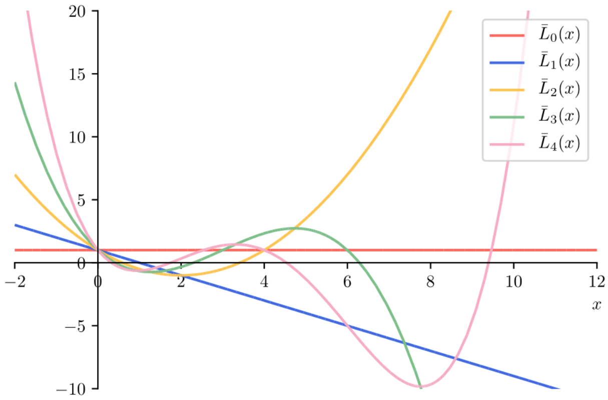
第 1 章

Laguerre 多項式



1.1 Laguerre 多項式

Laguerre 多項式自体は物理への応用に直接用いられることは少なく、むしろ次節の Laguerre 陪多項式の導入のために議論されると考えたほうが良い。

公式集

■母関数

$$g(t,x)=\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x) \tag{1.1.1}$$

■$x=0$ での特殊値

$$L_n(0)=n! \tag{1.1.2}$$

■Rodrigues の公式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}) \tag{1.1.3}$$

■一般項

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!}x^i \tag{1.1.4}$$

■漸化式

$$L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x) \tag{1.1.5}$$

■微分漸化式

$$L'_n(x)-nL'_{n-1}(x)=-nL_{n-1}(x) \tag{1.1.6}$$

■下降演算子

$$\left(x\frac{d}{dx}-n\right)L_n(x)=-n^2L_{n-1}(x) \tag{1.1.7}$$

■上昇演算子

$$\left(x\frac{d}{dx}+n+1-x\right)L_n(x)=L_{n+1}(x) \tag{1.1.8}$$

■微分方程式

$$x\frac{d^2L_n(x)}{dx^2}+(1-x)\frac{dL_n(x)}{dx}+nL_n(x)=0 \tag{1.1.9}$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{d}{dx}L_n(x)\right]+ne^{-x}L_n(x)=0 \tag{1.1.10}$$

表 1.1 Laguerre 多項式 $L_n(x)$

$L_0(x)$	$=$	1
$L_1(x)$	$=$	$-x+1$
$L_2(x)$	$=$	x^2-4x+2
$L_3(x)$	$=$	$-x^3+9x^2-18x+6$
$L_4(x)$	$=$	$x^4-16x^3+72x^2-96x+24$
$L_5(x)$	$=$	$-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$

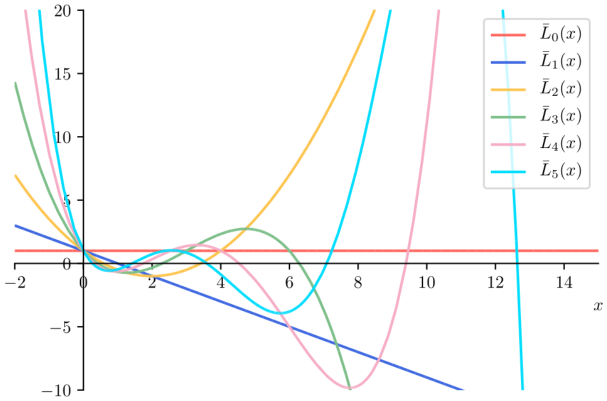


図 1.1 スケール化された Laguerre 多項式 $\bar{L}_n(x) = L_n(x)/n!$

■正規直交性

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = (n!)^2 \delta_{mn} \tag{1.1.11}$$

証明

■母関数 $\Longrightarrow$ $x=0$ での特殊値 母関数 (1.1.1) の両辺に $x=0$ を代入すると

$$g(t,0) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} L_n(0) \tag{1.1.12}$$

