina koje bi utrošio za proizvodnju jedne jedinice proizvoda* P_j, on bi zaradio iznos

$$a_{1,j}\, y_1 + a_{2,j}\, y_2 + \ldots + a_{m,j}\, y_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, y_i$$

S druge strane, prodaja ima smisla samo ukoliko je ovaj iznos *veći ili jednak* od c_j, s obzirom da je c_j cijena koju bi proizvođač mogao zaraditi *prodajom proizvedenog proizvoda* P_j. Ovo nameće ograničenje (kojeg poduzetnik mora biti svjestan):

$$a_{1,j}\, y_1 + a_{2,j}\, y_2 + \ldots + a_{m,j}\, y_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, y_i \ge c_j$$

Naravno, ovakvo ograničenje se može postaviti za svaki od proizvoda P_j, odnosno za sve vrijednosti $j = 1 .. n$. Kako pored toga cijene y_i, $i = 1 .. m$ moraju biti nenegativne, slijedi da poduzetnik treba riješiti problem

$$\arg\min\ W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m\, y_m$$

p.o.

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}\, y_1 + a_{2,1}\, y_2 + \ldots + a_{m,1}\, y_m \ge c_1\\
&a_{1,2}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \ldots + a_{m,2}\, y_m \ge c_2\\
&\ldots\\
&a_{1,n}\, y_1 + a_{2,n}\, y_2 + \ldots + a_{m,n}\, y_m \ge c_n
\end{aligned}$$

$$y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0,\ \ldots,\ y_m \ge 0$$

ili, kompaktnije, koristeći skraćene oznake za sumaciju,

$$\arg\min\ W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

p.o.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, y_i \ge c_j\,,\ \ j = 1 .. n$$

$$y_i \ge 0,\ \ i = 1 .. m$$

Ovako formirani problem naziva se *dualni problem* polaznog (primalnog) problema. Generalno, ukoliko primalni problem zapišemo u kompaktnom matrično-vektorskom obliku kao

$$\arg\max\ Z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{x}$$

p.o.

$$\mathbf{A\, x} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

odgovarajući dualni problem glasi

arg min $W = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y}$

p.o.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{y} \geq 0$

Iz izloženog razmatranja, može se uočiti da između primala i duala postoje sljedeći karakteristični odnosi:

- *Maksimizaciji funkcije cilja primala* odgovara *minimizacija funkcije cilja duala* (kasnije ćemo vidjeti da vrijedi i obrnuto);
- *Broj promjenljivih duala* jednak je *broju ograničenja primala* (m), ne računajući ograničenja na nenegativnost promjenljivih;
- *Broj ograničenja duala* jednak je *broju promjenljivih primala* (n), ne računajući ograničenja na nenegativnost (dualnih) promjenljivih;
- *Matrica koeficijenata ograničenja duala* jednaka je *transponovanoj matrici koeficijenata ograničenja primala*;
- *Koeficijenti funkcije cilja duala* jednaki su koeficijentima *desne strane ograničenja primala*;
- *Koeficijenti desne strane ograničenja duala* jednaki su *koeficijentima funkcije cilja primala*.

Slikovito, odnos primala i duala može se prikazati sljedećom tabelom:

		Promjenljive primalnog modela				*Slobodni članovi primala i koeficijenti funkcije cilja duala*
		x_1	x_2	...	x_n	
Promjenljive dualnog modela	y_1	$a_{1,1}$	$a_{1.2}$	...	$a_{1,n}$	b_1
	y_2	$a_{2,1}$	$a_{2.2}$	...	$a_{2,n}$	b_2
	...	...	...	...	...	...
	y_m	$a_{m,1}$	$a_{m.2}$	...	$a_{m,n}$	b_m
Koeficijenti funkcije cilja primala i slobodni članovi duala		c_1	c_2	...	c_n	

➢ ***Primjer*** : Formirati dualni problem za sljedeći problem linearnog programiranja:

arg max $Z = 5\,x_1 + 2\,x_2$

p.o.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 6 \\ 2\,x_2 &\leq 18 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 &\leq 24 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$

Primjenom pomenutih osobina koje važe za odnos između primala i duala, dobijamo da dualni problem ovog problema glasi:

arg min $W = 6\,y_1 + 18\,y_2 + 24\,y_3$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad + 3\,y_3 &\geq 5 \\ 2\,y_2 + 2\,y_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$

Za zadatke linearnog programiranja u kojima se traži *maksimizacija funkcije cilja* pri čemu su sva ograničenja (osim ograničenja na nenegativnost promjenljivih) tipa “manje ili jednako”, kao i one u kojima se traži *minimizacija funkcije cilja* pri čemu su sva ograničenja tipa “veće ili jednako”, gdje se u oba slučaja podrazumijeva da postoje ograničenja na *nenegativnost svih promjenljivih*, kažemo da su zadaci u ***simetričnom obliku***. Zbog toga, u gore provedenim razmatranjima govorimo o ***simetričnom dualu***, jer su kako polazni problem, tako i pridruženi dualni problem bili u simetričnom obliku.

Dual asimetričnog problema

Ako polazni zadatak nije zadan kao problem maksimizacije funkcije cilja pri čemu su sva ograničenja (osim ograničenja na nenegativnost promjenljivih) tipa "manje ili jednako", i/ili ako ne postoje ograničenja na nenegativnost svih promjenljivih, moguće je i tada formirati dualni problem, i to *na dva načina*. Ta dva načina daju duale koji *nisu potpuno identični po formi*, ali su u suštini potpuno ekvivalentni, jer se sa jedne na drugu formu može preći pomoću vrlo jednostavne *smjene promjenljivih*.

Prvi način je da polazni zadatak prethodno svedemo na *simetrični oblik*, primjenom raznih elementarnih transformacija koje su već ranije spominjane. Rezimirajmo ukratko te transfomracije:

- Ako se traži *minimizacija* a ne maksimizacija funkcije cilja, funkciju cilja množimo sa –1, nakon čega tražimo njenu maksimizaciju;
- Ako postoji neko ograničenje tipa "veće ili jednako", svodimo ga na ograničenje tipa "manje ili jednako" množenjem sa –1 (za potrebe nalaženja dualnog zadatka, nije nam nikakva smetnja što će na taj način koeficijent sa desne strane eventualno postati negativan);
- Ako postoji neko ograničenje tipa jednakosti, zamijenimo ga sa dva ograničenja sa istom lijevom i desnom stranom, od kojih je jedno tipa "manje ili jednako" a drugo tipa "veće ili jednako", nakon čega ograničenje tipa "veće ili jednako" množimo sa –1;
- Ako neka promjenljiva (recimo x_j) *nije ograničena po znaku*, uvodimo smjenu $x_j = x_j' - x_j''$, pri čemu su x_j' i x_j'' dvije nove promjenljive koje zamjenjuju promjenljivu x_j, pri čemu obje moraju biti nenegativne;
- Ukoliko neka promjenljiva (recimo x_j) mora biti *nepozitivna* umjesto nenegativna (ovakve situacije su rijetke u praksi, ali ćemo vidjeti kasnije da ih vrijedi razmotriti), uvođenjem smjene $x_j = -x_j'$ zamjenjujemo je sa novom promjenljivom koja mora biti nenegativna.

Nakon uvođenja ovih transformacija, polazni zadatak dobija simetrični oblik, nakon čega ga možemo transformirati u dual pomoću prethodno opisanog postupka. Time dobijamo dual koji je također simetričan, pa govorimo o *simetričnom dualu* polaznog (asimetričnog) problema. U suštini, radi se o dualu simetričnog problema koji je ekvivalentan polaznom asimetričnom problemu.

➢ ***Primjer***: Svođenjem primala na simetrični oblik, formirati dualni problem za sljedeći (asimetrični) problem linearnog programiranja:

$$\arg\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &= 6 \\ 2x_2 &\le 18 \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 24 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Asimetrija je ovdje izazvana postojanjem jednog ograničenja (prvog po redu) tipa jednakosti i jednog (trećeg po redu) ograničenja tipa "veće ili jednako". Primjenom prethodno opisanih pravila, ovaj problem se svodi na ekvivalentni simetrični oblik

$$\arg\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\le 6 \\ -x_1 \quad\quad &\le -6 \\ 2x_2 &\le 18 \\ -3x_1 - 2x_2 &\le -24 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Nakon ovih transformacija, primjenom ranije opisanih osobina koje važe za odnos između primala i duala, možemo lako formirati (simetrični) dual ovog problema, koji ujedno predstavlja i simetrični dual polaznog (asimetričnog) problema:

$\arg\min W = 6y_1 - 6y_2 + 18y_3 - 24y_4$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 \qquad\quad - 3y_4 &\geq 5 \\ 2y_3 - 2y_4 &\geq 2 \end{aligned}$$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0$

Nije teško dokazati da je *dual dualnog zadatka* za simetrični polazni problem maksimizacije *jednak polaznom* (*primalnom*) *zadatku*. To je najlakše uraditi koristeći matrično-vektorski zapis. Zaista, neka je dat simetrični problem maksimizacije u obliku

$\arg\max Z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}$

p.o.

$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
$\mathbf{x} \geq 0$

Njemu odgovara dualni problem

$\arg\min W = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y}$

p.o.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{y} \geq 0$

Svedimo ovaj problem na problem maksimizacije i transformirajmo ograničenja tipa "veće ili jednako" u ograničenja tipa "manje ili jednako" da bismo dobili simetrični problem maksimizacije:

$\arg\max -W = -\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y}$

p.o.

$-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} \leq -\mathbf{c}$
$\mathbf{y} \geq 0$

Transformirajmo sada ovaj problem u dualni. Koeficijenti funkcije cilja i koeficijenti sa desne strane ograničenja razmjenjuju uloge, matrica koeficijenata u ograničenjima se transponira, ograničenja postaju tipa "veće ili jednako", dok problem postaje problem minimizacije (novu funkciju cilja u dualu duala smo označili sa Q, a promjenljive u dualu duala sa $\mathbf{u}$):

$\arg\min Q = -\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}$

p.o.

$(-\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u} \geq -\mathbf{b}$
$\mathbf{u} \geq 0$

Ako iskoristimo činjenicu da je $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ i ponovo obavimo neka množenja sa –1, ovaj problem se svodi na oblik

$\arg\max -Q = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}$

p.o.

$\mathbf{A}\,\mathbf{u} \leq \mathbf{b}$
$\mathbf{u} \geq 0$

Vidimo da smo praktično dobili primalni problem (ako zanemarimo drugačija imena za funkciju cilja i promjenljive, što je svakako nebitno), što je i trebalo pokazati.

Postoji i drugi način za formiranje duala asimetričnog polaznog problema. Kod tog drugog načina *ostaju očuvani svi karakteristični odnosi primala i duala* koje smo naveli na početku (a koji su bili narušeni pri formiranju duala svođenjem primala na simetrični problem maksimizacije). Međutim, na taj način, dobijeni dual *neće biti simetričan*, te govorimo o ***asimetričnom dualu***.

Da bismo izveli pravila za kreiranje asimetričnog duala, pretpostavimo prvo da se radi o *problemu maksimizacije*. Pretpostavimo da imamo neko ograničenje tipa “veće ili jednako”, recimo i-to ograničenje oblika

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n \geq b_i$$

Množenjem sa –1, ovo ograničenje postaje:

$$-a_{i,1}x_1 - a_{i,2}x_2 - \ldots - a_{i,n}x_n \leq -b_i$$

Ovako transformirano ograničenje uzrokovalo bi da bi u dualnom problemu u matrici koeficijenata ograničenja duala elementi u i-toj koloni bili *negirani* u odnosu na elemente u i-tom redu polaznog problema, što *kvari ranije navedene karakteristične odnose primala i duala*. Isto tako, koeficijent uz i-tu promjenljivu y_i u funkciji cilja dualnog problema bio bi *negiran* u odnosu na desnu stranu i-tog ograničenja, što je opet narušavanje pomenutih odnosa. Međutim, ukoliko bismo promjenljivu y_i zamijenili *novom promjenljivom* y_i’ koja je sa promjenljivom y_i vezana relacijom $y_i' = -y_i$, svi karaketeristični odnosi bi ostali očuvani, *osim što bi promjenljiva y_i’ morala biti nepozitivna* (a ne nenegativna). Možemo stoga smatrati da ograničenju tipa “veće ili jednako” odgovara *dualna promjenljiva koja mora biti nepozitivna* (umjesto nenegativna).

Neka sad imamo ograničenje tipa jednakosti, recimo neka je i-to ograničenje oblika

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i$$

Već smo rekli da ovo ograničenje možemo zamijeniti sa dva ograničenja oblika

$$\begin{aligned} a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n &\leq b_i \\ -a_{i,1}x_1 - a_{i,2}x_2 - \ldots - a_{i,n}x_n &\leq -b_i \end{aligned}$$

Ovim dvjema ograničenjima odgovaraće dvije dualne promjenljive koje možemo označiti recimo sa y_i’ i y_i”. Međutim, vidimo da će koeficijenti u kolonama u matrici koeficijenata ograničenja koje odgovaraju ovim dvjema promjenljivim biti *identični po modulima koeficijenata, ali suprotnih znakova*. Isto vrijedi i za koeficijente u funkciji cilja dualnog problema koji stoje uz y_i’ i y_i”. Ovo zapravo znači da se *razlika promjenljivih y_i’ i y_i”* (tj. y_i’ – y_i”) može zamijeniti novom promjenljivom y_i, ali koja više *ne mora biti ograničena po znaku* (njen znak će ovisiti o tome koja je od vrijednosti y_i’ i y_i” veća). Dakle, možemo uzeti da ograničenju tipa jednakosti odgovara *dualna promjenljiva koja nije ograničena po znaku*.

Pretpostavimo sada da neka od promjenljivih polaznog problema, recimo x_j, nije ograničena po znaku. Tada možemo uvesti smjenu $x_j = x_j' - x_j''$, gdje x_j’ i x_j” moraju biti nenegativne. Uvrstimo li ovu smjenu u polazni problem, vidjećemo da će promjenljivim x_j’ i x_j” u dualnom problemu odgovarati dva ograničenja

$$\begin{aligned} a_{1,j}y_1 + a_{2,j}y_2 + \ldots + a_{m,j}y_m &\geq c_j \\ -a_{1,j}y_1 - a_{2,j}y_2 - \ldots - a_{m,j}y_m &\geq -c_j \end{aligned}$$

koja su opet ekvivalentna *jednom ograničenju*

$$a_{1,j}y_1 + a_{2,j}y_2 + \ldots + a_{m,j}y_m = c_j$$

Dakle, možemo uzeti da promjenljivoj koja nije ograničena po znaku u dualnom problemu odgovara *ograničenje tipa jednakosti*.

Konačno, neka imamo neku promjenljivu u polaznom problemu, recimo x_j, koja mora biti *nepozitivna*. Možemo uvesti smjenu $x_j = -x_j'$ pri čemu sada x_j’ mora biti nenegativna. Uvrštavanjem ove smjene u polazni problem, vidjećemo da promjenljivoj x_j’ u dualnom problemu odgovara ograničenje

$$-a_{1,j}y_1 - a_{2,j}y_2 - \ldots - a_{m,j}y_m \geq -c_j$$

koje je ekvivalentno ograničenju

$$a_{1,j}y_1 + a_{2,j}y_2 + \ldots + a_{m,j}y_m \leq c_j$$

Dakle, možemo uzeti da promjenljivoj koja mora biti nepozitivna u dualnom problemu odgovara *ograničenje tipa* “*manje ili jednako*”.

Kada sve rezimiramo, možemo zaključiti da, ako je polazni problem bio problem maksimizacije, tada:

- Dualni problem će biti problem minimizacije;
- Ograničenjima primala tipa "manje ili jednako" odgovara dualna promjenljiva koja mora biti nenegativna;
- Ograničenjima primala tipa "veće ili jednako" odgovara dualna promjenljiva koja mora biti nepozitivna;
- Ograničenjima primala tipa jednakosti odgovara dualna promjenljiva koja nije ograničena po znaku;
- Promjenljivim primala koje moraju biti nenegativne odgovaraju ograničenja dualnog problema tipa "veće ili jednako";
- Promjenljivim primala koje moraju biti nepozitivne odgovaraju ograničenja dualnog problema tipa "manje ili jednako";
- Promjenljivim primala koje nisu ograničene po znaku odgovaraju ograničenja dualnog problema tipa jednakosti.

Ukoliko je polazni problem bio problem *minimizacije*, možemo funkciju cilja pomnožiti sa –1 da dobijemo problem maksimizacije. Međutim, to će u dualnom problemu izvrnuti znak koeficijentima sa desne strane ograničenja. Da bismo sačuvali karakteristične odnose između primala i duala, možemo sva ta ograničenja pomnožiti sa –1, a nakon toga izvršiti zamjenu svih dualnih promjenljivih y_i sa novim dualnim promjenljivim y_i' prema pravilu $y_i' = -y_i$. Provedemo li sve to, možemo zaključiti da, ako je polazni problem bio problem minimizacije, tada:

- Dualni problem će biti problem maksimizacije;
- Ograničenjima primala tipa "veće ili jednako" odgovara dualna promjenljiva koja mora biti nenegativna;
- Ograničenjima primala tipa "manje ili jednako" odgovara dualna promjenljiva koja mora biti nepozitivna;
- Ograničenjima primala tipa jednakosti odgovara dualna promjenljiva koja nije ograničena po znaku;
- Promjenljivim primala koje moraju biti nenegativne odgovaraju ograničenja dualnog problema tipa "manje ili jednako";
- Promjenljivim primala koje moraju biti nepozitivne odgovaraju ograničenja dualnog problema tipa "veće ili jednako";
- Promjenljivim primala koje nisu ograničene po znaku odgovaraju ograničenja dualnog problema tipa jednakosti.

Vidimo da prema izvedenim pravilima, *tipovi ograničenja u dualu zavise od znaka promjenljivih primala*, dok *znakovi promjenljivih duala zavise od tipova ograničenja u primalu*. Ova pravila su *simetrična* tako da i za ovako formiran dual *vrijede ista pravila*, tako da se ponovo može pokazati da ukoliko formiramo dual od ovako dobijenog duala, kao rezultat ćemo opet dobiti polazni problem, odnosno primal.

Može se primijetiti da se kod problema maksimizacije češće javljaju ograničenja tipa "manje ili jednako" od ograničenja tipa "veće ili jednako". Zbog toga se za problem maksimizacije ograničena tipa "manje ili jednako" nazivaju ***tipičnim ograničenjima***, dok su ograničenja tipa "veće ili jednako" ***atipična ograničenja*** za problem maksimizacije. Slično, za problem minimizacije, tipična ograničenja su tipa "veće ili jednako", dok su ograničenja tipa "manje ili jednako" atipična. Uvođenje ovih pojmova omogućava da se pravila za formiranje (asimetričnog) duala predstave u jedinstvenom obliku, bez obzira da li se u polaznom problemu traži maksimizacija ili minimizacija:

- Dualni problem će biti suprotne prirode u odnosu na polazni problem (minimizacija umjesto maksimizacije i obrnuto);
- *Tipičnim* ograničenjima primala odgovara dualna promjenljiva koja mora biti *nenegativna*;
- *Atipičnim* ograničenjima primala odgovara dualna promjenljiva koja mora biti *nepozitivna*;
- Ograničenjima primala tipa *jednakosti* odgovara dualna promjenljiva koja *nije ograničena po znaku*;
- Promjenljivim primala koje moraju biti *nenegativne* odgovaraju *tipična* ograničenja dualnog problema;
- Promjenljivim primala koje moraju biti *nepozitivne* odgovaraju *atipična* ograničenja dualnog problema;
- Promjenljivim primala koje *nisu ograničene po znaku* odgovaraju ograničenja dualnog problema tipa *jednakosti*.

- ***Primjer*** : Za (asimetrični) problem linearnog programiranja iz prethodnog primjera, formirati njegov (asimetrični) dual, bez njegovog prethodnog svođenja na simetrični oblik.