ここで (1.1.12) の中辺は等比級数の和の公式から $\sum_{n=0}^\infty t^n$ であるから、(1.1.12) の右辺と t^n $(n \geq 0)$ の係数を比較して、次が得られる。

$$L_n(0) = n!$$

□

■母関数 $\Longrightarrow$ 一般項 母関数の式 (1.1.1) の中辺を $\exp(x) = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!} x^i$ を用いて展開すると、

$$g(t,x) = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{1-t} \frac{1}{i!} \left(-\frac{xt}{1-t}\right)^i = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{x^i}{i!} \frac{t^i}{(1-t)^{i+1}}$$

公式[*1]：

$$(1-t)^{-N} = \sum_{m=0}^\infty \frac{(N+m-1)!}{(N-1)!} \frac{t^m}{m!}$$

から

$$\begin{aligned} g(t,x) &= \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{x^i}{i!} t^i \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+i)!}{i!} \frac{t^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{(m+i)!}{(i!)^2\, m!} x^i t^{m+i} \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

[*1] $f(t) = (1-t)^{-N}$ とおくと、$f'(t) = N(1-t)^{-N-1}$, $f''(t) = N(N+1)(1-t)^{-N-2}, \ldots, f^{(m)}(t) = \frac{(N+m-1)!}{(N-1)!}(1-t)^{-N-m}$ であるので、$t=0$ の周りで Taylor 展開すると

$$f(t) = \frac{1}{(1-t)^N} = \sum_{m=0}^\infty f^{(m)}(0) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^\infty \frac{(N+m-1)!}{(N-1)!} \frac{1}{m!} t^m \tag{1.1.13}$$

なお、

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^n = \frac{n!}{(n-\alpha)!} x^{n-\alpha} \tag{1.1.14}$$

ここで $m+i$ を新たに n と置き換えて m, i についての二重和を n, i についての二重和に取りかえる。m について 0 から ∞ まで、i について 0 から ∞ まで加えていくとき、二重和は図 1.2 の黒丸で表した格子点すべてについて実行される。$n = m+i$ であるとき、$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対応する全格子点は図 1.2 で示した各直線上の点として捉えることができる。したがって図 1.2 より、(1.1.15) における二重和は、n について 0 から ∞ まで、i について 0 から n までの二重和に取りかえられることになる。よって、

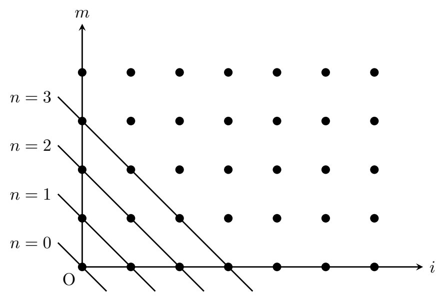


図 1.2　二重和の取りかえ方

$$g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{(i!)^2(n-i)!}x^i t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{t^n}{n!}(-1)^i\frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!}x^i t^n$$

母関数の右辺 (1.1.1) と比較して

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!}x^i$$

□

■Rodrigues の公式 $\Longrightarrow$ 母関数　Cauchy の積分公式 (**??**) を用いて Rodrigues の公式 (1.1.3) を積分形式に書き換えると、

$$L_n(x) = e^x\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\xi^n e^{-\xi}}{(\xi-x)^{n+1}}d\xi$$

積分経路 C は $\xi = x$ の周りを正の方向に回るようにとる。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\cdot e^x\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\xi^n e^{-\xi}}{(\xi-x)^{n+1}}d\xi \\ &= e^x\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{-\xi}}{\xi-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi t}{\xi-x}\right)^n d\xi\end{aligned}$$

級数が収束するために $|t|$ が十分小さいものとすると、等比級数の和の公式から

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x) &= e^x\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{-\xi}}{\xi-x}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi t}{\xi-x}}d\xi \\ &= \frac{e^x}{1-t}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{-\xi}}{\xi-\frac{x}{1-t}}d\xi\end{aligned}$$

被積分関数の極 $\xi = \frac{x}{1-t}$ が、t が十分小さく、C の内部にあるとすると、留数定理より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x) = \frac{e^x}{1-t}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\left[e^{-\xi}\right]_{\xi=\frac{x}{1-t}} = \frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)$$

□

■Rodrigues の公式 $\Longrightarrow$ 一般項　Rodrigues の公式 (1.1.3) を Leibniz の公式[*2] で展開する。

$$\begin{aligned}L_n(x) &= e^x\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}x^n\right)\left(\frac{d^i}{dx^i}e^{-x}\right) \\ &= e^x\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{n!}{i!}x^i\cdot(-1)^i e^{-x} \qquad \text{((1.1.14) を用いた)} \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!}x^i\end{aligned}$$

□

[*2] **Leibniz の公式**

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x) \tag{1.1.16}$$

■母関数 $\Longrightarrow$ 漸化式　母関数 (1.1.1) の左, 右辺を t で偏微分して

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}L_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_{n+1}(x) \tag{1.1.17}$$

一方、母関数 (1.1.1) の左, 中辺の対数をとると、

$$\log g(t,x)+\log(1-t)+\frac{xt}{1-t}=0$$

両辺を t で偏微分すると、

$$\frac{1}{g(t,x)}\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}-\frac{1}{1-t}+\frac{x}{(1-t)^2}=0$$
$$\therefore (1-t)^2\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}+(x-1+t)g(t,x)=0$$

これに母関数の式 (1.1.1) の右辺および (1.1.17) を代入すると、

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_{n+1}(x)+(x-1+t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x)=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_{n+1}(x)-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}L_{n+1}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+2}}{n!}L_{n+1}(x)+(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}L_n(x)=0$$

ここで $\frac{1}{(\text{負の整数})!}=0$ と約束して t の指数をそろえると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_{n+1}(x)-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}L_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n-2)!}L_{n-1}(x)+(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}L_{n-1}(x)=0$$
$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left[L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)\right]=0$$

t^n $(n\geq 0)$ の係数を比較することで次を得る:

$$L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$$

□

■母関数 $\Longrightarrow$ 微分漸化式　母関数の式 (1.1.1) の両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}=-\frac{t}{1-t}g(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L'_n(x)$$

$g(t,x)$ に母関数の式 (1.1.1) の右辺を代入すると、

$$-\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L'_n(x)$$
$$\therefore -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}L_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L'_n(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!}L'_n(x)$$

$\frac{1}{(\text{負の整数})!}=0$ と約束して t の指数をそろえると

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}L_{n-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}L'_n(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!}L'_{n-1}(x)$$
$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left[L'_n(x)-nL'_{n-1}(x)+nL_{n-1}(x)\right]=0$$

t^n $(n\geq 0)$ の係数を比較することで次を得る。

$$L'_n(x)-nL'_{n-1}(x)=-nL_{n-1}(x)$$

□

■漸化式, 微分漸化式 $\Longrightarrow$ 下降演算子　下降演算子の式は、漸化式 (1.1.5) と微分漸化式 (1.1.6) を組み合わせることで示すことができる。まず漸化式 (1.1.5) の両辺を x で微分した

$$L'_{n+1}(x) = -L_n(x) + (2n+1-x)L'_n(x) - n^2 L'_{n-1}(x)$$

と (1.1.6) から $L'_{n-1}(x)$ を消去すると、

$$L'_{n+1}(x) - (n+1-x)L'_n(x) + L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \tag{1.1.18}$$

次に微分漸化式 (1.1.6) で $n \to n+1$ と書き換えると

$$L'_{n+1}(x) - (n+1)L'_n(x) = -(n+1)L_n(x) \tag{1.1.19}$$

得られた (1.1.18), (1.1.19) 式から $L'_{n+1}(x)$ を消去すると

$$xL'_n(x) - nL_n(x) = -n^2 L_{n-1}(x) \qquad \therefore \left(x\frac{d}{dx} - n \right) L_n(x) = -n^2 L_{n-1}(x)$$