Primjenom prethodno izvedenih pravila, direktno dobijamo da (asimetrični) dual polaznog problema glasi:

$$\arg\min W = 6y_1 + 18y_2 + 24y_3$$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\quad + 3y_3 &\geq 5 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 2 \end{aligned}$$

y_1 neograničena po znaku, $y_2 \geq 0$, $y_3 \leq 0$

Pokažimo da je ovaj asimetrični dual u suštini ekvivalentan ranije dobijenom simetričnom dualu. Kako je y_1 neograničena po znaku, uvedimo smjenu $y_1 = y_1' - y_1''$ gdje su y_1' i y_1'' nenegativne. Slično, kako je y_3 nepozitivna, uvedimo smjenu $y_3 = -y_3'$ gdje je y_3' nenegativna. Na taj način, problem dobija sljedeći oblik:

$$\arg\min W = 6y_1' - 6y_1'' + 18y_2 - 24y_3'$$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1' - y_1'' \qquad\quad - 3y_3' &\geq 5 \\ 2y_2 - 2y_3' &\geq 2 \end{aligned}$$

$y_1' \geq 0$, $y_1'' \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3' \geq 0$

Vidimo da je ovo identičan problem koji smo već imali, samo što su ulogu promjenljivih y_1, y_2, y_3 i y_4 sada preuzele promjenljive y_1', y_1'', y_2 i y_3' respektivno.

Osnovni rezultati teorije dualnosti

Teorija dualnosti izučava *matematička svojstva odnosa primala i duala*. U nastavku ćemo, ukoliko ne naglasimo drugačije, bez umanjenja općenitosti, pretpostaviti da je primalni zadatak problem *maksimizacije* (tako da je dualni zadatak problem *minimizacije*). Ukoliko nije tako, nejednakosti o kojima će biti riječi u nastavku mijenjaju smjer.

Prvo bitno svojstvo je tzv. ***svojstvo slabe dualnosti***, po kojem *svako dopustivo rješenje primala* daje funkciji cilja primala *manju ili jednaku vrijednost* od vrijednosti koju *svako dopustivo rješenje duala* daje funkciji cilja duala. Formalno rečeno, ako je $\mathbf{x}$ dopustivo rješenje primala a $\mathbf{y}$ dopustivo rješenje duala, tada je uvijek $Z(\mathbf{x}) \leq W(\mathbf{y})$, gdje je $Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ i $W(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$. Drugim riječima, za bilo koje dopustivo rješenje $\mathbf{y}$ duala, vrijednost $W(\mathbf{y})$ daje *gornju granicu* za maksimalnu vrijednost koju funkcija cilja primala može imati na dopustivoj oblasti. Isto tako, za bilo koje dopustivo rješenje $\mathbf{x}$ primala, vrijednost $Z(\mathbf{x})$ daje *donju granicu* za minimalnu vrijednost koju funkcija cilja može imati na dopustivoj oblasti.

Ovo svojstvo je *intuitivno jasno*. Zaista, u uvodnoj diskusiji u kojoj se spominje proizvođač koji planira ostvariti zaradu $Z(\mathbf{x})$ (po mogućnosti što veću) i poduzetnik koji želi otkupiti sve njegove sirovine po cijeni $W(\mathbf{y})$ (po mogućnosti što manjoj), jasno je da ma koja dozvoljena vrijednost otkupne cijene $W(\mathbf{y})$ mora biti veća ili jednaka od ma koje dozvoljene zarade $Z(\mathbf{x})$ ostvarene putem proizvodnje, jer u protivnom proizvođač *neće željeti da proda sirovine*.

Ovo intuitivno rezonovanje lako je dokazati i formalnim putem. Pri tome, dokaz je najlakše provesti uz pomoć matrično-vektorske notacije. Zaista, ako je $\mathbf{x}$ dopustivo rješenje primala, onda je $\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, iz čega imamo slijed nejednakosti

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}\,\mathbf{x})^T \leq \mathbf{b}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T \leq \mathbf{b}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{b}^T \geq \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T$$

Isto tako, ako je $\mathbf{y}$ dopustivo rješenje duala, onda je $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, iz čega imamo slijed nejednakosti

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^T\mathbf{y})^T \geq \mathbf{c}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{y}^T(\mathbf{A}^T)^T \geq \mathbf{c}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{y}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{c}^T \leq \mathbf{y}^T\mathbf{A}$$

Dalje, ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dopustiva rješenja primala odnosno duala, onda je $\mathbf{x} \geq 0$ i $\mathbf{y} \geq 0$, pa imamo:

$$W(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\mathrm{T}\,\mathbf{y} \ge \mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y}$$

$$Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\mathrm{T}\,\mathbf{x} \le \mathbf{y}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

Sada, kako je $\mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y}$ matrica formata 1×1, odnosno običan broj, slijedi da je $\mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y})^\mathrm{T}$, iz čega slijedi i da je $\mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$. Zaista, imamo

$$\mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y})^\mathrm{T} = \mathbf{y}^\mathrm{T}\,(\mathbf{A}^\mathrm{T})^\mathrm{T}\,(\mathbf{x}^\mathrm{T})^\mathrm{T} = \mathbf{y}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

Konačno, iz $W(\mathbf{y}) \ge \mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y}$, $Z(\mathbf{x}) \le \mathbf{y}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}^\mathrm{T}\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathrm{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ neposredno slijedi $Z(\mathbf{x}) \le W(\mathbf{y})$, što je i trebalo pokazati.

Kao ilustraciju ovog svojstva, pretpostavimo da smo u prvom primjeru u ovom poglavlju uzeli da je $\mathbf{x} = (6, 0)^\mathrm{T}$ i $\mathbf{y} = (6, 1, 1/3)^\mathrm{T}$. Lako se provjerava da su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dozvoljena rješenja za primal odnosno dual respektivno. Dalje, kako je $Z(\mathbf{x}) = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 30$, $W(\mathbf{y}) = 6 \cdot 6 + 18 \cdot 1 + 24 \cdot 1/3 = 62$ i $30 < 62$, to je zaista za ovaj primjer $Z(\mathbf{x}) \le W(\mathbf{y})$. Usput, kako ova nejednakost mora vrijediti za *svaku dozvoljenu* vrijednost $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ (a ne samo ove dvije gore odabrane), odavde također slijedi da optimalna vrijednost funkcije cilja $Z(\mathbf{x})$ *sigurno nije veća od* 62, i da optimalna vrijednost funkcije cilja $W(\mathbf{y})$ *sigurno nije manja od* 30.

Iz svojstva slabe dualnosti slijedi i nekoliko interesantnih posljedica. Tako, ako je *funkcija cilja primala neograničena odozgo na njegovoj dopustivoj oblasti* (tj. ukoliko je optimalno rješenje primala *u beskonačnosti*), tada je *dopustiva oblast duala prazna* (tj. ograničenja duala su *kontradiktorna*). Zaista, ako funkcija cilja $Z(\mathbf{x})$ nije ograničena odozgo na dopustivoj oblasti primala, tada $Z(\mathbf{x})$ može imati *po volji veliku vrijednost* za dozvoljena rješenja $\mathbf{x}$ primala, tako da *ne može postojati takvo* $\mathbf{y}$ za koje će vrijediti $Z(\mathbf{x}) \le W(\mathbf{y})$. Na sličan način zaključujemo da ako je *funkcija cilja duala neograničena odozdo na njegovoj dopustivoj oblasti*, tada je *dopustiva oblast primala prazna* (tj. ograničenja primala su kontradiktorna).

Treba istaći da obrati ovih tvrdnji *ne vrijede*, tako da npr. iz činjenice da je dopustiva oblast primala prazna, *ne mora slijediti* da je funkcija cilja duala neograničena na njegovoj dopustivoj oblasti. Naime, može se desiti *da dopustive oblasti i primala i duala budu prazne*, tj. da ograničenja i jednog i drugog problema budu kontradiktorna (ipak, nešto ćemo kasnije vidjeti da se ne može desiti da dopustiva oblast jednog od ova dva problema bude prazna, a da onaj drugi ima ograničenu funkciju cilja na dopustivoj oblasti). Također, iz ovih svojstava može se zaključiti i da *ako su dopustive oblasti i primala i duala neprazne*, tada *oba problema imaju optimalno rješenje*. Zaista, kako je tada funkcija cilja primala *ograničena odozgo* ma kojom vrijednošću $W(\mathbf{y})$, gdje je $\mathbf{y}$ ma koje dopustivo rješenje duala, i kako je dopustiva oblast *zatvoren skup*, to funkcija cilja primala mora na njemu dostići svoju maksimalnu vrijednost. Analogno zaključujemo i da funkcija cilja duala mora na njegovoj dopustivoj oblasti dostići svoju minimalnu vrijednost.

Još jedna posljedica koja direktno slijedi iz slabe dualnosti je sljedeća. Ako je $\mathbf{x}$ *dopustivo rješenje primala koje nije optimalno*, i ako je $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$, tada $\mathbf{y}$ *nije dopustivo rješenje duala*. Zaista, ako je $\mathbf{x}$ dopustivo rješenje primala koje nije optimalno, tada bi postojala dopustiva tačka $\mathbf{x}'$ takva da je $Z(\mathbf{x}') > Z(\mathbf{x})$, pa bi tada bilo i $Z(\mathbf{x}') > W(\mathbf{y})$, što je po svojstvu slabe dualnosti *nemoguće ako je* $\mathbf{y}$ *dopustivo rješenje duala*. Intuitivno, u kontekstu ranije diskusije o proizvođaču i poduzetniku koji želi otkupiti sredstva za proizvodnju, jasno je da nije dopustivo da ukupna cijena ponuđena za otkup bude jednaka zaradi koju bi proizvođač mogao zaraditi proizvodnjom slabijom od optimalne, jer bi tada proizvođač mogao bolje proći poboljšanjem proizvodnje. Na sličan način zaključujemo da ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dopustiva rješenja primala i duala respektivno, i ako pri tome vrijedi $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$, tada $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *moraju biti optimalna rješenja* primala i duala respektivno. Isto tako, *primal ima optimalno rješenje ako i samo ako dual također ima optimalno rješenje*, i obrnuto.

Posljednje svojstvo omogućava da se za ponuđena rješenja primala i duala utvrdi da su optimalna bez rješavanja ovih zadataka. Naime, ukoliko se pokaže da su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dopustiva rješenja za primal i dual i da ako je pri tome $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$, to je dovoljan znak da su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *optimalna rješenja* za primal i dual. Recimo, uzmimo da smo u prvom primjeru u ovom poglavlju uzeli da je $\mathbf{x} = (6, 3)^\mathrm{T}$ i $\mathbf{y} = (2, 0, 1)^\mathrm{T}$. Lako se provjerava da su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dozvoljena rješenja za primal odnosno dual respektivno. Dalje, imamo da je $Z(\mathbf{x}) = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 36$ i $W(\mathbf{y}) = 6 \cdot 2 + 18 \cdot 0 + 24 \cdot 1 = 36$, to je $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$, tako da su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ optimalna rješenja ovih zadataka.

Svojstvo slabe dualnosti tvrdi da za dopustiva rješenja $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ primala i duala vrijedi $Z(\mathbf{x}) \le W(\mathbf{y})$, ali ništa ne govori o tome da li se u ovoj nejednakosti nužno mora ikada dostići jednakost. Također smo vidjeli da iz ovog svojstva slijedi da u prethodnoj nejednakosti jednakost može vrijediti samo ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ optimalna rješenja primala i duala, ali to još uvijek ne znači da ova jednakost *mora vrijediti* kad god su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ optimalna rješenja primala i duala. Ove dileme otklanja ***svojstvo jake dualnosti***, po kojem za optimalna rješenja primala i duala uvijek vrijedi jednakost $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$. Tačnije, ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ dopustiva rješenja primala i duala respektivno, tada jednakost $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$ vrijedi *ako i samo ako su* **x** *i* **y** *optimalna rješenja primala i duala respektivno*.

Svojstvo jake dualnosti se također može lako intuitivno objasniti. Recimo, ranije kada smo govorili o motivaciji za uvođenje dualnog problema, govorili smo o poduzetniku koji želi da otkupi proizvodna sredstva nekog proizvođača po što povoljnijoj cijeni. Jasno je da je najpovoljnija cijena koju poduzetnik može postići *upravo jednaka* maksimalnoj zaradi koju bi proizvođač mogao ostvariti proizvodnjom proizvoda i njihovom prodajom na tržištu. Međutim, formalni dokaz ovog svojstva nije posve jednostavan niti intuitivan, ali će ovdje ipak biti prikazan, s obzirom da se kao prateća posljedica postupka dokaza otkriva i *donekle neočekivana činjenica* da se postupkom rješavanja primala simpleks algoritmom *ujedno rješava i dual*, te da *krajnja simpleks tabela* u trenutku kada je dostignuto optimalno rješenje primala *u sebi sadrži i optimalno rješenje duala*.

Dokaz svojstva jake dualnosti je najkraće prezentirati u matrično-vektorskoj formi. Neka je zadan (primalni) problem linearnog programiranja u standardnom obliku

$$\arg\max Z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}$$

p.o.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

Nakon uvođenja vektora dopunskih izravnavajućih promjenljivih $\mathbf{x}_{\mathrm{D}}$, problem dobija oblik

$$\arg\max Z = \mathbf{c}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}$$

p.o.

$$\mathbf{A}_{\mathrm{P}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{P}} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}_{\mathrm{P}} \ge 0$$

gdje je

$$\mathbf{A}_{\mathrm{P}} = (\mathbf{A}\ \mathbf{I}), \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{D}} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

pri čemu je **I** jedinična matrica. Pretpostavimo sada da u optimalnom rješenju primala bazne promjenljive obrazuju vektor $\mathbf{x}_{\mathrm{B}}$, a nebazne vektor $\mathbf{x}_{\mathrm{N}}$. Izdvajanjem kolona koje odgovaraju baznim odnosno nebaznim promjenljivim iz matrice $\mathbf{A}_{\mathrm{P}}$ respektivno, od nje možemo formirati dvije submatrice $\mathbf{A}_{\mathrm{B}}$ odnosno $\mathbf{A}_{\mathrm{N}}$. Isto možemo uraditi i sa vektorom $\mathbf{c}_{\mathrm{P}}$, nakon čega problem dobija oblik

$$\arg\max Z = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{B}} + \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{N}}$$

p.o.

$$\mathbf{A}_{\mathrm{B}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{B}} + \mathbf{A}_{\mathrm{N}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}_{\mathrm{B}} \ge 0,\ \ \mathbf{x}_{\mathrm{N}} \ge 0$$

Rješavanjem matrične jednakosti $\mathbf{A}_{\mathrm{B}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{B}} + \mathbf{A}_{\mathrm{N}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \mathbf{b}$ po $\mathbf{x}_{\mathrm{B}}$, dobijamo

$$\mathbf{x}_{\mathrm{B}} = \mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathrm{N}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{N}}$$

Kako sve nebazne promjenljive u optimalnom rješenju imaju vrijednost 0, to se optimalno rješenje primala može izraziti relacijama $\mathbf{x}_{\mathrm{B}} = \mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\,\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = 0$. Pokažimo sada da se *optimalno rješenje duala* može izraziti kao $\mathbf{y} = (\mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{c}_{\mathrm{B}}$. Prvo, s obzirom da za optimalno **x** imamo $Z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{B}} + \mathbf{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\,\mathbf{b}$, dok za ovako određeno **y** imamo $W(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{c}_{\mathrm{B}} = (\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{c}_{\mathrm{B}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\,\mathbf{b}$, vidimo da je ispunjena jednakost $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$. Ako još pokažemo da je ovako određeno **y** *dopustivo rješenje duala*, prema jednom od ranije dokazanih svojstava slijedi da tada **y** *mora biti ujedno i optimalno rješenje duala* (upravo će taj dio dokaza otkriti *gdje se* "*krije*" *optimalno rješenje dualnog problema* **y** u simpleks tabeli koja odgovara optimalnom rješenju). Za tu svrhu, *uvedimo izravnavajuće promjenljive i u dualni model*, odnosno ograničenja $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$ izrazimo u obliku $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathrm{D}} = \mathbf{c}$, pri čemu je $\mathbf{y}_{\mathrm{D}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} - \mathbf{c}$ vektor izravnavajućih dualnih promjenljivih. Stoga je dualno rješenje dopustivo ako i samo ako je $\mathbf{y} \ge 0$ i $\mathbf{y}_{\mathrm{D}} \ge 0$. Izrazimo sada funkciju cilja primala na sljedeći način (obratimo pažnju da iz $\mathbf{y} = (\mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{-1})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{c}_{\mathrm{B}}$ slijedi $\mathbf{A}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{y} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}$):

$$
\begin{aligned}
Z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\,\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\,\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\,\mathbf{x}_N = \\
&= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\,\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T\,(\mathbf{A}_B^{-1})^T\,\mathbf{c}_B)^T\,\mathbf{x}_N \\
&= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x}_N + 0\,\mathbf{x}_B = \\
&= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x}_N + (\mathbf{c}_B - \mathbf{A}_B^T\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x}_B = \\
&= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + \left[\begin{pmatrix}\mathbf{c}_B\\ \mathbf{c}_N\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{A}_B^T\\ \mathbf{A}_N^T\end{pmatrix}\mathbf{y}\right]^T \begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix} = \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c}_P - \mathbf{A}_P^T\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x}_P
\end{aligned}
$$

Ako sada uzmemo u obzir kako se $\mathbf{A}_P$, $\mathbf{c}_P$ i $\mathbf{x}_P$ izražavaju preko $\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}_D$, imamo

$$
\begin{aligned}
Z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c}_P - \mathbf{A}_P^T\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x}_P = \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + \left[\begin{pmatrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{A}^T\\ \mathbf{I}\end{pmatrix}\mathbf{y}\right]^T \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_D\end{pmatrix} = \\
&= \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x} + (\mathbf{0} - \mathbf{I}\,\mathbf{y})^T\,\mathbf{x}_D = \mathbf{c}_B^T\,\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} - \mathbf{y}_D^T\,\mathbf{x} - \mathbf{y}^T\,\mathbf{x}_D
\end{aligned}
$$

Odavde primjećujemo da $\mathbf{y}$ i $\mathbf{y}_D$ nisu ništa drugo nego *koeficijenti u transformiranoj funkciji cilja* koji stoje uz primalne promjenljive, samo sa *obrnutim znakom*. Kako se optimum postiže onda kada su koeficijenti uz sve promjenljive u transformiranoj funkciji cilja negativni ili nule, to u trenutku dostizanja optimuma vrijedi $\mathbf{y} \ge 0$ i $\mathbf{y}_D \ge 0$. Stoga su ovako određeni $\mathbf{y}$ i $\mathbf{y}_D$ *dopustiva rješenja duala*, te na osnovu prethodne diskusije slijedi da su oni ujedno i *optimalna rješenja duala* i da je pri tome $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$. Ovim je svojstvo jake dualnosti dokazano.