□

■漸化式, 下降演算子 $\Longrightarrow$ 上昇演算子　漸化式 (1.1.5) と下降演算子 (1.1.7) から $-n^2 L_{n-1}(x)$ を消去することで直ちに

$$\left(x\frac{d}{dx} + n + 1 - x \right) L_n(x) = L_{n+1}(x)$$

□

■昇降演算子 $\Longrightarrow$ 微分方程式　下降演算子の式 (1.1.7) で $n \to n+1$ とした式

$$\left[x\frac{d}{dx} - (n+1) \right] L_{n+1}(x) = -(n+1)^2 L_n(x) \tag{1.1.20}$$

を用いるために、上昇演算子の式 (1.1.8) の両辺に $\left[x\frac{d}{dx} - (n+1) \right]$ を左から作用させると、

$$\left[x\frac{d}{dx} - (n+1) \right] \left(x\frac{d}{dx} + n + 1 - x \right) L_n(x) = \left(x\frac{d}{dx} - (n+1) \right) L_{n+1}(x)$$

演算子 f について $\left(\frac{d}{dx}\right) f = \frac{df}{dx} + f\frac{d}{dx}$ であることなどに注意して左辺を展開し、右辺に (1.1.20) を代入して整理すると

$$\left[x^2\frac{d^2}{dx^2} + x(1-x)\frac{d}{dx} + nx \right] L_n(x) = 0 \qquad \therefore x\frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0$$

また、この方程式は次のようにも変形できる。

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{d}{dx}L_n(x) \right] + ne^{-x}L_n(x) = 0$$

□

■母関数 $\Longrightarrow$ 直交性　母関数 (1.1.1) の右辺から

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} g(s,x) g(t,x) dx &= \int_0^\infty e^{-x} \left(\sum_{m=0}^\infty \frac{s^m}{m!} L_m(x) \right) \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} L_n(x) \right) dx \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{s^m t^n}{m! n!} \int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) \, dx \qquad (1.1.21)\end{aligned}$$

一方、母関数 (1.1.1) の中辺から

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} g(s,x) g(t,x) dx &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{1-s} \exp\left(-\frac{xs}{1-s}\right) \frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) dx \\
&= \frac{1}{(1-s)(1-t)} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)} x\right\} dx \\
&= -\frac{1}{1-st} \left[\exp\left\{-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)} x\right\}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{1-st} \\
&= \sum_{n=0}^\infty s^n t^n \qquad (\text{等比級数の和の公式より}) \\
&= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{s^m t^n}{m!n!} (n!)^2 \, \delta_{mn} \qquad (1.1.22)
\end{aligned}
$$

(1.1.21), (1.1.22) を比較することで次を得る。

$$
\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) \, dx = (n!)^2 \, \delta_{mn}
$$

1.2 Laguerre 陪多項式

Laguerre 陪多項式は水素原子の Schrödinger 方程式を球座標 (r, θ, φ) で解く際に、解の r 依存性として現れる多項式である (問題 [3-1]])。Laguerre 陪多項式 $L_n^k(x)$ の定義は実に多くの流儀がある。さらに当然であるが流儀によってそれが満たす公式の形も変わってしまう。これでは議論の術がなくなってしまうので、本稿では Laguerre 多項式 $L_n(x)$ の k 階導関数として Laguerre 陪多項式 $L_n^k(x)$ を定義することにする[*3]。どれかひとつの流儀を理解しておけば、他の流儀における公式は容易に類推することができる。なお、Laguerre 陪多項式についての公式で $k = 0$ とすると Laguerre 多項式についての公式と一致することを強調しておく。

公式集

■定義

$$
L_n^k(x) \equiv \frac{d^k}{dx^k} L_n(x) \qquad (1.2.1)
$$

■Rodrigues の公式

$$
L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \qquad (1.2.2)
$$

■Rodrigues の公式 II

$$
L_n^k(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) \qquad (1.2.3)
$$

■一般項

$$
L_n^k(x) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{k+i} \frac{(n!)^2}{i!(i+k)!(n-k-i)!} x^i \qquad (1.2.4)
$$

■母関数

$$
g(t,x) = \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=k}^\infty \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) \qquad (1.2.5)
$$

■$x = 0$ における特殊値

$$
L_n^k(0) = (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!k!} \qquad (1.2.6)
$$

[*3] J.J.Sakurai『現代の量子力学 (上, 下)』などの量子力学の教科書や多くの量子化学の教科書ではこの流儀が採用されている。

表 1.2　Laguerre 陪多項式 $L_n^k(x)$

$L_1^1(x)$	$= -1$
$L_2^1(x)$	$= 2x-2$
$L_2^2(x)$	$= 2$
$L_3^1(x)$	$= -3x^2+18x-18$
$L_3^2(x)$	$= -6x+18$
$L_3^3(x)$	$= -6$
$L_4^1(x)$	$= 4x^3-48x^2+144x-96$
$L_4^2(x)$	$= 12x^2-96x+144$
$L_4^3(x)$	$= 24x-96$
$L_4^4(x)$	$= 24$

■漸化式

$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x)+(x+k-2n-1)L_n^k(x)+n^2L_{n-1}^k(x)=0 \tag{1.2.7}$$

■微分漸化式

$$\frac{dL_n^k(x)}{dx}=n\left[\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx}-L_{n-1}^k(x)\right] \tag{1.2.8}$$

■下降演算子

$$\left(x\frac{d}{dx}-n+k\right)L_n^k(x)=-n^2L_{n-1}^k(x) \tag{1.2.9}$$

■上昇演算子

$$\left(x\frac{d}{dx}-x+n+1\right)L_n^k(x)=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x) \tag{1.2.10}$$

■微分方程式

$$x\frac{d^2L_n^k(x)}{dx^2}+(k+1-x)\frac{dL_n^k(x)}{dx}+(n-k)L_n^k(x)=0 \tag{1.2.11}$$

■自己随伴形

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k+1}e^{-x}\frac{dL_n^k(x)}{dx}\right)+(n-k)x^ke^{-x}L_n^k(x)=0 \tag{1.2.12}$$

■直交性

$$\int_0^\infty x^ke^{-x}L_m^k(x)L_n^k(x)dx=\frac{(n!)^3}{(n-k)!}\delta_{mn} \tag{1.2.13}$$

証明

■Rodrigues の公式 $\Longrightarrow$ 一般項　Rodrigues の公式 (1.2.2) は $L_n^k(x)$ の定義 (1.2.1) にそのまま $L_n(x)$ の Rodrigues の公式 (1.1.3) を代入したものである。したがって、定義 (1.2.1) にしたがい、$L_n(x)$ の一般項 (1.1.4) の k 階導関数が (1.2.4) になることを確認すればよい。

$$\begin{aligned}
L_n^k(x)&=\frac{d^k}{dx^k}L_n(x)\overset{(1.1.4)}{=}\frac{d^k}{dx^k}\sum_{i=0}^n(-1)^i\frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!}x^i\\
&=\sum_{i=k}^n(-1)^i\frac{(n!)^2}{(i!)^2(n-i)!}\cdot\frac{i!}{(i-k)!}x^{i-k} && ((1.1.14)\text{ を用いた})\\
&=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{k+i}\frac{(n!)^2}{i!(i+k)!(n-k-i)!}x^i && (i\to k+i\text{ と変換した})
\end{aligned}$$

□

■Rodrigues の公式 II $\Longrightarrow$ 一般項 [*4]　Rodrigues の公式 II (1.2.3) を Leibniz の公式 (1.1.16) により展開する。

$$\begin{aligned}
L_n^k(x) &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \left(\frac{d^{n-k-i}}{dx^{n-k-i}} x^n \right) \left(\frac{d^i}{dx^i} e^{-x} \right) \\
&= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} \cdot \frac{n!}{(i+k)!} x^{i+k} \cdot (-1)^i e^{-x} \qquad \text{((1.1.14) を用いた)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{k+i} \frac{(n!)^2}{i!(i+k)!(n-k-i)!} x^i
\end{aligned}$$