Iz provedenog dokaza neposredno slijedi da optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih nisu ništa drugo nego *koeficijenti u transformiranoj funkciji cilja* koji stoje uz primalne promjenljive u trenutku postizanja optimalnog rješenja, samo sa *obrnutim znakom*. Pri tome su optimalne vrijednosti *izvornih dualnih promjenljivih* $\mathbf{y}$ koeficijenti uz *dopunske promjenljive* primala $\mathbf{x}_D$, dok su optimalne vrijednosti *dopunskih promjenljivih* duala $\mathbf{y}_D$ koeficijenti uz *izvorne promjenljive* primala $\mathbf{x}$ (samo sa obrnutim znakom). Ovo svojstvo naziva se ***svojstvo komplementarnosti optimalnih rješenja primala i duala***. Drugim riječima, optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih mogu se očitati *iz posljednjeg reda simpleks tabele koja odgovara optimalnom rješenju*. Konkretno, ukoliko je y_i dualna promjenljiva koja odgovara i-tom ograničenju i ukoliko je x_q dopunska (izravnavajuća) promjenljiva koja je dodana na lijevu stranu i-tog ograničenja (uz standardnu numeraciju je tipično $q = n + i$ mada ne mora biti), tada optimalna vrijednost za y_i iznosi $y_i = -c_q$, gdje je c_q koeficijent transformirane funkcije cilja uz promjenljivu x_q iz simpleks tabele koja odgovara optimalnom rješenju. Isto tako, ukoliko je y_p dopunska promjenljiva koja je oduzeta od lijeve strane j-tog ograničenja u dualnom problemu, koje po pretpostavci odgovara promjenljivoj x_j u primalnom problemu (uz standardnu numeraciju je tipično $p = m + j$), tada optimalna vrijednost za y_p iznosi $y_p = -c_j$, gdje je c_j koeficijent transformirane funkcije cilja uz promjenljivu x_j iz simpleks tabele koja odgovara optimalnom rješenju.

Činjenica da se *rješavanjem nekog problema simpleks metodom ujedno rješava i njegov dualni problem*, zapravo i *ne treba biti toliko iznenađujuća koliko to izgleda na prvi pogled*. Zaista, sjetimo se da su u dualnom problemu uloge vektora cijena $\mathbf{c}$ i vektora desnih strana ograničenja $\mathbf{b}$ *međusobno razmijenjene* u odnosu na njihove uloge u primalnom problemu. Međutim, kako se pri rješavanju primalnog problema pomoću simpleky algoritma optimalno rješenje na kraju postupka zapravo određuje *iz kolone u kojoj su se na početku rješavanja nalazili elementi vektora* $\mathbf{b}$, ne bi trebalo biti preveliko iznenađenje da se optimalno rješenje dualnog problema očitava *iz reda u kojem su se na početku rješavanja nalazili elementi vektora* $\mathbf{c}$. Negiranje vrijednosti je u suštini posljedica da je dualni problem *drugačije prirode* u odnosu na primalni (minimizacija umjesto maksimizacije).

U dosadašnjem izlaganju krenuli smo od pretpostavke da je primalni problem bio u standardnom obliku, tako da su sva ograničenja bila tipa "manje ili jednako". Analiza analogna prethodno provedenim analizama može se provesti i za ograničenja tipa "veće ili jednako", odnosno ograničenja tipa jednakosti, i za dualne promjenljive koje odgovaraju tim ograničenjima. Uglavnom, kao rezultat tako provedene analize, dolazi se do sljedećih zaključaka:

- Ukoliko je y_i dualna promjenljiva koja odgovara i-tom ograničenju koje je tipa "manje ili jednako" i ukoliko je x_q izravnavajuća promjenljiva koja je *dodana* na lijevu stranu i-tog ograničenja, tada optimalna vrijednost za y_i iznosi $y_i = -c_q$ (ovo je slučaj koji smo već analizirali);
- Ukoliko je y_i dualna promjenljiva koja odgovara i-tom ograničenju koje je tipa "veće ili jednako" i ukoliko je x_q izravnavajuća promjenljiva koja je *oduzeta* od lijeve strane i-tog ograničenja, tada optimalna vrijednost za y_i iznosi $y_i = c_q$ (dakle, *bez izvrtanja znaka*, što će kao posljedicu imati da je optimalna vrijednost za y_i *negativna*, kakva i treba biti u tom slučaju);

- Ukoliko je y_i dualna promjenljiva koja odgovara i-tom ograničenju koje je tipa jednakosti i ukoliko je x_q vještačka promjenljiva koja je dodana na lijevu stranu i-tog ograničenja, uz uvođenje kaznenog koeficijenta $-M$ uz x_q u funkciji cilja, tada optimalna vrijednost za y_i iznosi $y_i = -c_q + M$ (ovo je koeficijent iz posljednjeg reda simpleks tabele koji odgovara koloni za promjenljivu x_q, ali *bez člana* koji se nalazi uz kazneni koeficijent M);
- Ukoliko je y_p izravnavajuća promjenljiva koja je oduzeta od lijeve strane j-tog ograničenja u dualnom problemu, tada optimalna vrijednost za y_p iznosi $y_i = -c_j$.

Pri tome, kao i ranije, c_q odnosno c_j predstavlja koeficijent transformirane funkcije cilja uz promjenljivu x_q odnosno x_j iz simpleks tabele koja odgovara optimalnom rješenju.

Ovdje je prećutno pretpostavljeno da u polaznom problemu sve promjenljive *moraju biti nenegativne*. Slučajevi u kojima to nije ispunjeno nisu interesantni za provedenu diskusiju, jer se takvi slučajevi svakako i ne rješavaju direktno simpleks metodom, prije nego što se uvedu odgovarajuće smjene promjenljivih koje će osigurati nenegativnost svih promjenljivih. Isto tako, kako smo pored toga pretpostavili da je polazni problem bio *maksimizacija*, sva ograničenja u dualnom problemu bila su tipa “veće ili jednako”. Međutim, ukoliko je polazni problem bio *minimizacija*, tada se gore provedeno rezonovanje neznatno mijenja. Konkretno, u tom slučaju vrijedi sljedeće (uz pretpostavku da smo primalni problem rješavali simpleks metodom uz prethodno množenje funkcije cilja sa -1):

- Ukoliko je y_i dualna promjenljiva koja odgovara i-tom ograničenju koje je tipa “veće ili jednako” i ukoliko je x_q izravnavajuća promjenljiva koja je *oduzeta* od lijeve strane i-tog ograničenja, tada optimalna vrijednost za y_i iznosi $y_i = -c_q$;
- Ukoliko je y_i dualna promjenljiva koja odgovara i-tom ograničenju koje je tipa “manje ili jednako” i ukoliko je x_q izravnavajuća promjenljiva koja je *dodana* na lijevu stranu i-tog ograničenja, tada optimalna vrijednost za y_i iznosi $y_i = c_q$;
- Ukoliko je y_i dualna promjenljiva koja odgovara i-tom ograničenju koje je tipa jednakosti i ukoliko je x_q vještačka promjenljiva koja je dodana na lijevu stranu i-tog ograničenja, uz uvođenje kaznenog koeficijenta $+M$ uz x_q u funkciji cilja, tada optimalna vrijednost za y_i iznosi $y_i = c_q + M$;
- Ukoliko je y_p izravnavajuća promjenljiva koja je dodana na lijevu stranu j-tog ograničenja u dualnom problemu, tada optimalna vrijednost za y_p iznosi $y_i = -c_j$.

Svojstvo komplementarnosti optimalnih rješenja primala i duala možemo generalizirati i na slučajeve rješenja koja *nisu nužno optimalna*, i tako dobijamo svojstvo poznato kao ***svojstvo komplementarnosti rješenja primala i duala***. Ovo svojstvo govori da ukoliko je neko rješenje **y** dualnog problema određeno na prethodno opisani način (tj. na osnovu koeficijenata u posljednjem redu simpleks tabele), ali na osnovu simpleks tabele koja odgovara rješenju primalnog problema **x** koje je *dozvoljeno, ali ne nužno i optimalno*, tada će *i za takav par rješenja vrijediti* $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$. Međutim, ukoliko **x** nije optimalno rješenje primala, takvo rješenje **y** *nije dopustivo rješenje duala*, odnosno tako određeno **y** je dopustivo rješenje duala *samo ako je* **x** *optimalno rješenje primala*. Zaista, da vrijedi $Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$ možemo dokazati na isti način kao pri dokazu svojstva jake dualnosti, samo uzimajući da se indeks B u $\mathbf{A}_B$, $\mathbf{c}_B$ i $\mathbf{x}_B$ ne odnosi na *optimalnu bazu*, nego na *proizvoljnu dopustivu bazu*. S druge strane, ako **x** nije optimalno rješenje, barem neki od koeficijenata u posljednjem redu simpleks tabele će biti *pozitivan*, odnosno barem neka od izvornih ili dopunskih dualnih promjenljivih će imati *krivi znak*, tako da **y** *neće biti dozvoljeno rješenje*.

Da bismo olakšali izlaganja koja slijede, uvešćemo *prikladnu terminologiju*. Ukoliko dualna promjenljiva y_i odgovara i-tom ograničenju primala, kažemo da je ta dualna promjenljiva ***spregnuta*** *sa i-tim ograničenjem*, ali se također kaže da je ona *spregnuta i sa izravnavajućom promjenljivom* x_q koja je dodana lijevoj strani i-tog ograničenja (ili je koja oduzeta od lijeve strane i-tog ograničenja ukoliko se radilo o ograničenju tipa “veće ili jednako”). Pri uobičajenoj numeraciji izvornih i izravnavajućih promjenljivih, obično je $q = n + i$, pa su tada spregnute promjenljive y_i i x_{n+i}, odnosno x_{n+i} i y_i jer je odnos spregnutosti *simetričan*. Isto tako, za j-to ograničenje u dualnom problemu, koje po pretpostavci odgovara promjenljivoj x_j polaznog problema, kaže se da je *spregnuto sa promjenljivom* x_j, ali se također kaže i da je promjenljiva x_j *spregnuta i sa izravnavajućom promjenljivom* y_p koja je oduzeta od lijeve strane j-tog ograničenja dualnog problema (ili koja je dodana na lijevu stranu j-tog ograničena dualnog problema ukoliko je to ograničenje bilo tipa “manje ili jednako”). Pri uobičajenoj numeraciji promjenljivih, obično je $p = m + j$, tako da su spregnute promjenljie x_j i y_{m+j}, odnosno y_{m+j} i x_j. Uz ovakvu terminologiju, možemo prosto reći da se optimalna vrijednost neke dualne promjenljive određuje na osnovu elementa koji se nalazi u presjeku posljednjeg reda optimalne simpleks tabele i kolone koja odgovara *njoj spregnutoj primalnoj promjenljivoj*.

Uz ovako uvedenu terminologiju, možemo lako iskazati ***svojstvo oslabljene komplementarnosti*** prema kojem kada je god **y** neko (ne nužno dopustivo) rješenje dualnog problema koje je na prethodno opisani način pridruženo nekom rješenju **x** primalnog problema, *produkt međusobno spregnutih promjenljivih iz* **x** *i* **y** *uvijek je jednak nuli*. Drugim riječima, ukoliko je promjenljiva x_q iz **x** spregnuta sa promjenljivom y_p iz **y**, tada mora vrijediti $x_q y_p = 0$. Uz standardnu numeraciju izvornih i dopunskih promjenljivih primalnog i dualnog problema, ovo svojstvo se može izraziti u vidu relacija $x_{n+i}\, y_i = 0,\ i = 1\,..\,m$ i $x_j\, y_{m+j} = 0,\ j = 1\,..\,n$. Specijalno, ovo svojstvo mora vrijediti i ukoliko su **x** i **y** *optimalna rješenja primala i duala*. Vidjećemo nešto kasnije da se ovoj osobini može dati *značajna ekonomska interpretacija*.

Svojstvo oslabljene komplementarnosti zapravo govori da od dvije međusobno spregnute promjenljive x_q i y_p, *najviše jedna od njih može imati vrijednost različitu od nule* (pri čemu je moguće da obje imaju vrijednost nula). Tako, ako je x_q različita od nule, tada y_p mora biti nula, dok ako je y_p različita od nule, tada x_q mora biti nula. Da ovo svojstvo mora vrijediti, jasno je iz samog načina kako se **y** određuje iz **x**. Zaista, x_q može u nekoj simpleks tabeli biti različita od nule *jedino ukoliko je ona bazna promjenljiva*, a znamo da su svi koeficijenti c_j uz bazne promjenljive u simpleks tabeli jednaki nuli, pa je tako i njoj spregnuta promjenljiva y_p jednaka nuli. S druge strane, neka dualna promjenljiva može biti različita od nule jedino ako se ona određuje iz koeficijenta c_q koji je različit od nule, ali tada odgovarajuća promjenljiva x_q mora biti nebazna promjenljiva, pa je njena vrijednot jednaka nuli.

Da bi se lakše izražavala i koristila svojstva komplementarnosti, ponegdje se u literaturi koristi *nešto drugačija numeracija dualnih promjenljivih* nego što je ovdje korištena. Naime, po tom sistemu numeracije, dualne promjenljive se ne numeriraju indeksima od 1 do m, kao što je to uobičajeno, nego indeksima od $n+1$ do $n+m$, dok se izravnavajuće promjenljive dualnog modela umjesto indeksima od $m+1$ do $m+n$ numeriraju indeksima od 1 do m. Na primjer, neka je dat simetrični problem maksimizacije u obliku

$$\arg\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

p.o.

$$\begin{aligned}
&a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n \le b_1 \\
&a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n \le b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \ldots + a_{m,n} x_n \le b_m
\end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0$$

Nakon uvođenja izravnavajućih promjenljivih, problem dobija normalni oblik

$$\arg\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

p.o.

$$\begin{aligned}
&a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \ldots + a_{1,n} x_n + x_{n+1} &&= b_1 \\
&a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \ldots + a_{2,n} x_n \quad + x_{n+2} &&= b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \ldots + a_{m,n} x_n \qquad + x_{n+m} &&= b_m
\end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots\ x_n \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \ge 0$$

Prema upravo opisanom alternativnom sistemu numeracije dualnih promjenljivih, dualni problem polaznog problema će imati oblik

$$\arg\min W = b_1 y_{n+1} + b_2 y_{n+2} + \ldots + b_m\, y_{n+m}$$

p.o.

$$\begin{aligned}
&a_{1,1} y_{n+1} + a_{2,1} y_{n+2} + \ldots + a_{m,1}\, y_{n+m} \ge c_1 \\
&a_{1,2} y_{n+1} + a_{2,2} y_{n+2} + \ldots + a_{m,2}\, y_{n+m} \ge c_2 \\
&\ldots \\
&a_{1,n} y_{n+1} + a_{2,n} y_{n+2} + \ldots + a_{m,n}\, y_{n+m} \ge c_n
\end{aligned}$$

$$y_{n+1} \ge 0,\ \ y_{n+2} \ge 0,\ \ldots,\ y_{n+m} \ge 0$$

dok će, nakon uvođenja izravnavajućih promjenljivih, on dobiti oblik arg min $W = b_1 y_{n+1} + b_2 y_{n+2} + \ldots + b_m\, y_{n+m}$

p.o.

$$-y_1 \qquad + a_{1,1} y_{n+1} + a_{2,1} y_{n+2} + \ldots + a_{m,1}\, y_{n+m} = c_1$$
$$-y_2 \qquad + a_{1,2} y_{n+1} + a_{2,2} y_{n+2} + \ldots + a_{m,2}\, y_{n+m} = c_2$$
$$\ldots$$
$$-y_n + a_{1,n} y_{n+1} + a_{2,n} y_{n+2} + \ldots + a_{m,n}\, y_{n+m} = c_n$$

$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ \ldots\ y_n \ge 0,\ \ y_{n+1} \ge 0,\ \ y_{n+2} \ge 0,\ \ldots,\ y_{n+m} \ge 0$

Prednost ovog načina numeracije je u tome što u tom slučaju *spregnute promjenljive uvijek imaju isti indeks*, odnosno promjenljiva x_k je uvijek spregnuta sa promjenljivom y_k za sve $k = 1 \,..\, m + n$. Tako se, uz ovakvu numeraciju, optimalna vrijednost ma koje dualne promjenljive y_k uvijek određuje iz kolone u optimalnoj simpleks tabeli koja odgovara promjenljivoj x_k, što olakšava snalaženje. Također, svojstvo oslabljene komplementarnosti se, uz ovakvu numeraciju, izražava prosto kao $x_k\, y_k = 0$, $k = 1 \,..\, m + n$.

Izložena svojstva komplementarnosti zapravo znače da se svakom *dopustivom baznom rješenju* **x** primala koje odgovara nekoj simpleks tabeli primala može pridružiti tačka **y** u *dualnom prostoru* (tj. čije su koordinate dualne promjenljive) koja je *komplementarna* baznom dopustivom rješenju primala (u prethodno opisanom smislu), koja je također *bazno rješenje* dualnog problema (jer u njoj najviše n promjenljivih mogu imati nenulte vrijednosti) i koja daje funkciji cilja dualnog problema *istu vrijednost* kakvu **x** daje funkciji cilja polaznog problema, ali koja je *nedopustiva* za dualni problem, *osim u slučaju kada je ona optimalno rješenje dualnog problema*. Vidjećemo nešto kasnije da se na ovom svojstvu zasniva *dualni simpleks metod*.

Neke primjene rezultata teorije dualnosti

Usljed simetričnosti primala i duala, dovoljno je simpleks metodom riješiti *jedan od ova dva zadatka*, nakon čega rješenje *onog drugog* možemo *prosto očitati* iz simpleks tabele koja odgovara optimalnom rješenju, koristeći *svojstvo komplementarnosti optimalnih rješenja primala i duala*. S obzirom da ćemo uskoro vidjeti da se iz optimalnog rješenja duala *mogu izvući izuzetno interesantne informacije o samom polaznom problemu*, koje imaju i važnu *ekonomsku interpretaciju*, to znači da su nam te informacije *odmah raspoložive* nakon što riješimo primalni problem, bez potrebe da posebno rješavamo dualni problem.

S druge strane, ukoliko se odlučimo da umjesto primala rješavamo dual, iz simpleks tabele koja odgovara njegovom optimalnom rješenju možemo očitati i optimalno rješenje primala. Ovo je korisno zbog činjenice da se *u nekim situacijama više isplati rješavati dual nego primal*. Zaista, ako primal ima n promjenljivih i m ograničenja (ne računajući ograničenja na nenegativnost promjenljivih), njegov dual ima m promjenljivih i n ograničenja. Nakon uvođenja izravnavajućih promjenljivih u primal i dual, i jedan i drugi problem će imati $n + m$ promjenljivih, odnosno glavni dio njihove simpleks tabele će imati toliko kolona. Međutim, glavni dio simpleks tabele za primalni problem imaće m redova, dok će za dualni problem imati n redova. Slijedi da ćemo manje računanja u jednoj iteraciji imati ako rješavamo dualni problem kad god je $m > n$. Doduše, ako je polazni problem bio standardni problem maksimizacije, u dualnom problemu ćemo imati ograničenja tipa "veće ili jednako", tako da ćemo morati uvoditi i n vještačkih promjenljivih, odnosno glavni dio simpleks tabele za dual će imati $m + 2n$ kolona. Ipak, za dovoljno veliko m u odnosu na n, proizvod $n\,(m + 2n)$ će biti manji od $m\,(n + m)$, pa će se tada, sa aspekta količine računanja u jednoj iteraciji, više isplatiti rješavati simpleks metodom dualni problem (tačnije, ovo će vrijediti kad god je $m > \sqrt{2}\, n \approx 1.41\, n$). Štaviše, kako je pri ručnom radu znatno lakše raditi sa tabelama koje imaju *manje redova* (dok broj kolona i nije toliko bitan), zatim kako vještačke promjenljive tipično relativno brzo "ispadaju iz igre" i kako je empirijski pokazano da na *broj iteracija* koje su u prosjeku potrebne da se dostigne optimalno rješenje znatno više utiče broj ograničenja nego broj promjenljivih, smatra se da se više isplati simpleks metodom rješavati dualni umjesto polaznog problema praktički kad god je $m > n$.

- ***Primjer*** : Riješiti simpleks metodom problem linearnog programiranja

arg max $Z = 5\,x_1 + 2\,x_2$

p.o.

$$x_1 \le 6$$
$$2\,x_2 \le 18$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 \le 24$$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$

i očitati optimalno rješenje dualnog problema iz optimalne simpleks tabele polaznog problema. Uočiti parove komplementarnih rješenja primala i duala tokom izvođenja simpleks algoritma. Zatim riješiti dualni problem ovog problema simpleks metodom i iz optimalne simpleks tabele dualnog problema očitati optimalno rješenje polaznog problema.