□

■Rodrigues の公式 II $\Longrightarrow$ 母関数　Rodrigues の公式 II(1.2.3) から、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \cdot (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} e^x x^{-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) \\
&= (-1)^k e^x x^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^n e^{-x}) \\
&= (-1)^k e^x x^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k} e^{-x})
\end{aligned}$$

経路 C を、点 $\xi = x$ の周りを正の向きに回るものとすると、Cauchy の積分公式 (**??**) より

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= (-1)^k e^x x^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^{n+k} e^{-\xi}}{(\xi - x)^{n+1}} d\xi \\
&= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^k e^{-\xi}}{\xi - x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi t}{\xi - x} \right)^n d\xi
\end{aligned}$$

級数が収束するために $|t|$ が十分小さいものとすると、等比級数の和の公式から

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^k e^{-\xi}}{\xi - x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi t}{\xi - x}} d\xi \\
&= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^k e^{-\xi}}{\xi - \frac{x}{1-t}} d\xi
\end{aligned}$$

被積分関数の極 $\xi = \frac{x}{1-t}$ が、t が十分小さく、C の内部にあるとすると、留数定理より

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) &= (-1)^k e^x x^{-k} \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left[\xi^k e^{-\xi} \right]_{\xi = \frac{x}{1-t}} \\
&= \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t} \right)
\end{aligned}$$

□

■母関数 $\Longrightarrow$ $x = 0$ における特殊値　母関数 (1.2.5) において $x = 0$ を代入すると、

$$g(t, 0) = \frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(0) \tag{1.2.14}$$

ここで、(1.2.14) の中辺は (1.1.13) を用いて

$$\frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}} = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!k!} t^n = (-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} t^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \cdot (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!k!}$$

となる。したがって、(1.2.14) の右辺と比較して次を得る。

$$L_n^k(0) = (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!k!}$$

[*4] Rodrigues の公式と Rodrigues の公式 II が等価であることは、両者から導かれる一般項が一致することより認めることにする。

■母関数 $\Longrightarrow$ 漸化式 母関数 (1.2.5) の左, 右辺を t で偏微分して

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n-k}{n!} t^{n-k-1} L_n^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) \tag{1.2.15}$$

一方、母関数 (1.2.5) の左, 中辺の対数をとると、

$$\log g(t,x) = -(k+1)\log(1-t) + k\log(-1) - \frac{xt}{1-t}$$

となる[*5]。両辺を t で偏微分すると、

$$\frac{1}{g(t,x)} \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \frac{k+1}{1-t} - \frac{x}{(1-t)^2}$$
$$\therefore (1-t)^2 \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \{(k+1-x) - (k+1)t\} g(t,x)$$

これに母関数 (1.2.5) の右辺および (1.2.15) を代入すると、

$$(1-t)^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) = \{(k+1-x) - (k+1)t\} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x)$$

$$\therefore \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) - 2\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k+1} L_{n+1}^k(x) + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k+2} L_{n+1}^k(x)$$
$$= (k+1-x)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) - (k+1)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k+1}}{n!} L_n^k(x)$$

$L_{k-1}^k(x) = 0$ を用いて t の指数をそろえると

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k+1}{(n+1)!} t^{n-k} L_{n+1}^k(x) - 2\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k}{n!} t^{n-k} L_n^k(x) + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n-k-1}{(n-1)!} t^{n-k} L_{n-1}^k(x)$$
$$= (k+1-x)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) - (k+1)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n-1)!} L_{n-1}^k(x)$$

$$\therefore \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{(n+1)!} \Big[(n+1-k)L_{n+1}^k(x) + (n+1)(x+k-2n-1)L_n^k(x) + (n+1)n \cdot nL_{n-1}^k(x)\Big] = 0$$

t^{n-k} $(n \geq k)$ の係数を比較することで次を得る:

$$\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) L_{n+1}^k(x) + (x+k-2n-1)L_n^k(x) + n^2 L_{n-1}^k(x) = 0$$

□

■母関数 $\Longrightarrow$ 微分漸化式 母関数 (1.2.5) の両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = -\frac{t}{1-t} g(t,x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx}$$

$g(t,x)$ に母関数 (1.2.5) の右辺を代入すると、

$$-\frac{t}{1-t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} L_n^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx}$$
$$\therefore -\sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k+1}}{n!} L_n^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k+1}}{n!} \frac{dL_n^k(x)}{dx}$$

[*5] ここで対数の真数が負になっている項 $\log(-1)$ が現れているが、これは計算を楽にするために形式的に書いていると考えればよい。それが疑問であれば、複素関数として $\log(-1) = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$ と解釈すればよい。いずれにせよ後に t で偏微分する時に消えるので憂う必要はない。

$L_{k-1}^k(x)=0$ を用いて t の指数をそろえると

$$-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{(n-1)!}L_{n-1}^k(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}\frac{dL_n^k(x)}{dx}-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{(n-1)!}\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx}$$

$$\therefore\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{n-k}}{n!}\left[\frac{dL_n^k(x)}{dx}-n\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx}+nL_{n-1}^k(x)\right]=0$$

t^{n-k} $(n\geq k)$ の係数を比較することで次を得る。

$$\frac{dL_n^k(x)}{dx}=n\left[\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx}-L_{n-1}^k(x)\right]\tag{1.2.16}$$

□

■漸化式, 微分漸化式 $\Longrightarrow$ 下降演算子　下降演算子の式は、漸化式 (1.2.7) と微分漸化式 (1.2.8) を組み合わせることで示すことができる。まず漸化式 (1.2.7) の両辺を x で微分した

$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx}+L_n^k(x)+(x+k-2n-1)\frac{dL_n^k(x)}{dx}+n^2\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx}=0$$

と (1.2.8) から $\frac{dL_{n-1}^k(x)}{dx}$ を消去すると、

$$\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx}+L_n^k(x)+(x+k-n-1)\frac{dL_n^k(x)}{dx}+n^2L_{n-1}^k(x)=0\tag{1.2.17}$$

次に (1.2.8) で $n\to n+1$ と書き換えると

$$\frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx}=(n+1)\left[\frac{dL_n^k(x)}{dx}-L_n^k(x)\right]\tag{1.2.18}$$

得られた (1.2.17), (1.2.18) から $\frac{dL_{n+1}^k(x)}{dx}$ を消去すると、

$$(n+1-k)\left[\frac{dL_n^k(x)}{dx}-L_n^k(x)\right]+L_n^k(x)+(x+k-n-1)\frac{dL_n^k(x)}{dx}+n^2L_{n-1}^k(x)=0$$

$$\therefore\left(x\frac{d}{dx}-n+k\right)L_n^k(x)=-n^2L_{n-1}^k(x)$$

□

■漸化式, 下降演算子 $\Longrightarrow$ 上昇演算子　漸化式 (1.2.7) と下降演算子 (1.2.9) から $-n^2L_{n-1}^k(x)$ を消去することで直ちに

$$\left(x\frac{d}{dx}-x+n+1\right)L_n^k(x)=\left(1-\frac{k}{n+1}\right)L_{n+1}^k(x)$$

□

■昇降演算子 $\Longrightarrow$ 微分方程式　下降演算子 (1.2.9) の両辺に左から $\left(x\frac{d}{dx}-x+n\right)$ を作用させると、左辺は

$$\begin{aligned}
&\left(x\frac{d}{dx}-x+n\right)\left(x\frac{d}{dx}-n+k\right)L_n^k(x)\\
&=\left[x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}-n+k\right)-x\left(x\frac{d}{dx}-n+k\right)+n\left(x\frac{d}{dx}-n+k\right)\right]L_n^k(x)\\
&=\left[x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}+(-n+k)x\frac{d}{dx}+(-x+n)x\frac{d}{dx}+(x-n)(n-k)\right]L_n^k(x)\\
&=\left[x\frac{d^2}{dx^2}+(k+1-x)x\frac{d}{dx}+(n-k)x-n(n-k)\right]L_n^k(x)
\end{aligned}$$