Da bismo uopće diskutirali o dualnom problemu, potrebno je prvo vidjeti kako taj dualni problem glasi. Ranije smo izveli da dualni problem za ovaj problem izgleda ovako:

$$\arg\min W = 6y_1 + 18y_2 + 24y_3$$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 \qquad &+ 3y_3 \ge 5 \\ 2y_2 &+ 2y_3 \ge 2 \end{aligned}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$

Krenimo sada sa rješavanjem primala simpleks metodom. Polazna simpleks tabela za ovaj problem glasi:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	6	1	0	1	0	0	$6/1 = 6$
x_4	18	0	2	0	1	0	
x_5	24	3	2	0	0	1	$24/3 = 8$
	0	5	2	0	0	0	

Vidimo da (prema Dantzigovom pravilu pivotiranja) u bazu treba uvesti promjenljivu x_1, nakon čega vidimo da iz baze treba izaći promjenljiva x_3. Prelaskom na novo bazno rješenje, dobijamo sljedeću simpleks tabelu:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	6	1	0	1	0	0	
x_4	18	0	2	0	1	0	$18/2=9$
x_5	6	0	2	–3	0	1	$6/2 = 3$
	–30	0	2	–5	0	0	

Sada u bazu treba ući promjenljiva x_2, dok promjenljiva x_5 treba napustiti bazu. Transformacijom simpleks tabele u skladu sa novim baznim rješenjem, dobijamo sljedeću tabelu:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6	1	0	1	0	0
x_4	12	0	0	3	1	–1
x_2	3	0	1	–3/2	0	1/2
	–36	0	0	–2	0	–1

Kako su sada svi koeficijenti c_j negativni, to je pronađeno optimalno rješenje, koje možemo direktno očitati iz tabele, i koje glasi $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 12$ i $x_5 = 0$. Međutim, iz iste tabele direktno očitavamo i optimalno rješenje *duala*, koje prema svojstvu komplementarnosti optimalnog rješenja primala i duala glasi $y_1 = -c_3 = 2$, $y_2 = -c_4 = 0$, $y_3 = -c_5 = 1$, $y_4 = -c_1 = 0$ i $y_5 = -c_2 = 0$. Lako uviđamo da vrijedi oslabljena komplementarnost, jer je $x_1 y_4 = x_2 y_5 = x_3 y_1 = x_4 y_2 = x_5 y_3 = 0$.

Kretanje tekućih (dozvoljenih) baznih rješenja primala i njima odgovarajućih komplementarnih (nedozvoljenih, osim u trenutku dostizanja optimuma) baznih rješenja duala tokom izvršavanja simpleks algoritma prikazano je u sljedećoj tabeli. Vidimo da cijelo vrijeme važi princip oslabljene komplementarnosti.

	Tekuće rješenje $\mathbf{x}$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$Z(\mathbf{x}) = W(\mathbf{y})$	Komplementarno rješenje $\mathbf{y}$
		$-y_4$	$-y_5$	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$		
Tabela 1	$(0, 0)^\mathrm{T}$	5	2	0	0	0	0	$(0, 0, 0)^\mathrm{T}$
Tabela 2	$(6, 0)^\mathrm{T}$	0	2	–5	0	0	30	$(5, 0, 0)^\mathrm{T}$
Tabela 3	$(6, 3)^\mathrm{T}$	0	0	–2	0	–1	36	$(2, 0, 1)^\mathrm{T}$

Riješimo sada dualni problem simpleks metodom. Kako se u dualnom problemu javljaju ograničenja tipa "veće ili jednako", to ćemo za njegovo rješavanje simpleks metodom pored izravnavajućih promjenljivih y_4 i y_5 morati uvesti i vještačke promjenljive y_6 i y_7, uz odgovaruću modifikaciju funkcije cilja uvođenjem kaznenog koeficijenta M. Tako modificirani problem postaje:

$$\arg\min W = 6y_1 + 18y_2 + 24y_3 + My_6 + My_7$$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 \qquad + 3y_3 - y_4 \qquad + y_6 \qquad &= 5 \\ 2y_2 + 2y_3 \qquad - y_5 \qquad + y_7 &= 2 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

Da bismo se pripremili za rješavanje ovog problema simpleks metodom sa polaznom bazom B = (y_6, y_7), moramo transformirati funkciju cilja tako da u njoj ne figuriraju bazne promjenljive. Izrazimo stoga y_6 i y_7 preko ostalih promjenljivih:

$$y_6 = 5 - y_1 - 3y_3 + y_4$$

$$y_7 = 2 - 2y_2 - 2y_3 + y_5$$

Sada funkcija cilja postaje

$$\begin{aligned} W &= 6y_1 + 18y_2 + 24y_3 + M(5 - y_1 - 3y_3 + y_4) + M(2 - 2y_2 - 2y_3 + y_5) = \\ &= (6-M)\,y_1 + (18-2M)\,y_2 + (24-5M)\,y_3 + My_4 + My_5 \end{aligned}$$

Kako tražimo minimum, funkciju cilja ćemo pomnožiti sa –1, nakon čega možemo formirati početnu simpleks tabelu:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	
y_6	5	1	0	3	–1	0	1	0	$5/3 \approx 1.67$
y_7	2	0	2	2	0	–1	0	1	$2/2 = 1$
M	7	1	2	5	–1	–1	0	0	
	0	–6	–18	–24	0	0	0	0	

Vidimo da u bazu treba ući promjenljiva y_3, dok iz baze ispada promjenljiva y_7. Kako je ona vještačka promjenljiva, možemo je potpuno eliminirati iz daljih razmatranja (i iz simpleks tabele). Nakon prelaska na novu bazu, nova simpleks tabela izgleda ovako:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_6	2	1	–3	0	–1	3/2	1	$2/(3/2) \approx 1.33$
y_3	1	0	1	1	0	–1/2	0	
M	2	1	–3	0	–1	3/2	0	
	24	–6	6	0	0	–12	0	

Sada u bazu ulazi promjenljiva y_5, a iz baze izlazi promjenljiva y_6, koja je također vještačka, te ćemo je izbaciti "iz igre". Ovim su eliminirane sve vještačke promjenljive, te prestaje potreba i za redom koji sadrži množilac M. Nakon obavljenih transformacija, dobija se sljedeća simpleks tabela:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_5	4/3	2/3	–2	0	–2/3	1	$(4/3)/(2/3) = 2$
y_3	5/3	1/3	0	1	–1/3	0	$(5/3)/(3/3) = 5$
	40	2	–18	0	–8	0	

Sada u bazu ulazi promjenljiva y_1, a iz nje izlazi promjenljiva y_5. Novom baznom rješenju odgovaraće sljedeća simpleks tabela:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	2	1	–3	0	–1	3/2
y_3	1	0	1	1	0	–1/2
	36	0	–12	0	–6	–3

Svi koeficijenti u posljednjem redu su negativni, te je pronađeno optimalno rješenje. Direktnim očitavanjem iz tabele, ovo rješenje glasi $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ i $y_5 = 0$. Međutim, sada iz iste tabele možemo očitati i optimalno rješenje primala, koje prema svojstvu komplementarnosti optimalnog rješenja primala i duala glasi $x_1 = –c_4 = 6$, $x_2 = –c_5 = 3$, $x_3 = –c_1 = 0$, $x_4 = –c_2 = 12$ i $x_5 = –c_3 = 0$. Vidimo da smo dobili isto rješenje kao i direktnim rješavanjem primala. S obzirom da su u ovom primjeru broj promjenljivih i broj ograničenja polaznog problema bliski, ovdje nije bilo osobito isplativo rješavati dual umjesto primala.

Još jedan slučaj kada se definitivno više isplati rješavati dualni problem nego primalni je slučaj kada je primalni problem *simetrični zadatak minimizacije*, čak i ako je broj ograničenja u primalnom problemu nešto manji od broja promjenljivih (a pogotovo ako je veći). Naime, u tom slučaju je za direktno rješavanje primalnog problema simpleks metodom u svako ograničenje potrebno uvoditi i izravnavajuće i vještačke promjenljive. S druge strane, dualni problem će tada biti *simetrični zadatak maksimizacije*, gdje je potrebno uvoditi samo izravnavajuće promjenljive. Tipično će takav problem biti mnogo lakši za rješavanje.

➢ ***Primjer***: Rješavajući simpleks metodom odgovarajući dualni problem umjesto polaznog problema, riješiti problem linearnog programiranja

$$\arg\min Z = 40\,x_1 + 30\,x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} 0.1\,x_1 \quad\quad\quad & \geq 0.2 \\ 0.1\,x_2 & \geq 0.3 \\ 0.5\,x_1 + 0.3\,x_2 & \geq 3 \\ 0.1\,x_1 + 0.2\,x_2 & \geq 1.2 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\;\; x_2 \geq 0$$

Ovaj problem smo ranije direktno rješavali simpleks metodom. Za tu svrhu, bile su nam potrebne 4 izravnavajuće i 4 vještačke promjenljive, što je za posljedicu imalo prilično glomazne simpleks tabele. Također, do rješenja smo došli nakon 4 iteracije. Ovdje ćemo pokazati da se do rezultata dolazi mnogo brže i lakše *rješavajući simpleks metodom odgovarajući dualni problem*. Za ovaj problem, dualni problem glasi

$$\arg\max W = 0.2\,y_1 + 0.3\,y_2 + 3\,y_3 + 1.2\,y_4$$

p.o.

$$\begin{aligned} 0.1\,y_1 \quad\quad\quad + 0.5\,y_3 + 0.1\,y_4 & \leq 40 \\ 0.1\,y_2 + 0.3\,y_3 + 0.2\,y_4 & \leq 30 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0,\;\; y_2 \geq 0,\;\; y_3 \geq 0,\;\; y_4 \geq 0$$

Vidimo da je dual simetrični problem maksimizacije. Dodavanjem izravnavajućih promjenljivih, ovaj se dual svodi na normalni oblik:

$$\arg\max W = 0.2\,y_1 + 0.3\,y_2 + 3\,y_3 + 1.2\,y_4$$

p.o.

$$\begin{aligned} 0.1\,y_1 \quad\quad\quad + 0.5\,y_3 + 0.1\,y_4 + y_5 \quad\; & = 40 \\ 0.1\,y_2 + 0.3\,y_3 + 0.2\,y_4 \quad\; + y_6 & = 30 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0,\;\; y_2 \geq 0,\;\; y_3 \geq 0,\;\; y_4 \geq 0,\;\; y_5 \geq 0,\;\; y_6 \geq 0$$

Sada je sve spremno za primjenu simpleks metoda. Polazna simpleks tabela za ovaj problem izgleda ovako:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_5	40	0.1	0	0.5	0.1	1	0	40/0.5 = 80
y_6	30	0	0.1	0.3	0.2	0	1	30/0.3 = 100
	0	0.2	0.3	3	1.2	0	0	

U skladu sa Dantzigovim pravilom pivotizacije, odabraćemo da u novu bazu uđe promjenljiva y_3, dok tada slijedi da y_5 treba napustiti bazu. Transformacijom simpleks tabele u skladu sa novim baznim rješenjem dobija se sljedeća tabela:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
y_3	80	0.2	0	1	0.2	2	0	$80/0.2 = 400$
y_6	6	–0.06	0.1	0	0.14	–0.6	1	$6/0.14 \approx 42.9$
	–240	–0.4	0.3	0	0.6	–6	0	

U bazu sada ulazi promjenljiva y_4, a napušta je promjenljiva y_6. Simpleks tabela koja odgovara novom baznom rješenju izgleda ovako:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_3	500/7	2/7	–1/7	1	0	20/7	–10/7
y_4	300/7	–3/7	5/7	0	1	–30/7	50/7
	–1860/7	–1/7	–9/70	0	0	–24/7	–30/7

Ovim je nađeno optimalno rješenje duala, jer su svi koeficijenti u posljednjem redu simpleks tabele jednaki. Sada iz ove tabele možemo također očitati i optimalno rješenje primala, koje prema svojstvu komplementarnosti optimalnog rješenja primala i duala glasi $x_1 = -c_5 = 24/7$ i $x_2 = -c_6 = 30/7$.

Ukoliko nam je potrebno, iz ove tabele možemo očitati i optimalne vrijednosti izravnavajućih promjenljivih primala. Naime, kada smo ranije rješavali ovaj problem direktnom primjenom simpleks metode, izravnavajuće promjenljive su se zvale redom x_3, x_5, x_7 i x_9 (dok su x_4, x_6, x_8 i x_{10} bile vještačke promjenljive). Kako su ove promjenljive spregnute redom sa dualnim promjenljivim y_1, y_2, y_3 i y_4, slijedi $x_3 = -c_1 = 1/7$, $x_5 = -c_2 = 9/70$, $x_7 = -c_3 = 0$ i $x_9 = -c_4 = 0$. Vidimo da smo dobili isto rješenje kao i direktnim putem, ali u samo dvije iteracije i uz mnogo manje računa u pojedinim iteracijama.

Treba napomenuti da se praktično *nikada ne isplati rješavati dualni problem umjesto polaznog ako polazni problem nije bio simetričan*. Naime, u tom slučaju dualni problem ima strukturu koja nije pogodna za direktnu primjenu simpleks metoda. Zaista, tada se u dualnom problemu može desiti da neke promjenljive moraju biti nepozitivne umjesto nenegativne, dok neke mogu da budu neograničene po znaku. Takvi problemi zahtijevaju izvjesne predradnje u vidu uvođenja smjena promjenljivih da bi se mogle rješavati simpleks metodom, što uvodi dodatne komplikacije.

U slučaju da u primalnom problemu postoje *ograničenja tipa jednakosti*, tada ukoliko želimo da iz optimalne simpleks tabele primalnog problema možemo očitati optimalne vrijednosti dualnog problema, *ne smijemo u toku postupka izbaciti kolonu koja odgovara vještačkoj promjenljivoj koja je dodana na to ograničenje nakon što ona ispadne iz baze*, nego je moramo zadržati u tabelama sve do kraja postupka. Zaista, iz svojstva komplementarnosti optimalnih rješenja primala i duala, vidi se da se u tom slučaju optimalna vrijednost dualne promjenljive koja odgovara takvom ograničenju očitava upravo iz elementa c_q koji odgovara *vještačkoj promjenljivoj* koja je dodana na to ograničenje. Ovakvu situaciju ćemo ilustrirati kroz sljedeći primjer.

- ***Primjer*** : Za problem određivanja optimalnog procentualnog udjela pojedinih hrana u obroku koji smo ranije rješavali

  $$\arg\min Z = 32x_1 + 56x_2 + 50x_3 + 60x_4$$

  p.o.

  $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 250x_1 + 150x_2 + 400x_3 + 200x_4 &\ge 300 \\ x_4 &\le 0.3 \\ x_2 + x_3 &\le 0.5 \end{aligned}$$

  $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

  odrediti optimalno rješenje njegovog dualnog problema rješavajući izvorni problem simpleks metodom.

Ovo je primjer asimetričnog problema linearnog programiranja, u kojem se javlja i ograničenje tipa jednakosti. U skladu sa ranije izvedenim postupcima, njegov (asimetrični) dual glasi:

arg max $W = y_1 + 300y_2 + 0.3y_3 + 0.5y_4$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 + 250\,y_2 \quad\quad\quad\quad &\le 32 \\ y_1 + 150\,y_2 \quad\quad + y_4 &\le 56 \\ y_1 + 400\,y_2 \quad\quad + y_4 &\le 50 \\ y_1 + 200\,y_2 + y_3 \quad\quad &\le 60 \end{aligned}$$

y_1 neograničena po znaku, $y_2 \ge 0$, $y_3 \le 0$, $y_4 \le 0$

Prilikom rješavanja polaznog problema simpleks metodom koje smo provodili ranije, izravnavajuće promjenljive koje idu uz drugo, treće i četvrto ograničenje označili smo respektivno sa x_5, x_6 i x_7, dok smo sa x_8 i x_9 označili vještačke promjenljive koje su dodane na prvo i drugo ograničenje respektivno. Ovdje nećemo ponavljati cijeli tok postupka, ali ćemo se zadržati na simpleks tabeli kakva je dobijena nakon dvije iteracije, koja je izgledala ovako:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_8	0.1	0	1	0	0.2	0.004	0	0.6	1	$0.1/1 = 0.1$
x_1	0.4	1	–1	0	0.8	–0.004	0	–1.6	0	
x_6	0.3	0	0	0	1	0	1	0	0	
x_3	0.5	0	1	1	0	0	0	1	0	$0.5/1 = 0.5$
M	0.1	0	1	0	0.2	0.004	0	0.6	0	
	37.8	0	–38	0	–34.4	–0.128	0	–1.2	0	

Vidimo da u bazu sada treba da uđe promjenljiva x_2, a da iz nje izađe promjenljiva x_8. Kada smo ranije rješavali ovaj problem, kolonu koja odgovara promjenljivoj x_8 smo potpuno “izbacili iz igre”, s obzirom da je ona vještačka promjenljiva. Međutim, kako je x_8 vještačka promjenljiva koja je dodana na prvo ograničenje koje je *tipa jednakosti*, upravo će se u ovoj koloni nalaziti informacija o optimalnoj vrijednosti dualne promjenljive y_1 koja je pridružena ovom ograničenju. Zbog toga, ovu kolonu *nećemo odstranjivati iz simpleks tabele*. Također, nećemo odstanjivati ni red koji se množi sa koeficijentom M. Prelaskom na novu bazu, dobijamo sljedeću simpleks tabelu:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_2	0.1	0	1	0	0.2	0.004	0	0.6	1	$0.1/0.6 \approx 0.167$
x_1	0.5	1	0	0	1	0	0	–1	1	
x_6	0.3	0	0	0	1	0	1	0	0	
x_3	0.4	0	0	1	–0.2	–0.004	0	0.4	–1	$0.4/0.4 = 1$
M	0	0	0	0	0	0	0	0	–1	
	41.6	0	0	0	–26.8	0.024	0	21.6	38	

Sada u bazu treba uvesti promjenljivu x_7, pri čemu će pri tome iz nje ispasti promjenljiva x_2. Nakon obavljenih preračunavanja, dolazi se do sljedeće simpleks tabele:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_7	1/6	0	5/3	0	1/3	1/150	0	1	5/3
x_1	2/3	1	5/3	0	4/3	1/150	0	0	8/3
x_6	0.3	0	0	0	1	0	1	0	0
x_3	1/3	0	–2/3	1	–1/3	–1/150	0	0	–5/3
M	0	0	0	0	0	0	0	0	–1
	38	0	–36	0	–34	–0.12	0	0	2

Konačno smo došli do optimalnog rješenja, jer su svi koeficijenti c_j negativni ili nule. Sada, prema svojstvu komplementarnosti optimalnih rješenja primala i duala, lako očitavamo optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih $y_1 = c_8 + M = 2$, $y_2 = -c_5 = 0.12$, $y_3 = c_6 = 0$ i $y_4 = c_7 = 0$. Ukoliko nas zanimaju i optimalne vrijednosti *izravnavajućih* dualnih promjenljivih, i njih lako možemo dobiti kao $y_5 = -c_1 = 0$, $y_6 = -c_2 = 36$, $y_7 = -c_3 = 0$ i $y_8 = -c_4 = 34$.

Na kraju, vrijedi reći i da se u slučaju da je optimalno rješenje primalnog problema dobijeno *nekim drugim postupkom* a ne simpleks metodom, tako da nam *optimalna simpleks tabela nije dostupna*, do optimalnog rješenja dualnog problema je ipak moguće doći *bez provođenja kompletnog postupka rješavanja*, ukoliko se u pomoć pozove *svojstvo oslabljene komplementarnosti*. Kako se ovo radi, najbolje je pokazati na konkretnom primjeru.

- ***Primjer*** : Za problem linearnog programiranja

$$\arg\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

p. o.