一方、右辺は上昇演算子 (1.2.10) を用いて

$$-n^2\left(x\frac{d}{dx}-x+n\right)L_{n-1}^k(x)=-n^2\left(1-\frac{k}{n}\right)L_n^k(x)=-n(n-k)L_n^k(x)$$

したがって、

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2}+(k+1-x)x\frac{d}{dx}+(n-k)x\right]L_n^k(x)=0\qquad\therefore x\frac{d^2L_n^k(x)}{dx^2}+(k+1-x)\frac{dL_n^k(x)}{dx}+(n-k)L_n^k(x)=0$$

また、この方程式は次のようにも変形できる。

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k+1}e^{-x}\frac{dL_n^k(x)}{dx}\right)+(n-k)x^ke^{-x}L_n^k(x)=0$$

□

■母関数 ⟹ 直交性　母関数 (1.2.5) の右辺から

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^ke^{-x}g(s,x)g(t,x)dx\\
&\qquad=\int_0^\infty x^ke^{-x}\left(\sum_{m=k}^\infty\frac{s^{m-k}}{m!}L_m^k(x)\right)\sum_{n=k}^\infty\frac{t^{n-k}}{n!}L_n^k(x)dx\\
&\qquad=\sum_{m=k}^\infty\sum_{n=k}^\infty\frac{s^{m-k}t^{n-k}}{m!n!}\int_0^\infty x^ke^{-x}L_m^k(x)L_n^k(x)dx
\end{aligned}\tag{1.2.19}$$

一方、母関数 (1.2.5) の中辺から

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^ke^{-x}g(s,x)g(t,x)dx\\
&\qquad=\int_0^\infty x^ke^{-x}\frac{(-1)^k}{(1-s)^{k+1}}\exp\left(-\frac{xs}{1-s}\right)\frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)dx\\
&\qquad=\frac{1}{[(1-s)(1-t)]^{k+1}}\int_0^\infty x^k\exp\left[-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right]dx
\end{aligned}$$

部分積分を k 回行うと、お釣りの項[*6] はすべて消えるので

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^ke^{-x}g(s,x)g(t,x)dx\\
&\qquad=\frac{1}{(1-s)(1-t)}\cdot\frac{k!}{(1-st)^k}\int_0^\infty\exp\left[-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right]dx\\
&\qquad=-\frac{k!}{(1-st)^{k+1}}\left[\exp\left\{-\frac{1-st}{(1-s)(1-t)}x\right\}\right]_0^\infty\\
&\qquad=\frac{k!}{(1-st)^{k+1}}\\
&\qquad=k!\sum_{n=0}^\infty\frac{(k+n)!}{k!}\frac{s^nt^n}{n!}\qquad\text{((1.1.13) を用いた)}\\
&\qquad=\sum_{n=k}^\infty\frac{n!}{(n-k)!}s^{n-k}t^{n-k}\\
&\qquad=\sum_{m=k}^\infty\sum_{n=k}^\infty\frac{s^{n-k}t^{n-k}}{m!n!}\frac{(n!)^3}{(n-k)!}\delta_{mn}
\end{aligned}\tag{1.2.20}$$

(1.2.19) と (1.2.20) を比較して次を得る。

$$\int_0^\infty x^ke^{-x}L_m^k(x)L_n^k(x)dx=\frac{(n!)^3}{(n-k)!}\delta_{mn}$$

□

[*6] ここで部分積分の公式

$$\int_a^b u'v=[uv]_a^b-\int_a^b uv'$$

における $[uv]_a^b$ をお釣りの項と呼んでいる。今回の部分積分では x^k を微分する側としており、$\alpha=1,2,\ldots$ に対して $x^\alpha e^{-x}\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}0,\ x^\alpha e^{-x}\overset{x\to0}{\longrightarrow}0$ であるゆえお釣りの項がすべて消える。