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1 + 3x_2 &\le 21 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 6 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

grafičkim metodom je određeno optimalno rješenje $x_1 = 2$ i $x_2 = 6$. Odrediti optimalno rješenje njegovog dualnog problema koristeći svojstvo oslabljene komplementarnosti.

Za potrebe razmatranja dualnog problema, da bismo mogli uočiti koji su parovi međusobno spregnutih promjenljivih, moraćemo formirati i *prošireni model* dodavanjem odnosno oduzimanjem izravnavajućih promjenljivih, *bez obzira što optimalno rješenje već znamo*. Na taj način, dolazimo do sljedećeg proširenog modela:

$$\arg\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

p. o.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\ x_1 + 3x_2 + x_6 &= 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_7 &= 6 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0,\ \ x_6 \ge 0,\ \ x_7 \ge 0$$

Na osnovu poznatog optimalnog rješenja, lako nalazimo i optimalne vrijednosti dopunskih promjenljivih:

$$x_3 = 4 - x_1 = 2$$

$$x_4 = 12 - 2x_2 = 0$$

$$x_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_6 = 21 - x_1 - 3x_2 = 1$$

$$x_7 = 2x_1 + 3x_2 - 6 = 16$$

Dualni problem razmatranog problema glasi

$$\arg\min W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 + 21y_4 + 6y_5$$

p. o.

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 + 2y_5 &\ge 3 \\ 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 &\ge 5 \end{aligned}$$

$$y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0,\ \ y_3 \ge 0,\ \ y_4 \ge 0,\ \ y_5 \le 0$$

odnosno, nakon uvođenja izravnavajućih dualnih promjenljivih,

$$\arg\min W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 + 21y_4 + 6y_5$$

p. o.

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 + 2y_5 - y_6 &= 3 \\ 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 - y_7 &= 5 \end{aligned}$$

$$y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0,\ \ y_3 \ge 0,\ \ y_4 \ge 0,\ \ y_5 \le 0,\ \ y_6 \ge 0,\ \ y_7 \ge 0$$

Ratmotrimo sada uvjete koji slijede iz svojstva oslabljene komplementarnosti, koji redom glase $x_1 y_6 = 0$, $x_2 y_7 = 0$, $x_3 y_1 = 0$, $x_4 y_2 = 0$, $x_5 y_3 = 0$, $x_6 y_4 = 0$ i $x_7 y_5 = 0$. Kako je $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, $x_6 \neq 0$ i $x_7 \neq 0$, odavde odmah slijedi $y_6 = 0$, $y_7 = 0$, $y_1 = 0$, $y_4 = 0$ i $y_5 = 0$. Dakle, samo y_2 i y_3 mogu imati nenulte vrijednosti. Njih lako možemo odrediti iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} 3y_3 &= 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &= 5 \end{aligned}$$

koji se dobija kada u gornji sistem jednačina uvrstimo $y_1 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 0$. Rješavanjem ovog sistema konačno dobijamo $y_3 = 1$ i $y_2 = 3/2$, čime smo odredili optimalne vrijednosti svih dualnih promjenljivih.

Ekonomska interpretacija optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih

Važnost dualnog problema nije samo u činjenici da je nekada umjesto primalnog problema lakše rješavati dualni problem i onda iz njegovog rješenja izvesti rješenje primalnog problema, nego i u činjenici da *dualne promjenljive imaju važnu ekonomsku interpretaciju*. Nekada su čak informacije koje se mogu izvući iz optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih *korisnije za praksu* od samog rješenja problema, jer one predstavljaju polaznu osnovu za analize tipa *šta-bi-bilo-kad-bi-bilo*. Korisne informacije se mogu izvući *ne samo iz izvornih dualnih promjenljivih* u dualnom modelu, *nego i iz izravnavajućih promjenljivih dualnog modela*. Velika greška koju pojedinci rade pri primjeni metoda operacionih istraživanja je što *ne uzimaju u obzir informacije* koje im nude optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih.

Razmotrimo prvo *kakve su obično jedinice mjere* (ili, kako se to često kaže, *dimenzije*) dualnih promjenljivih. Ako imamo simetrični primalni problem maksimizacije, on se najčešće interpretira kao problem *optimalne raspodjele ograničenih resursa na određene aktivnosti*. Tako promjenljive x_j, $j = 1 \,..\, n$ obično predstavljaju *količinu* j-tog proizvoda koji treba proizvesti, c_j, $j = 1 \,..\, n$ je obično *zarada* po *količinskoj jedinici* j-tog proizvoda, b_i, $i = 1 \,..\, m$ je obično *raspoloživa količina* i-tog resursa, dok vrijednosti $a_{i,j}$, $i = 1 \,..\, m$, $j = 1 \,..\, n$ obično predstavljaju *količinu* i-tog resursa koja se troši za proizvodnju *jedne količinske jedinice* j-tog resursa. Kako je jedinica mjere za veličinu c_j *novčana jedinica po količinskoj jedinici j-tog proizvoda*, na osnovu načina kako se formiraju ograničenja dualnog problema slijedi da tada i umnožak $a_{i,j}\, y_i$ mora imati istu jedinicu mjere (dimenziju). Međutim, kako je jedinica mjere za $a_{i,j}$ *količinska jedinica i-tog resursa po količinskoj jedinici j-tog proizvoda*, jedinica mjere za y_i je očito *novčana jedinica po količinskoj jedinici i-tog resursa*. Ovo se odnosi na *izvorne dualne promjenljive*, dok izravnavajuće dualne promjenljive koje su pridružene j-tom ograničenju dualnog problema očigledno imaju istu jedinicu mjere kao i c_j. Vidimo da u oba slučaja, dualne promjenljive tipično imaju dimenziju *jediničnih cijena* (za razliku od primalnih promjenljivih koje tipično imaju dimenziju *količina*). Na ovaj način se u ekonomiji izražava *odnos dualnosti količina – cijena*, odnosno dualnost *materijalnog i vrijednosnog toka*.

Sad ćemo razmotriti *značenja* odnosno *smisao* optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih. Prvo ćemo razmotriti smisao izvornih dualnih promjenljivih, dok ćemo smisao izravnavajućih dualnih promjenljivih razmotriti nešto kasnije. Već smo vidjeli da se u primjeru hipotetičkog poduzetnika koji želi da otkupi sve resurse nekog proizvođača dualne promjenljive y_i, $i = 1 \,..\, m$ mogu interpretirati kao *otkupne cijene jedne jedinice i-tog resursa*, tako da se njihove optimalne vrijednosti mogu smatrati kao *minimalne otkupne cijene* (*po jedinici resursa*) *pri kojima bi razuman proizvođač pristao da proda sve svoje resurse*. Međutim, u nastavku ćemo vidjeti da se dualnim promjenljivim može dati i *mnogo univerzalnije značenje*, koje ne ovisi od toga *šta primalni zadatak tačno modelira*. Da bismo uvidjeli to značenje, razmotrimo *kakav utjecaj na promjenu optimalne vrijednosti cilja ima promjena nekog od koeficijenata b_i*, gdje je i neki indeks u opsegu od 1 do m uključivo. Kako su optimalne vrijednosti funkcije cilja primala i duala jednake, to je prije promjene optimalna vrijednost funkcije cilja Z bila jednaka

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_i y_i + \ldots + b_m y_m$$

gdje su y_i, $i = 1 \,..\, m$ *optimalne vrijednosti* dualnih promjenljivih. Pretpostavimo sada da je došlo do promjene neke vrijednosti b_i za neki iznos Δb_i. Ova promjena naravno može dovesti do promjene optimalnog rješenja. Međutim, ukoliko je promjena Δb_i *dovoljno mala*, ona neće uticati na to *koje će promjenljive biti bazne a koje neće u novom optimalnom rješenju*, odnosno dovoljno mala promjena Δb_i *neće uticati na promjenu optimalne baze* (izuzetak od ovoga može nastati samo ako je optimalno rješenje *degenerirano*). Zaista, do promjene baze može doći samo ukoliko se optimalne vrijednosti promjenljivih promijene toliko da neko ograničenje koje ranije nije bilo kritično ograničenje (tj. "usko grlo") sada postane kritično, a male promjene koeficijenta Δb_i zbog neprekidnosti povlače i male promjene optimalnog rješenja. Međutim, ono što je značajno je da, sve dok ne dođe do promjene optimalne baze (tj. za dovoljno male promjene Δb_i), *neće* *uopće doći do promjene optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih*. Zaista, pri izvođenju dokaza svojstva jake dualnosti vidjeli smo da su optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih date izrazom $\mathbf{y} = (\mathbf{A}_B^{-1})^T\, \mathbf{c}_B$ koji *ne zavisi direktno od vektora* **b**, tako da do promjene optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih može doći *samo ako dođe do promjene optimalne baze* (jer će se tada promijeniti matrica $\mathbf{A}_B$). Slijedi da će nova vrijednost Z' optimalne funkcije cilja nakon promjene koeficijenta b_i za iznos Δb_i koji je dovoljno mali da ne dođe do promjene optimalne baze iznositi

$$Z' = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + (b_i + \Delta b_i)\, y_i + \ldots + b_m y_m$$

dok će promjena optimalne vrijednosti funkcije cilja iznositi

$$\Delta Z = Z' - Z = \Delta b_i\, y_i$$

Odavde vidimo da optimalna vrijednost dualne promjenljive y_i zapravo mjeri ***osjetljivost*** optimalne vrijednosti funkcije cilja na *promjenu* parametra b_i, recimo *uticaj promjene raspoložive količine i-tog resursa na maksimalni profit*. Recimo, ukoliko bi se raspoloživa količina resursa b_i promijenila za dovoljno malu vrijednost Δb_i, tada bi se ukupna dobit Z promijenila za $\Delta b_i\, y_i$. Često se u literaturi može sresti tvrdnja da optimalna vrijednost dualne promjenljive y_i daje mjeru promjene optimalne vrijednosti funkcije cilja ukoliko se koeficijent b_i promijeni *za jedinicu*, ali to treba shvatiti *uvjetno*, jer ova konstatacija vrijedi jedino ukoliko se u konkretnom primjeru "jedinica" može smatrati "dovoljno malom promjenom" (kasnije ćemo vidjeti kako odrediti koliko maksimalno može iznositi promjena Δb_i a da se optimalna baza ne promijeni). Uglavnom, ukoliko je ova konstatacija tačna, y_i u izvjesnom smislu predstavlja *mjeru dobiti* koja bi se mogla ostvariti pri *jediničnom povećanju* koeficijenta b_i (recimo, količine i-tog resursa), pa se y_i često naizva i ***cijenom u sjeni*** (engl. *shadow price*) i-tog resursa.

Kao primjer, posmatrajmo problem linearnog programiranja

$$\arg\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\le 6 \\ 2x_2 &\le 18 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 24 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

koji smo ranije rješavali i ustanovili da njegovo optimalno rješenje glasi $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, dok optimalno rješenje duala glasi $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$. Pri tome se dostiže optimalna vrijednost funkcije cilja $Z = 36$. Ukoliko bi se sada slobodni koeficijent u prvom ograničenju povećao sa 6 na 7, mogli bismo očekivati da će se optimalna vrijednost funkcije cilja povećati za $y_1 = 2$, odnosno da će nova vrijednost funkcije cilja iznositi $Z = 38$ (ovo će vrijediti samo ukoliko ova promjena nije dovela do promjene optimalne baze). Da je zaista tako, možemo se uvjeriti ponovnim rješavanjem problema uz navedenu izmjenu. Time se dobija da novo optimalno rješenje problema iznosi $x_1 = 7$, $x_2 = 2/3$, tako da nova vrijednost funkcije cilja zaista iznosi $Z = 38$. Optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih se nisu promijenile.

Može se primijetiti da je cijena u sjeni resursa koji odgovara drugom ograničenju *jednaka nuli* (jer je $y_2 = 0$). Ova na prvi pogled neobična pojava posljedica je činjenice da drugo ograničenje *nije u potpunosti iskorišteno*. Zaista, $2 \cdot 3 = 6 < 18$, odnosno po dostizanju optimuma na raspolaganju nam ostaje $18 - 6 = 12$ količinskih jedinica drugog resursa. Ovo nam također govori i optimalna vrijednost *dopunske promjenljive primala* $x_4 = 12$. Stoga, od nabavke dodatnih količina drugog resursa *nema nikakve koristi*, odnosno ne bismo imali *nikakve dodatne dobiti* ukoliko bismo nabavili dodatne količine ovog resursa. Stoga je razumljivo da je njegova cijena u sjeni jednaka nuli. Zapravo, iz *svojstva oslabljene komplementarnosti* direktno slijedi da kada je god neka *dopunska promjenljiva primala različita od nule*, odnosno kada odgovarajuće ograničenje *nije iskorišteno u potpunosti* (tj. ne predstavlja "usko grlo"), odgovarajuća dualna promjenljiva *mora biti jednaka nuli*. Drugim riječima, *cijena u sjeni svakog resursa koji nije iskorišten u potpunosti jednaka je nuli*. Ovo tvrđenje poznato je kao ***teorema o višku***. Može se pokazati da pod izvjesnim uvjetima vrijedi i *obrat ove teoreme*. Tačnije, ukoliko je optimalno rješenje *jedinstveno* i *nedegenerirano*, tada svakom ograničenju koje je u potpunosti iskorišteno odgovara *nenulta dualna promjeljiva*, odnosno *svaki resurs koji je u potpunosti iskorišten ima nenultu cijenu u sjeni* (pod navedenim uvjetima). Ovo tvrđenje poznato je kao ***teorema o uskom grlu***.

Treba odmah napomenuti da cijene u sjeni ne moraju imati nikakve veze sa *tržišnim cijenama* resursa. Naime, tržišne cijene određuje trgovac koji prodaje resurse, i one su mjera *koliko on smatra da ti resursi vrijede*, dok cijene u sjeni mjere *koliko efektivno ti resursi vrijede onome ko ih koristi*. Jasno je da nema smisla kupovati resurse po cijeni većoj od njihove *efektivne koristi*. Zbog toga se često u literaturi susreće tvrdnja da cijene u sjeni, odnosno optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih, predstavljaju *najveću cijenu koju ima smisla platiti za jednu dodatnu količinsku jedinicu odgovarajućeg resursa*. Nažalost, ova konstatacija *nije uvijek sasvim tačna*. Ona je tačna u najvećem broju slučajeva, u kojima se pretpostavlja da proizvođač *već raspolaže određenom količinom resursa* (koje je, recimo, kupio ranije ili stekao na neki drugi način), tako da se optimizira *samo zarada ostvarena prodajom*. U tom slučaju, optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih zaista imaju opisanu interpretaciju. Međutim, ukoliko se modelira situacija *kupoprodaje*, u kojoj proizvođač mora kupovati resurse a optimizira *čisti prihod* koji je razlika između *zarade ostvarene prodajom gotovih proizvoda* i *troškova usljed nabavke resursa*, prethodna interpretacija *nije ispravna*. Ovo lijepo ilustrira sljedeći primjer.

- ***Primjer***: Neki prerađivač kože proizvodi kožne kaiševe i cipele, koje prodaje po cijeni od 23 $ po komadu (kaiševi) odnosno 40 $ po paru (cipele). Za proizvodnju jednog kaiša potrebno je 2 m^2 kože i 1 sat kvalificiranog rada. Za proizvodnju jednog para cipela potrebno je 3 m^2 kože i 2 sata kvalificiranog rada. Na tržištu je trenutno raspoloživo 25 m^2 kože koja se može kupiti po cijeni od 5 $/m^2. Također, trenutno je raspoloživ samo jedan kvalificirani radnik koji zahtijeva da ne bude angažiran ukupno više od 15 sati, pri čemu zahtijeva satnicu od 10 $/h. Odrediti optimalni plan proizvodnje koji će osigurati maksimalni profit (tj. maksimalnu razliku između prihoda i troškova). Također odrediti kolika je najveća nabavna cijena kože (po metru kvadratnom) po kojoj bi prerađivaču kože bilo razumno da kupi dodatne količine kože (recimo sa nekog drugog tržišta).

Neka x_1 i x_2 respektivno predstavljaju broj komada kaiševa i broj pari cipela koje treba proizvesti. Zanemarimo li očigledna ograničenja na cjelobrojnost x_1 i x_2 (to zanemarivanje ovdje neće izazvati problem, jer će slučajno optimalna rješenja *biti cjelobrojna*, ali u općem slučaju to *itekako može biti problem*), lako uviđamo da x_1 i x_2 moraju zadovoljavati sljedeća ograničenja:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 25 \\ x_1 + 2x_2 &\le 15 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Što se tiče funkcije cilja, ona je nešto složenija nego u tipičnim slučajevima, jer ovdje imamo kupoprodaju: prerađivač kupuje resurse (kožu i radnu snagu), a prodaje gotove proizvode. Jasno je da će zarada ostvarena prodajom x_1 komada kaiševa i x_2 pari cipela iznositi $23x_1 + 40x_2$. Međutim, tom prilikom će se utrošiti $2x_1 + 3x_2$ kvadratnih metara kože, a svaki kvadratni metar treba platiti po 5 $, tako da će ukupni trošak za kožu iznositi $5 \cdot (2x_1 + 3x_2)$ dolara. Isto tako, biće potrebno utrošiti $x_1 + 2x_2$ sati rada kvalificiranog radnika, koje treba platiti 10 $ po satu, tako da će ukupni trošak za platu radnika iznositi $10 \cdot (x_1 + 2x_2)$. Slijedi da će ukupan prihod iznositi

$$Z = 23x_1 + 40x_2 - 5 \cdot (2x_1 + 3x_2) - 10 \cdot (x_1 + 2x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

Kako je cilj ostvariti maksimalni prihod, problem se može izraziti u obliku

$$\arg\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 25 \\ x_1 + 2x_2 &\le 15 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Ovaj problem se lako rješava simpleks metodom. Ne ulazeći u detalje postupka, nakon dvije iteracije dobija se optimalno rješenje $x_1 = 5$ kaiševa i $x_2 = 5$ pari cipela koje daje optimalan profit od $Z = 40$ $. Da bismo odgovorili na drugi dio problema, potrebne su nam optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih koje se lako očitavaju iz optimalne simpleks tabele i iznose $y_1 = 1\ \$/\mathrm{m}^2$ i $y_2 = 1$ $/h. Sada bi se brzopleto moglo zaključiti da *najveća cijena koju vrijedi platiti za jedan dodatni kvadratni metar kože iznosi* 1 $. Međutim, ovaj zaključak je *pogrešan*. Ono što je istina je da ukoliko se nabavi dodatni kvadratni metar kože, profit Z će porasti za 1 $ (koliko iznosi optimalna vrijednost y_1). Zaista, nije teško provjeriti da će tada novo optimalno rješenje biti $x_1 = 7$ kaiševa i $x_2 = 5$ pari cipela, koje daje novi optimalni profit $Z = 41$ $. Međutim, funkcija cilja ovog problema je već formirana uz pretpostavku da 1 m^2 kože plaćamo 5 \$. Dakle, ako bismo dodatni kvadratni metar kože platili 5 \$ (što je pretpostavka koja je unesena u funkciju cilja), profit će se povećati za 1 \$. Slijedi da je svaka cijena dodatnog kvadratnog metra kože koja je manja od 5 \$ + 1 \$ smislena, jer će dovesti do povećanja profita. Drugim riječima, maksimalna cijena po kojoj se isplati kupiti nove količine kože iznosi $6\,\$/\mathrm{m}^2$ a ne $1\,\$/\mathrm{m}^2$. Može se i ovako reći: *najveća cijena po kojoj se isplati kupiti dodatne količine kože je za* $y_1 = 1\,\$/\mathrm{m}^2$ *veća od cijene po kojoj je inače kupovana koža*.

Ranije smo vidjeli da optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih, odnosno cijene u sjeni, mogu biti i *negativne*. To se, kod problema maksimizacije, može desiti recimo kada u takvim problemima postoje ograničenja tipa "veće ili jednako" koja su "atipična" za taj vid problema. Recimo, u problemu optimalne proizvodnje, takva ograničenja imamo ukoliko se javljaju zahtjevi da utrošena količina nekog resursa mora biti *veća ili jednaka* od neke minimalne granice (npr. zahtijeva se da radnici budu angažirani barem neki propisani broj radnih sati, ili se zahtijeva da na tržište plasiramo barem određenu propisanu količinu proizvoda). Kod takvih ograničenja, povećanje koeficijenta sa desne strane "zateže" ograničenje umjesto da ga "popušta" (odnosno sužava dopustivu oblast umjesto da je proširuje). Stoga se može desiti da nas "zatezanje" ograničenja natjera da vršimo preraspodjelu proizvodnje na manje isplative proizvode, da bi ograničenje ostalo zadovoljeno. Desi li se to, tada će *porast koeficijenta sa desne strane ograničenja dovesti do pada optimalne vrijednosti cilja*, što upravo i jeste smisao *negativnih optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih*.

Naročito interesantna situacija nastaje kod *ograničenja tipa jednakosti*. Optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih koje odgovaraju takvim ograničenjima, odnosno odgovarajuće cijene u sjeni, mogu biti kako pozitivne, tako i negativne (a mogu biti i nule). Desi li se da su one *negativne*, rezultati mogu biti posve iznenađujući, a u operacionim istraživanjima su poznati pod nazivom ***paradoks manje-za-više odnosno više-za-manje*** (engl. *less-for-more or more-for-less*). Ovaj paradoks ćemo ilustrirati kroz jedan konkretan primjer.

➢ ***Primjer***: Neki proizvođač proizvodi tri proizvoda P_1, P_2 i P_3 čije su prodajne cijene respektivno 100 KM, 300 KM i 200 KM po toni. Za proizvodnju jedne tone proizvoda P_1 potrebno je uložiti 1 dan nekvalificiranog rada i 3 dana kvalificiranog rada. Za proizvodnju jedne tone proizvoda P_2 potrebno je uložiti 2 dana nekvalificiranog rada i 1 dan kvalificiranog rada. Za proizvodnju jedne tone proizvoda P_3 potrebno je uložiti 1 dan nekvalificiranog rada i 2 dana kvalificiranog rada. Proizvođač raspolaže jednim niskokvalificiranim i jednim visokokvalificiranim radnikom koji iz nekih ličnih razloga zahtijevaju da budu angažirani *tačno* 4 *dana*, odnosno *tačno* 9 *dana*. Odrediti optimalni plan proizvodnje i istražiti šta će se dogoditi ukoliko kvalificirani radnik promijeni mišljenje i traži angažman na 12 dana.

Ukoliko količine proizvoda P_1, P_2 i P_3 izražene u tonama koje treba proizvesti označimo sa x_1, x_2 i x_3, ovaj problem se može iskazati u obliku

$$\arg\max Z = 100\,x_1 + 300\,x_2 + 200\,x_3$$

p.o.

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 4 \\ 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0$$

Ne ulazeći detaljno u postupak rješavanja (u kojem nema ništa zanimljivo) dobija se optimalno rješenje $x_1 = 1$ tona, $x_2 = 0$ (odnosno, proizvod P_2 nije isplativ za proizvodnju uz postavljene uvjete) i $x_3 = 3$ tone, što daje optimalnu zaradu od $Z = 700$ KM. Međutim, ukoliko bismo u drugom ograničenju 9 dana zamijenili sa 12 dana, novo optimalno rješenje bilo bi $x_1 = 4$ tone, $x_2 = 0$ i $x_3 = 0$, kojem odgovara optimalna zarada $Z = 400$ KM. Dakle, dobijamo šokantan zaključak da u ovom slučaju *uz više rada dobijamo manju zaradu*!

Intuitivno objašnjenje ovog prividnog paradoksa leži u činjenici da su *ograničenja tipa jednakosti isuviše "kruta" odnosno nefleksibilna*. Zaista, zahtjevi radnika da rade *tačno određeni broj dana* nameću nam da ćemo možda morati praviti i *nelogične preraspodjele posla* samo da bismo zadovoljili ta ograničenja. Razmotrimo sada da li se ova situacija *mogla nekako prepoznati*. Odgovor na to pitanje daju nam optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih. Dualni zadatak za ovaj problem glasi:

arg min $W = 4y_1 + 9y_2$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 &\geq 100 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 300 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 200 \end{aligned}$$

y_1, y_2 neograničeni po znaku

Naravno, optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih možemo odrediti i bez rješavanja dualnog zadatka iz optimalne simpleks tabele polaznog zadatka, i one iznose y_1 = 400 KM po danu i y_2 = –100 KM po danu. Odavde vidimo da je, u razmatranim okolnostima, cijena u sjeni jednog dana rada kvalificiranog radnika *negativna*, odnosno povećanjem broja njegovih radnih dana zarada *opada*, i to upravo za 100 KM po svakom dodatnom danu rada, kako se i pokazalo. S druge strane, cijena u sjeni jednog dana kvalificiranog radnika je *pozitivna*, tako da *povećavanje njegovog broja radnih dana povećava zaradu*. Sve ovo naravno vrijedi za dovoljno male promjene broja radnih dana radnika (u konkretnom primjeru, ovo rezonovanje vrijedi do 12 radnih dana kvalificiranog radnika, dok daljim povećanjem zahtijevanog broja radnih dana ograničenja postaju kontradiktorna). Isto tako, *smanjivanjem* broja radnih dana kvalificiranog radnika zarada bi se *povećavala* za 100 KM po svakom radnom danu (efekat "više za manje"). Zaista, recimo uz 8 radnih dana optimalno rješenje bi iznosilo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 4$ tone, uz optimalnu zaradu Z = 800 KM. Naravno, i ovo vrijedi samo za određeni opseg promjene desne strane ograničenja. U ovom konkretnom primjeru, ukoliko bismo nastavili smanjivati broj radnih dana kvalificiranog radnika ispod 8 radnih dana, zarada ne bi dalje rasla, nego bi se počela *smanjivati* (pokazuje se zapravo da je 8 radnih dana *optimalna količina rada kvalificiranog radnika* u ovom primjeru).

Opisane probleme smo mogli izbjeći da smo umjesto insistiranja na *fiksnom broju radnih dana* postavili ograničenja na *maksimalno dozvoljeni broj radnih dana*. Tako, da smo u početku imali postavljen problem sa oba ograničenja tipa "manje ili jednako" umjesto ograničenja tipa jednakosti, odmah bismo dobili da je optimalno rješenje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 4$ tone, uz optimalnu zaradu Z = 800 KM. Optimalne vrijednosti izravnavajućih promjenljivih koje bismo tada dodali na lijeve strane ograničenja bile bi $x_4 = 0$ i $x_5 = 1$ dan, što znači da bi niskokvalificirani radnik radio svo raspoloživo vrijeme, dok bi visokokvalificiranom radniku ostao jedan slobodan radni dan. Pri tome, iz izložene analize jasno slijedi da je bolje da se visokokvalificirani radnik iskoristi da taj dan *radi nešto drugo nevezano za navedeni proces proizvodnje*, nego ga "na silu" angažirati u taj proces proizvodnje (čak je bolje i da taj dan *ne radi ništa*).

Izloženi primjer jasno pokazuje *opasnosti koje mogu izazvati ograničenja tipa jednakosti*. Stoga, takva ograničenja treba *izbjegavati kad god je to moguće* i umjesto njih, koristiti fleksibilnija ograničenja tipa nejednakosti. Nažalost, to nije uvijek moguće. Na primjer, kasnije ćemo vidjeti da postoji važna porodica problema linearnog programiranja, kao što su tzv. *transportni problemi*, kod kojih se upravo javlja veliki broj ograničenja tipa jednakosti. Stoga se u takvim problemima relativno često dešavaju prividni paradoksi poput prethodno opisanih.

Sve do sada, pretpostavljali smo da je polazni problem zadatak *maksimizacije*. U slučaju da je polazni problem zadatak *minimizacije*, tada je smjer promjene funkcije cilja pri promjeni koeficijenta b_i za iznos Δb_i *suprotan* u odnosu na smjer promjene Δb_i, odnosno vrijedi $\Delta Z_i = -\Delta b_i\, y_i$ (pod uvjetom da je promjena Δb_i dovoljno mala). Dakle, pri pozitivnom y_i, ukoliko se koeficijent b_i *poveća* za neki dovoljno mali iznos, vrijednost funkcije cilja će se *smanjiti*, dok pri negativnom y_i imamo obrnutu situaciju. Ukoliko definiramo da ***poboljšanje*** funkcije cilja znači njeno *povećanje* ukoliko se radi o maksimizaciji, a *smanjenje* ukoliko se radi o minimizaciji, dok ***pogoršanje*** označava suprotnu promjenu, tada možemo reći da pri pozitivnom y_i dovoljno malo *povećanje* koeficijenta b_i *poboljšava funkciju cilja*, dok je pri negativnom y_i *pogoršava*. Slično, dovoljno malo *smanjenje* koeficijenta b_i *pogoršava funkciju cilja*, dok je pri negativnom y_i *poboljšava*. Treba napomenuti da čak i mnogi komercijalni softverski paketi kao što su recimo *LINDO*, *QM* i neki drugi, daju *pogrešan znak* optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih u slučaju kada je u pitanju problem minimizacije, tako da o tome treba voditi računa.

Sada ćemo reći i o *značenju optimalnih vrijednosti izravnavajućih dualnih promjenljivih*. Neka imamo neko, recimo, j-to ograničenje dualnog problema

$$a_{1,j}\, y_1 + a_{2,j}\, y_2 + \ldots + a_{m,j}\, y_m \geq c_j$$

i neka smo u njega uveli *nenegativnu* izravnavajuću promjenljivu (recimo y_{m+j}) da bismo ga sveli na ograničenje tipa jednakosti

$$a_{1,j}\,y_1 + a_{2,j}\,y_2 + \ldots + a_{m,j}\,y_m - y_{m+j} = c_j$$

Odavde jasno slijedi da je

$$y_{m+j} = a_{1,j}\,y_1 + a_{2,j}\,y_2 + \ldots + a_{m,j}\,y_m - c_j$$

Postavlja se pitanje *kakve nam informacije nosi optimalna vrijednost za* y_{m+j}. Prvo što treba primijetiti je da iz svojstva oslabljene komplementarnosti prema kojem je $x_j\,y_{m+j} = 0$, optimalna vrijednost za y_{m+j} može biti različita (tačnije, veća) od nule *samo ako je optimalna vrijednost za* x_j jednaka nuli, odnosno ukoliko j-ti proizvod *nije isplativ* (*rentabilan*) *za proizvodnju*. Dalje, primijetimo da činjenica da je $y_{m+j} > 0$ zapravo znači da je $a_{1,j}\,y_1 + a_{2,j}\,y_2 + \ldots + a_{m,j}\,y_m > c_j$. Kako izraz sa lijeve strane ove jednakosti predstavlja ***efektivnu vrijednost*** j-tog proizvoda (obračunatu prema efektivnim vrijednostima pojedinih resursa, odnosno njihovim cijenama u sjeni), dok c_j predstavlja njegovu *tržišnu vrijednost*, slijedi da se *ne isplati proizvoditi proizvod čija je efektivna vrijednost veća od tržišne*. Ovo tvrđenje poznato je kao ***teorema o rentabilnosti***. Ukoliko je optimalno rješenje jedinstveno i nedegenerirano, vrijedi i *obrat ove teoreme*, poznat kao ***teorema o ravnoteži***, prema kojem je svaki proizvod čija je tržišna vrijednost c_j jednaka njegovoj efektivnoj vrijednosti $a_{1,j}\,y_1 + a_{2,j}\,y_2 + \ldots + a_{m,j}\,y_m$ (tj. kod kojeg je $y_{m+j} = 0$) *isplativ za proizvodnju barem u nekoj količini.*

Neka je sada optimalna vrijednost $y_{m+j} > 0$. Znamo da tada optimalna vrijednost za x_j mora biti 0, ali postavlja se pitanje šta se može zaključiti na osnovu vrijednosti y_{m+j}. Jasno je da je nerentabilnost proizvodnje j-tog proizvoda uzrokovana time što je njegova prodajna cijena c_j *preniska* u odnosu na razmatrane zahtjeve proizvodnje. Ispitajmo stoga šta bi se desilo kada bi se njegova cijena povećala za neki iznos Δc_j. To bi u dualnom problemu promijenilo samo j-to ograničenje koje bi sada glasilo

$$a_{1,j}\,y_1 + a_{2,j}\,y_2 + \ldots + a_{m,j}\,y_m \ge c_j + \Delta c_j$$

Ako je promjena Δc_j dovoljno mala da ovo ograničenje i dalje ostaje zadovoljeno za optimalno rješenje dualnog problema, ono će i dalje ostati optimalno, samo što će nova optimalna vrijednost izravnavajuće promjenljive y_{m+j} biti umanjena za Δc_j. Sve dok je $\Delta c_j < y_{m+j}$, nova vrijednost izravnavajuće promjenljive y_{m+j} će ostati pozitivna. Onog trenutka kada postane $\Delta c_j > y_{m+j}$, nova vrijednost izravnavajuće promjenljive y_{m+j} postaje *negativna*, tako da dobijeno rješenje *više nije dopustivo za dualni problem*, što zapravo znači da dolazi i do *promjene optimalnog rješenja polaznog problema*. Kako je y_{m+j} zapravo *negirani koeficijent u posljednjem redu simpleks tabele koji se nalazi u koloni koja odgovara promjenljivoj* x_j, to znači da će taj koeficijent *postati pozitivan*, što znači da promjenljiva x_j ulazi u bazu, čime će njena vrijednost postati *različita od nule*. Slijedi da će ukoliko dođe do promjene $\Delta c_j > y_{m+j}$, *proizvodnja j-tog proizvoda postati isplativa*. Drugim riječima, optimalna vrijednost y_{m+j} predstavlja *minimalni iznos za koji treba povećati cijenu* c_j *j-tog proizvoda da njegova proizvodnja postane isplativa*. Zbog toga se optimalne vrijednosti izravnavajućih dualnih promjenljivih nazivaju i ***reducirane cijene***.

- ***Primjer*** : U prethodnom primjeru, imali smo da optimalno rješenje glasi $x_1 = 1$ tona, $x_2 = 0$ i $x_3 = 3$ tone, iz čega jasno slijedi da proizvodnja proizvoda P_2 *nije rentabilna*. Koliko minimalno treba da iznosi prodajna cijena ovog proizvoda pa da njegova proizvodnja *postane isplativa* (uz ista ograničenja kakva su bila prethodnom primjeru)?

Odgovor na ovo pitanje daje nam izravnavajuća dualna promjenljiva spregnuta sa promjenljivom x_2. Kako prošireni oblik dualnog problema glasi

$$\arg\min W = 4\,y_1 + 9\,y_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 + 3\,y_2 - y_3 \qquad\qquad &= 100 \\ 2\,y_1 + \;\; y_2 \qquad - y_4 \qquad &= 300 \\ y_1 + 2\,y_2 \qquad\qquad - y_5 &= 200 \end{aligned}$$

y_1, y_2 neograničeni po znaku, $y_3 \ge 0,\;\; y_4 \ge 0,\;\; y_5 \ge 0$

vidimo da nam traženu informaciju daje promjenljiva y_4. Njenu optimalnu vrijednost mogli bismo odrediti iz optimalne simpleks tabele polaznog problema, ali kako smo već rekli da optimalne vrijednosti za y_1 i y_2 iznose $y_1 = 400$ KM / dan i $y_2 = -100$ KM / dan možemo i ovako:

$$y_4 = 2\,y_1 + y_2 - 300 = 400 \text{ KM / toni}$$

Slijedi da je, u razmatranim uvjetima proizvodnje, proizvod P_2 *izrazito nerentabilan za proizvodnju*, i prodajna cijena bi mu trebala porasti *barem za* 400 KM da njegova proizvodnja postane isplativa. Drugim riječima, prodajna cijena bi mu trebala biti *barem* $300 + 400 = 700$ KM. Na primjer, uz prodajnu cijenu od 800 KM po toni, novo optimalno rješenje bi iznosilo $x_1 = 2.8$ tona, $x_2 = 0.6$ tona i $x_3 = 0$, uz novu optimalnu zaradu $Z = 760$ KM.

Ovdje još jednom treba ukazati na to *koliko su u ovom problemu ograničenja na tačno određen broj radnih sati kruta i nefleksibilna*. Zaista, nije teško provjeriti da kada bi se, uz ovako izmijenjenu cijenu proizvoda P_2, "popustila" i ograničenja i zamijenila ograničenjima tipa "manje ili jednako", tada bi optimalno rješenje iznosilo $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ tone i $x_3 = 0$, uz znatno bolju optimalnu zaradu $Z = 1400$ KM. Zapravo, da smo u izvornom problemu samo "popustili" kruta ograničenja tipa jednakosti, bez ikakvih drugih izmjena, optimalna vrijednost za y_4 bila bi $y_4 = 100$ KM, tako da bi proizvod P_2 postao rentabilan za proizvodnju već pri prodajnoj cijeni 300 + 100 = 400 KM. Ovo još jednom ukazuje na činjenicu da ograničenja tipa jednakosti treba strogo izbjegavati ukoloko nisu zaista neophodna.

Na kraju, treba još istaći da sva provedena analiza značenja optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih *vrijedi samo u slučaju da optimalno rješenje polaznog problema nije degenerirano*. Naime, pokazuje se da u slučaju da je optimalno rješenje primala *degenerirano*, tada optimalno rješenje duala *nije jedinstveno* (vrijedi i obrnuto: ukoliko optimalno rješenje primala *nije jedinstveno*, tada je optimalno rješenje duala *degenerirano*). U tom slučaju, interpretacija značenja optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih se izuzetno komplicira, s obzirom da te optimalne vrijednosti nisu jedinstvene (nažalost, veliki broj sotfverskih paketa *ne primjećuje ovu pojavu*). Mada je i u ovakvim slučajevima moguće izvući korisne zaključke analizirajući optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih, takva analiza *nije nimalo jednostavna* i o njoj ovdje neće biti govora.

Dualni simpleks metod

Već smo vidjeli da je nekad, umjesto polaznog problema, isplativije rješavati njegov dual. Međutim, u nekim slučajevima je moguće indirektno rješavanje problema pomoću rješavanja njegovog duala sprovesti *bez potrebe za eksplicitnim raspisivanjem dualnog problema*, vršeći isključivo manipulacije nad *simpleks tabelom izvornog problema*. Ovo se postiže ***dualnim simpleks metodom***.

Za rješenje linearnog programiranja koje *formalno zadovoljava uvjete optimalnosti* (tj. za koje su svi koeficijenti u transformiranoj funkciji cilja negativni ili nule), ali koje *nije dopustivo* (tj. koje *ne zadovoljava postavljena ograničenja*) kažemo da je ***superoptimalno***. Ovaj naziv potiče od činjenice da ovakvo rješenje daje funkciji cilja *vrijednost bolju od optimalne*. Dalje, za rješenje koje je takvo da je njemu komplementarno rješenje *dopustivo za dualni problem* kažemo da je ***dualno dopustivo***. Iz svega dosada izloženog, jasno je da su *sva dualno dopustiva rješenja ili optimalna ili superoptimalna*.

Vidjeli smo da obični simpleks metod kreće od *jednog dopustivog baznog rješenja*, koje tipično *nije optimalno*, te kroz niz iteracija generira *niz baznih dopustivih rješenja* sve dok se ne zadovolji *kriterij optimalnosti* za tekuću funkciju cilja. Tim rješenjima, prema svojstvu komplementarnosti, odgovara *niz komplementarnih baznih rješenja duala*, koja su *superoptimalna* ali *nisu dopustiva* za dualni problem, sve dok se *ne dostigne optimalna tačka polaznog problema*. Dualni simpleks metod se zasniva na *potpuno suprotnoj ideji*. Naime, polazi se od *jednog dualno dopustivog baznog rješenja*, koje tipično *nije dopustivo* (tj. od nekog *superoptimalnog baznog rješenja*), te se kroz niz iteracija generira *niz superoptimalnih baznih rješenja* sve dok se *ne dostigne dopustivost*. U isto vrijeme, tim rješenjima odgovara niz *komplementarnih baznih rješenja duala*, koja su *dopustiva* ali *nisu optimalna* za dualni problem, *sve dok se ne dostigne dopustiva tačka polaznog problema*.

Za razliku od običnog simpleks metoda, koji polazi od problema u normalnoj formi, ali kod kojeg *nijedan koeficijent sa desne strane ograničenja ne smije biti negativan*, dualnom simpleks metodu negativni koeficijenti sa desne strane *ne smetaju*. S druge strane, dualni simpleks metod zato zahtijeva da *ni jedan koeficijent u funkciji cilja ne smije biti pozitivan*. Mada izgleda da je ovo vrlo jako ograničenje, upravo se takvi problemi dobijaju kada se klasični problemi minimizacije sa nenegativnim koeficijentima u funkciji cilja svedu na problem maksimizacije množenjem funkcije cilja sa -1. Stoga je dualni simpleks metod pogodan za rješavanje tipičnih problema linearnog programiranja u kojima se traži *minimizacija funkcije cilja*. Dualni simpleks metod ćemo prvo proučiti na jednom konkretnom primjeru, prije nego što prikažemo opću formu algoritma.

- ***Primjer*** : Riješiti sljedeći problem linearnog programiranja dualnim simpleks metodom

$$\arg\min Z = 40x_1 + 30x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} 0.1x_1 \quad\quad &\ge 0.2 \\ 0.1x_2 &\ge 0.3 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 &\ge 3 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 &\ge 1.2 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Ovaj problem smo već rješavali na više načina, prvo direktno, a zatim i preko dualnog problema. Sada ćemo na istom primjeru demonstrirati i *dualni simpleks metod*. Da bismo problem sveli na "skoro" normalni oblik, sva ograničenja prvo svodimo na ograničenja tipa "manje ili jednako" (ovdje smo upotrijebili riječ "skoro" zbog činjenice da se pri tome mogu pojaviti i *negativne vrijednosti* koeficijenata sa desne strane ograničenja koje po nekim autorima u normalnom modelu nisu dozvoljene, ali za potrebe dualnog simpleks metoda one neće predstavljati problem). Eventualna ograničenja tipa jednakosti prethodno zamjenjujemo sa dva međusobno suprotna ograničenja tipa nejednakosti. Kada to obavimo, i pomnožimo funkciju cilja sa –1 (da dobijemo problem maksimizacije), problem postaje:

$$\arg\max -Z = -40x_1 - 30x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} -0.1x_1 \quad\quad &\le -0.2 \\ -0.1x_2 &\le -0.3 \\ -0.5x_1 - 0.3x_2 &\le -3 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 &\le -1.2 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Nakon uvođenja dopunskih promjenljivih, problem dobija (skoro) normalni oblik:

$$\arg\max -Z = -40x_1 - 30x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} -0.1x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad\quad\quad &= -0.2 \\ -0.1x_2 \quad + x_4 \quad\quad\quad &= -0.3 \\ -0.5x_1 - 0.3x_2 \quad\quad\quad + x_5 \quad &= -3 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= -1.2 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0,\ \ x_6 \ge 0$$

Mada je ovaj problem u normalnom obliku, on nije pogodan za primjenu klasičnog simpleks metoda, zbog negativnih koeficijenata sa desne strane ograničenja. Međutim, on je pogodan za primjenu *dualnog simpleks metoda*, s obzirom da u funkciji cilja *nema pozitivnih koeficijenata*. Stoga ćemo formirati polaznu simpleks tabelu u kojoj, kao i inače, početnu bazu čine *dopunske promjenljive*. Drugim riječima, početna baza će biti B = (x_3, x_4, x_5, x_6):

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	–0.2	–0.1	0	1	0	0	0
x_4	–0.3	0	–0.1	0	1	0	0
x_5	–3	–0.5	–0.3	0	0	1	0
x_6	–1.2	–0.1	–0.2	0	0	0	1
	0	–40	–30	0	0	0	0

Ako bismo na klasičan način posmatrali ovu simpleks tabelu, mogli bismo zapravo zaključiti da je rješenje koje odgovara ovoj *optimalno*, jer u posljednjem redu simpleks tabele *nema pozitivnih koeficijenata*. Međutim, ovaj zaključak nije ispravan, jer ovo rješenje *uopće nije dozvoljeno*. Zaista, ovoj tabeli odgovara bazno rješenje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -0.2$, $x_4 = -0.3$, $x_5 = -3$ i $x_6 = -1.2$ odnosno, zapisano u kompaktnom obliku, $\mathbf{x} = (0, 0, -0.2, -0.3, -3, -1.2)^T$, a ovo rješenje nije dopustivo, jer sve promjenljive *ne zadovoljavaju uvjet nenegativnosti*. Međutim, njemu komplementarno rješenje dualnog problema $\mathbf{y} = (0, 0, 0, 0, 40, 30)^T$ je *dopustivo za dualni problem*, odnosno polazno rješenje je *dualno dopustivo*. Odavde također slijedi da je ovo rješenje *superoptimalno* za polazni problem.

Ideja je sada da se rješenje pokuša učiniti *dozvoljenim* tako što ćemo *negativne promjenljive izbaciti iz baze*. U ovom trenutku, imamo četiri promjenljive koje su negativne. U principu se može krenuti od bilo koje negativne promjenljive, ali se obično za promjenljivu koja napušta bazu bira *ona promjenljiva koja je najnegativnija*, u skladu sa intuitivnim rezonovanjem da ona *najviše doprinosi "nedozvoljenosti" rješenja*. Stoga ćemo se odlučiti da bazu *napusti promjenljiva* x_5, a red u kojem se ona nalazi proglasićemo *vodećim redom*. Međutim, sada je potrebno odrediti *koja će promjenljiva umjesto nje ući u bazu*. Nije teško pokazati da se smanjenje apsolutne vrijednosti negativne promjenljive može kompenzirati jedino *porastom apsolutne vrijednosti neke od nebaznih promjenljivih kod kojih je odgovarajući koeficijent u vodećem redu negativan.* To su u našem primjeru x_1 i x_2. Međutim, nakon uvođenja nove promjenljive u bazu, da bi novo bazno rješenje ostalo superoptimalno, sličnim rezonom kao kod običnog simpleks metoda zaključujemo da u bazu treba uvesti *onu promjenljivu* x_j među kandidatima za ulazak u bazu *za koju je količnik* $c_j/a_{p,j}$ *minimalan*, pri čemu je p indeks vodećeg reda (a kandidati za ulazak su svi oni za koje vrijedi $a_{p,j} < 0$). Kako za promjenljivu x_1 imamo $-40/-0.5 = 80$, a za promjenljivu x_2 imamo $-30/-0.3 = 100$, te kako je $80 < 100$, u bazu *ulazi promjenljiva* x_1. Odgovarajuću kolonu proglasićemo za *vodeću kolonu*. Pri ručnom radu, količnici iz kojih se određuje vodeća kolona se obično računaju *ispod simpleks tabele, odmah ispod odgovarajuće kolone na koju se odnose*, kao što je prikazano u tabeli ispod:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	–0.2	–0.1	0	1	0	0	0
x_4	–0.3	0	–0.1	0	1	0	0
x_5	–3	–0.5	–0.3	0	0	1	0
x_6	–1.2	–0.1	–0.2	0	0	0	1
	0	–40	–30	0	0	0	0
		–40/–0.5 =80	–30/–0.3 =100				

U prethodnoj tabeli, vodeći red i kolona prikazani su osjenčeno. U presjeku vodećeg reda i vodeće kolone nalazi se *vodeći element* (*pivot*). Sada se, na isti način kao kod običnog simpleks metoda, vrši preračunavanje elemenata tabele tako da u vodećoj koloni svi elementi postanu nule, osim vodećeg elementa, koji postaje jedinica. Nakon obavljenog preračunavanja, dobija se sljedeća simpleks tabela:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	0.4	0	0.06	1	0	–0.2	0
x_4	–0.3	0	–0.1	0	1	0	0
x_1	6	1	0.6	0	0	–2	0
x_6	–0.6	0	–0.14	0	0	–0.2	1
	240	0	–6	0	0	–80	0
			–6/–0.14 ≈42.9			–80/–0.2 =400	

Sada su kandidati za ispadanje iz baze promjenljive x_4 i x_6, pri čemu ćemo se odlučiti za x_6 jer je *negativnija*. Kandidati za ulazak u bazu su x_2 i x_5, pri čemu kriterij minimalnog količnika daje da u bazu mora ući x_2. Nakon što izvršimo transformaciju tabele u skladu sa novim baznim rješenjem, dolazimo do sljedeće tabele:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	1/7	0	0	1	0	–2/7	3/7
x_4	9/70	0	0	0	1	1/7	–5/7
x_1	24/7	1	0	0	0	–20/7	30/7
x_2	30/7	0	1	0	0	10/7	–50/7
	1860/7	0	0	0	0	–500/7	–300/7

Kako smo sada postigli da su svi koeficijenti b_i *nenegativni*, došli smo do *dozvoljenog baznog rješenja*. Međutim, kako smo svo vrijeme održavali *superoptimalnost*, to smo zapravo pronašli *optimalno rješenje*. Možemo ga očitati na uobičajeni način, tj. imamo $x_1 = 24/7$, $x_2 = 30/7$, $x_3 = 1/7$, $x_4 = 9/70$, $x_5 = 0$ i $x_6 = 0$. Baza optimalnog rješenja je očigledno $B = (x_3, x_4, x_1, x_2)$, a optimalna vrijednost funkcije cilja je $Z = 1860/7$.

Ukoliko nas to zanima, možemo na uobičajeni način očitati i optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih, a one iznose $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 500/7$, $y_4 = 300/7$, $y_5 = 0$ i $y_6 = 0$.

Nakon što smo dualni simpleks metod demonstrirali na jednom primjeru, možemo skicirati i formalni opis ovog metoda po koracima, slično kao što smo to učinili sa običnim simpleks metodom:

1. Formirati *početnu simpleks tabelu* (koja je prihvatljiva za ovaj algoritam samo ako su u njoj svi koeficijenti u posljednjem redu negativni ili nule).
2. Ukoliko su svi koeficijenti b_i u prvoj koloni tabele *nenegativni*, preći na korak 9.
3. Odabrati neki red p u kojem vrijedi da je $b_p < 0$ (tipično red u kojem je b_p *najnegativniji*) i proglasiti ga za *vodeći red.* Indeks p tog reda određuje *promjenljivu koja napušta bazu* (ne njen indeks; o kojoj se zaista promjenljivoj radi možemo vidjeti iz kolone tabele u kojoj se čuva informacija o tekućoj bazi).
4. Ukoliko su svi elementi vodećeg reda *nenegativni*, problem *nema niti jedno dopustivo rješenje*, odnosno ograničenja problema su *kontradiktorna*. Algoritam se tada prekida.
5. Za sve elemente $a_{p,j}$ vodećeg reda koji su *negativni* formirati odgovarajuće količnike $c_j/a_{p,j}$ (ovo se pri ručnom radu obično radi *ispod tabele*, ispod odgovarajuće kolone na koju se taj količnik odnosi) i pronaći kolonu u kojoj je taj količnik *najmanji*. Indeks q te kolone predstavlja *indeks promjenljive koja ulazi u bazu*. Taj red proglašavamo za *vodeći red*.
6. U koloni koja čuva informaciju o tekućoj bazi, *zamijenimo* promjenljivu koja napušta bazu sa promjenljivom koja ulazi u bazu.
7. Izvršimo transformaciju tabele tako da se na mjestu *vodećeg elementa* (u presjeku vodećeg reda i vodeće kolone) pojavi *jedinica*, a da svi ostali elementi u vodećoj koloni postanu jednaki *nuli*. Transformacija se vrši na isti način kao i kod klasične simpleks metode.
8. Sa tako transformiranom tablicom vraćamo se na korak 2.
9. Optimalno rješenje je *nađeno*. Optimalne vrijednosti promjenljivih i funkcije cilja očitavaju se na isti način kao kod obične simpleks metode.

Nema ništa loše u tome da za neki problem formiramo njegov dual, a da zatim njegov dual rješavamo dualnom simpleks metodom, ukoliko se to pokaže praktičnije, a da onda iz optimalne simpleks tabele duala očitamo rješenje polaznog problema. Ovo je ilustrirano u sljedećem primjeru.

- ***Primjer***: Riješiti sljedeći problem linearnog programiranja, rješavanjem njegovog duala pomoću dualnog simpleks metoda:

$$\arg\max Z = 5x_1 + 2x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\; &\le 6 \\ 2x_2 &\le 18 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 24 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Vidjeli smo ranije da dual ovog problema glasi:

$$\arg\min W = 6y_1 + 18y_2 + 24y_3$$

p.o.

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad + 3y_3 &\ge 5 \\ 2y_2 + 2y_3 &\ge 2 \end{aligned}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$

Prvo ćemo pripremiti ovaj dualni problem za rješavanje dualnim simpleks metodom, tako što ćemo funkciju cilja i sva ograničenja pomnožiti sa –1, čime dobijamo problem

$$\arg\max -W = -6y_1 - 18y_2 - 24y_3$$

p.o.

$$\begin{aligned} -y_1 \quad\quad - 3y_3 &\le -5 \\ -2y_2 - 2y_3 &\le -2 \end{aligned}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$

Uvođenjem dopunskih promjenljivih, problem dobija sljedeći oblik:

$$\arg\max -W = -6y_1 - 18y_2 - 24y_3$$

p.o.

$$\begin{aligned} -y_1 \quad\; - 3y_3 + y_4 \quad &= -5 \\ -2y_2 - 2y_3 \quad + y_5 &= -2 \end{aligned}$$

$y_1 \geq 0,\; y_2 \geq 0,\; y_3 \geq 0,\; y_4 \geq 0,\; y_5 \geq 0$

Ovaj oblik problema nije pogodan za rješavanje običnim simpleks metodom, ali je pogodan za dualni simpleks metod, sa početnom bazom B = (y_4, y_5) koja *nije dopustiva*, ali je *dualno dopustiva* (što ovdje zapravo znači da je odgovarajuće komplementarno primalno rješenje dopustivo za primalni problem, s obzirom da je dual duala jednak primalu). Ovom rješenju odgovara sljedeća početna simpleks tabela:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_4	–5	–1	0	–3	1	0
y_5	–2	0	–2	–2	0	1
	0	–6	–18	–24	0	0
		–6/–1 =6		–24/–3 =8		

Sad prema dualnom simpleks metodu, iz baze ispada promjenljiva y_4, a u bazu ulazi promjenljiva y_1. Nakon obavljanja neophodnih transformacija sa ciljem prilagođavanja novom baznom rješenju, dobija se sljedeća simpleks tabela:

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	5	1	0	3	–1	0
y_5	–2	0	–2	–2	0	1
	30	0	–18	–6	–6	0
			–18/–2 =9	–6/–2 =3		

Iz baze sad izlazi promjenljiva y_5, a u bazu ulazi promjenljiva y_3. Nakon što se obave neophodna preračunavanja, dobija se sljedeća simpleks tabela.

Baza	c_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	2	1	–3	0	–1	3/2
y_3	1	0	1	1	0	–1/2
	36	0	–12	0	–6	–3

Vidimo da smo dobili dopustivo rješenje, tako da se postupak završava. Baza nađenog dopustivog rješenja, koje je ujedno optimalno (s obzirom da su svi koeficijenti u tekućoj funkciji cilja manji ili jednaki nuli, što je zapravo kriterij koji od početka održavamo), glasi B = (y_1, y_3), dok samo optimalno rješenje glasi $\mathbf{y} = (2, 0, 1, 0, 0)^T$ odnosno, u raspisanom obliku, $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ i $y_5 = 0$, dok je optimalna vrijednost funkcije cilja $W = 36$. Međutim, ovo je optimalno rješenje *dualnog problema polaznog problema*. Optimalno rješenje polaznog problema dobijamo kao *optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih dualnog problema* (s obzirom da je primal dual duala), a ono na osnovu posljednjeg reda optimalne simpleks tabele glasi $\mathbf{x} = (6, 3, 0, 12, 0)^T$, odnosno $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 12$ i $x_5 = 0$ (naravno, uz istu optimalnu vrijednost funkcije cilja $Z = 36$).

Treba napomenuti da postoji način, sličan metodu "velikog M" da se dualni simpleks metod primijeni i u slučajevima kada početno bazno rješenje *nije dualno dopustivo*, odnosno kada u početnoj funkciji cilja postoje i pozitivni koeficijenti. Za razliku od metoda "velikog M" kod običnog simpleks metoda kod kojeg se vrši dodavanje *vještačkih promjenljivih*, kod tog načina vrši se dodavanje *vještačkog ograničenja*. Bez obzira što je ovaj postupak matematski dobro definiran, činjenica je da se on *vrlo rijetko primjenjuje u praksi*.

Dualni simpleks metod se u praksi ne koristi često za rješavanje *stvarnih problema većih dimenzija*. Razlog je za to što obični simpleks metod u svakoj iteraciji traži računanje do m količnika za određivanje koja promjenljiva napušta bazu, dok dualni simpleks zahtijeva računanje do n količnika za određivanje koja promjenljiva ulazi u bazu. Kako je kod stvarnih problema većih dimenzija uglavnom *n* mnogo veće od *m*, to može zasjeniti prednosti dualnog simpleks metoda. Zaista, čak i ako se radi o problemima minimizacije sa ograničenjima tipa "veće ili jednako", kod kojih u običnom simpleks metodu moramo dodavati vještačke promjenljive, kada je *n* mnogo veće od *m* kod dualnog simpleks metoda ipak ima nešto više računanja po iteraciji nego kod običnog simpleks metoda. Bez obzira na to, dualni simpleks metod je *od izuzetnog značaja* u slučajevima kada, nakon što je problem već riješen, dođe do *promjene koeficijenata sa desne strane ograničenja*, ili ukoliko se *naknadno pojave nova ograničenja*. Ovo će biti pokazano u odjeljcima koji slijede.

Promjena koeficijenata sa desne strane ograničenja

U operacionim istraživanjima, disciplina poznata pod nazivom ***postoptimalna analiza*** odnosno ***analiza osjetljivosti*** bavi se proučavanjem *kako se mijenja optimalno rješenje ukoliko dođe do izmjene nekog od parametara modela*. Ova disciplina je naročito dobro razvijena upravo za modele linearnog programiranja. Postoptimalna analiza je široka oblast, za koju ovdje nema prostora da se detaljno u nju upuštamo. Na ovom mjestu će se proučiti samo *kakav uticaj ima promjena koeficijenata sa desne strane ograničenja*, s obzirom da se za tu vrstu analiza veoma uspješno primjenjuje upravo *dualni simpleks metod*.

Vidjeli smo da određeni uvid u to šta se dešava pri promjeni koeficijenata sa desne strane ograničenja daju *optimalne vrijednosti dualnih promjenljivih*. Zaista, ranije smo vidjeli da se *pri dovoljno maloj promjeni* Δb_i *koeficijenta* b_i, *optimalna vrijednost funkcije cilja mijenja za iznos* $\Delta b_i\, y_i$, gdje je y_i optimalna vrijednost odgovarajuće dualne promjenljive. Međutim, ovaj pristup nam *ništa ne govori šta se pri tome dešava sa optimalnim vrijednostima samih promjenljivih*, niti *u kojem opsegu se može kretati* Δb_i *da bi ovaj princip vrijedio* (tj. šta se tačno smatra pod "dovoljno malom" promjenom).

Djelimični odgovor na oba ova pitanja daje nam činjenica da smo, pri dokazu svojstva jake dualnosti, vidjeli da se optimalno rješenje može izraziti kao $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}_N = 0$, gdje je $\mathbf{A}_B$ matrica koja se sastoji samo od koeficijenata koji stoje uz one promjenljive koje su bazne promjenljive u optimalnom rješenju. Neka su se sada koeficijenti sa desne strane ograničenja promijenili i neka obrazuju novi vektor $\mathbf{b}'$. Razumno bi bilo očekivati da je sada novo optimalno rješenje dato formulama $\mathbf{x}_B' = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}'$ i $\mathbf{x}_N' = 0$. Tako će zaista i biti, *ukoliko je ovako dobijeno rješenje dopustivo*, odnosno ako je $\mathbf{x}_B' \ge 0$ (ovo u suštini znači da se *optimalna baza nije promijenila*). Dakle, ukoliko je ispunjen uvjet $\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}' \ge 0$, formula $\mathbf{x}_B' = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}'$ nam omogućava da odredimo *novo optimalno rješenje*. Kasnije ćemo vidjeti šta činiti ako ovaj uvjet *nije ispunjen*.

Na prvi pogled, izgleda da je za primjenu prethodne formule neophodno izračunati inverznu matricu $\mathbf{A}_B^{-1}$ matrice $\mathbf{A}_B$. Međutim, matrica $\mathbf{A}_B^{-1}$ se *krije u simpleks tabeli koja odgovara optimalnom rješenju, te je uopće ne treba računati*! Tačnije, matricu $\mathbf{A}_B^{-1}$ čine *one kolone u optimalnoj simpleks tabeli koje odgovaraju promjenljivim koje su bile bazne promjenljive u početnoj simpleks tabeli*. Ova neočekivana činjenica direktna je posljedica ***Gauss-Jordanovog metoda za računanje inverzne matrice***. Prema ovom metodu, poznatom iz linearne algebre, ukoliko se proizvoljna kvadratna matrica **M** proširi jediničnom matricom **I** do matrice (**M I**), i ukoliko se na tako proširenu matricu primjenjuju elementarne transformacije sa redovima sve dok se na mjestu matrice **M** ne pojavi jedinična matrica, tada će se na mjestu gdje se nalazila jedinična matrica **I** pojaviti *inverzna matrica* $\mathbf{M}^{-1}$ matrice **M**. Drugim riječima, elementarne transformacije sa redovima prevode matricu oblika (**M I**) u matricu oblika ($\mathbf{I}\ \mathbf{M}^{-1}$). S obzirom da u početnoj simpleks tabeli kolone koje odgovaraju *početnoj bazi* tvore jediničnu matricu, dok u optimalnoj simpleks tabeli jediničnu matricu tvore kolone koje odgovaraju *optmalnoj bazi*, i s obzirom da smo iz iteracije u iteraciju vršili upravo elementarne transformacije sa redovima, slijedi da je u optimalnoj simpleks tabeli matrica obrazovana od kolona koje odgovaraju početnoj bazi *inverzna* matrici $\mathbf{A}_B$ obrazovanoj od kolona koje su u početnoj simpleks tabeli odgovarale optimalnoj bazi (dakle, to je upravo matrica $\mathbf{A}_B^{-1}$). Slijedi da se matrica $\mathbf{A}_B^{-1}$ može prosto očitati iz optimalne simpleks tabele, tako da je novo optimalno rješenje lako naći korištenjem formule $\mathbf{x}_B' = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}'$, pod uvjetom da je $\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}' \ge 0$.

- ***Primjer*** : Dat je problem linearnog programiranja

$$\arg\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 + 3x_2 &\le 35 \\ x_1 \quad\quad &\le 20 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$$

Ovaj problem je sveden na normalni oblik uvođenjem izravnavajućih promjenljivih x_3, x_4 i x_5 i nakon tri iteracije simpleks metoda, dobijena je sljedeća (optimalna) simpleks tabela iz koje je očitano optimalno rješenje $x_1 = 20$, $x_2 = 5$, $x_3 = 20$, $x_4 = 0$ i $x_5 = 0$, uz optimalnu vrijednost funkcije cilja $Z = 55$:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	5	0	1	0	1/3	–1/3
x_1	20	1	0	0	0	1
x_3	20	0	0	1	–1/3	4/3
	–55	0	0	0	–1	–1

Naknadno je došlo do promjene koeficijenata sa desne strane ograničenja na vrijednosti $b_1 = 10$, $b_2 = 25$ i $b_3 = 15$. Odrediti novo optimalno rješenje, bez rješavanja problema ispočetka.

Da bismo bolje shvatili suštinu, trebalo bi ipak sagledati kako izgleda normalni oblik ovog problema. Nakon uvođenja izravnavajućih promjenljivih x_3, x_4 i x_5, problem dobija oblik:

$$\arg\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

p.o.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 5 \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 35 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 20 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0$$

Optimalna baza je B = (x_2, x_1, x_3). Dakle, matricu $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ čine koeficijenti ograničenja koji su se u polaznom problemu nalazili uz promjenljive x_2, x_1 i x_3 (tim redom):

$$\mathbf{A}_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sad nam je potrebna njena inverzna matrica $\mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}$, koju možemo direktno očitati iz optimalne simpleks tabele, uzimajući kolone koje odgovaraju promjenljivim koje su činile *početnu bazu*, a to su x_3, x_4 i x_5 (tim redom):

$$\mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Nakon što se vektor **b** zamijeni novim vektorom $\mathbf{b}' = (10, 25, 15)^\mathrm{T}$, pokušajmo odrediti novo optimalno rješenje primjenom formule $\mathbf{x}_\mathrm{B}' = \mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{b}'$:

$$\mathbf{x}_\mathrm{B}' = \mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 15 \\ 65/3 \end{pmatrix}$$

Kako je $\mathbf{x}_\mathrm{B}' \ge 0$, to je novodobijeno rješenje *dopustivo*, tako da ono predstavlja novo optimalno rješenje. Dakle, novo optimalno rješenje je $x_1' = 15$, $x_2' = 10/3$, $x_3' = 10/3$, $x_4' = 0$ i $x_5' = 0$. Nova optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $Z' = 2x_1' + 3x_2' = 40$. Ovo je posve u skladu sa analizom dobijenom preko optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih. Zaista, promjene koeficijenata sa desne strane u ograničenjima iznose redom $\Delta b_1 = 10 - 5 = 5$, $\Delta b_2 = 25 - 35 = -10$ i $\Delta b_3 = 15 - 20 = -5$. Stoga bi promjena optimalne vrijednosti funkcije cilja trebala iznositi

$$\Delta Z = \Delta b_1\, y_1 + \Delta b_2\, y_2 + \Delta b_3\, y_3 = 5 \cdot 0 + (-10) \cdot 1 + (-5) \cdot 1 = -15$$

te bi nova vrijednost funkcije cilja trebala biti $Z' = Z + \Delta Z = 55 - 15 = 40$, kao što i jeste.

U slučaju da ne vrijedi $\mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{b}' \ge 0$, rješenje dobijeno primjenom formule $\mathbf{x}_\mathrm{B}' = \mathbf{A}_\mathrm{B}^{-1}\,\mathbf{b}'$ *neće biti dopustivo*, pa samim tim pogotovo ne može biti optimalno. Međutim, nije teško vidjeti da će ono biti *dualno dopustivo* (što se može zaključiti prateći *dokaz svojstva jake dualnosti*), odnosno ovako formirano rješenje je *superoptimalno*. Stoga je moguće u optimalnoj simpleks tabeli zamijeniti elemente u koloni koja odgovara vektoru **b** (u kojoj se u optimalnoj simpleks tabeli nalaze optimalne vrijednosti baznih promjenljivih) sa vrijednostima dobijenim pomoću formule $\mathbf{x}_B' = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}'$. Kako tako dobijena simpleks tabela odgovara nekom *superoptimalnom baznom rješenju*, možemo je iskoristiti kao *polaznu tabelu za dualni simpleks metod* i dualnim simpleks metodom dovršiti nalaženje optimalnog rješenja. Tipično će na ovaj način trebati *mnogo manje iteracija* nego da problem rješavamo ispočetka klasičnim simpleks metodom, jer krećemo od rješenja koje je “mnogo bliže” optimalnom nego polazno rješenje od kojeg tipično krećemo u klasičnom simpleks metodu (koordinatni početak). Naravno, da bismo kompletirali simpleks tabelu, treba preračunati i novu (super)optimalnu vrijednost funkcije cilja Z' kakva bi slijedila iz ovakvog superoptimalnog baznog rješenja.

- ***Primjer***: U problemu iz prethodnog primjera naknadno je došlo do promjene koeficijenata sa desne strane ograničenja na nove vrijednosti $b_1 = 5$, $b_2 = 20$ i $b_3 = 26$. Odrediti novo optimalno rješenje, bez rješavanja problema ispočetka.

Probajmo prvo vidjeti šta ćemo dobiti primjenom formule $\mathbf{x}_B' = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}'$ uzimajući da novi vektor $\mathbf{b}'$ koji mijenja vektor $\mathbf{b}$ glasi $\mathbf{b}' = (5, 20, 26)^T$:

$$\mathbf{x}_B' = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 26 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Vidimo da se ovo rješenje *ne može prihvatiti*, jer ne zadovoljava uvjet $\mathbf{x}_B' \ge 0$. Stoga ćemo upisati ovako dobijenu vrijednost za $\mathbf{x}_B'$ u optimalnu simpleks tabelu u kolonu u kojoj bi se trebale nalaziti optimalne vrijednosti baznih promjenljivih. Za kompletiranje simpleks tabele trebaće nam i vrijednost $Z' = 2x_1' + 3x_2' = 2 \cdot 26 - 3 \cdot (-2) = 46$ (ne smijemo zaboraviti da je redoslijed baznih promjenljivih x_2, x_1, x_3). Na taj način dolazimo do sljedeće simpleks tabele, koja je *nepovoljna za primjenu običnog simpleks metoda* (zbog nedopustivosti, odnosno negativne vrijednosti za x_2), ali je s druge strane *pogodna za primjenu dualnog simpleks metoda*:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	–2	0	1	0	1/3	–1/3
x_1	26	1	0	0	0	1
x_3	33	0	0	1	–1/3	4/3
	–46	0	0	0	–1	–1
						–1/(–1/3) =3

Prema dualnom simpleks metodu, iz baze izlazi promjenljiva x_2. Jedini kandidat za ulazak u bazu je promjenljiva x_5 (tako da odgovarajući količnik nije bilo ni potrebno računati, jer alternative nema). Transformacijom tabele radi prilagođavanja novoj bazi dobijamo sljedeću simpleks tabelu:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	6	0	–3	0	–1	1
x_1	20	1	3	0	1	0
x_3	25	0	4	1	1	0
	–40	0	–3	0	–2	0

Već nakon jedne iteracije, dobili smo rješenje koje je *dopustivo*, tako da je prema dualnom simpleks metodu ono ujedno i optimalno. Dakle, novo optimalno rješenje je $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 25$, $x_4 = 0$ i $x_5 = 6$, dok je nova optimalna vrijednost funkcije cilja $Z = 40$.

Istražimo još *kako možemo istražiti u kojim granicama se mogu mijenjati koeficijenti sa desne strane ograničenja a da bi analiza preko optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih bila valjana*. Već smo rekli da je takva analiza valjana sve dok optimalna baza i dalje ostaje optimalna, a to će biti sve dok je novo rješenje $\mathbf{x}_B' = \mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}'$ dobijeno na osnovu *postojeće baze* i dalje dozvoljeno. Ukoliko pretpostavimo da se vektor $\mathbf{b}$ promijenio za iznos $\Delta\mathbf{b}$, uvjet $\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}' \ge 0$ postaje $\mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) \ge 0$ odnosno $\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b} \ge -\mathbf{A}_B^{-1}\Delta\mathbf{b}$. Kako je $\mathbf{A}_B^{-1}\,\mathbf{b}$ zapravo *postojeće optimalno bazno rješenje* $\mathbf{x}_B$, ovaj uvjet se može zapisati kao $\mathbf{A}_B^{-1}\Delta\mathbf{b} \ge -\mathbf{x}_B$. Dakle, sve dok vektor promjena $\Delta\mathbf{b}$ zadovoljava ovaj uvjet, optimalna baza ostaje optimalna i analiza preko optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih je valjana. Treba napomenuti da iz $\mathbf{A}_B^{-1}\Delta\mathbf{b} \ge -\mathbf{x}_B$ *ne slijedi* $\Delta\mathbf{b} \ge -\mathbf{A}_B\,\mathbf{x}_B$ kako bi neko mogao *brzopleto zaključiti*, jer se nejednakosti *ne smiju množiti matricama*.

➢ ***Primjer*** : U problemu iz prethodnog primjera ispitati u kojim se granicama mogu mijenjati koeficijenti sa desne strane ograničenja a da optimalna baza ostane optimalna i da analiza preko optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih bude valjana. Posebno istražiti u kojim granicama se može mijenjati koeficijent sa desne strane trećeg ograničenja ($x_1 \le 20$) ukoliko se pretpostavi da se ostali koeficijenti ne mijenjaju.

Pretpostavimo da se koeficijenti sa desne strane ograničenja mijenjaju za neke iznose Δb_1, Δb_2 i Δb_3, tako da je vektor promjena $\Delta\mathbf{b} = (\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3)^T$. Uvjet $\mathbf{A}_B^{-1}\Delta\mathbf{b} \ge -\mathbf{x}_B$ sada postaje

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix} \ge -\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Raspisano, ova vektorska nejednakost svodi se na sljedeće nejednakosti:

$$(1/3)\,\Delta b_2 - (1/3)\,\Delta b_3 \ge -5$$
$$\Delta b_2 \ge -20$$
$$\Delta b_1 - (1/3)\,\Delta b_2 + (4/3)\,\Delta b_3 \ge -20$$

Ove nejednakosti se mogu malo "srediti" i dovesti na oblik:

$$\Delta b_2 \ge -20$$
$$\Delta b_3 \le \Delta b_2 + 15$$
$$\Delta b_1 \ge (\Delta b_2 - 4\,\Delta b_3)\,/\,3 - 20$$

Sve dok iznosi Δb_1, Δb_2 i Δb_3 zadovoljavaju ove nejednakosti, optimalna baza ostaće optimalna i analiza preko optimalnih vrijednosti dualnih promjenljivih biće valjana. Specijalno, ako se mijenja samo koeficijent b_3, tada je $\Delta b_1 = 0$ i $\Delta b_2 = 0$, pa gornje nejednkakosti postaju $-(1/3)\,\Delta b_3 \ge -5$ i $(4/3)\,\Delta b_3 \ge -20$, odnosno $-15 \le \Delta b_3 \le 15$. Dakle, sve dok se koeficijent $b_3 = 20$ kreće u granicama od $20 - 15 = 5$ do $20 + 15 = 35$, neće doći do promjene optimalne baze, uz pretpostavku da se ostali koeficijenti ne mijenjaju.

Dodavanje novog ograničenja

Dualni simpleks metod je također vrlo koristan ukoliko se *nakon rješavanja nekog problema linearnog programiranja naknadno pojavi novo ograničenje*. Ukoliko nađeno optimalno rješenje zadovoljava i novododano ograničenje, tako da dotadašnje optimalno rješenje i dalje ostaje dopustivo, jasno je i da će ono i dalje biti optimalno, tako da nam novo ograničenje ne pravi nikakav problem. Problem međutim nastaje ukoliko dodatašnje optimalno rješenje *ne zadovoljava novo ograničenje*. Možemo simpleks tabelu proširiti redom koji predstavlja dodatno ograničenje i kolonom koja odgovara novoj baznoj promjenljivoj koju uvodi to ograničenje. Elementarnim transformacijama nad novododanim redom može se postići da tako proširena simpleks tabela predstavlja bazno rješenje. Međutim, takvo bazno rješenje *nikada neće biti dopustivo* (što je lako pokazati), ali će uvijek biti *dualno dopustivo* (s obzirom da posljednji red simpleks tabele ostaje nepromijenjen), tako da predstavlja dobru polaznu osnovu za dualni simpleks metod. I ovdje vrijedi da će na ovaj način tipično trebati *mnogo manje iteracija* nego da modificirani problem rješavamo ispočetka klasičnom simpleks metodom. Ovo je najbolje ilustrirati na konkretnom primjeru.

➢ ***Primjer*** : U prvom primjeru iz prethodnog odjeljka, nakon što je problem riješen i nađeno optimalno rješenje $x_1 = 20$, $x_2 = 5$, $x_3 = 20$, $x_4 = 0$ i $x_5 = 0$, naknadno se pojavilo dodatno ograničenje $x_2 \ge 10$. Odrediti novo optimalno rješenje, bez rješavanja modificiranog problema ispočetka.

Kako je ovo ograničenje tipa "veće ili jednako", pomnožićemo ga sa –1 da dobijemo ograničenje tipa "manje ili jednako", što radimo da bismo se prilagodili potrebama dualne simpleks metode. Time dobijamo ograničenje $-x_2 \le -10$. Uvođenjem dopunske promjenljive x_6, ovo ograničenje možemo napisati u obliku

$$-x_2 + x_6 = -10$$

Sada ćemo optimalnu simpleks tabelu proširiti novim redom koji će odgovarati ovom ograničenju i novom kolonom koja odgovara novoj promjenljivoj x_6. Uzećemo da je upravo x_6 nova *bazna promjenljiva* (pored već postojećih). Na taj način dobijamo sljedeću simpleks tabelu:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	5	0	1	0	1/3	–1/3	0
x_1	20	1	0	0	0	1	0
x_3	20	0	0	1	–1/3	4/3	0
x_6	–10	0	–1	0	0	0	1
	–55	0	0	0	–1	–1	0

Ova simpleks tabela nije pogodna ni za jednu formu simpleks algoritma, jer *ne predstavlja bazno rješenje*. Zaista, da bi ova tabela predsavljala bazno rješenje, u koloni koja odgovara baznoj promjenljivoj x_2 smije biti samo jedna jedinica a svi ostali elementi moraju biti nule. Međutim, mi u toj koloni u četvrtom redu imamo koeficijent –1 (ostale kolone koje odgovaraju baznim promjenljivim su u ovom primjeru korektne). Stoga ćemo na red koji odgovara baznoj promjenljivoj x_6 dodati red koji odgovara baznoj promjenljivoj x_2. Time ćemo dobiti sljedeću simpleks tabelu, koja *predstavlja bazno rješenje*. Ovo bazno rješenje očigledno *nije dopustivo*, ali je *dualno dopustivo* (odnosno, ono je *superoptimalno*). Stoga je ono pogodno za primjenu dualnog simpleks metoda:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	5	0	1	0	1/3	–1/3	0
x_1	20	1	0	0	0	1	0
x_3	20	0	0	1	–1/3	4/3	0
x_6	–5	0	0	0	1/3	–1/3	1
	–55	0	0	0	–1	–1	0
						–1/(–1/3) =3	

Jedini kandidat za ispadanje iz baze je promjenljiva x_6 (koja će i napustiti bazu), dok je jedini kandidat za ulazak u bazu promjenljiva x_5. Nakon preračunavanja tabele u skladu sa novom bazom, dolazimo do sljedeće simpleks tabele:

Baza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	0	1	0	0	0	–1
x_1	5	1	0	0	1	0	3
x_3	0	0	0	1	1	0	4
x_5	15	0	0	0	–1	1	–3
	–40	0	0	0	–2	0	–3

I u ovom primjeru smo nakon samo jedne obavljene iteracije došli do novog optimalnog rješenja, koje glasi $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 15$ i $x_6 = 0$. Usput, primijetimo da je novo optimalno rješenje *degenerirano*, jer u njemu bazna promjenljiva x_3 ima vrijednost 0.